ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год шестнадцатый

№ 2 (62)

апрель - июнь 2012 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 2 (62), 2012 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2012 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.06.2012 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (62), апрель – июнь 2012 г.

Содержание

К столетию первого выпуска журнала “Математическое образование”

От редакции

К столетию выхода в 1912г. первого выпуска журнала “Математическое образование” редакция публикует ряд материалов о наиболее активных деятелях Московского Математического Кружка, который учредил это печатное издание: о председателе Кружка профессоре Болеславе Корнелиевиче Млодзеевском, первом главном редакторе журнала Иоасафе Ивановиче Чистякове, а также о товарище председателя Кружка Александре Федоровиче Гатлихе.

Приводим также интересную информацию о здании, где располагалась редакция журнала.

Заметим, что в настоящее время практически все номера первой серии журнала “Математическое образование” можно найти в Интернете, см. например,

www.mathedu.ru/journals-collections/

Б. К. Млодзеевский

(Некролог, напечатанный Д. Ф. Егоровым в журнале “Математический сборник”, Rec. Math., XXXII: 3; 1925.)

Болеслав Корнелиевич Млодзеевский родился 28 июня 1858 года в Москве. Отец его был профессором Московского Университета, по специальности — медиком, и Б. К. родился в здании университетских клиник, в то время находившихся на Рождественке.

Уже в семилетнем возрасте Б. К. лишился отца, и все его дальнейшее детство и юность протекали в стесненных материальных условиях и в атмосфере мелких повседневных забот и интересов, от которых мальчик уходил, погружаясь в чтение книг, оставшихся от покойного отца.

Десяти лет Б. К. поступил во 2-й класс Московской V гимназии, которую окончил с золотой медалью в 1876 году. В гимназии Б. К. сразу выделился своим дарованием и интересом к занятиям. Математический талант его сказался очень рано, но, наряду с математикой, он интересовался всеми предметами и, между прочим, был прекрасным знатоком древних языков и ценителем классической литературы. Эта разносторонность интересов оставалась отличительной чертой Б. К. во всю его жизнь: будучи математиком по специальности, он живо интересовался и физикой, с одной стороны, и философией — с другой, и следил внимательно за всеми выдающимися трудами в этих областях; даже более того — никакое более или менее крупное явление в области наук или искусств не проходило мимо его внимания.

Окончив гимназию, Б. К. поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского Университета, где слушал профессоров Цингера, Давидова, Бугаева, Слудекого, Столетова, Бредихина. Из числа их В. Я. Цингер имел особенно сильное влияние на Б. К. Он сразу обратил внимание на талантливого студента, и между учителем и учеником понемногу установилась самая тесная духовная связь, которая не прерывалась до самой смерти В. Я.

В 1880 году, подав сочинение на тему “Классификация плоских кривых 3-го порядка”, Б. К. окончил Университет со степенью кандидата математических наук и был оставлен при Университете для подготовления к профессорскому званию.

В начале 1883 года Б. К. сдал последний магистерский экзамен, а в начале 1885 года был утвержден в звании приват-доцента Московского Университета. С этого момента началась долголетняя и блестящая деятельность Б. К. в качестве преподавателя высшей школы. Лекции Б. К. отличались выдающейся ясностью изложения и изяществом применяемых методов и собирали всегда полную аудиторию.

В 1886 году Б. К. защитил магистерскую диссертацию: "Исследования об изгибании поверхностей", а в 1890 г. — докторскую: "О многообразиях многих измерений".

Через 4 месяца после диспута Б. К. был командирован за границу, где провел около 11 лет, работая в Цюрихе, Париже и Геттингене. Особенно много вынес Б. К. из личного общения с находившимся в то время в Геттингене знаменитым Ш в а р ц е м.

Вскоре по возвращении в Москву, в феврале 1892 г., Б. К. был назначен экстраординарным профессором и с тех пор стал принимать самое близкое участие во всей жизни Московского Университета. Он был деятельным и авторитетным членом факультета и Совета, часто избирался в различные комиссии; почти на всех диспутах по математике, а отчасти и по механике, он был одним из оппонентов; ему обязан своим созданием математический кабинет; он был долгое время заведующим семинарской студенческой математической библиотекой; при его ближайшем участии организовался студенческий математический кружок.

С назначением профессором Б. К. стал читать основные курсы для начинающих студентов, в частности в продолжение ряда лет читал курс аналитической геометрии, и его лекции, предназначенные для студентов 1-го курса, имели весьма большое значение для математического развития его слушателей и пользовались большим успехом. Одновременно Б. К. не оставлял чтения специальных курсов, темы для которых он выбирал из различных областей математики, знакомя своих слушателей с новыми результатами науки. Заслуживает быть отмеченным, что первый курс по теории функций действительного переменного и по теории множеств в Москве был прочитан Б. К. М л о д з е е в с к и м.

5 февраля 1910 года Б. К. был утвержден в звании заслуженного профессора, а через год ему пришлось, с тяжелым сердцем, покинуть, вместе с рядом других профессоров и преподавателей, дорогой его сердцу Университет. Только в 1917 году Б. К., вместе с другими ушедшими, возвратился назад и продолжал работать в Московском Университете до самой кончины.

Наряду с Университетом Б. К. преподавал на Высших Женских Курсах с самого их основания и принимал самое деятельное участие в организации их математического отделения. Всецело заботами Б. К. при курсах была организована семинарская математическая библиотека, математический кабинет, читальня.

На ВЖК Б. К., совместно с А. К. В л а с о в ы м , впервые в России, организовал математический семинарий (в 1906 году). Таковой же вскоре был организован и в Московском Университете, и с тех пор семинарии заняли подобающее им место в преподавании на математических отделениях Университетов.

В 1919 г. физико-математический факультет бывших Высших Женских Курсов — 2-го Московского Государственного Университета — был слит с таковым же факультетом 1-го МГУ. В составе 2-го МГУ осталось химико-фармацевтическое отделение, и Б. К. продолжал свою деятельность на этом отделении.

Кроме того, Б. К. преподавал в Московском Инженерном Училище, в Институте Народного Хозяйства имени К а р л а М а р к с а, в Военно-Педагогической Академии и в Академии Социального Воспитания. С 1911 до 1917 года Б. К. читал и вел семинарий в Городском Университете имени Ш а н я в с к о г о. Курс по основам геометрии, который он читал здесь в 1911/12 году, собирал огромную аудиторию самого разнообразного состава и был своего рода событием в математической жизни Москвы.

В начале своей деятельности Б. К. преподавал в средней школе (в Усачевско-Чернявском училище); он не оставлял этого преподавания в течение почти 20 лет. Но и впоследствии он продолжал интересоваться постановкой преподавания в средней школе, принимал деятельное участие в работах различных педагогических объединений, был одно время председателем Математического отделения Педагогического Общества, а затем одним из организаторов и бессменным председателем Московского Математического Кружка. Б. К. посвящал много времени и внимания деятельности этого кружка, часто выступал с докладами, наконец принимал деятельное участие во Всероссийских съездах преподавателей математики, из которых 2-й был организован Московским Математическим Кружком во главе с Б. К.

Активное участие принимал Б. К. в жизни почти всех ученых обществ Москвы. Членом Московского Математического Общества он был избран в 1885 г.; должность секретаря исполнял с 1891 г. по 1906-й, когда был избран вице-президентом, наконец, в 1922 г. был избран президентом. В заседаниях Общества им было прочитано всего 66 докладов. Б. К. был не только прекрасным докладчиком, но и незаменимым, если так можно выразиться, слушателем чужих докладов: он необыкновенно быстро схватывал существо дела и почти всегда высказывал ряд интересных замечаний, а иногда и дополнений к докладу.

В жизни Б. К. роковую роль сыграл 1911 г. Уход из Университета тяжело отозвался на нем: сильное душевное потрясение повлекло за собой заболевание диабетом, и рецидивы этой болезни сказывались впоследствии и содействовали преждевременной его кончине.

Трудные 1918-1919 годы Б. К. пережил не легко. Он очень страдал от материальных лишений и непосильного труда, а затем много горя ему принесла опасная болезнь жены. Следующие годы принесли с собой некоторое облегчение, но последний год своей жизни Б. К. был чрезмерно перегружен работой: он нес одновременно обязанности профессора 1-го и 2-го Университетов, преподавал в Академии Социального Воспитания, состоял директором Научно-Исследовательского Института Математики и Механики, председателем предметных комиссий в обоих Университетах; кроме того, после смерти проф. А. К. Власова, Б. К. счел своим долгом взять на себя его лекции в Университете и в Институте Народного Хозяйства; к этому следует добавить работу по изданию курсов аналитической геометрии и алгебры и по редактированию перевода книги Гурса. Силы Б. К. не выдержали такой чрезмерной работы: он стал переутомляться и часто хворать. В декабре 1922 г. у него на шее образовался карбункул. Пришлось прибегнуть к операции и даже двукратной, которая, вследствие наличия диабета, привела к роковому концу. Б. К. скончался 18-го января 1923 года.

Главнейшие научные труды Б. К. относятся к области дифференциальной геометрии. Здесь прежде всего следует назвать его магистерскую диссертацию "Исследования об изгибании поверхностей". Это сочинение содержит первый правильный вывод общего уравнения изгибания, теорию дифференциальных инвариантов поверхности, которая в то время еще не получила полного своего развития, и отчасти прекрасное изложение ранее известных частных результатов по теории изгибания, отчасти их обобщение и геометрическое истолкование. Докторская диссертация "О многообразиях многих измерений" содержит приложение методов, развитых в магистерской диссертации (теории дифференциальных параметров), к многообразиям многих измерений. К вопросу об изгибании, особенно в связи с результатами К. М. Петерсона, Б. К. возвращался много раз. Сюда относятся работы: "О поверхностях, связанных с поверхностями Петерсона" (Мат. Сб., XXI, 1900), "Об изгибании поверхностей Петерсона" (Мат. Сб., XXIV, 1903), "Об одном преобразовании бесконечно-малых изгибаний" (Мат. Сб., XXV, 1905), "Über aufeinander abwickelbare P.-Flächen" (Math. Ann., 63).

Другие, более мелкие, работы Б. К. относятся частью к геометрии, частью к анализу, частью к прикладным наукам. В большинстве случаев они содержат остроумное и изящное решение какого-либо вопроса, который или не был решен, или был решен ранее, но менее совершенным методом. В этом направлении следует отметить особенно работу "О многочленах, наименее уклоняющихся от нуля" (Мат. Сб., т. XXIX, 1913), в которой получается известный результат, но наиболее простым и изящным путем, и работу "Sur la determination des orbites des etoiles doubles" (Annales de l'Observatoire de Moscou), которая дала астрономам новый, простой метод определения орбит двойных звезд, причем в основе этого метода лежит решение несложной геометрической задачи. Заслуживает также упоминания один пункт докторской диссертации Б. К. — это необыкновенно простой вывод основного уравнения изгибания, который приблизительно одновременно и независимо был дан D a r b o u x и Б. К. В последние годы жизни Б. К. стал работать в области алгебраической геометрии, специально по теории Кремоновых преобразований. В результате этих работ появились статьи: “К теореме о разложимости Кремоновых преобразований” (Мат. Сб., XXIX, 1914), “К теории Кремоновых преобразований” (Мат. Сб., XXX, 1916), “Таблицы Кремоновых чисел первых 21 порядков”, “К таблицам Кремоновых чисел”, “Линейные системы кривых, связанные с арифметическими решениями Кремоновых уравнений” (Мат. Сб., XXXI). Не перечисляя в отдельности остальных работ Б. К., скажем только, что все они, в большей или меньшей степени, носят на себе печать личности автора и свидетельствуют о разносторонности его интересов, блестящем даре изложения и остроумии его математической мысли.

И. И. Чистяков

(По материалам www.mce.su/doc/ChISTYaKOV.html)

Чистяков, Иоасаф Иванович (2(14).VI.1870 – 23.VIII.1942) — математик, профессор МГУ. Родился в г. Курске. Здесь же получил среднее образование. В 1888 И. И. стал студентом физико-математического факультета Московского университета. В 1893 окончил его, представив сочинение “Бернуллиевы числа”, которое было удостоено золотой медали и напечатано в “Учёных записках Московского университета”.

После окончания университета И. И. был оставлен в нём для приготовления к профессорскому званию на кафедре математики по специальности анализ и теория чисел. И. И. принадлежат 70 научных работ по важнейшим проблемам математики, её истории и методики.

В дальнейшем центр тяжести его научных интересов переместился в область истории математики и математического образования. И. И. — основатель и главный редактор журнала “Математическое образование” (первая серия журнала выходила в 1912 — 1917гг.), а позже — один из видных авторов журнала “Математика в школе”.

Преподавательскую деятельность начал на Московских Высших женских курсах, куда он был приглашен еще в 1902г. Состоял преподавателем этих курсов, читал там лекции по тригонометрии, теории чисел, вёл курсы дифференциального и интегрального исчисления и по другим отделам высшей математики. Работал также в других вузах Москвы, руководил занятиями по математике на курсах для учителей начальных и средних школ в Москве, Ельце, Курске, Владимире, Пскове и еще нескольких городах.

Наряду с преподавательской и научной работой И. И. всегда уделял много внимания и общественной работе. В 1911 – 1914гг. он был членом организационных комитетов по устройству I и II Всероссийских съездов преподавателей математики.

После Октябрьской революции И. И. — один из первых “красных” профессоров МГУ. Выполняя задания Наркомпроса, участвовал в реформе средней школы, возглавлял особую комиссию по составлению новых математических программ для педагогических вузов. В 1935г. был арестован по клеветническому обвинению в антисоветской агитации, выслан в Томск на пять лет на вольное поселение, где прожил три года. Умер в Москве.

А. Ф. Гатлих

(Из доклада И. И. Чистякова “25-летие педагогической деятельности А. Ф. Гатлиха”, напечатанного в журнале “Математическое образование”, №7, 1912г.)

... особенно А. Ф. Гатлих всегда интересовался вопросами математического образования. Со времени утверждения Педагогического Общества при Московском Университете, А. Ф. Гатлих сделался членом Отделения преподавателей математики, причем принимал участие в обсуждении вопросов о преподавании математических наук, а также прочел в заседаниях этого Отделения несколько докладов. Таковы были его сообщения “Евклид и Джон Валлис”, “Н. И. Лобачевский”, “О задачах на срочные взносы, уплаты и ренты” и др. Когда Педагогическое Общество в 1905г. прекратило свою деятельность, и возникла мысль об учреждении Московского Математического Кружка, то А. Ф. Гатлих принял участие в выработке устава Кружка и в хлопотах о его легализации. При избрании Правления Кружка в 1907г. А. Ф. Гатлих был единогласно избран товарищем председателя и с тех пор неизменно переизбирался на эту должность.

... Заметим, что в качестве товарища председателя Математического Кружка А. Ф. Гатлиху неоднократно приходилось заменять председателя в важные моменты жизни Кружка. Так, в 1910г., во время имевшего место в Москве XII всероссийского съезда естествоиспытателей и врачей, за болезнью председателя профессора Б. К. Млодзеевского, А. Ф. Гатлиху пришлось руководить деятельностью Кружка, организовавшего для приезжих членов съезда экстренные заседания Кружка и выставку учебных пособий по математике. На 1-м всероссийском Съезде преподавателей математики в С.-Петербурге в конце 1911г. он был представителем группы членов М. Матем. Кружка и пр.

Когда в 1911г. среди членов Математического Кружка возникло стремление осуществить давно назревшую мысль об издании Кружком собственного органа, посвященного вопросам математического образования, А. Ф. Гатлих отнесся к этому начинанию с горячим сочувствием и советами и делом содействовал его осуществлению. Когда же издание журнала “Математическое образование” было разрешено и он начал выходить, А. Ф. сделался одним из деятельных сотрудников журнала.

(Из доклада И. И. Чистякова “А. Ф. Гатлих, как деятель Московского Математического Кружка”, напечатанного в журнале “Математическое образование”, №3, 1913г.)

... Математическому Кружку, объединившему в последние годы почти всех московских преподавателей математики на почве совместной научно-педагогической работы, предшествовали другие организации, преследовавшие аналогичные цели. А. Ф., который всегда горячо сочувствовал всякому общественно-просветительному начинанию, работал и в этих обществах, и поэтому я считаю необходимым коснуться его деятельности и в этих прежних математических кружках.

Одним из таких кружков была комиссия преподавателей математики при Московском Учебном Отделе Общества Распространения Технических Знаний. Я не был еще в то время преподавателем и не состоял членом этой комиссии, но от участников ее знаю, что А. Ф. Гатлих принимал в работе ее деятельное участие и делал в заседаниях ее интересные и ценные доклады. В 1898 году при Московском Университет открылось Педагогическое Общество. Осенью того же года в этом обществе образовалось Отделение преподавателей математики. Это отделение, председателем которого неизменно избирался проф. Б. К. Млодзеевский, в короткое сравнительно время развило оживленную деятельность. В заседаниях его, происходивших правильно раз в месяц, читались и обсуждались сообщения по вопросам элементарной математики и ее преподавания, разбирались учебники, демонстрировались учебные пособия и велись педагогические беседы. На этих заседаниях я и познакомился впервые с А. Ф. Гатлихом, который с самого возникновения Отделения преподавателей математики стал деятельным его членом и прочел в ем ряд сообщений. ...

В 1905 г., в связи с политическими событиями, деятельность Педагогического Общества при Московском Университете была приостановлена администрацией, а вскоре затем оно и совсем было закрыто. Вместе с тем прекратилось и существование отделения преподавателей математики. Но наиболее деятельные его члены, в том числе и А. Ф. Гатлих, не могли примириться с исчезновением организации, которая так успешно объединяла московских преподавателей математики и, несмотря на короткое время своего существования, принесла немалую пользу разработке вопросов преподавания математических наук. Явилась мысль об учреждении самостоятельного Математического Кружка. При этом первоначально казалось, что учреждение Кружка, преследующего исключительно научно-педагогические цели, не может встретить больших затруднений. И действительно, устройство первых собраний зарождающегося общества в конце 1905 г. и в 1906 г. не встречало препятствий со стороны администрации. При содействии А. Ф. Гатлиха Кружку было предоставлено и удобное помещение для заседаний в женской гимназии Л. О. Вяземской. Но вскоре были изданы “Временные правила 4 марта 1906 года об обществах и союзах”, и пред Кружком встал вопрос о легализации. А. Ф. Гатлих, вместе с другими учредителями Кружка, должен был потратить не мало трудов и хлопот, чтобы достигнуть утверждения устава и разрешения деятельности Кружка. Ему пришлось для этого неоднократно бывать и в канцелярии Градоначальника, и в управлении участка, и у нотариуса... Несмотря на усиленные хлопоты Особое Присутствие об обществах и союзах по формальным основаниям дважды отказывало в регистрации Математического Кружка, и лишь 20 октября 1907 г. удалось преодолеть все затруднения, и Кружок был разрешен.

12 декабря 1907 г. состоялось первое заседание легализованного Математического Кружка; при этом председателем его был избран проф. Б. К. Млодзеевский, а товарищем председателя — А. Ф. Гатлих. На ту же должность А. Ф. еще дважды единогласно избирался в 1910 и 1912 г. В качестве товарища председателя, А. Ф. неизменно проявлял большую заботливость о делах Кружка. Он принимал участие в заседаниях Правления Кружка и в собраниях разных комиссий, следил за состоянием денежных средств Кружка, заботился о регулярном устройстве заседаний. ... В заседания Кружка А. Ф. старался привлекать докладчиков, а нередко и сам выступал с докладами, которые неизменно были полны глубокого интереса. Обыкновенно сообщения его были из области геометрии, напр. о решении геометрических задач на построение с помощью одного циркуля, о новом курсе геометрии итальянского ученого Веронезе и пр. Но иногда он касался и более общих тем; таков был его доклад о программе математики в средней школе. В этом сообщении А. Ф. высказался за необходимость оживления традиционного курса математики введением в него начал высшей математики и за сближение математики с прикладными науками и требованиями жизни. При этом А. Ф. изложил и соответствующий этим взглядам учебный план преподавания математики в средней школе.

В качестве товарища председателя Кружка, А. Ф. нередко приходилось руководить прениями в заседаниях. В таких случаях он проявлял крайнее внимание к говорящим, абсолютную терпимость к высказываемым мнениям и умение быстро уловить и ясно резюмировать выводы. В тех же случаях, когда по болезни или за отсутствием председателя, на него переходили все функции председателя Кружка, заботливость его о Кружке была особенно велика. Такой случай имел место в конце 1909 и начале 1910 г., когда в Москве происходил XII всероссийский съезд естествоиспытателей и врачей. Моск. Мат. Кружок решил тогда устроить экстренные заседания с приглашением на них членов Съезда, а также выставку учебных пособий по математике. По болезни Б. К. Млодзеевского, председательствовать на этих собраниях пришлось А. Ф. Гатлиху, который и провел их с полным успехом. Выражая удовольствие по поводу устроенных двух заседаний, некоторые приезжие члены XII съезда высказали пожелания об устройстве еще нескольких собраний для обсуждения педагогических вопросов. В ответ на это, А. Ф. Гатлих указал, что даже и увеличив число заседаний, все же не удастся обсудить все накопившиеся вопросы из области преподавания математики, а необходимо устроить специальный съезд преподавателей математических наук. Это предложение было единогласно принято собранием, которое выразило пожелание, чтобы был созван всероссийский съезд преподавателей математики. Таким образом, А. Ф. Гатлих *первый* высказал мысль о созыве всероссийского съезда преподавателей математики. Ему вскоре довелось видеть и осуществление своего пожелания: в конце 1911 года в С.-Петербурге состоялся 1-й всероссийский съезд преподавателей математики. Приветствуя этот съезд от имени Моск. Мат. Кружка, А. Ф. выразил пожелание, чтобы за первым съездом последовал длинный ряд других на пользу математического образования в России и для объединения преподавателей математической науки. ...

Заботясь о развитии деятельности Математического Кружка, А. Ф. всегда желал, чтобы Кружок издавал собственный печатный орган. Поэтому, когда в 1911 году группою членов Кружка решено было перейти к осуществлению этой мысли, он оказал этому начинанию полное сочувствие и энергичное содействие. В виду того, что у Кружка не было средств для издания журнала, А. Ф. подал мысль собрать их среди членов Кружка путем особой подписки. Эта идея была осуществлена, и с 1912 г. журнал Кружка под названием “Математическое образование” начал выходить в свет.

Историческое здание, Москва, Пожарский переулок, 12

(По материалам www.apartment.ru/Article/48715118_print.html)

Дом Варваринского акционерного общества домовладельцев с большой нишей в центре фасада возводили в несколько этапов (1898–1905, арх. А. В. Иванов). Особенность фасадной декорации этого здания заключается в контрасте гладких стен, облицованных бежевой керамической плиткой, с барочными штукатурными деталями, характерном для сооружений добротной поздней эклектики.

С конца XVIII в. этот участок принадлежал Мухановым. Известно, что в 1826–1827гг. здесь у своих друзей В. А. и А. А. Мухановых бывал А. С. Пушкин, а в 1880-х гг. жил художник А. Е. Архипов.

Здесь в 1906–1911гг. жил профессор Московской консерватории А. А. Ярошевский, в 1910–1911гг. — В. Д. Дриттенпрейс, в 1913–1915гг. — редактор журнала "Математическое образование" И. И. Чистяков. В начале 1900-х гг. здесь жили инженер-конструктор В. Г. Шухов и профессор Московского университета патологоанатом А. И. Абрикосов.

В 1912–1915гг. в доме помещался "Московский математический кружок" с редакцией журнала "Математическое образование", которыми руководил профессор Б. К. Млодзеевский. В этом доме также была последняя квартира историка академика В. И. Пичеты (жил здесь в 1924–1947гг.).

Среди других знаменитых жильцов этого комплекса можно отметить: ученого-историка М. Д. Довнар-Запольского и экономиста А. А. Мануйлова (в 1901г.); ученого-биолога, основоположника экспериментальной биологии в России и СССР Н. К. Кольцова (в 1915–1940гг.); артиста А. Я. Закушняк; писателя И. Г. Эренбурга; искусствоведа Б. Н. Терновца.

В корпусе по Пожарскому переулку, 12, в квартире 66 у своих друзей неоднократно бывал писатель М. А. Булгаков.

Линейные диофантовы уравнения с дополнительными условиями

М. М. Галламов

В статье рассмотрены различные — как геометрические, так и алгебраические — методы исследования линейных диофантовых уравнений с дополнительными условиями на решения. Рассмотрены примеры, приведены упражнения для самостоятельного решения, а также задачи исследовательского характера.

Введение

Существуют формулы, задающие общее решение линейного уравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = c$$

в целых числах, где $a_i(\neq 0)$ и c — фиксированные целые числа, $i = 1, 2, ..., k$ (см., например, [3, формулы (2.6) для двух переменных §2.1 и (2.23) многих переменных §2.2]).

В данной статье рассматривается вопрос об исследовании решений уравнения

$$bx + ay = c, \ \text{НОД}(a, b) = 1 \tag{0.1}$$

в целых числах, когда на уравнение (0.1) накладываются дополнительные условия. Здесь a, b и c — целые числа, НОД(a, b) — наибольший общий делитель a и b.

Пожалуй, самой известной задачей такого типа является задача нахождения формулы для чисел Фробениуса (см. теорему 1 Сильвестра в §3). Предлагаемое доказательство теоремы 1 Сильвестра вполне доступно восьмикласснику.

Вопрос о построении фрмулы для чисел Фробениуса в случае линейного диофантова уравнения от трех переменных в общем случае является неподъемной задачей и автору неизвестна такая формула, хотя о её существовании некоторые специалисты говорят и она занимает несколько страниц. В последнем параграфе предлагаются исследовательские задачи, связанные с числами Фробениуса в случае линейного диофантова уравнения от трех переменных, но они вполне доступные для решения, хотя и трудоемкие. В связи с числами Фробениуса интерес представляет книга В. И. Арнольда [2, Лекция 4. Геометрия чисел Фробениуса для аддитивных полугрупп]

Для дальнейшего нам потребуется следующая задача:

Задача 1. Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = m$ и $CD = n$. Перпендикулярно сторонам AB и CD проведены $m + 1$ и $n + 1$ прямая соответственно на единичном расстоянии друг от друга, вследствие чего прямоугольник $ABCD$ разбивается на mn единичных квадратов.

1. Сколько вершин этих единичных квадратов лежит на диагонали данного прямоугольника?
2. Сколько раз проведенные прямые пересекают диагональ данного прямоугольника?

Ответ: (a) НОД$(m, n) + 1$. (b) $m + n -$ НОД(m, n).

Указание.

1. Пусть $d =$ НОД(m, n). Показать, что диагональ в прямоугольнике со сторонами $(m/d) \times (n/d)$, у которого стороны лежат на двух смежных сторонах исходного прямоугольника, содержит только две вершины единичных квадратов, которые совпадают с вершинами нового прямоугольника.

2. Точки пересечения, построенных прямых с диагональю прямоугольника совпадают, если они являются вершинами единичных квадратов.

Эта задача достаточно известная и часто встречается на олимпиадах в различных вариациях.

$b|a$ обозначает, что b делит нацело a или a делится нацело на b. В этой записи считается, что $b \neq 0$, чтобы это в дальнейшем специально не оговаривать.

§ 1. Геометрический подход

При исследовании уравнения (0.1) с дополнительными условиями немаловажную роль играют геометрические соображения. Множество решений уравнение (0.1) в прямоугольной системе координат OXY представляет собой прямую

$$\alpha_c \,:\, bx + ay = c. \tag{1.1}$$

Пусть $c \neq 0$, тогда разделив обе части уравнения (0.1) на c и опустив коэффициенты перед неизвестными в знаменатель, мы получим

$$\frac{x}{c/b} + \frac{y}{c/a} = 1 \tag{1.2}$$

— так называемое *уравнение прямой в отрезках на осях*. Геомерически числа c/b и c/a есть абцисса и ордината точек пересечения прямой α_c с OX и OY соответственно. При $c = ab$ уравнение принимает вид:

$$x/a + y/b = 1. \tag{1.3}$$

Пусть $A_c = A_c(c/b; 0) = \alpha_c \cap OX$ и $B_c = B_c(0; c/a) = \alpha_c \cap OY$. Точку $A(x; y)$ назовем *целочисленной*, если координаты x и y целые числа.

Определение 1 (основного треугольника прямой α_c (уравнения $bx + ay = c$)). Пусть задана прямая α_c, определяемая уравнением (0.1), и свободный член c равен такому целому значению c_0, что $A_{c_0} = A_{c_0}(c_0/b; 0)$ и $B_{c_0} = B_{c_0}(0; c_0/a)$ имеют целочисленные координаты, а внутренность отрезка $A_{c_0}B_{c_0}$ не содержит целочисленных точек, тогда треугольник $OA_{c_0}B_{c_0}$ называется *основным треугольником прямой α_c (уравнения $bx+ay = c$)*, а c_0 — *основным значением свободного члена прямой α_c (уравнения $bx+ay = c$)* (см. рис. 1, на котором целочисленные точки помечены кружочками).

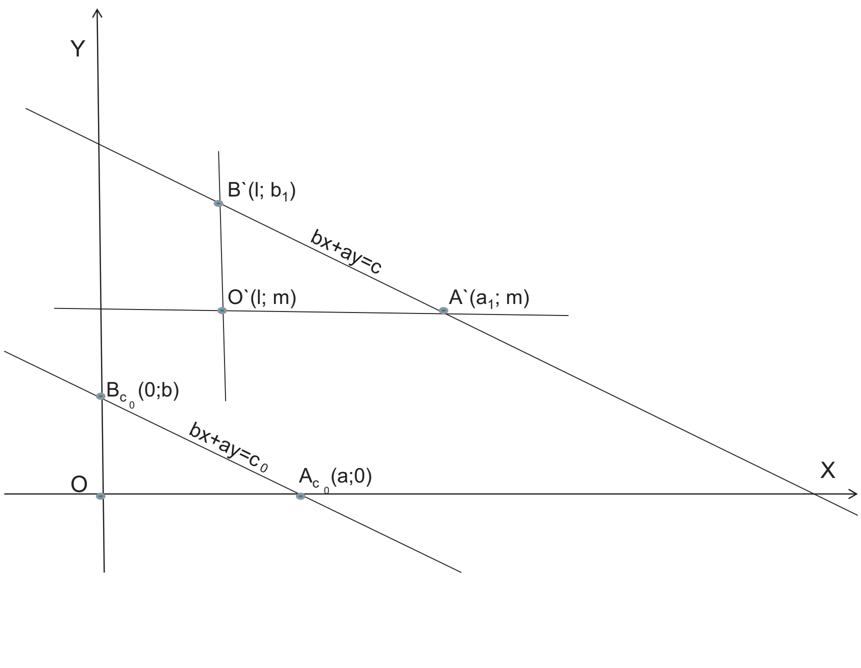


Рис. 1

Из опредления и уравнения (1.3) прямой в отрезках на осях следует, что основное значение свободного члена прямой (1.1) равно

$$c_0 = ab, \tag{1.4}$$

а также с учетом того, что при $0 < c < c_0(= ab)$, и задачи 1 прямая α_c не может одновременно пересекать оси координат в двух целочисленных точках.

Основной треугольник $OA_{c_0}B_{c_0}$ прямой (1.1) примечателен тем, что внутренность гипотенузы $A_{c_0}B_{c_0}$ не содержит целочисленных точек, но её концы есть целочисленные точки на осях координат. Вследствие чего все целочисленные решения уравнения (0.1) есть целочисленные точки прямой α_c, расстояние между которыми равно длине гипотенузы $\triangle OA_{c_0}B_{c_0}$. Последнее дает возможность применить геометрические методы в исследовании свойств целочисленных решений линейных уравнений.

Отметим, что целочисленные вершины A_{c_0} и B_{c_0} основного треугольника $OA_{c_0}B_{c_0}$ являются пересечением прямой α_c парой прямых $x = 0$ и $x = a$ с одной стороны, а с другой стороны — второй парой прямых $y = 0$ и $y = b$. Причем, расстояние между первой парой прямых равно $|a|$, второй — $|b|$ и эти расстояния целочисленные. Более того, если прямая α_c пересекает в целочисленной точке $\widehat{A}(a_1; b_1)$ произвольную прямую, параллельную OY (OX), то она пересекает вторую прямую, параллельную первой и расположенную от нее на расстоянии $|a|$ ($|b|$) единиц также в целочисленной точке $\widehat{B}(a_2; b_2)$. Причем, отрезок $\widehat{A}\widehat{B}$ не содержит целочисленных точек, кроме концевых, и $|a_2 - a_1| = a$ ($|b_2 - b_1| = b$).

Определение 2 (смещенного основного треугольника прямой $\boldsymbol{\alpha_c}$ (уравнения $\boldsymbol{bx + ay = c}$)). Пусть задана пара взаимно перпендикулярных прямых $\lambda_l : x = l$ и $\mu_m : y = m$ такие, что точки $O^{'} = \lambda_l \cap \mu_m$, $A^{'} = \lambda_l \cap \alpha_c$ и $B^{'} = \mu_m \cap \alpha_c$ целочисленные, где прямая α_c, определяется (1.1). Прямоугольный треугольник $O^{'}A^{'}B^{'}$ называется*смещенным основным треугольником прямой* α_c, если он равен основному треугольнику прямой α_c и его вершина $O^{'}$ лежит по ту одну сторону с началом координат от прямой α_c (см. рис. 1).

Пример 1. Найти наименьшее c, при котором уравнение $7x + 9y = c$ имело бы ровно семь целых положительных корней.
(Пример из [1, Гл. 3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики. Задача 3.73]).

Решение примера. Метод решения будем максимально приближать к общему случаю, когда коэффициенты при неизвестных x и y равны $b(= 7)$ и $a(= 9)$ соответственно, а количество решений равно $n(= 7)$.

В силу (1.4) основное значение свободного члена (см. определение 1) данного уравнения равно

$$c_0 = ab = 9 \cdot 7 = 63$$

Рассматриваемый пример будем решать с применением геометрических конструкций, порожденных исходным уравнением.

Рассмотрим семейство параллельных прямых

$$\alpha_c : \ bx + ay = 7x + 9y = c,$$

где параметр $c \in Z$.

Пусть OXY — прямоугольная декартова система координат, I — первый квадрант (прямой угол $\angle XOY$ с внутренностью), $A_c = A_c\,(a_c; 0) = \alpha_c \cap OX$, $B_c = B_c\,(0; b_c) = \alpha_c \cap OY$. Так как мы ищем положительные решения, то будем рассматривать только те значения параметра c, для которых определен отрезок $A_cB_c = \alpha_c \cap I$.

Найдем наименьшее значение параметра c, при котором девять (семь внутренних (что соответствует положительным решениям) и две концевых) целочисленных точек принадлежат отрезку A_cB_c. Так как точки A_c и B_c лежат на прямой α_c, то их координаты удовлетворяют её уравнению, что дает нам

$$ba_c + a \cdot 0 = c,\ b \cdot 0 + ab_c = c \ \Rightarrow\ 7a_c + 9 \cdot 0 = c,\ 7 \cdot 0 + 9b_c = c.$$

Отсюда получаем

$$a_c = c/b = c/7,\ b_c = c/a = c/9 \ \Rightarrow\ c = abk = 9 \cdot 7k = 63k.$$

Здесь $k \in N$, так как мы рассматриваем отрезки, лежащие в первом квадранте. Вследствие чего

$$a_c = ak = 9k,\ b_c = bk = 7k \ \Rightarrow\ \text{НОД}(a_c, b_c) = \text{НОД}(ak, bk) = k. \tag{1.5}$$

Для того, чтобы отрезку A_cB_c принадлежали только девять целочисленных точек согласно задаче 1 на с. 9 должно быть выполено равенство

$$\text{НОД}(a_c, b_c) + 1 = k + 1 = 9 \ \Rightarrow\ k = 8. \tag{1.6}$$

Поэтому одно из искомых значений параметра c равно $abk = 63 \cdot 8 = 504$ и при этом $a_{63\cdot 8} = ak = 9 \cdot 8 = 72$ и $b_{63\cdot 8} = bk = 7 \cdot 8 = 56$.

Как же найти другие значения параметра c? Если, конечно, они существуют.

Проделаем это основываясь на преобразованиях параллельного переноса в плоскости OXY. С этой целью рассмотрим отрезок

$$A_cB_c = \left. A_{abk}\,(ak; 0)\, B_{abk}\,(0; bk)\right|_{k=7} = A_{441}\,(63; 0)\, B_{441}\,(0; 49)\,,$$

на котором лежат ровно восемь целочисленных точек: две концевые — на осях координат и шесть внутренних, соответсвующих целочисленным положительным решениям уравнения

$$bx + ay = \left. abk \right|_{k=7} \ \Rightarrow\ 7x + 9y = 441,\ k = 7.$$

Теперь будем перемещать параллельно самой себе прямую $A_{63\cdot 8}\,(9 \cdot 8; 0)\, B_{63\cdot 8}\,(0; 7 \cdot 8)$ так, чтобы она проходила через целочисленные точки трапеции

$$\begin{aligned}\left.\mathtt{T}[ab(k-1); abk]\right|_{k=8} = \mathtt{T}[63 \cdot 7; 63 \cdot 8] = \\ A_{ab(k-1)}\,(a(k-1); 0)\, A_{abk}\,(ak; 0)\, B_{abk}\,(0; bk)\, B_{ab(k-1)}\,(0; b(k-1)) = \\ A_{441}\,(63; 0)\, A_{504}\,(72; 0)\, B_{504}\,(56; 0)\, B_{441}\,(0; 49)\,.\end{aligned}$$

(см. рис. 2, на котором целочисленные точки помечены кружочками).

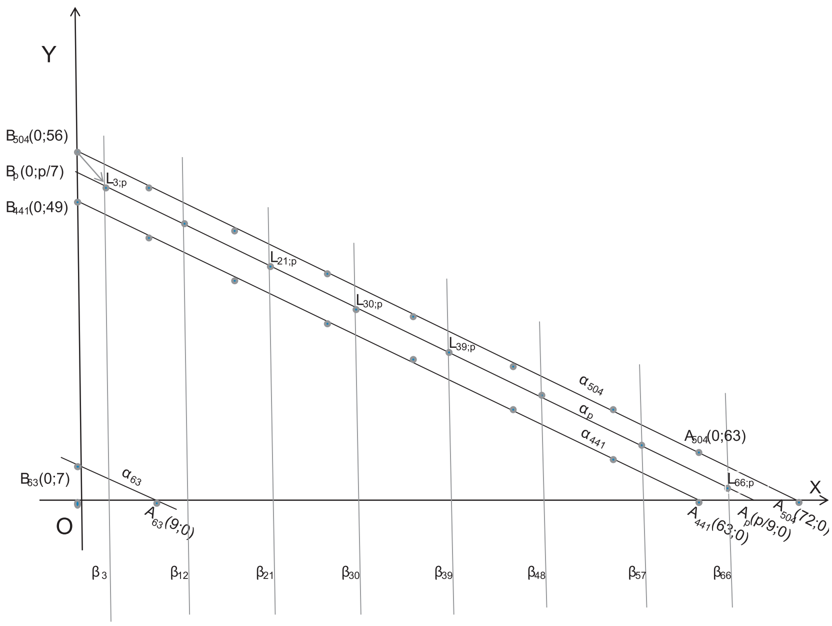


Рис. 2

Каждый наш параллельный сдвиг $\Pi_{(m;n)}$ прямой α_c в целочисленную точку

$$M(m,n)\ \in\ \mathtt{T}[ab(k-1);abk]|_{k=8}$$

определяет нам необходимый целочисленный параметр $p = bm + an = 7m + 9n$. Так как при параллельном переносе коэффициенты в левой части уравнения $7x + 9y = c$ не меняются по причине того, что образ $\Pi_{(m,n)}(\alpha_c)$ прямой α_c при параллельном сдвиге $\Pi_{(m,n)}$ параллелен исходной прямой (на рис. 2 точка $M(m,n)$ и параллельный сдвиг $\Pi_{(m;n)}$ не изображены). При подстановке координат точки $M(m,n)$ в уравнение прямой

$$\Pi_{(m,n)}(\alpha_c)\ :\ bx + ay = 7x + 9y = p$$

вместо переменных получаем, что $p = bm+an = 7m+9n$, так как $M(m,n) \in \Pi_{(m,n)}(\alpha_c)$. Отсюда следует, что

$$\Pi_{(m,n)}(\alpha_c) = \alpha_p\ :\ bx + ay = 7x + 9y = p.$$

Множество положительных решений последнего уравнения определяет целочисленные точки, принадлежащие внутренности отрезка

$$A_pB_p = \alpha_p \cap \mathtt{T}[ab(k-1);abk]|_{k=8}$$

и, наоборот. Здесь

$$A_p = A_p\,(p/b;0) = A_p\,(p/7;0) = \alpha_p \cap OX \text{ и } B_p = B_p\,(0;p/a) = B_p\,(0;p/9) = \alpha_p \cap OY.$$

Покажем, что для каждой целочисленной точки $M(m,n) \in \mathtt{T}[ab(k-1);abk]|_{k=8}$ внутренность отрезка A_pB_p, определяемая $\Pi_{(m,n)}$, всегда содержит восемь ($k = 8$) точек, если абсцисса $p/b = p/7$ (ордината $p/a = p/9$) точки $A_p\,(p/7;0)$ ($B_p\,(0;p/9)$) не является целым числом. В противном случае семь (см. рис. 2, на котором прямая α_p изображена не для целого $p/b = p/7$ ($p/a = p/9$)).

С этой целью проведем прямые

$$\beta_0 : x = 0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \dots\ ,\ \beta_{ak-1}|_{k=8} = \beta_{71},$$

параллельные оси OY (β_0 совпадает с OY) и пересекающие ось абсцисс в точках с координатами

$$(0;0),\ (1;0),\ (2;0),\ \ldots\ ,\ (ak-1;0)|_{k=8} = (73;0)$$

(см. рис. 2, на котором изображены семь прямых $\beta_3,\ \beta_{12},\ \ldots\ ,\ \beta_{ak+1}|_{k=7} = \beta_{66}$). Рассмотрим целочисленные точки пересечения построенных прямых с прямой α_p. Пусть прямая α_p пересекает прямую β_{30} в целочисленной точке $L_{30;p} = L_{30;p}\,(30; l_{30})$. Чтобы определить соседние целочисленные точки с точкой $L_{30;p}$ на прямой α_p, поступаем следующим образом. Откладываем от точки $L_{30;p}$ вдоль прямой α_p по обе стороны отрезок, равный длине гипотенузы

$$A_{ab}(a;0)B_{ab}(0;b) = A_{63}(9;0)B_{63}(0;7)$$

основного треугольника

$$\triangle OA_{ab}(a;0)B_{ab}(0;b) = \triangle OA_{63}(9;0)B_{63}(0;7)$$

прямой α_c (см. рис. 2). Концевые точки $L_{21;p}$ и $L_{39;p}$, построенных отрезков и будут искомыми, так как отрезки представляют собой гипотенузы смещенных основных треугольников прямой α_p (см. определение 2).

Таким же образом строим соседние целочисленные точки для вновь построенных точек $L_{21;p}$ и $L_{39;p}$ на прямой α_p и эту процедуру продолжаем до тех пор, пока не выйдем за пределы отрезка $A_p\,(p/b;0)\,B_p\,(0;p/a) = A_p\,(p/7;0)\,B_p\,(0;p/9)$. В силу построения семейства параллельных прямых

$$\left.\{\beta_i\}_{i=0}^{ak-1}\right|_{k=8} = \{\beta_i\}_{i=0}^{71} \tag{1.7}$$

получаем, что количество отложенных отрезков равно

$$\text{НОД}(a_{abk}, b_{abk})|_{k=8} = k = \text{НОД}(a_{63\cdot 8}, b_{63\cdot 8}) = 8$$

или частному от деления абсциссы $ak|_{k=8} = 72$ точки $A_{abk}\,(ak;0)|_{k=8} = A_{504}\,(72;0)$ на $a = 9$, или частному от деления ординаты $bk|_{k=8} = 56$ точки $B_{abk}\,(0;bk)|_{k=8} = B_{504}\,(0;56)$ на $b = 7$ (см. (1.5) и (1.6)). Этот результат вытекает из геометрических соображений. Действительно, параллельным сдвигом, совмещая точку $B_p\,(0;p/a) = B_p\,(0;p/9)$ с $L_{3;p}$, получаем, что точка $A_{abk}\,(a(k-1);0)|_{k=8} = A_{504}\,(63;0)$ совмещается с $L_{66;p}$ (на рис. 2 отражено стрелками), так как отрезки

$$B_{abk}\,(0;bk)\,A_{abk}\,(a(k-1);0)|_{k=8} = B_{504}\,(0;56)\,A_{504}\,(63;0) = L_{3;p}L_{66;p}.$$

Вследствие чего количество целочисленных точек на внутренности отрезка

$$A_p\,(p/b;0)\,B_p\,(0;p/a) = A_p\,(p/7;0)\,B_p\,(0;p/9)$$

на единицу меньше, чем на всем отрезке

$$A_{abk}\,(ak;0)\,B_{abk}\,(0;bk)|_{k=8} = A_{504}\,(72;0)\,B_{504}\,(56;0)$$

— концевая точка $B_{504}\,(56;0)$ выходит за пределы первого квадранта.

Отметим, что для общих рассуждений не существенно, что первоначальная точка $L_{30;p}$ имеет конкретную абциссу равную 30, а поэтому они годятся и в общем случае для всех целочисленных точек трапеции $\mathtt{T}[ab(k-1);abk]|_{k=8}$.

Так как все внутренние целочисленные точки трапеции $\mathtt{T}[ab(k-1);abk]|_{k=8}$ лежат на прямых семейства (1.7), то аналогичные рассуждения могут быть проведены для любой её внутренней целочисленной точки $M(m,n)$ и прямой $\alpha_p(\ni M(m,n))$, что завершает первый этап исследований — определения количества положительных решений уравнения

$$\alpha_p : bx + ay = 7x + 9y = p$$

в трапеции $\mathtt{T}[ab(k-1); abk]|_{k=8}$ при условии, что числа $p/b = p/7$ и $p/a = p/9$ не являются целыми.

Перейдем ко второму этапу исследований, когда одно из чисел $p/b = p/7$ или $p/a = p/9$ является целым.

Если $a(=7) \mid p$, то точка $A_p\,(p/b;0) = A_p\,(p/7;0)$ имеет неположительные целочисленные координаты, удовлетворяющие уравнению

$$bx + ay = 7x + 9y = p,$$

и тем самым принадлежит прямой α_p. Это достигается при значениях параметра

$$p = abk - bw|_{k=8} = 504 - 7w,\ w = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ 8(= a-1),$$

так как точка $L_{ab+w;p} = A_p\,(p/b;0) = L_{63+w;p} = A_p\,(p/7;0)$ имеет координаты

$$(ak - w; 0)|_{k=8} = (72 - w; 0)\,,\ w = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ 8(= a-1).$$

Точки, определяемые этими координатами, принадлежат внутренности отрезка

$$A_{ab(k-1)}\,(a(k-1);0)\,A_{abk}\,(ak;0)\big|_{k=8} = A_{441}\,(63;0)\,A_{504}\,(72;0)\,.$$

При $p = ab(k-1)|_{k=8} = 441$ уравнение

$$bx + ay = 7x + 9y = 441$$

имеет шесть $(k-2|_{k=8} = 6)$ положительных решений. Этот факт нами был установлен раннее. Следовательно, координаты семи $(n = k-1|_{k=8} = 7)$ точек

$$L_{9j+w;p} = \alpha_p \cap \beta_{9j+w},\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,\ 6(= k-2|_{k=8})$$

являются положительными решениями уравнения $bx + ay = 7x + 9y = p$ при фиксированном значении параметра p из множества

$$\{504 - 7w(= abk - bw|_{k=8}):\ w = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ 8(= a-1)\}\,.$$

Аналогично поступаем в случае, когда $9\,|\,p$. Исключается крайняя точка $L_{0;p} = B_p\,(0, p/a) = B_p\,(0, p/9)$. Положительными целочисленными решениями уравнения

$$bx + ay = 7x + 9y = p$$

будут координаты семи $(n = k-1|_{k=8} = 7)$ точек

$$L_{9j;p} = \alpha_p \cap \beta_{9j},\ j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ 7(= k-1|_{k=8})$$

при каждом фиксированном значении параметра

$$p = abk - at = 504 - 9t|_{k=8},\ t = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ 6(= b-1).$$

При $t = b = 7$ парметр $p = ab(k-1)|_{k=8} = 441$ мы имеем шесть $(k-2|_{k=8} = 6)$ положительных целочисленных решений.

На основании проделанных выше рассуждений получаем, что наименьшее значение параметра c, при котором уравнение

$$bx + ay = 7x + 9y = c$$

имело бы ровно семь $(n = 7)$ целых положительных корней, мы должны выбрать из двух множеств

$$\{504 - 7w(= abk - bw|_{k=8})|\ w = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ 8(= a-1)\}$$

и

$$\{504 - 9t(= abk - at|_{k=8})|\ t = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ 6(= b-1)\}\,,$$

что соответсвует

$$c = abk - b(a-1)|_{k=8} = nab + b|_{n=7} = 8\cdot(9\cdot 7) - 7\cdot 8 = 7\cdot(9\cdot 7) + 7 = 448,$$

так как $a(=9) > b(=7)$ в нашем конкретном случае.

Отсюда получаем, что в общем случае формула для наименьшего c, при котором уравнение

$$bx + ay = c$$

имело бы ровно n целых положительных корней имеет вид

$$\left\{\begin{array}{l} c = nab + b,\ b < a, \\ c = nab + a,\ a < b. \end{array}\right. = nab + \min\{a, b\} \tag{1.8}$$

Ответ: $c = 448$.

§ 2. Арифметический подход

Пример 2. Пусть a и b — натуральные взаимно простые числа, а $(x; y)$ — целочисленная точка, лежащая в полосе $0 \le x \le b-1$. Каждой такой точке $(x; y)$ приписывается целое число $\mathtt{N}(x, y) = ax + by$. Докажите, что для каждого натурального c существует ровно одна такая точка (x, y) $(0 \le x \le b-1)$, что $c = \mathtt{N}(x, y)$.

(Пример из [1, Гл. 3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики. Задача 3.72.а), с.33]).

Решение примера. Найдем такое представление для произвольно фиксированного натурального числа c, что величины, входящие в это представление, можно было выбрать в качестве координат точки из полосы $0 \le x \le b-1$.

С этой целью вначале рассмотрим уравнение

$$au + bv = \text{НОД}(a, b) = 1. \tag{2.1}$$

Пусть u_0 и v_0 — частные решения этого уравнения, которые оба отличны от нуля. Умножим рассматриваемое уравнение на c, тогда

$$a(cu) + b(cv) = c.$$

Полагая $x = cu$ и $y = cv$, получим уравнение

$$ax + by = c,$$

у которого частное решение имеет вид: $x_0 = cu_0$ и $y_0 = cv_0$. Тогда общее решение последнего уравнения определяется формулами:

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + bt = cu_0 + bt, \\ y = y_0 - at = cv_0 - at. \end{array}\right. \quad t \in Z \tag{2.2}$$

Теперь представим частное решение $\widetilde{x}_0 = cu_0$ в виде:

$$\widetilde{x}_0 = cu_0 = bq_c + r_c,\ 0 \le r_c \le b-1. \tag{2.3}$$

Отметим, что неполное частное q_c и остаток r_c от деления cu_0 на b определяются однозначно. Здесь мы приписали q_c и r_c индекс c, так как q_c и r_c определяются единственным образом по параметру c при фиксированных частных решениях, а они зависят только от фиксированных коэффициентов a и b. Вследствие того, что $u_0 \neq 0$, каждому натуральному числу c соответствует единственное целое число $x_0 = cu_0$ (u_0 фиксировано). Тем самым мы каждому c сопоставили единственное целое число q_c, определенное (2.3). Положим в (2.2) $t = -q_c$, получим

$$\begin{cases} x_c = x_0 + bt = cu_0 - bq_c = r_c, \\ y_c = y_0 - at = cv_0 + aq_c. \end{cases} \tag{2.4}$$

Эти равенства как раз и задают координаты искомой точки.

Итак, каждому натуральному числу c мы сопоставили единственную точку $C_{q_c}(x_c, y_c)$ с целыми координатами (x_c, y_c), определяемыми (2.4). В силу сделанных выше рассуждений она определена однозначно. Так как $x_c = r_c$, то есть положительному остатку от деления целого числа $x_0 = cu_0$ на b, то $0 \le x_c \le b - 1$.

Покажем, что точка $C_{q_c}(x_c, y_c)$ искомая. Подставим координаты этой точки в $\mathtt{N}(x, y) = ax + by$, получаем

$$\mathtt{N}(x_c, y_c) = \mathtt{N}(cu_0 - bq_c, cv_0 + aq_c) = a\,(cu_0 - bq_c) + b\,(cv_0 + aq_c) = \\ acu_0 - abq_c + bcv_0 + abq_c = acu_0 - abq_c = c\,(au_0 + bv_0) = c \tag{2.5}$$

(см. (2.1)).

§ 3. Числа Фробениуса

Определение 3 (чисел Фробениуса). Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n \in N$ такие, что

$$\text{НОД}\,(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1.$$

Числом Фробениуса $F\,(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *чисел* $a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_n$ называется наименьшее F такое, что любое целое $g \ge F$ может быть записано в виде

$$g = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \tag{3.1}$$

с неотрицательными целыми $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n$.

(См. стр. 38 из [1, Гл. 3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики. Задачи 3.77–3.78]).

Если на соотношение (3.1) посмотреть как на уравнение относительно $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n$ с параметром g, то число Фробениуса $F\,(a_1, a_2, \dots, a_n)$ представляет собой не что иное как наименьшее значение параметра g, при котором уравнение (3.1) имеет решение в неотрицательных целых числах.

Для $n = 2$ числа Фробениуса определяются по формуле

$$F\,(a, b) = ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1). \tag{3.2}$$

Для $n = 3$ автору неизвестна формула $F\,(a_1, a_2, a_3)$, по которой вычисляются числа Фробениуса (см. исследовательскую задачу 2 из §4.

Доказательство формулы (3.2) основано на следующей теореме.

Теорема 1 (Сильвестр). Если $F\,(a, b)$ есть наименьшее число, при котором уравнение $bx + ay = c$ с НОД$(a, b) = 1$ имеет решения в целых неотрицательных числах для любого $c \ge F\,(a, b)$, то оно определяется формулой (3.2).

(См. [1, Гл. 3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики. Задачи 3.75]).

Доказательство. Доказательство данной теоремы базируется на применении основного треугольника данного уравнения (см. определение 2 на с. 11).

Рассмотрим основной треугольник $\triangle OA_{ab}(a; 0)B_{ab}(0; b)$ прямой α_c, определеяемый (1.1) (см. рис. 3).

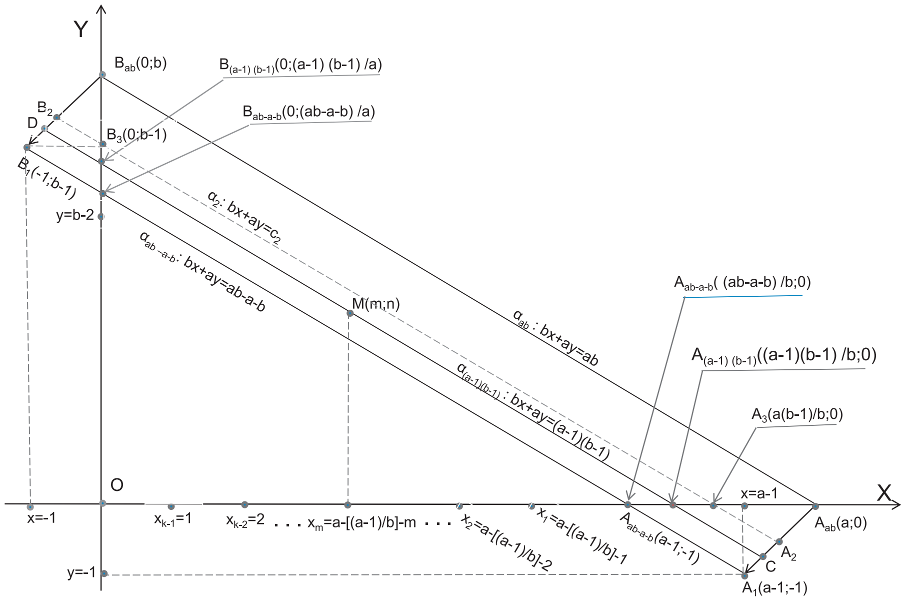


Рис. 3

Переместим параллельным пареносом точку $A_{ab}(a;0)$ в $A(a-1;-1)$, при этом точка $B_{ab}(0;b)$ перейдет в $B(-1;b-1)$ (на рис. 3 это преобразование указано стрелками $A_{ab}A_1$ и $B_{ab}B_1$), что приведет к совмещению гипотенузы $A_{ab}(a;0)B_{ab}(0;b)$ основного треугольника $OA_{ab}(a;0)B_{ab}(0;b)$ с отрезком $A(a-1;-1)B(-1;b-1)$ прямой

$$\alpha_{ab-a-b}:\ bx+ay=ab-a-b; \tag{3.3}$$

правая часть определяется непосредственной подстановкой координат одной из точек $A(a-1;-1)$ или $B(-1;b-1)$ в $bx+ay=c$. При этом преобразовании у нас появился параллелограмм $A_1A_{ab}B_{ab}B_1$, который в дальнейшем нам пригодится.

Так как концы отрезка $A(a-1;-1)B(-1;b-1)$ прямой α_{ab-a-b} выходят за пределы первого квадранта и его внутренняя часть не содержит целочисленных точек, то уравнение (3.3) не имеет неотрицательных целых решений.

Покажем, что уравнение

$$\alpha_{(a-1)(b-1)} = \alpha_{ab-a-b+1}:\ bx+ay=ab-a-b+1=(a-1)(b-1) \tag{3.4}$$

имеет неотрицательные целые решения.

В дальнейшем будем предполагать $a>b$, если это не так, то переобозначим оси координат: ось OX назовем осью OY и, наоборот.

Запишем уравнения прямой $\alpha_{(a-1)(b-1)}$ в отрезках на осях:

$$\alpha_{(a-1)(b-1)}:\ \frac{x}{\frac{(a-1)(b-1)}{b}} + \frac{y}{\frac{(a-1)(b-1)}{a}} = 1.$$

Она пересекает оси координат в точках

$$A_{(a-1)(b-1)}((a-1)(b-1)/b;0) \ \text{ и } \ B_{(a-1)(b-1)}(0;(a-1)(b-1)/a)$$

(см. рис. 3). Найдем целую часть абциссы точки $A_{(a-1)(b-1)}((a-1)(b-1)/b;0)$:

$$\left[\frac{(a-1)(b-1)}{b}\right] = \left[\frac{ab-a-b+1}{b}\right] = a-1-\left[\frac{a-1}{b}\right].$$

Отсюда следует, что если $b|(a-1)$ (не забывайте, что $a > b$), то уравнение (3.4) имеет только одно неотрицательное решение $x = a - 1 - [(a-1)/b]$ и $y = 0$.

В случае, когда $b \nmid (a-1)$, поступим следующим образом. Проведем через точку $B_3(0; b-1)$ $(\in OY)$ прямую

$$\alpha_2 : \ bx + ay = c_2$$

параллельную $A_{ab}B_{ab}$, где $A_2 = \alpha_2 \cap A_{ab}A_1$ и $B_2 = \alpha_2 \cap B_{ab}B_1$ есть точки пересечения сторон параллелограмма $A_1A_{ab}B_{ab}B_1$ в нецелочисленных точках A_2 и B_2, а поэтому $A_2B_2 = A_{ab}B_{ab}$; $A_3(a(b-1)/b; 0) = OX \cap A_2B_2$ — нецелочисленная точка и $c_2 > (a-1)(b-1)$ (см. рис. 3). Так как

$$c_2 > (a-1)(b-1) > ab - a - b,$$

то прямая $\alpha_{(a-1)(b-1)}$ оказалась зажатой между прямыми $A_{ab-a-b}B_{ab-a-b}$ и A_2B_2. Заметим, что в частях параллелограмма $A_1A_{ab}B_{ab}B_1$, лежащих вне первого квадранта, нет целочисленных точек, кроме концов отрезка $A(a-1; -1)B(-1; b-1)$ (см. рис. 3).

Вначале отметим, что прямая $\alpha_{(a-1)(b-1)}$ пересекает те же стороны параллелограмма $A_1A_{ab}B_{ab}B_1$ и также в нецелочисленных точках D и C (см. рис. 3). Далее, отсюда и из того, что отрезок CD равен гипотенузе $A_{ab}B_{ab}$ основного треугольниеа $OA_{ab}B_{ab}$, следует принадлежность внутренности отрезка CD ровно одной целочисленной точки $M(m; n)$. Более того, целочисленная точка $M(m; n)$ лежит между точками $A_{(a-1)(b-1)}$ и $B_{(a-1)(b-1)}$ отрезка CD. Так как концы отрезка CD по построению могут располагаться только на сторонах $A_1(a-1; -1)A_2$ и $B_1(-1; b-1)B_2$ соответственно трапеции $A_{ab-a-b}A_1A_2A_3$ и $B_{ab-a-b}B_1B_2B_3$, причем не совпадая с концевыми точками. Следовательно, на частях $A_{(a-1)(b-1)}C$ и $B_{(a-1)(b-1)}D$ отрезка CD нет целочисленных точек и поэтому одна единственная целочисленная точка может только принадлежать отрезку $A_{(a-1)(b-1)}B_{(a-1)(b-1)}$. Она не совпадает ни с одной его концевой точкой, так как ордината $(a-1)(b-1)/a$ точки $B_{(a-1)(b-1)}$ лежит между соседними целыми числами $b-2$ и $b-1$ (см. рис. 3), а абцисса $(a-1)(b-1)/b$ точки $A_{(a-1)(b-1)}$ может быть целочисленной только тогда, когда $b \mid (a-1)$. Этот случай нами был рассмотрен раннее.

Чем завершается доказательство теоремы.

Пример 3. Пусть a, $b \in N$ такие, что $a > b$, НОД$(a, b) = 1$ и $b \nmid (a-1)$. Доказать, что существуют такие числа u_0 и v_0, что

$$av_0 - bu_0 = 1, \ \left[\frac{a-1}{b}\right] < u_0 \le a-2, \ 1 < v_0 < b-1.$$

Решение примера. Пусть $x = \widetilde{u}_0$ и $y = \widetilde{v}_0$ — решение уравнения (3.4). В силу теоремы 1 оно единственное, причем число $\widetilde{u}_0$ есть одно из чисел

$$x_1 = a\left[\frac{a-1}{b}\right] - 1, \ x_2 = a - \left[\frac{a-1}{b}\right] - 2, \ \ldots, \ x_{k-1} = 2, \ x_k = 1, \tag{3.5}$$

где $k = a - [(a-1)/b] - 1$. Пусть

$$\widetilde{u}_0 = x_m = a\left[\frac{a-1}{b}\right] - m \tag{3.6}$$

(см. рис. 3). Так как $b \nmid (a-1)$ и НОД$(a, b) = 1$, то число a представимо в виде:

$$a - 1 = b\left[\frac{a-1}{b}\right] + r_b, \ 1 \le r_b \le b-2; \tag{3.7}$$

при $r_b = b-1 \;\Rightarrow\; b|a$ — противоречие. Подставляя (3.6) в уравнение (3.4) вместо x и преобразуя его с учетом (3.7), получаем:

$$ay = (a-1)(b-1) - bx_m = ab - a - b + 1 - ab + b\left[\frac{a-1}{b}\right] + bm =$$
$$b(m-1) + b\left[\frac{a-1}{b}\right] - (a-1) =$$
$$b(m-1) + b\left[\frac{a-1}{b}\right] - b\left[\frac{a-1}{b}\right] - r_b = b(m-1) - r_b. \quad (3.8)$$

Отсюда и в силу единственности неполного частного и остатка следует, что

$$b(m-1) = a\left[\frac{b(m-1)}{a}\right] + r_b.$$

Учитыая (3.7) получаем, что

$$a\left(\left[\frac{b(m-1)}{a}\right] + 1\right) - b\left(\left[\frac{a-1}{b}\right] + m - 1\right) = 1. \quad (3.9)$$

В качестве искомых u_0 и v_0 возьмем значения

$$u_0 = \left[\frac{a-1}{b}\right] + m - 1,\;\; v_0 = \left[\frac{b(m-1)}{a}\right] + 1$$

из (3.9). Покажем, что u_0 и v_0 удовлетворяют нужным требованиям. Действительно, в силу (3.3) имеем

$$\left[\frac{a-1}{b}\right] \le u_0 = m + \left[\frac{a-1}{b}\right] - 1 \le a - 2 \quad (3.10)$$

и

$$1 \le v_0 = \left[\frac{b(m-1)}{a}\right] + 1 \le b - 1. \quad (3.11)$$

Упражнения

1. Найти наименьшее c, при котором уравнение $14x + 11y = c$ имело бы ровно пять целых положительных корней.
   (См. [1, Гл. 3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики. Задачи 3.73.б)]).
   Ответ: $c = 7 \cdot 11 \cdot 14 + 11 = 781$.
   Указание. Воспользоваться методом решения примера 2.

2. В каких пределах должно заключаться c, чтобы уравнение $19x+14y = c$ имело ровно шесть целых положительных решений?
   (См. [1, Гл. 3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики. Задачи 3.74]).
   Ответ: $(7 \cdot 19 + 1) \cdot 14 = 1\,876 \le c < 8 \cdot 14 \cdot 19 = 2\,128$.
   Указание. Воспользоваться методом решения примера 1 и доказательством теоремы 1 Сильвестра.

3. Уравнение $bx + ay = c$ с НОД$(a, b) = 1$ имеет ровно $n(\ge 1)$ решений в целых неотрицательных числах.

(a) Доказать, что c удовлетворяет неравенствам

$$(n-1)ab \le c \le (n+1)ab - a - b.$$

(b) Доказать, что условие

$$nab - a - b + 1 \le c \le nab - 1$$

является достаточным для того, чтобы уравнение $xb + ay = c$ имело ровно n целочисленных неотрицательных решений.
(См. [1, Гл. 3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики. Задачи 3.79]).
Указание. Воспользоваться методом решения примера 1 и доказательством теоремы 1 Сильвестра.

4. Отметим на прямой красным цветом все точки вида $81x + 100y = c$, x, $y \in N$, и синим цветом остальные целые точки. Найдите на прямой такую точку, что любая красная точка имела симметричную относительно неё синую точку.
(Условие этой задачи изменено по сравнению с задачей 3.80 из [1, Гл. 3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики. Задачи 3.80 (с.39, 216–217)], так как условие указанной задачи не корректно. Если существует точка с указанными свойствами, то вследствие этого красных точек должно быть бесконечно много, как и синих. А по теореме 1 Сильвестра красных точек на любой прямой $81x + 100y = c$, x, $y \in N$ конечно).
Указание. Воспользоваться методом решения примера 1.

5. Найти все натуральные a, при которых уравнение $1\,001x + ay = 1\,001(a-1)$ имеет единственное положительное целочисленное решение.
Ответ: $a \in N:$ НОД$(1\,001; a) = 1,\ 1\,001 \nmid (a-1),\ (a-1) \nmid 1\,001.$
Указание. Воспользоваться методом доказательства теоремы 1 Сильвестра.

6. При каких натуральных числах c уравнение $7|x| + 9|y| = c$ имеет количество корней в целых числах, кратное четырем?
Указание. Воспользоваться методом решения примера 1 и упражнением 3.

§ 4. Исследовательские задачи

Данные исследовательские задачи связаны с нахождением формул для чисел Фробениуса $F(a_1, a_2, a_3)$ чисел a_1, a_2, a_3 из множества M, отличного от множества натуральных чисел N (см. опредление 3).

Уже упоминалось о трудности построения формулы для $F(a_1, a_2, a_3)$, когда $a_1, a_2, a_3 \in N$. Для некоторых множеств M формулы, задающие числа Фробениуса $F(a_1, a_2, a_3)$ построены; см., например, [1, Гл. 3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики. Задачи 3.77–78].

Пусть $OXYZ$ — прямоугольная система координат, I — первый октант, определяемый положительными направлениями осей координат. Уравнение плоскости в системе координат $OXYZ$ задается уравнением

$$\alpha_{a_4}: \ a_1 z + a_2 y + a_3 z = a_4 \tag{4.1}$$

первой степени от переменных x, y, z при фиксированных вещественных числах a_1, a_2, a_3, a_4, первые три из которых одновременно не равны нулю. Аналогично тому, как для прямой определяется уравнение в отрезках на осях, для плоскости вводится уравнение в отрезках на осях

$$\alpha_{abc}: \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{4.2}$$

(см. (1.2) и (1.2) §1). Геометрически плоскость α_{abc} пересекает оси координат в точках $A_{abc}(a; 0; 0)$, $B_{abc}(0; b; 0)$ и $C_{abc}(0; 0; c)$. Вследствие чего появляется тетраэдр $OA_{abc}B_{abc}C_{abc}$. Этот тетраэдр по аналогии с основным треугольником прямой назовем *основным тетраэдром плоскости или уравнения, определяющего эту плоскость.*

Задача 1. Описать множество P натуральных чисел, для которых грань $A_{abc}B_{abc}C_{abc}$ основного тетраэдра $OA_{abc}B_{abc}C_{abc}$ плоскости α_{abc} (см. (4.2)) имеет целочисленные вершины и не содержит других целочисленных точек. Найти формулу для чисел Фробениуса $F(p_1, p_2, p_3)$, где $p_1,\ p_2,\ p_3\ \in\ P$.

Задача 2. Построить бесконечное подмножество M натуральных чисел N и найти формулу для чисел Фробениуса $F(m_1, m_2, m_3)$, где $m_1,\ m_2,\ m_3\ \in\ M$ со следующим свойством: $F(m_1, m_2, m_3)$ есть наименьшее число, при котором уравнение

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = g$$

с НОД$(m_1, m_2, m_3) = 1$ имеет решения, состоящее из элементов множества $M \cup \{0\}$ для любого его элемента $g \geq F(m_1, m_2, m_3)$.

См. [1, Гл. 3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики. Задачи 3.77–78], а также [2, Последную главу, в которой рассматриваются числа Фробениуса].

Литература

[1] Алфутова Н. В., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М: МЦНМО, 2005. — 320 с. http://www.alleng.ru/d/math/math227.htm/ http://www.mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf .

Аннотация. Настоящее пособие представляет собой сборник задач по математике, предназначенный прежде всего для учеников старших классов с углубленным изучением математики, интересующихся точными науками. Он также будет полезен преподавателям математики и студентам, изучающим математику в высших учебных заведениях. Значительная часть материала может быть использована для исследовательской работы школьников. Основу сборника составляют задачи к курсу алгебры, который в 1995–2000 годах читался О. А. Чалых, Н. Б. Алфутовой и А. В. Устиновым в школе-интернате им. А. Н. Колмогорова при МГУ. В приложении А приведена программа этого курса. Для того, чтобы сделать содержание книги более широким и целостным, авторы включили в нее дополнительный материал, собрав и упорядочив задачи из других источников.

Математические курсы, читаемые в школе-интернате им. А. Н. Колмогорова, традиционно содержат разделы, которые можно назвать смежными. Они находятся на стыке алгебры с комбинаторикой, геометрией, теорией чисел и математическим анализом. Поэтому некоторые задачи из книги имеют к алгебре лишь косвенное отношение. Эти задачи призваны подчеркнуть связь различных разделов математики и проиллюстрировать многообразие методов.

В каждой главе кратко излагается теоретический материал, необходимый для понимания задач. В конце задачи иногда даются ссылки на задачи или литературу, которые непосредственно связаны с данным материалом.

[2] Арнольд В. И. Эксперементальные наблюдения математических фактов. М: МЦНМО, 2005.

Аннотация. Лекция 4. Геометрия *чисел Фробениуса* для аддитивных полугрупп. В данной лекции проводятся исследования чисел Фробениуса посредством заданий дополнительны условияй на коэффициенты для трехмерного случая, что представляет интерес для исследовательской задачи по числам Фробениуса, выставленной в ж/ж, см. ниже.

[3] Галламов М. М. *Подраздел I.4. Диофантовы уравнения. Приложение.*
https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=explorer&chrome=true&srcid=
0B2H1zm6CQXwlOGUxMjcxNjktOGFjMC00YTE2LTliNTEtMzIyZmE3ZTBmN2E3&hl=en_US

Аннотация. Выкладывается часть материала по уравнениям в целых числах, состоящая из четырех параграфов. В первом приводятся необходимые сведения для изложения методов решения, построенных на свойствах делимости; второй посвящен линейным уравнениям; третий — методам решений нелинейных уравнений, основанных на делимости; четвертый — задания, которые решаются на основе методов делимости. Большое внимание уделяется исследованию линейных уравнений с дополнительными условиями, в частности, рассматриваются числа Фробениуса и в связи с ними теорема Сильвестра, а также предлагаются исследовательские задачи, связанные с ними. Доказательство теоремы Сильвестра оригинально и вполне доступно восьмикласснику. Первый параграф, а также список литературы содержат сведения, которые не используются в выставленном материале, но они необходимы для изложения других методов решения диофантовых уравнений. По мере подготовки материала он будут добавляться к уже выставленному. В их числе такие методы решения диофантовых уравнений, как алгебраические, геометрические, аналитические, итерационные, комбинаторные, а также методы, основанные на неравенствах и оценках. Подраздел I.4. Диофантовы уравнения относится к разделу I. Арифметика и представляет собой первый подраздел восьмого раздела программы по элементарной математике, выставленной в “Живом журнале” по адресу: http://gallamov.livejournal.com (см. также статью “Общая характеристика программы по элементарной математике”). Пожелания и предложения о сотрудничестве можете направлять по E-mail: gallamov@gmail.com

Вы также можете получить соответствующую консультацию и помощь.

Галламов Мансур Муллагаянович,
доцент кафедры элементарной математики МПГУ,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: gallamov@gmail.com

Прямые Эйлера и точки Фейербаха

Е. Д. Куланин, Н. А. Шихова

Изучены свойства трех прямых, соединяющих точки касания вписанной в треугольник окружности, а также аналогичных прямых, соединяющих точки касания вневписанных окружностей. Такая конфигурация приводит к треугольникам, центры окружностей Эйлера которых лежат на окружности Эйлера базового треугольника, а прямые Эйлера проходят через точки Фейербаха базового треугольника. Таким образом обобщены результаты, полученные в статье Е. Д. Куланина «Прямые Эйлера и точки Фейербаха прямоугольного треугольника», опубликованной в четвертом номере нашего журнала в 2007 году. Знакомство с ней не обязательно, но полезно для читателя. Изложение доступно заинтересованному старшекласснику.

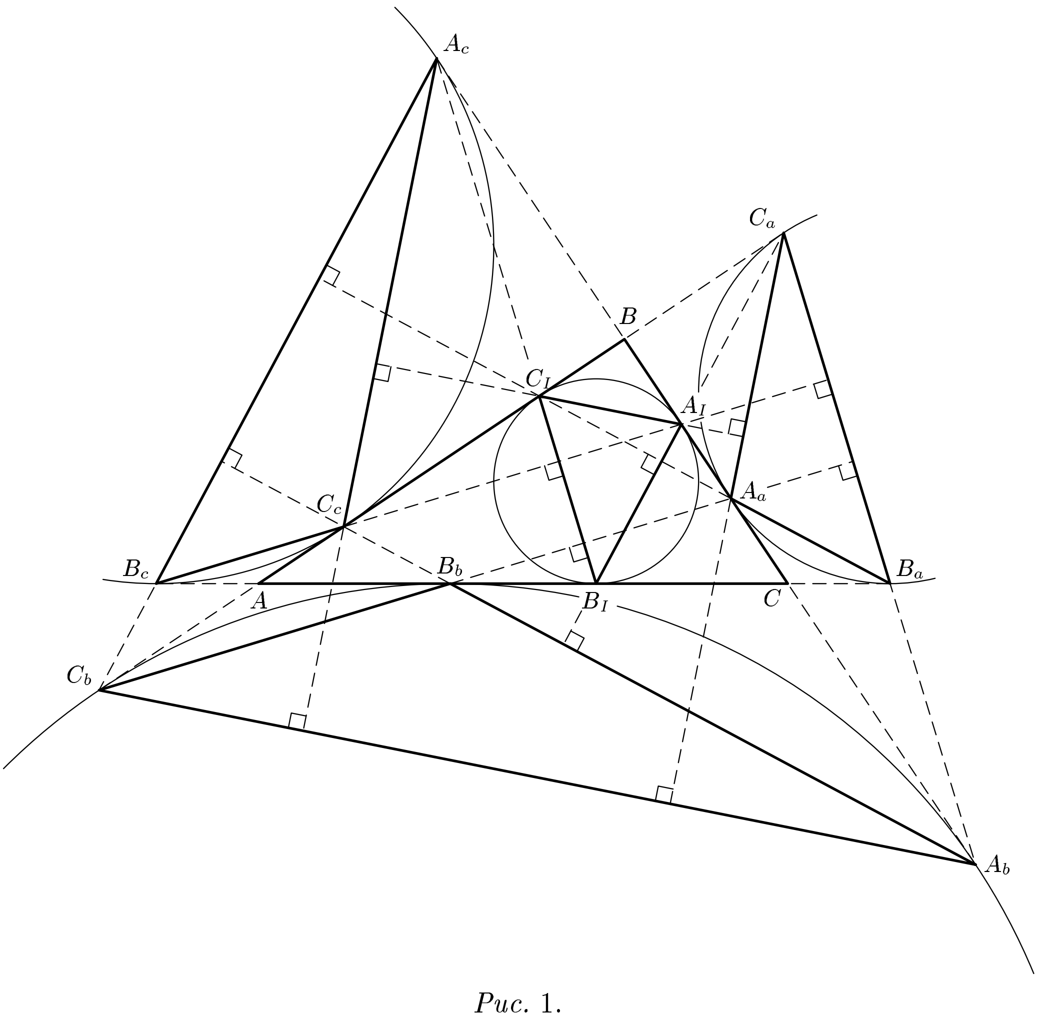


Рис. 1.

В статье «Прямые Эйлера и точки Фейербаха прямоугольного треугольника» подробно изучалась конфигурация, изображенная на рисунке 1. Для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом $\angle B$ были построены вписанная и три вневписанных окружности; на рис. 1. A_I, B_I, C_I — точки касания вписанной окружности; A_a, B_a, C_a, A_b, B_b, C_b, A_c, B_c, C_c — точки касания вневписанных окружностей. В названной статье рассматривались различные треугольники с вершинами в этих точках и их свойства. В частности, было показано, что центры окружностей Эйлера треугольников

$$A_aC_aC_I, A_aC_aA_I, A_IC_IA_a, A_IC_IC_a, A_cC_cC_I, A_cC_cA_I, A_IC_IA_c, A_IC_IC_c,$$

$$A_bC_bC_a, A_bC_bA_a, A_aC_aC_b, A_aC_aA_b, A_bC_bA_c, A_bC_bC_c, C_cA_cC_b, C_cA_cA_b,$$

$$A_aA_cC_b, C_IA_cC_b, A_aC_IC_b, A_aA_cC_I, C_cC_aA_b, A_IC_aA_b, C_cA_IA_b, C_cC_aA_I$$

лежат на окружности Эйлера базового треугольника ABC. Кроме того, было показано, что прямая Эйлера каждого из этих 24 треугольников проходит через одну из точек Фейербаха базового треугольника ABC.

Для доказательств очень существенным был факт, что ортоцентры (точки пересечения высот) изученных треугольников входят в ту же конфигурацию. Например, ортоцентром треугольника $A_aC_aC_I$ является точка A_I, ортоцентром треугольника $A_aC_aA_I$ является точка C_I и т.д. Таким образом, точки A_a, C_a, C_I и A_I образуют орточетверку, то есть обладают следующим свойством:

$$A_aC_a \perp C_IA_I, \quad A_aC_I \perp C_aA_I, \quad A_aA_I \perp C_IC_a. \tag{0}$$

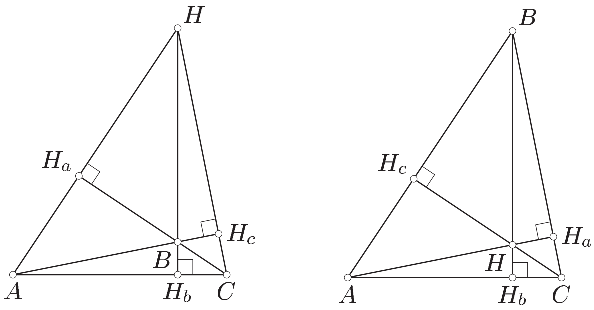


Рис. 2. Ортоцентры

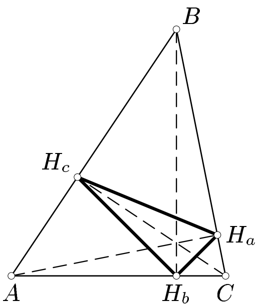


Рис. 3. Высотный треугольник

При этом соотношение $A_aA_I \perp C_IC_a$ обусловлено тем, что базовый треугольник ABC — прямоугольный. В случае непрямоугольного базового треугольника свойство (0) не выполняется, поэтому требуется найти его аналоги.

В данной статье мы рассказываем о свойствах орточетверок; о прямых, на которых лежат стороны вписанного и вневписанных треугольников (их вершинами служат точки касания вписанной и вневписанных окружностей); изучаем свойства точек пересечения этих прямых. Это позволяет найти орточетверки, аналогичные орточетверкам, полученным для прямоугольного треугольника. После этого доказательства из статьи 2007 года переносятся на общий случай почти дословно[1].

1. Орточетверка

В треугольнике ABC мы проведем высоты AH_a, BH_b, CH_c. Они обязательно пересекаются в одной точке. Ее называют *ортоцентром* и по традиции обозначают буквой H.

Четыре точки A, B, C, H можно разбить на две пары; каждая пара будет определять прямую, и обе прямые непременно будут перпендикулярны:

$$AB \perp CH, \quad BC \perp AH, \quad AC \perp BH. \tag{1}$$

Перпендикулярные – значит, ортогональные. Поэтому четыре точки A, B, C, H, обладающие свойством 1, будем называть *орточетверкой.*

Свойство 1 говорит о том, что все точки орточетверки равноправны: любые три из них могут служить вершинами треугольника, тогда оставшаяся окажется его ортоцентром. Действительно, посмотрим на $\triangle AHC$ (рис. 2). Его высоты лежат на прямых HH_b, CH_a, AH_c и пересекаются в точке B. Это значит, что она и есть ортоцентр треугольника $\triangle AHC$. Точно так же, точки A и C — ортоцентры треугольников HBC и ABH. Из одной орточетверки получается четыре треугольника, и в каждом из них основания высот будут одними и теми же; на рисунке 2

[1]Эти и другие вопросы подробнее обсуждаются в нашей книге «Геометрический фейерверк», которая готовится к печати в издательстве «БИНОМ. Лаборатория знаний».

это точки H_a, H_b, H_c. Треугольник $H_aH_bH_c$ (см. рис. 3) называют ортотреугольником, ортоцентрическим треугольником, а по-русски — высотным треугольником треугольника $\triangle ABC$. У всех треугольников $\triangle ABC$, $\triangle HBC$, $\triangle AHC$, $\triangle ABH$ один и тот же высотный треугольник; его поэтому можно называть *высотным треугольником орточетверки* A, B, C, H.

Опишем одну интересную орточетверку, связанную с базовым треугольником (вообще-то их много). Проведем из вершин треугольника ABC биссектрисы внутренних и внешних углов и посмотрим, где они пересекаются (рис. 4). Все три внутренние биссектрисы пересекаются в точке I — центре вписанной окружности. Точки попарных пересечений внешних биссектрис обозначим I_a, I_b, I_c. Внешние биссектрисы, выходящие из одной вершины, лежат на одной прямой, поэтому вершины A, B, C лежат на сторонах треугольника $\triangle I_aI_bI_c$.

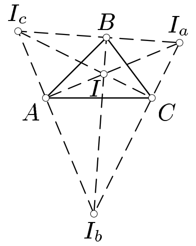


Рис. 4.

Надо бы еще доказать, что через его вершины проходят и внутренние биссектрисы $\triangle ABC$. Например, что точка I_b лежит на луче BI. Это просто. Раз она лежит на внешних биссектрисах, то равноудалена от прямых BC и AC, а также от AB и AC. Получается, что она равноудалена от прямых AB и BC, то есть лежит на биссектрисе угла B.

Биссектрисы внешнего и внутреннего углов с одной вершиной перпендикулярны, и как раз поэтому точки I, I_a, I_b, I_c образуют орточетверку, для которой $\triangle ABC$ — высотный треугольник.

Теперь самое время начертить вневписанные и вписанную окружности.

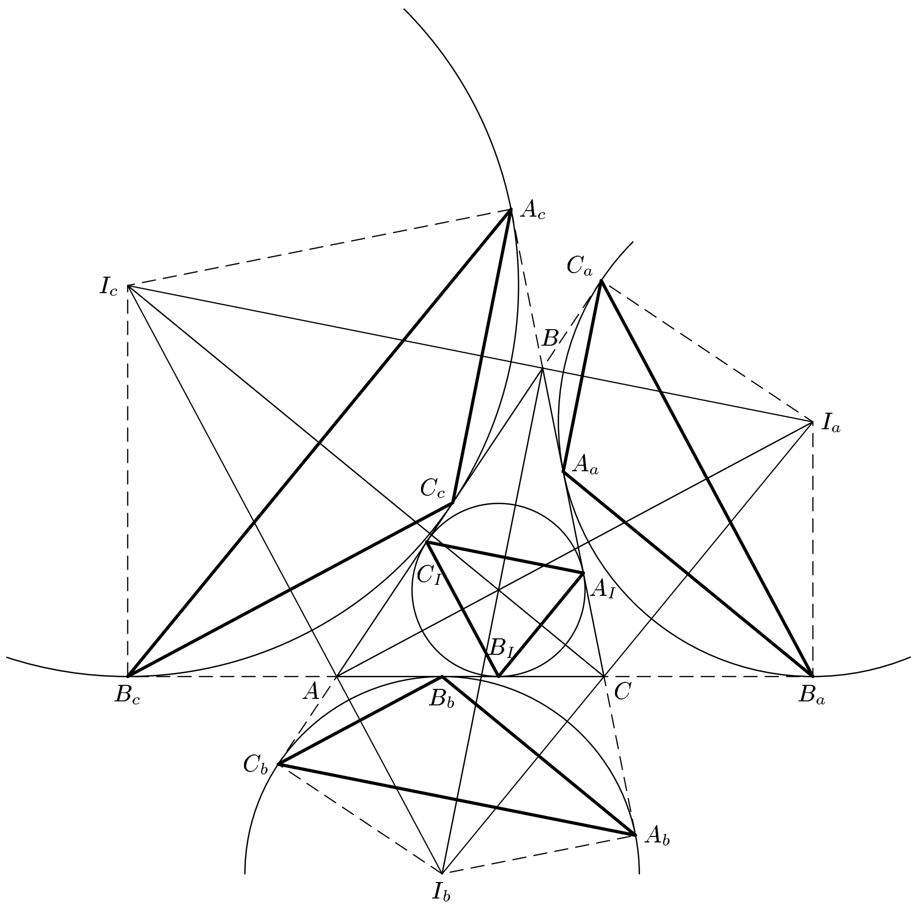


Рис. 5. Вписанная и вневписанные окружности

На рисунке 5 обозначены точки касания этих окружностей с прямыми, на которых лежат стороны базового треугольника ABC. Например, A_a, B_a, C_a – точки касания вневписанной окружности с центром I_a; у всех этих четырех точек нижние индексы одинаковые. A_I, B_I, C_I — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

Если соединить точки касания каждой окружности, получатся еще четыре треугольника — они тесно связаны с исходным треугольником ABC. Треугольник $A_IB_IC_I$ мы будем называть *вписанным*, а треугольники $A_aB_aC_a$, $A_bB_bC_b$, $A_cB_cC_c$ — *вневписанными.*

Утверждение 1. *Центры вписанной и трех вневписанных окружностей произвольного треугольника образуют орточетверку, причем базовый треугольник является высотным треугольником этой орточетверки.*

2. Считаем длины отрезков

На рисунке 5 мы продлим некоторые прямые, отметим получившиеся точки пересечения, выделим среди них орточетверки и будем изучать их свойства, для этого мы подробнее рассмотрим полученный рисунок.

Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны. Это позволяет найти длины многих отрезков в изучаемой нами конфигурации. Мы обозначили все длины на рисунках 6 и 7.

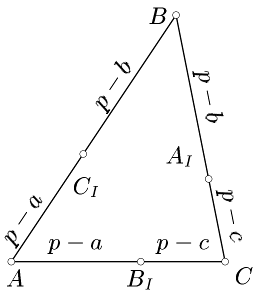


Рис. 6. Длины некоторых отрезков

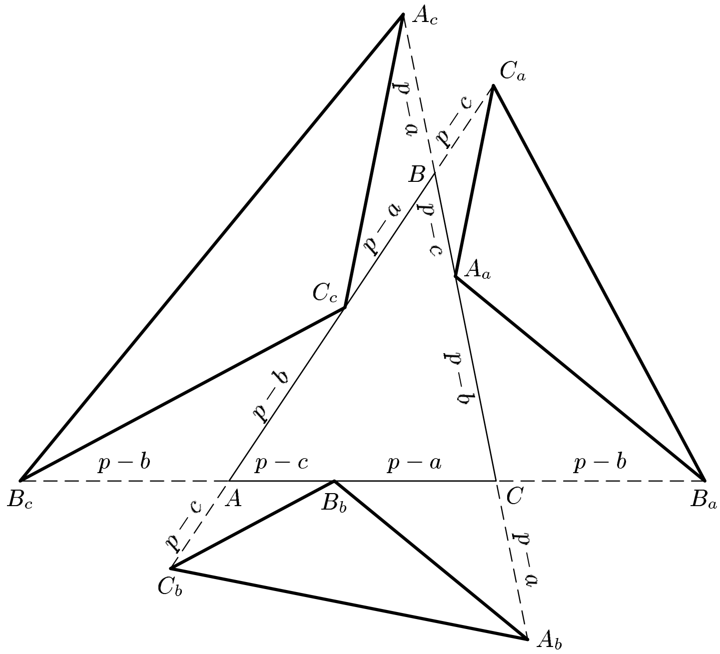


Рис. 7. Еще длины отрезков

$\boxed{1}$ Проверьте, что длины отрезков на этих рисунках отмечены верно.

Осталось только сделать несколько замечаний.

1) Легко посчитать, что $B_cB_b = a$, $B_aB_b = c$, и, точно так же, $B_cB_I = c$, $B_aB_I = a$. Иными словами, точка B_b, как и точка B_I, разбивает отрезок B_aB_c на два отрезка длины a и c. На рисунке 8 жирными линиями выделены пять отрезков длины a.

   $\boxed{2}$ На этом же рисунке 8 найдите пять отрезков длины b и пять отрезков длины c.

2) Точки B_b и B_I делят сторону AC в одном и том же отношении, только считая от разных концов; поэтому эти две точки симметричны относительно M_b — середины AC. По той же причине относительно M_b симметричны точки B_c и B_a, а значит, $B_cM_b = B_aM_b = \frac{a+c}{2}$. Разумеется, точки A и C тоже симметричны относительно M_b.

3) На рисунке 8 точка B_I лежит между точками B_a и B_b, но так бывает не всегда; она может попасть и на отрезок B_cB_b — это зависит от углов треугольника ABC. У нас он

«завалился» вправо, но мог бы вполне завалиться влево. Поэтому длина отрезка B_IB_b в одних треугольниках равна $a-c$, а в других — $c-a$. Можно записать, что она всегда равна $|a-c|$.

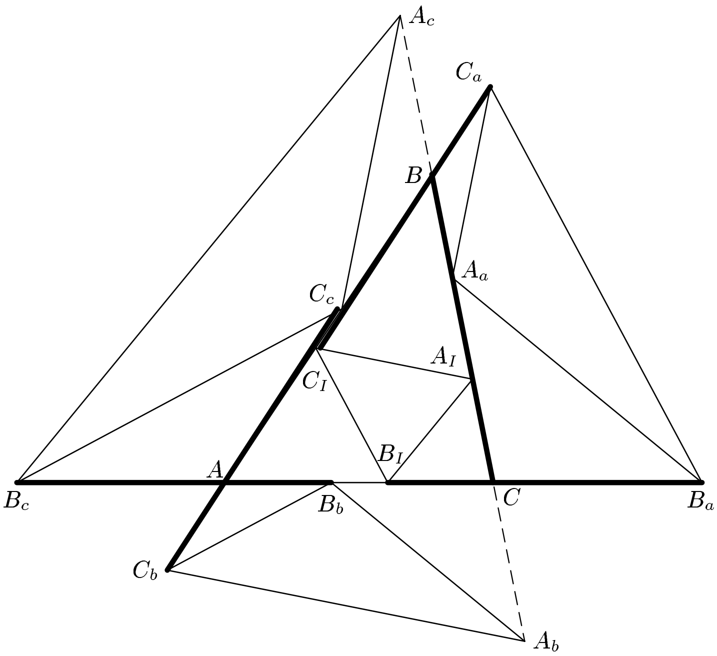


Рис. 8. Отрезки длины a

3. Ищем параллельные и перпендикулярные прямые

Поскольку A_I, C_I — точки касания вписанной окружности, отрезок A_IC_I перпендикулярен биссектрисе BI треугольника ABC; по той же причине ей перпендикулярен отрезок A_bC_b. Раз эти две прямые перпендикулярны внутренней биссектрисе BI, они параллельны прямой, на которой лежат внешние биссектрисы этого угла, а это значит, что $A_IC_I||A_bC_b||I_aI_c$.

Аналогично, точки A_a, C_a — точки касания вневписанной окружности, поэтому прямая A_aC_a перпендикулярна внешней биссектрисе BI_a треугольника ABC. То же самое можно сказать о прямой A_cC_c. Учитывая, что внешняя биссектриса перпердикулярна внутренней, можем записать $A_cC_c||A_aC_a||BI$.

Получается, что прямые A_cC_c и A_aC_a параллельны друг другу и перпендикулярны каждой из прямых A_IC_I и A_bC_b. Такая же история происходит с другими прямыми, на которых лежат стороны вписанного и вневписанных треугольников.

Мы взяли 12 прямых, на которых лежат стороны вписанного треугольника $A_IB_IC_I$ и вневписанных треугольников $A_aB_aC_a$, $A_bB_bC_b$, $A_cB_cC_c$. Эти 12 прямых распадаются на три четверки. В каждой четверке две пары параллельных прямых, причем прямые одной пары перпендикулярны прямым другой пары. Так что каждая четверка дает ровно четыре точки, в которых прямые пересекаются под прямым углом, а все 12 прямых — ровно 12 таких точек. Мы отметили эту дюжину точек $A_1, A_2, \ldots, C_4$ на рисунке 9.

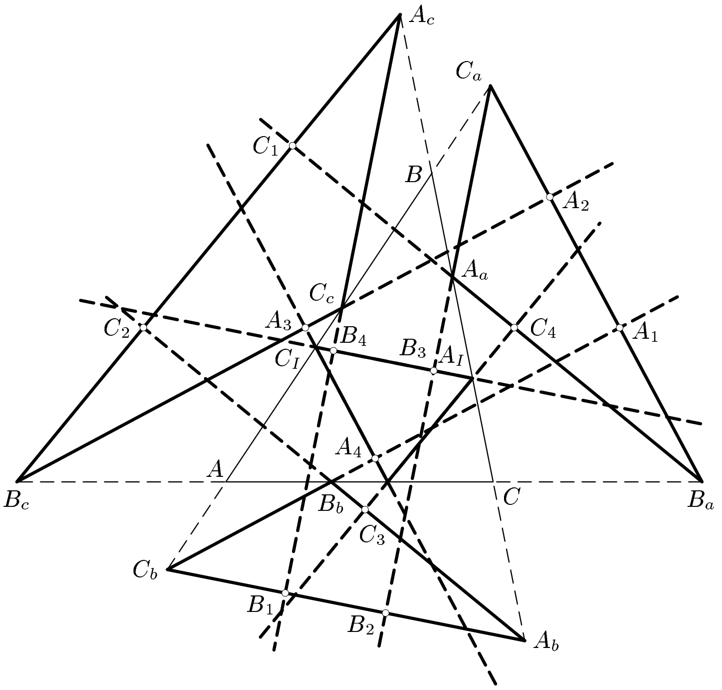


Рис. 9. Дюжина прямых и дюжина точек

Точки $A_1, \ldots A_4$ лежат на прямых, параллельных внутренней и внешним биссектрисам угла A треугольника $\triangle ABC$, аналогично обозначены точки $B_1, \ldots, C_4$.

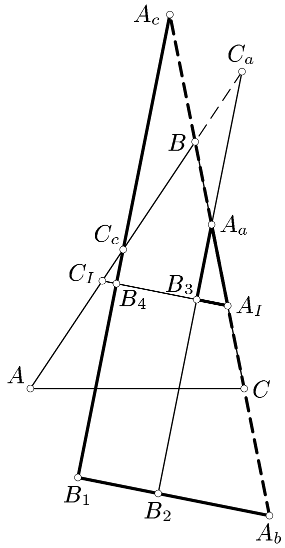


Рис. 10.

4. Дюжина точек. Средние линии

Теперь, когда у нас под рукой столько перпендикулярных прямых, мы поищем всякие прямоугольные треугольники — это должно нас к чему-нибудь хорошему привести. При этом мы считаем, что базовый треугольник ABC разносторонний.

Обозначим B_1 точку пересечения прямых A_cC_c и C_bA_b, а B_3 — A_aC_a и C_IA_I. Треугольники $A_cB_1A_b$ и $A_aB_3A_I$ — прямоугольные (рис. 10); гипотенузы у них лежат на одной прямой, а соответственные катеты параллельны. Поэтому треугольники $A_cB_1A_b$ и $A_aB_3A_I$ подобны; при желании можно даже подсчитать коэффициент их подобия.

Мы же проделаем дополнительное построение — проведем в этих треугольниках медианы к гипотенузам (рис. 11). Это знаменитые линии в треугольнике ABC, только их трудно «узнать в лицо».

Точка M_a — середина не только отрезка BC, но и отрезка A_cA_b (см. замечание 2 на стр. 27). Поэтому в большем прямоугольном треугольнике медиана к гипотенузе соединяет вершину прямого угла B_1 и середину M_a стороны BC. Как во всяком прямоугольном треугольнике угол $B_1M_aA_b$ между гипотенузой и медианой B_1M_a вдвое больше острого угла $B_1A_cA_b$ и значит, равен β.

Что же это за линия — она проходит через середину стороны BC и наклонена к ней под тем же углом, что и сторона AB? Это средняя линия треугольника ABC. Все сказанное относится и к маленькому прямоугольнику: его медиана B_3M_a тоже лежит на средней линии M_aM_b. Так что точки B_1, B_3, M_a, M_b лежат на одной прямой, содержащей среднюю линию M_aM_b.

Из того, что медиана прямоугольного треугольника вдвое короче его гипотенузы, мы можем найти длины некоторых отрезков (здесь полезно еще раз посмотреть на рис. 7, на котором отмечены длины касательных). Например:

$$B_1M_a = \frac{b+c}{2}; \quad B_3M_a = \frac{c-b}{2} \quad \Rightarrow \quad B_3B_1 = b.$$

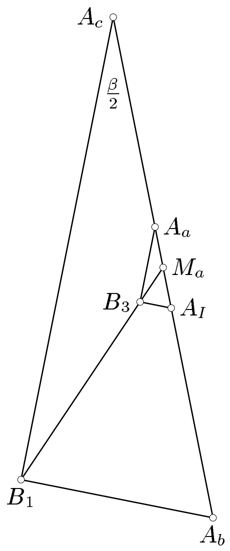


Рис. 11.

Еще раз посмотрим на две пары прямых, которые проходят через точки B_3 и B_1. Это пара параллельных прямых A_cC_c, C_aA_a и перпендикулярные им прямые C_bA_b, C_IA_I. Эти две пары прямых образуют прямоугольник, и как мы только что выяснили, одна из его диагоналей лежит на прямой, содержащей среднюю линию треугольника ABC. Вторая диагональ ничем не хуже первой. Она тоже лежит на прямой, содержащей среднюю линию — M_bM_c. Длины диагоналей одинаковы и равны $B_1B_3 = b$. Как известно, диагонали прямоугольника делятся в точке пересечения пополам, а точка пересечения у них — M_b.

Стороны любого прямоугольника симметричны относительно его центра. Поэтому прямые A_cC_c и C_aA_a симметричны относительно точки M_b, и прямые C_bA_b и C_IA_I — тоже. Аналогичные результаты справедливы и для других прямых из дюжины тех, на которых лежат стороны вписанного и вневписанных треугольников. Двенадцать отмеченных нами точек лежат в вершинах трех прямоугольников, причем центры этих прямоугольников — середины M_a, M_b, M_c сторон треугольника ABC, диагонали этих прямоугольников соответственно равны его сторонам a, b, c, а углы между диагоналями равны углам α, β, γ базового треугольника ABC.

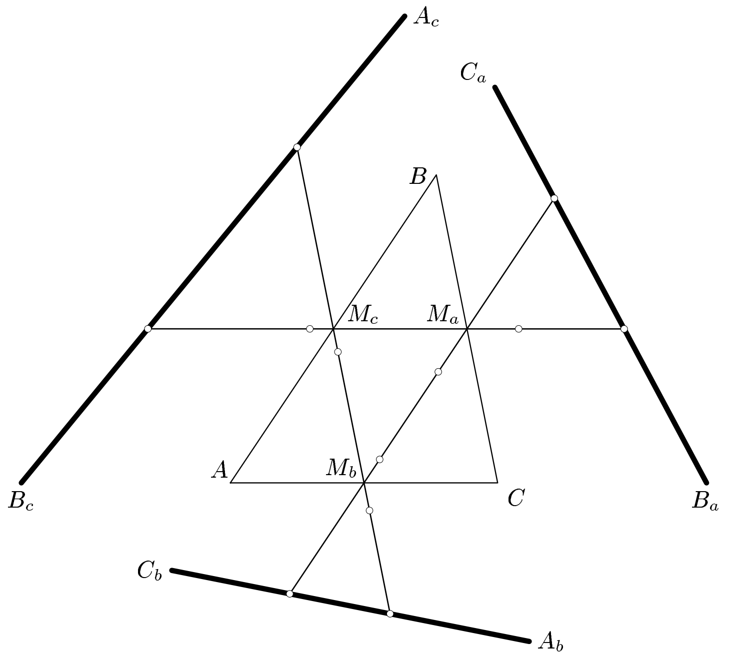


Рис. 12. Отрезки средних линий

$\boxed{3}$ Рассмотрите отрезки прямых, содержащих средние линии треугольника, заключенные между прямыми C_aB_a, A_bC_b, A_cB_c. Каждый из этих отрезков точками дюжины делится на три отрезка поменьше (см. рис. 12). Выразите их длины через длины сторон a, b, c базового треугольника.

$\boxed{4}$ Постройте три концентрические окружности с центром M_b и диаметрами b, $|a-c|$ и $a+c$. Какие точки дюжины и замечательные точки треугольника ABC лежат на этих окружностях?

$\boxed{5}$ 1) Докажите, что высотные треугольники вписанного и трех вневписанных треугольников подобны базовому треугольнику.

2) Докажите, что основания высот вписанного и трех вневписанных треугольников лежат на трех парах параллельных прямых; причем прямые каждой пары параллельны одной из сторон базового треугольника и симметричны относительно соответствующей средней линии.

5. Дюжина точек. Биссектрисы

Точки из дюжины по определению лежат на прямых, содержащих стороны вписанного

и вневписанных треугольников. Мы доказали, что они лежат еще в вершинах специальных прямоугольников и на прямых, содержащих средние линии базового треугольника. Но на рисунках, которые мы сделали до сих пор, отсутствует одна деталь — каждая точка из дюжины лежит еще на биссектрисе или внешней биссектрисе этого треугольника. Сейчас мы это докажем.

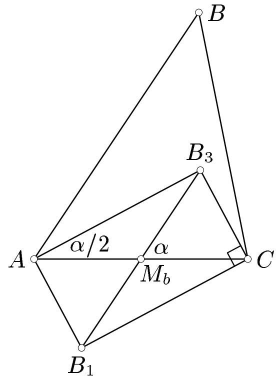


Рис. 13.

Рассмотрим четырехугольник AB_1CB_3 (рис. 13). Его диагонали AC и B_1B_3 равны b и пересекаются в точке M_b, которая делит их пополам. Значит, AB_1CB_3 — прямоугольник. Угол B_3M_bC между его диагоналями — это угол между средней линией M_bM_a и стороной AC треугольника ABC, он равен α. Как во всяком прямоугольнике, угол между диагональю AC и стороной AB_3 вдвое меньше, то есть равен $\alpha/2$. Это и означает, что AB_3 — биссектриса угла BAC. Биссектриса и внешняя биссектриса угла перпендикулярны, стороны прямоугольника тоже, поэтому точка B_1 лежит на внешней биссектрисе угла A треугольника ABC. Похожие прямоугольники и рассуждения можно построить и для других точек из дюжины.

Через каждую из них проходит по четыре замечательные прямые: средняя линия треугольника ABC или ее продолжение; биссектриса или внешняя биссектриса этого же треугольника; две прямых, которые содержат стороны вписанного или вневписанных треугольников. Поэтому наша «полная» картинка должна выглядеть примерно так, как на рисунке 14.

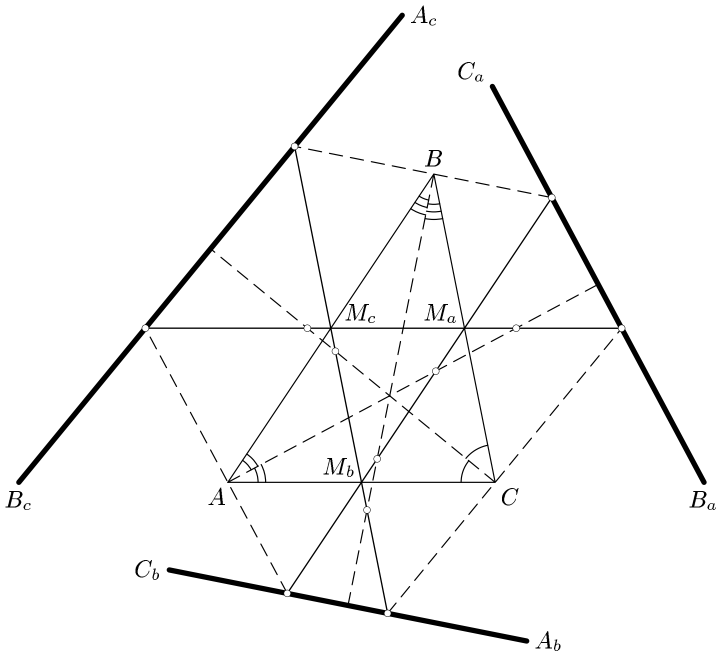


Рис. 14. Дюжина точек. Средние линии и биссектрисы

Подведем итог нашему обсуждению свойств дюжины прямых и дюжины точек.

Утверждение 2. *Прямые дюжины можно разбить на три четверки по две пары, причем в каждой четверке прямые одной пары параллельны, а разных – перпендикулярны.*

Прямые обеих пар симметричны относительно одной и той же середины стороны треугольника ABC. Для каждой из трех четверок своя середина стороны (их ведь тоже три).

Прямые из дюжины образуют три прямоугольника; у каждого прямоугольника диагонали равны длине одной из сторон треугольника, а угол между ними — углу треугольника, противолежащему этой стороне. Пересекаются диагонали в середине соответствующей стороны треугольника. Все шесть диагоналей этих трех прямоугольников лежат на трех прямых, содержащих средние линии базового треугольника.

Каждая из точек дюжины лежит на средней линии треугольника ABC или ее продолжении.

Каждая из точек дюжины лежит на биссектрисе или внешней биссектрисе треугольника ABC.

$\boxed{6}$ 1) Докажите, что точки B_1, B_2, A_1, A_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности (это окружность Конвея[2] треугольника $M_aM_bM_c$). Где находится ее центр? Выразите ее радиус через радиус вписанной окружности и длины сторон треугольника ABC.

2) Докажите, что все точки дюжины лежат на четырех окружностях Конвея (одной основной и трех добавочных) треугольника $M_aM_bM_c$, по шесть точек на каждой окружности; при этом каждая точка лежит на двух окружностях.

6. Дюжина прямых. Высоты

Исследуя дюжину прямых и дюжину точек, мы хотели найти какие-нибудь интересные ортočетверки и изучить их свойства, поэтому мы решили провести высоты треугольника ABC. Ведь в орточетверках точки лежат на ортогональных прямых, и дополнительные перпендикуляры нам не помешают. Итак, сейчас на новом рисунке мы сохраним дюжину прямых, сотрем все средние линии и биссектрисы, а высоты, наоборот, проведем (см. рис. 15)

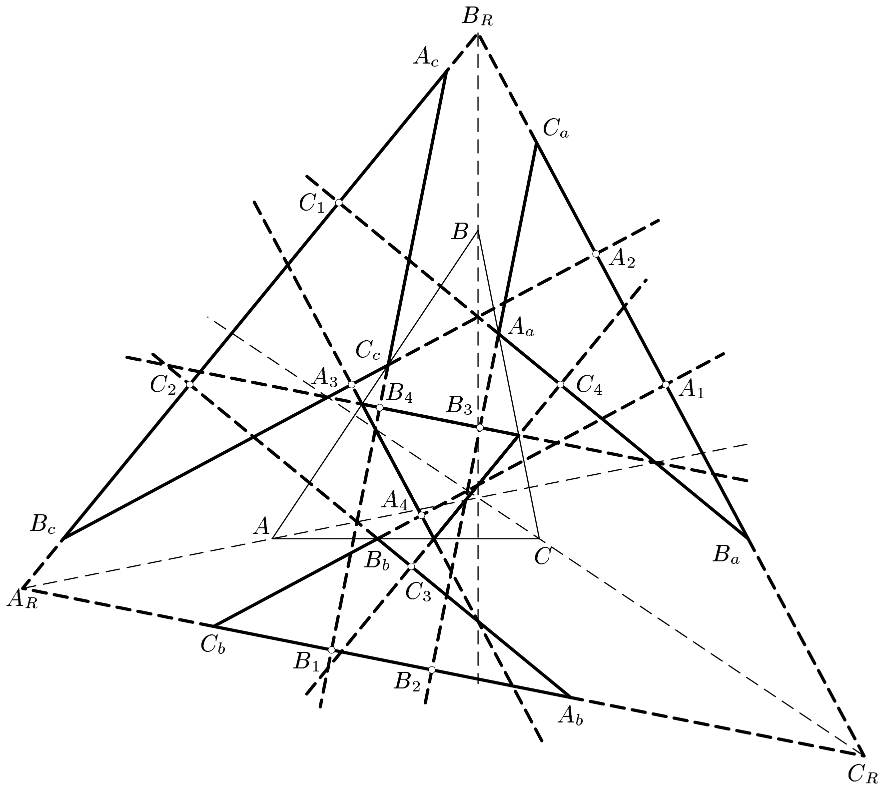


Рис. 15. Высоты и дюжина прямых

По чертежу видно, что точки пересечения некоторых прямых из дюжины лежат на высотах (правда, это еще придется доказывать).

[2]Об окружностях Конвея подробно и интересно рассказано в статье А.Г.Мякишева «Прогулки по окружностям: от Эйлера до Тэйлора», опубликованной журнале «Математическое образование», 1(57), январь-март 2011г.

Например, докажем, что точка B_R пересечения прямых B_cA_c и B_aC_a лежит на прямой BH. Главная идея такая. Точку пересечения прямых B_cA_c и BH мы обозначим B_R^1, а точку пересечения прямых B_aC_a и BH — B_R^2. Потом покажем, что отрезки B_R^1B и B_R^2B равны (между прочим, радиусу вневписанной окружности с центром в точке I_b), и отсюда получим, что точки B_R^1 и B_R^2 совпадают, то есть все три прямые B_cA_c, B_aC_a и BH пересекаются в одной точке, она уже получила обозначение: B_R.

Итак, вначале покажем, что $B_R^1B = I_bB_b$.

Проведем через вершину B прямую, параллельную стороне AC, до пересечения с прямой B_cA_c в точке Q (рис. 16). Мы собираемся установить равенство прямоугольных треугольников B_R^1BQ и I_bB_bC.

Треугольник B_cA_cC равнобедренный (касательные CB_c и CA_c к вневписанной окружности с центром I_c равны), поэтому треугольник QA_cB тоже равнобедренный, и $BQ = BA_c = p - a$. Такую же длину имеет отрезок CB_b (см. рис. 7).

Поэтому в прямоугольных треугольниках B_R^1BQ и I_bB_bC катеты BQ и CB_b равны. Прилежащие к ним острые углы тоже равны, ведь прямые I_bC и B_cA_c параллельны. Значит, эти два треугольника равны, и длина отрезка B_R^1B равна радиусу R_b вневписанной окружности с центром I_b.

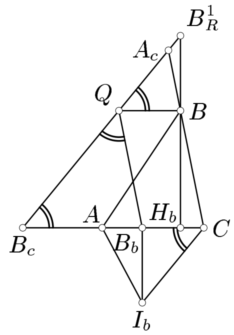


Рис. 16.

Прямая B_aC_a, которая пересекает прямую BH в точке B_R^2, ничем не хуже B_cA_c, поэтому длина B_R^2B тоже равна R_b. Значит, B_R^2 и B_R^1 — одна и та же точка, мы обозначаем ее B_R, и она лежит на прямой BH. Аналогично можно получить доказательства и для других точек пересечения.

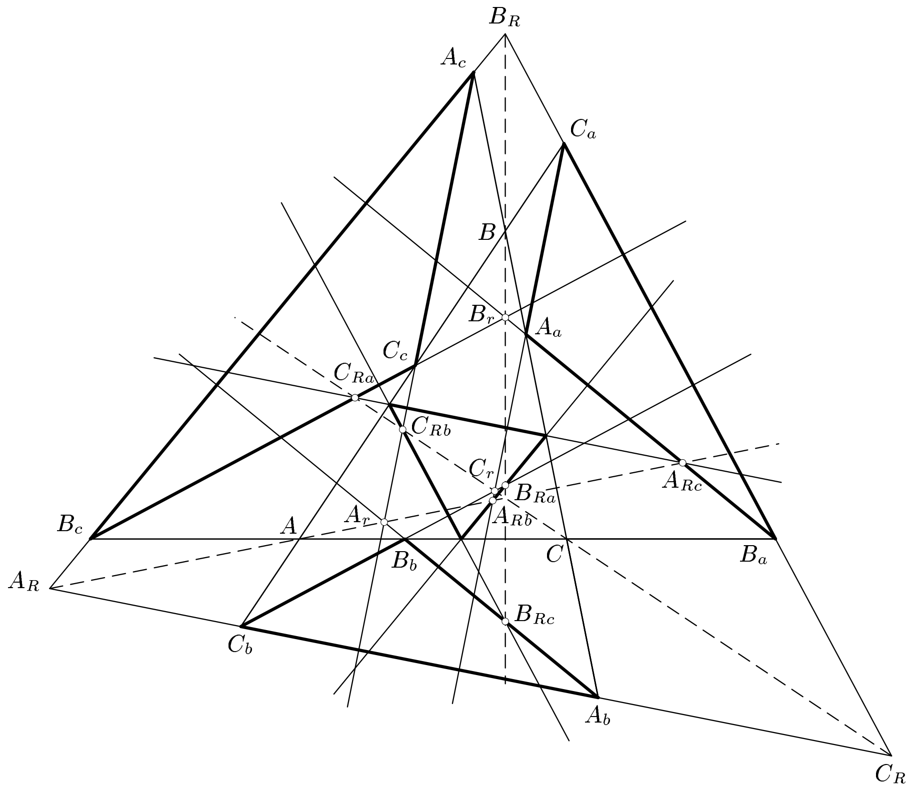


Рис. 17. Откладываем радиусы на высотах

Вот как получен рисунок 17.

На прямой, содержащей высоту BH, от вершины B откладываем отрезки, равные по длине радиусам вписанной и вневписанных окружностей. Если отложить радиус вневписанной окружности с центром I_b вне треугольника, то получим точку B_R — в этом мы уже убедились. Если отложить радиус вписанной окружности внутрь треугольника — получим точку B_r пересечения прямых B_cC_c и B_aA_a.

А если от вершины B отложить внутрь треугольника отрезки, длины которых равны радиусам R_a и R_c вневписанных окружностей с центрами в I_a и I_c, то получатся точки B_{Ra} и B_{Rc}. Точно так же можно откладывать радиусы от вершин A и C. Обозначения — на рисунке 17.

$\boxed{7}$ На высоте BH_b треугольника ABC отложим внутрь от вершины B радиусы R_a и R_c двух вневписанных окружностей и радиус r вписанной, — получим точки B_{Ra}, B_{Rb} и B_r. Докажите, что

1) точка B_r лежит на пересечении прямых A_aB_a и B_cC_c;

2) точка B_{Ra} лежит на пересечении прямых C_bB_b и A_IB_I;

3) точка B_{Rc} лежит на пересечении прямых A_bB_b и C_IB_I.

Для доказательства полезно обратиться к рисунку 18.

$\boxed{8}$ Рассмотрите конфигурацию полностью — дюжину прямых и все точки их пересечения. Найдите орточетверки в этой конфигурации.

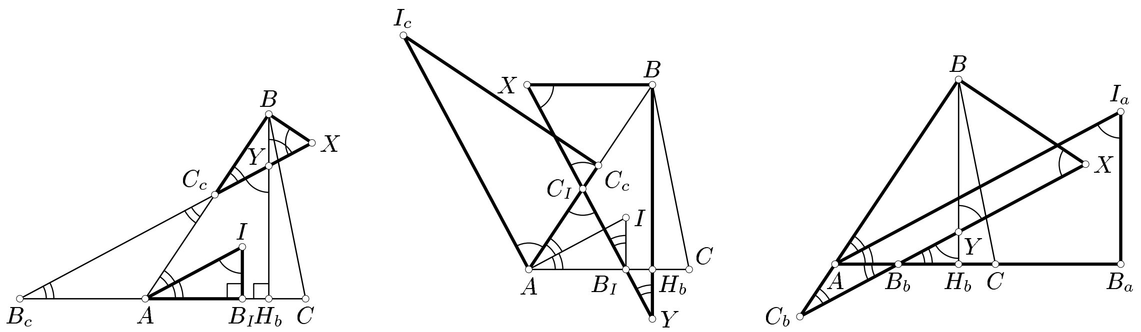


Рис. 18

7. Прямая и окружность Эйлера

В нашей статье мы примем без доказательства некоторые свойства окружности Эйлера. Отметим, что середины сторон треугольника ABC мы обозначаем M_a, M_b, M_c, основания высот — H_a, H_b, H_c, ортоцентр — H, середины отрезков AH, BH, CH — E_a, E_b, E_c. Перечислим нужные нам свойства.

Утверждение 3. *Для любого треугольника середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности — окружности Эйлера этого треугольника.*

Утверждение 4. *В окружности Эйлера диаметры M_aE_a, M_bE_b, M_cE_c перпендикулярны соответственно хордам H_bH_c, H_aH_c, H_aH_b.*

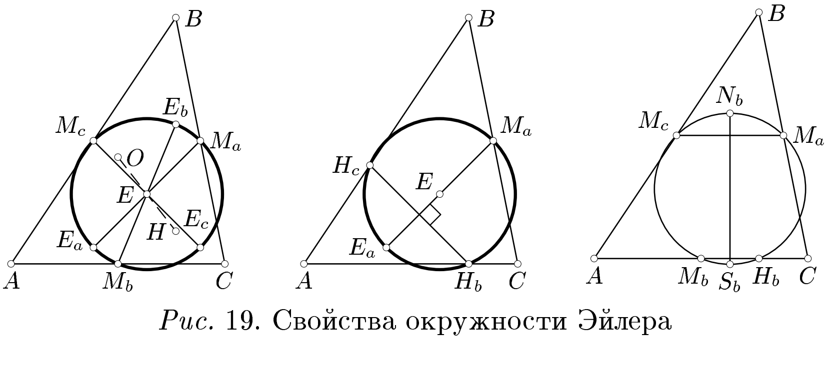


Рис. 19. Свойства окружности Эйлера

Точки M_b, H_b делят окружность Эйлера треугольника ABC на две дуги. Обозначим N_b середину дуги, лежащей по одну сторону с точкой B от прямой M_bH_b, а S_b — середину другой дуги (см. рис. 19).

Утверждение 5. *Точки N_b и S_b диаметрально противоположны и делят пополам дуги, на которые окружность Эйлера делят середины сторон M_a и M_c.*

Как мы видели, у четырех треугольников ABC, ABH, AHC, HBC одной орточетверки A, B, C, H общий высотный треугольник $H_aH_bH_c$. Поэтому у всех этих четырех треугольников общая окружность Эйлера — описанная окружность треугольника $H_aH_bH_c$. К нашему списку мы добавим еще одно утверждение.

Утверждение 6. *Для любой орточетверки A, B, C, H треугольники ABC, ABH, BCH, CAH имеют общую окружность Эйлера.*

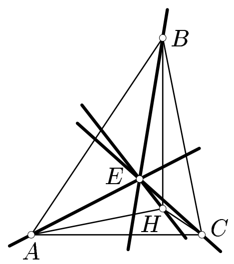


Рис. 20. Прямые Эйлера орточетверки A, B, C, H

Разумно называть ее *окружностью Эйлера орточетверки* A, B, C, H.

Хорошо известно, что прямая Эйлера — чемпион по количеству лежащих на ней замечательных точек треугольника. Напомним, что в частности, на ней лежат точки O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, E — центр окружности Эйлера, G — точка пересечения медиан. Легко доказать, E — середина отрезка OH. Прямая Эйлера определена для всех треугольников, кроме равносторонних.

Зная, где находится центр окружности Эйлера треугольников орточетверки, несложно построить их прямые Эйлера. Они проходят через центр окружности Эйлера (один и тот же для всех) и через ортоцентры, которые всегда входят орточетверку. Очевидно, у всех четырех прямых Эйлера есть одна общая точка — центр окружности Эйлера (рис. 20).

8. Окружности Эйлера некоторых треугольников

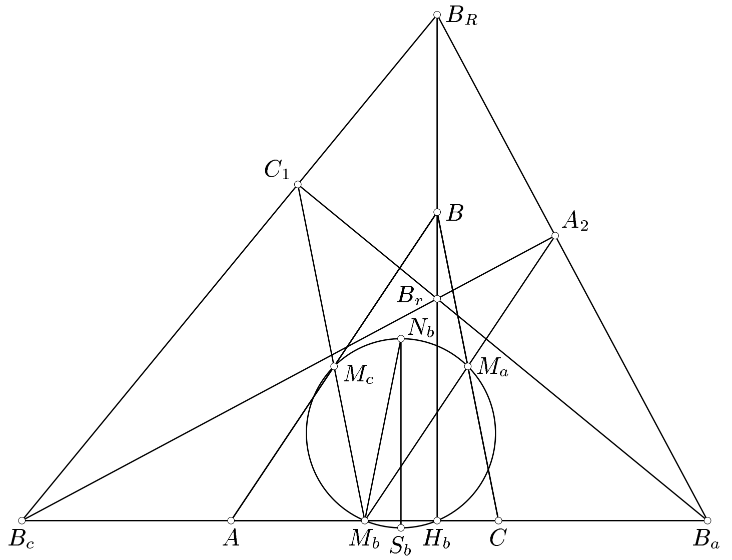


Рис. 21. Ищем центр окружности Эйлера треугольника $\triangle B_aB_RB_c$

Мы продолжаем исследовать конструкцию из дюжины прямых. И нас все еще интересует вопрос, что интересного в расположении окружностей Эйлера разных треугольников из этой конструкции.

Рассмотрим орточетверки B_c, B_R, B_a, B_r и B_b, B_{Ra}, B_{Rc}, B_I.

$\boxed{9}$ Проверьте, что это действительно орточетверки.

Сначала мы займемся треугольником $B_cB_RB_a$ и найдем центр его окружности Эйлера (рис. 21). Основания его высот — это точки A_2, C_1, H_b. На стороне B_cB_a основание высоты — H_b, а середина — M_b. Кстати, точно так же в треугольнике ABC на стороне AC основание высоты — H_b, а середина — M_b.

Окружность Эйлера треугольника $B_cB_RB_a$ проходит через точки H_b

и M_b, поэтому центр ее лежит на серединном перпендикуляре к отрезку H_bM_b, то есть на прямой N_bS_b (согласно утверждению 5).

Кроме того, эта окружность Эйлера проходит через основания высот A_2 и C_1, поэтому центр ее лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_2C_1, и сейчас мы разберемся, как проходит этот серединный перпендикуляр. Отрезки A_2M_b и C_1M_b — медианы к гипотенузе B_cB_a в прямоугольных треугольниках $B_cA_2B_a$ и $B_cC_1B_a$ (рис. 21). Эти медианы равны между собой и равны половине гипотенузы. Значит, треугольник $A_2M_bC_1$ — равнобедренный, и серединный перпендикуляр к основанию совпадает с биссектрисой, выходящей из противолежащей вершины M_b, то есть с биссектрисой угла $A_2M_bC_1$.

Вспомним теперь, что по свойствам дюжины точек (см. утверждение 2) отрезки A_2M_b и C_1M_b лежат на средних линиях треугольника ABC. Значит, биссектриса угла $A_2M_bC_1$ совпадает с биссектрисой угла $M_aM_bM_c$. А этот угол вписан в окружность Эйлера треугольника ABC, ведь она проходит через середины его сторон. Значит, его биссектриса делит пополам «верхнюю» дугу M_aM_c и проходит через точку N_b (рис. 21).

Мы выяснили, что центр окружности Эйлера треугольника $B_aB_cB_R$ лежит на прямых N_bS_b и M_bN_b, а значит, попадает в точку их пересечения N_b. Конечно же, центр этот лежит на окружности Эйлера базового треугольника.

Почти такие же рассуждения годятся и для треугольника $B_bB_{Ra}B_{Rc}$ (рис. 22). В нем точка M_b — середина отрезка, соединяющего ортоцентр B_I с вершиной B_b; H_b — основание высоты из этой же вершины. Поэтому окружность Эйлера этого треугольника тоже проходит через точки M_b и H_b, а значит, ее центр лежит на прямой N_bS_b. Кроме того, он лежит еще на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему основания высот A_4 и C_3, то есть на биссектрисе угла M_b в треугольнике $M_aM_bM_c$, только не на внутренней, а на внешней. Внешняя биссектриса перпендикулярна внутренней, поэтому пересекает окружность Эйлера треугольника ABC не в точке N_b, а в точке, диаметрально ей противоположной — S_b.

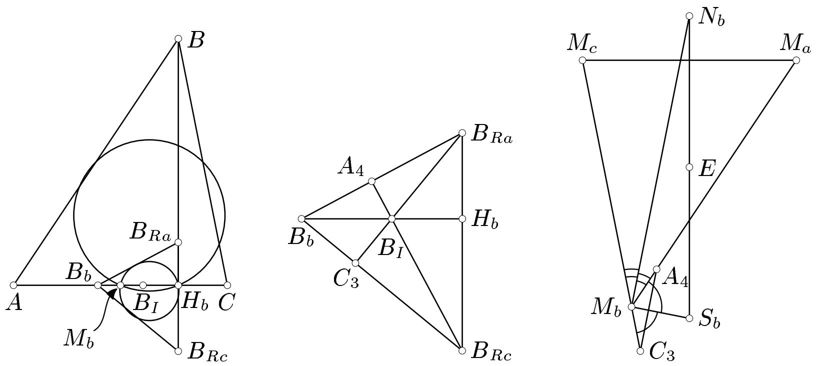


Рис. 22. Ищем центр окружности Эйлера треугольника $B_bB_{Ra}B_{Rc}$

Обе орточетверки — B_c, B_R, B_a, B_r и B_b, B_{Ra}, B_{Rc}, B_I — задают по четыре треугольника, центр окружности Эйлера каждого из которых лежит на окружности Эйлера базового треугольника ABC.

Можно рассмотреть аналогичные орточетверки относительно вершин A и C, центры их окружностей Эйлера тоже лежат на окружности Эйлера треугольника ABC и обобщить наши выводы и на них тоже.

Утверждение 7. *Мы нашли 24 треугольника с вершинами на прямых, на которых лежат стороны вписанного и вневписанных треугольников. Центры окружностей Эйлера всех этих треугольников лежат на окружности Эйлера базового в серединах дуг, на которые ее делят середины сторон базового треугольника.*

9. Все дороги ведут в точку Фейербаха

Заметим, что стороны треугольника $B_cB_RB_a$ перпендикулярны соответственным сторонам треугольника $B_{Rc}B_bB_{Ra}$, поэтому прямые Эйлера этих двух треугольников перпендикулярны (см. рис. 23).

В этом разделе мы обсудим расположение прямых Эйлера построенных нами орточетверок. Но сначала сформулируем три утверждения, на которые будем опираться.

Утверждение 8. *Окружность Эйлера треугольника касается вписанной и вневписанных окружностей этого треугольника.*

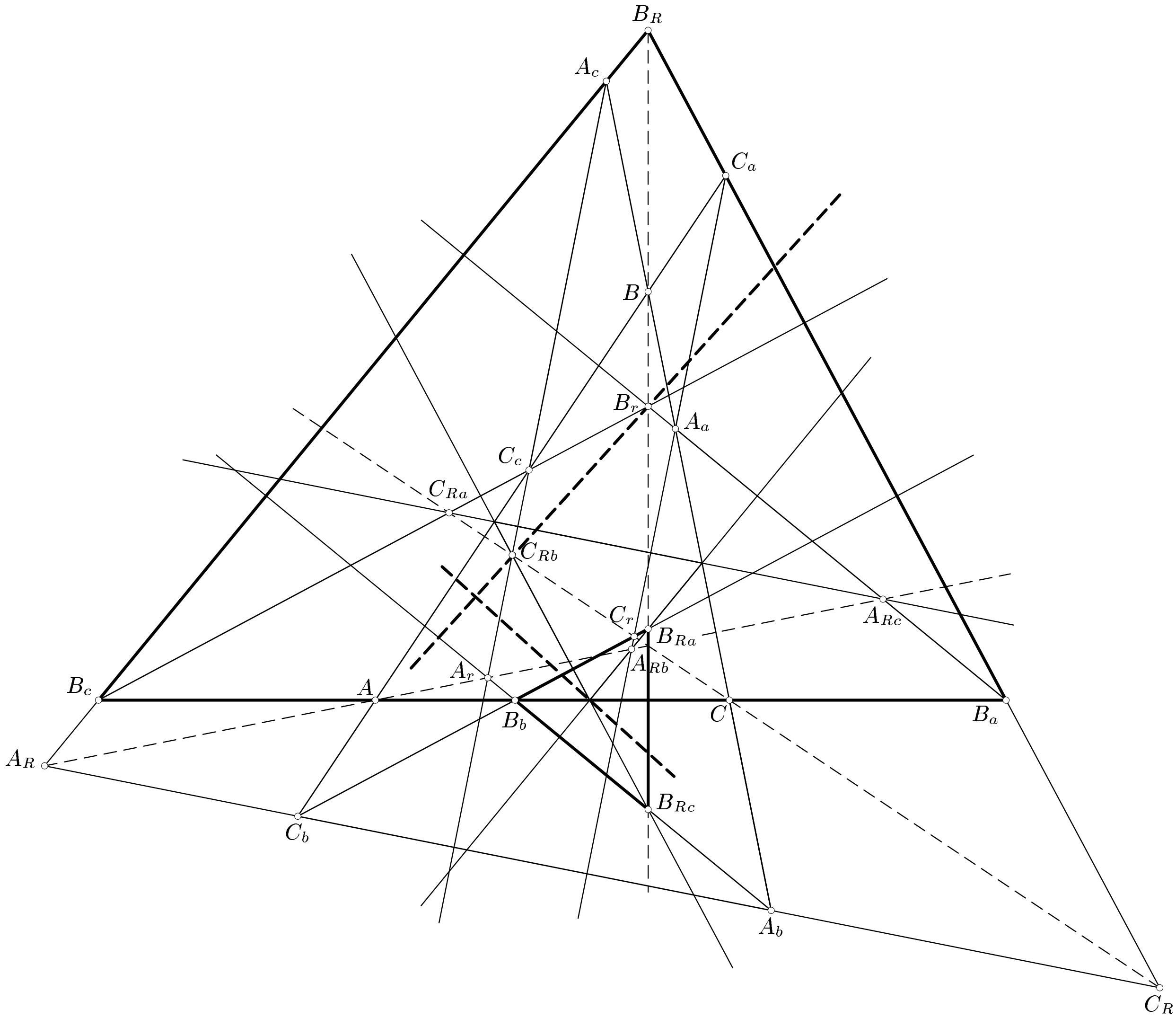


Рис. 23.

Это утверждение (обычно его называют теоремой Фейербаха) мы примем без доказательства. Точку касания окружности Эйлера со вписанной окружностью называют (внутренней) точкой Фейербаха и обозначают F. Точки касания окружности Эйлера со вневписанными окружностями называют внешними точками Фейербаха и обозначают F_a, F_b, F_c (см. рис. 24).

Утверждение 9 (Лемма Архимеда 1)**.** *Если окружность ω_2 касается окружности ω_1 в точке K и хорды AB окружности ω_1 в точке L, то прямая LK проходит через середину той дуги AB окружности ω_1, которая не содержит точку касания окружностей ω_1 и ω_2.*

Действительно, рассмотрим гомотетию с центром в точке касания K двух окружностей, переводящую ω_2 в ω_1. Эта гомотетия переводит точку L в некоторую точку M на окружности

ω_1, а касательную AB к окружности ω_2 — в параллельную ей касательную к окружности ω_1. При этом точки M и K оказываются по разные стороны от хорды AB и на одной прямой с точкой L. А раз через точку M проходит касательная, параллельная хорде AB, точка касания M делит дугу AB пополам.

Утверждение 10 (Лемма Архимеда 2)*. Если окружность ω_2 касается окружности ω_1 в точке K и продолжения хорды AB окружности ω_1 в точке L, то прямая LK проходит через середину той дуги AB окружности ω_1, которая содержит точку касания окружностей ω_1 и ω_2.*

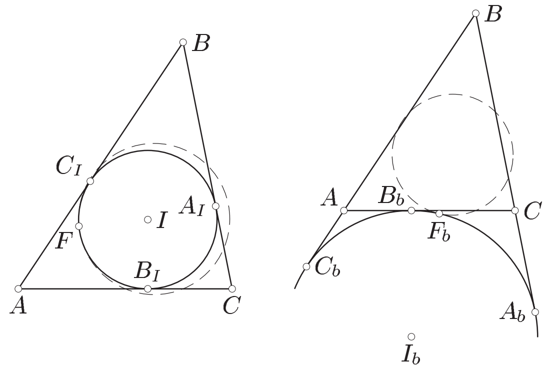


Рис. 24. Внутрення F и внешняя F_b точки Фейербаха

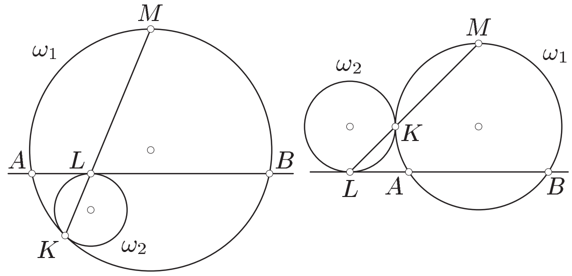


Рис. 25. Лемма Архимеда

Прямые Эйлера треугольников «маленькой» ортočетверки B_b, B_{Ra}, B_{Rc}, B_I построить легко. Для любого треугольника прямая Эйлера проходит через центр окружности Эйлера (у всех четырех это точка S_b) и через ортоцентр — одну из точек ортočетверки.

Оказывается, все четыре прямые Эйлера проходят через точки Фейербаха базового треугольника, внешние или внутреннюю, и сейчас мы это покажем.

Вписанная окружность треугольника ABC касается его окружности Эйлера в точке Фейербаха F, а хорды M_bH_b этой же окружности — в точке B_I (рис. 26). Значит (по лемме Архимеда 1, см. утверждение 9), прямая FB_I делит пополам дугу M_bH_b окружности Эйлера, то есть проходит через точку S_b. Иначе говоря, прямая Эйлера B_IS_b треугольника $B_bB_{Ra}B_{Rc}$ проходит через точку Фейербаха F базового треугольника.

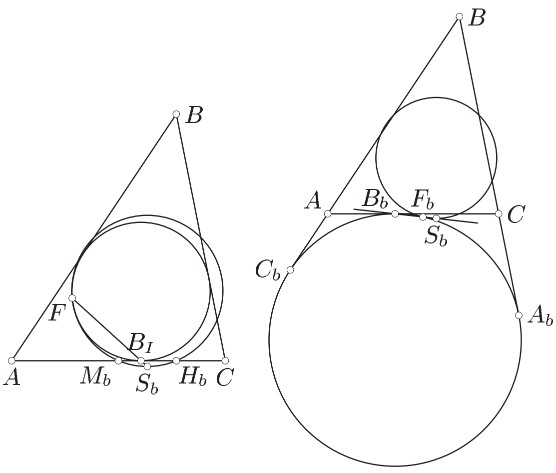


Рис. 26. Работает лемма Архимеда

Можно рассмотреть касание не вписанной, а вневписанной окружности с окружностью Эйлера, и применить лемму Архимеда к ним. Например, вневписанная окружность треугольника ABC с центром I_b касается его окружности Эйлера во внешней точке Фейербаха F_b, а хорды M_bH_b этой же окружности — в точке B_b. Значит (по лемме Архимеда 2, см. утверждение 10), прямая F_bB_b проходит через точку S_b. Иначе говоря, прямая Эйлера B_bS_b треугольника $B_{Ra}B_{Rc}B_I$ проходит через точку Фейербаха F_b (рис. 26).

У двух оставшихся треугольников ортočетверки B_b, B_{Ra}, B_{Rc}, B_I мы не рассмотрели прямые Эйлера, но совершенно разумно было бы предположить, что они проходят через внешние точки Фейербаха F_a и F_c. Жаль только, что доказать это так же просто не получится.

Вот с «большой» ортočетверкой B_c, B_R, B_a, B_r все наоборот: по лемме Архимеда легко доказать, что прямые Эйлера треугольников $B_cB_RB_r$ и $B_aB_RB_r$ проходят через внешние точки

Фейербаха F_a и F_c, достаточно применить лемму Архимеда к вневписанным окружностям с центрами I_a, I_c и окружности Эйлера базового треугольника.

$\boxed{10}$ Докажите это, пользуясь рисунком 27.

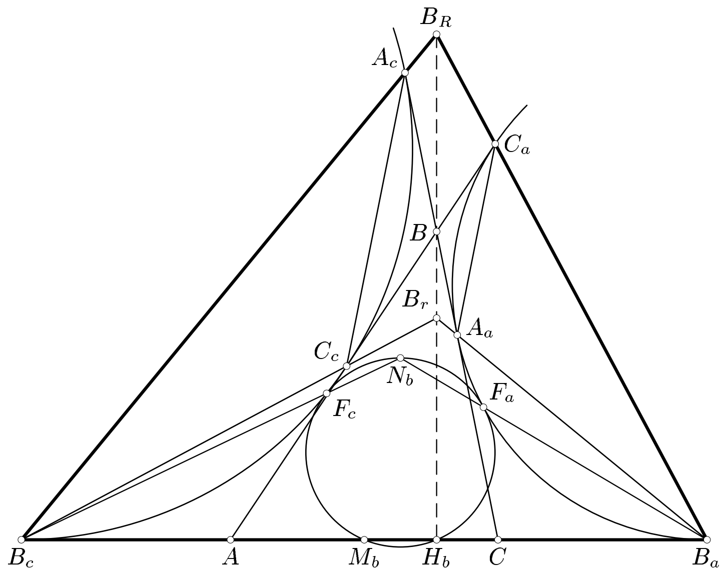


Рис. 27.

Но с точками Фейербаха F и F_b этот фокус уже не пройдет. Поэтому сейчас обе орточетверки «помогут» друг другу. Результат для «большой» орточетверки поможет найти в «маленькой» те треугольники, прямые Эйлера которых проходят через F_a и F_c; и наоборот, результат для «маленькой» орточетверки поможет найти в «большой» треугольники, прямые Эйлера которых проходят через F и F_b.

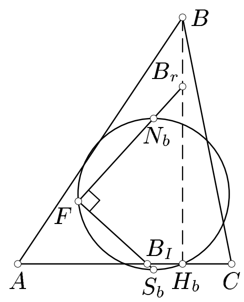


Рис. 28. Перпендикулярные прямые Эйлера пересекаются в точке Фейербаха

Это довольно сложное доказательство, поэтому вначале перечислим ключевые факты, которые нам понадобятся.

1) У «большой» и «маленькой» орточетверок центры окружностей Эйлера лежат в противоположных концах N_b и S_b диаметра окружности Эйлера базового треугольника. Это следует из утверждения 7.

2) Если в окружности вписанный угол опирается на диаметр, то этот угол прямой.

3) Для каждого треугольника одной орточетверки найдется треугольник в другой такой, что их прямые Эйлера перпендикулярны. (Это следует из того, что для каждого треугольника одной орточетверки найдется треугольник в другой такой, что их соответственные стороны перпендикулярны.)

Докажем, например, что прямая Эйлера треугольника $B_cB_RB_a$ проходит через внутреннюю точку Фейербаха F. В «маленькой» орточетверке треугольнику $B_cB_RB_a$ соответствует треугольник $B_{Rc}B_bB_{Ra}$ — их стороны перпендикулярны, и прямые Эйлера тоже. Прямая Эйлера треугольника $B_{Rc}B_bB_{Ra}$ — это прямая S_bF (рис. 26). Прямая Эйлера треугольника $B_cB_RB_a$ ей перпендикулярна и проходит через точку N_b. Опустим из N_b перпендикуляр на S_bF — это и будет прямая Эйлера треугольника $B_cB_RB_a$. Перпендикуляр к S_bF из точки N_b обязательно пройдет через F, так как в окружности Эйлера базового треугольника угол N_bFS_b — вписанный и опирается на диаметр. Значит, прямая Эйлера треугольника $B_cB_RB_a$ проходит через внутреннюю точку Фейербаха F (рис. 28).

Точно так же можно доказать, что прямая Эйлера треугольника $B_aB_rB_c$ проходит через внешнюю точку Фейербаха F_b, а прямые Эйлера треугольников $B_bB_IB_{R_c}$ и $B_bB_IB_{R_a}$ — через внешние точки Фейербаха F_c и F_a.

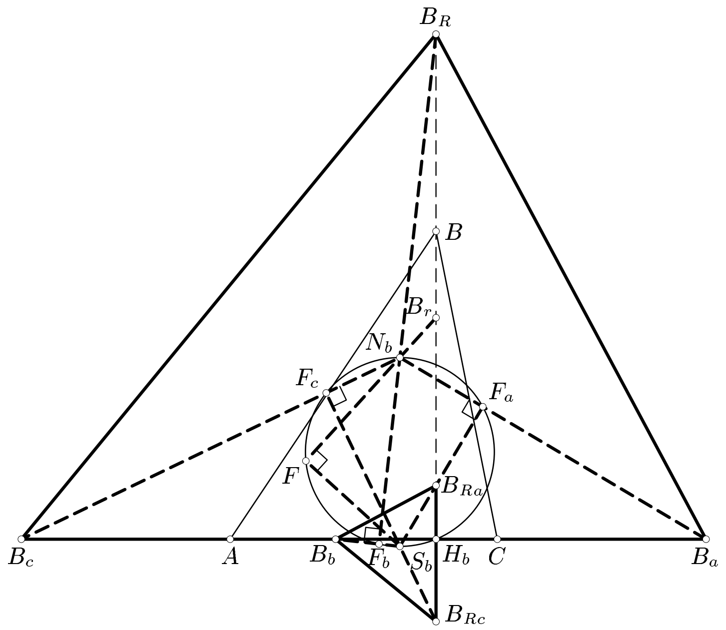


Рис. 29. Прямые Эйлера ортočетверок B_R, B_r, B_a, B_c и B_{Ra}, B_{Rc}, B_b, B_I

Итак, у треугольников «маленькой» орточетверки B_b, B_{Ra}, B_{Rc}, B_I прямые Эйлера проходят через точки Фейербаха и через точку S_b на окружности Эйлера базового треугольника; а у треугольников «большой» орточетверки B_c, B_R, B_a, B_r — через точки Фейербаха и через точку N_b на окружности Эйлера базового треугольника (рис. 29). Мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 11. *Прямые Эйлера треугольников $B_RB_aB_c$ и $B_bB_{Ra}B_{Rc}$ пересекаются во внутренней точке Фейербаха F. Прямые Эйлера треугольников $B_rB_RB_c$ и $B_bB_IB_{Rc}$ пересекаются во внешней точке Фейербаха F_a. Прямые Эйлера треугольников $B_rB_aB_c$ и $B_IB_{Ra}B_{Rc}$ пересекаются во внешней точке Фейербаха F_b. Прямые Эйлера треугольников $B_rB_RB_a$ и $B_bB_IB_{Ra}$ пересекаются во внешней точке Фейербаха F_c. Если две прямые Эйлера из перечисленных восьми пересекаются в некоторой точке Фейербаха, то они перпендикулярны.*

Не забудем, что у вершин A и C есть свои «большие» и «маленькие» орточетверки; они тоже дают треугольники, у которых прямые Эйлера ведут в точки Фейербаха, так что всего мы нашли 24 треугольника, прямые Эйлера которых проходят через одну из точек Фейербаха базового.

Куланин Евгений Дмитриевич,
профессор факультета информационных технологий
Московского городского психолого-педагогического
университета, кандидат физ-мат наук,
старший научный сотрудник.

Шихова Надежда Анатольевна,
редактор издательства "Бином", г. Москва.

E-mail: snasna@list.ru

Гипотезы о медианах, высотах, биссектрисах и ... эллипсах

Лейб Штейнгарц

Автор, при помощи компьютерного моделирования, обнаружил интересные случаи расположения шести точек, определенным образом связанных с треугольником, на одном эллипсе. В статье сформулированы соответствующие гипотезы, которые пока не доказаны.

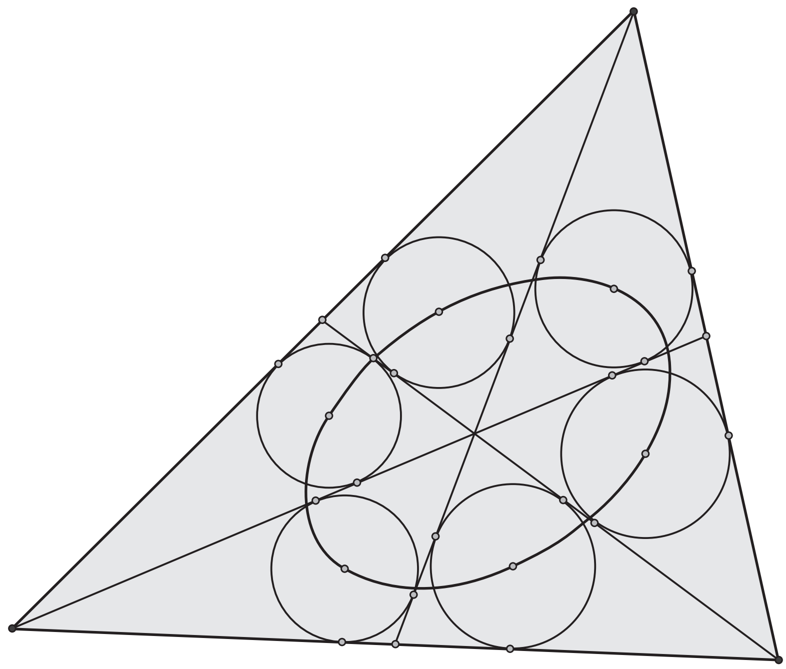
При помощи компьютерной программы нам удалось обнаружить довольно много любопытных фактов расположения шести точек на эллипсе.

Как известно, через любые пять точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно провести единственное коническое сечение.

Шесть точек не всегда принадлежат коническому сечению. И, тем более, далеко не всегда лежат на одном эллипсе. Но в приведенных ниже гипотезах, что-то (что именно, нам пока неизвестно) заставляет шесть точек расположиться на одном эллипсе.

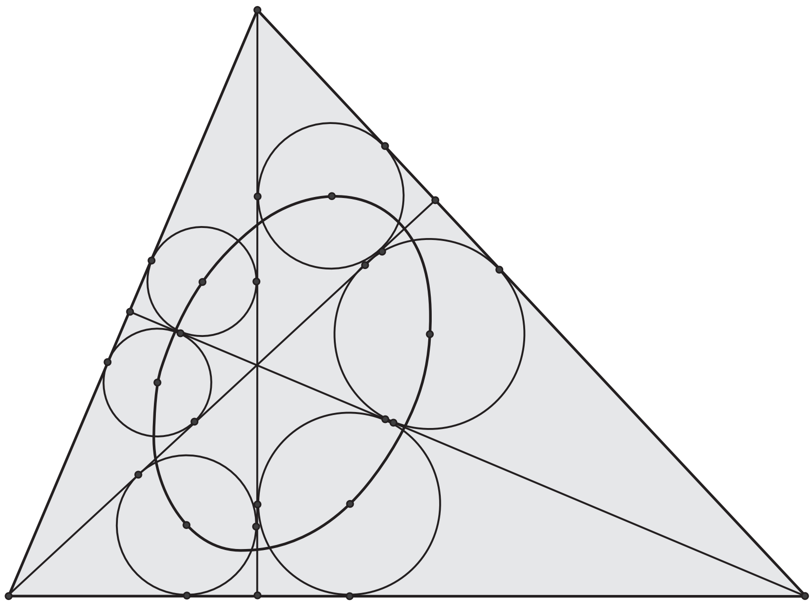
Гипотеза 1. Только медианы

Три медианы произвольного треугольника разбивают его на 6 треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры всех этих шести окружностей лежат на некотором эллипсе.



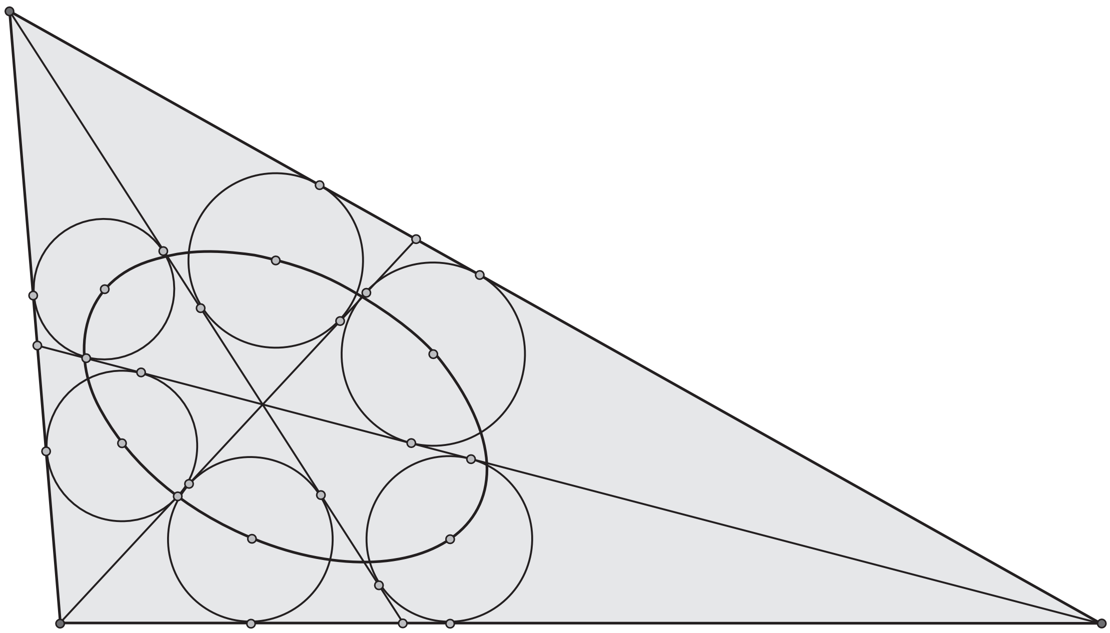
Гипотеза 2. Только высоты

Три высоты произвольного остроугольного треугольника разбивают его на 6 треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры всех этих шести окружностей лежат на некотором эллипсе.

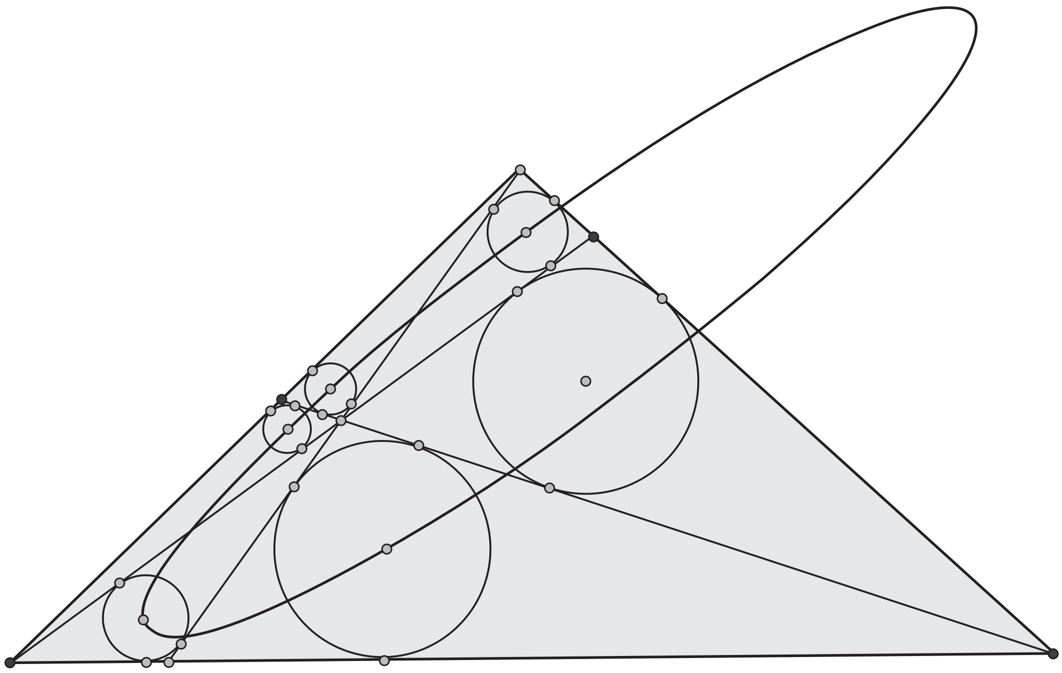


Гипотеза 3. Только биссектрисы

Три биссектрисы произвольного треугольника разбивают его на 6 треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры всех этих шести окружностей лежат на некотором эллипсе.

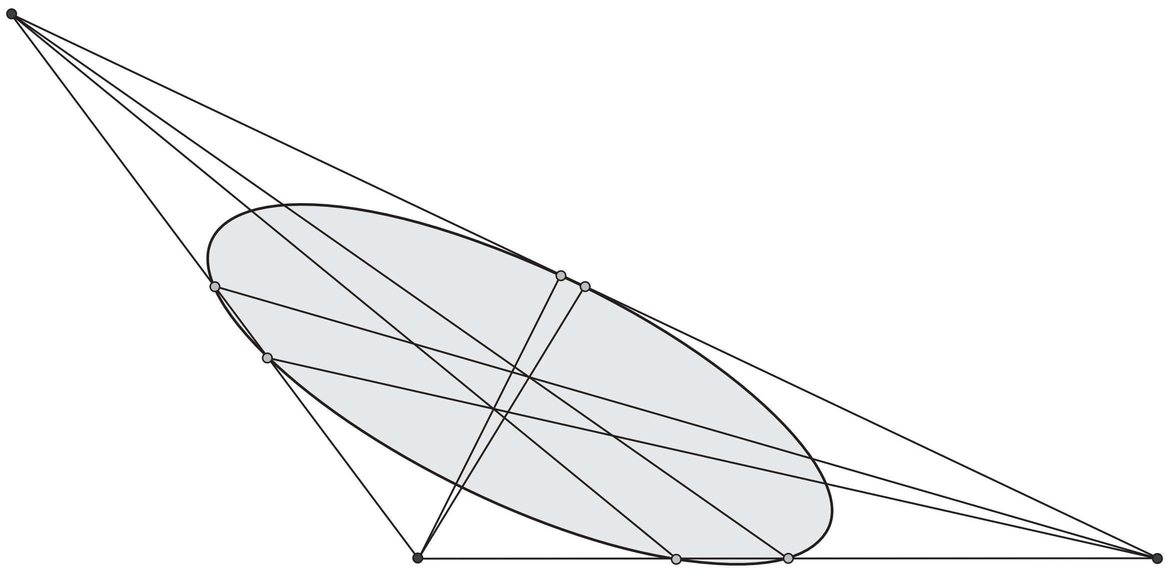


Замечание. Что особенно любопытно, если взять три произвольных отрезка, проведенных из вершин треугольника и проходящих через одну точку (так называемые чевианы), то отмеченное свойство (о шести точках на одном эллипсе) необязательно сохраняется. Это видно, например, на приведенном ниже рисунке. Но, каким-то таинственным образом, все 6 центров лежат на эллипсе для медиан, высот и биссектрис.



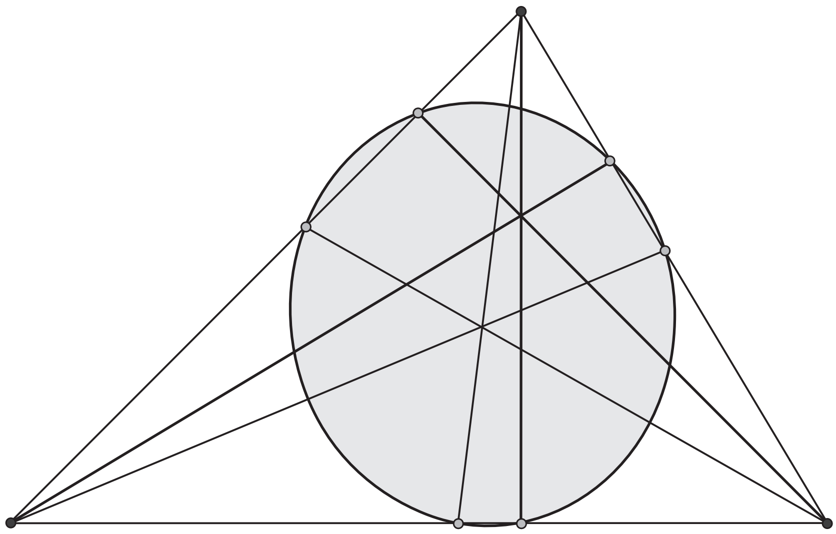
Гипотеза 4. Медианы и биссектрисы

В произвольном треугольнике проведены все медианы и все биссектрисы. Тогда основания этих медиан и биссектрис лежат на некотором эллипсе.



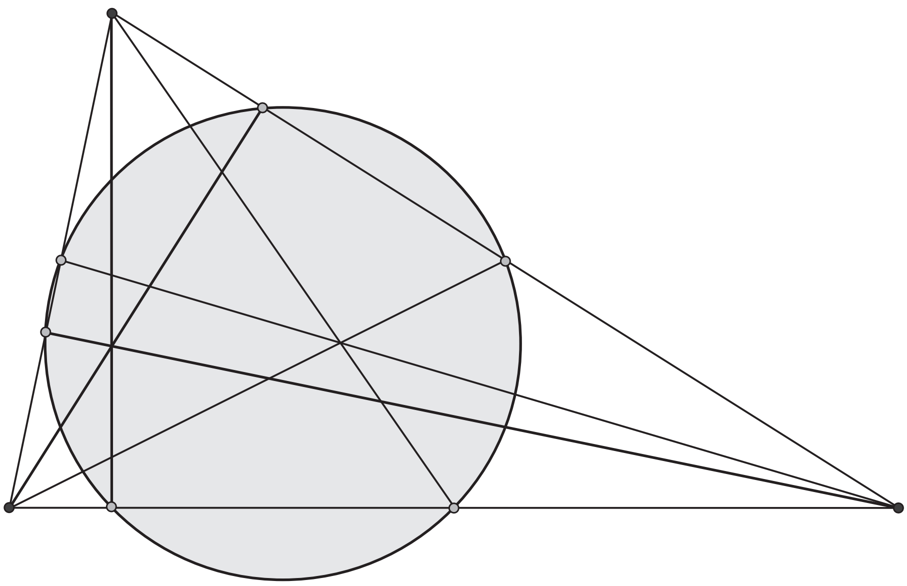
Гипотеза 5. Высоты и биссектрисы

В произвольном остроугольном треугольнике проведены все высоты и все биссектрисы. Тогда основания этих высот и биссектрис лежат на некотором эллипсе.



Замечание. Окружность Эйлера — это тоже эллипс.

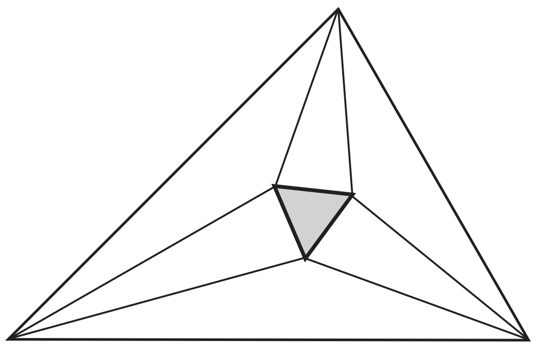
В том случае, если в произвольном остроугольном треугольнике проведены все медианы и все высоты, то основания этих медиан и высот лежат не только на некотором эллипсе, но и на некоторой окружности. Это, как хорошо известно, знаменитая *окружность Эйлера*.



Теорема Морлея, ее доказательство и эллипсы

Одной из самых удивительных и красивых теорем в геометрии, по праву, считается *теорема Морлея*, которая утверждает следующее:

Точки пересечения смежных трисектрис углов (то есть лучей, делящих данный угол на три равные части) произвольного треугольника, являются вершинами равностороннего треугольника.



Теорема была открыта в 1904 году английским математиком Франком Морлеем (Frank Morley). Тогда он упомянул об этой теореме своим друзьям, а опубликовал её двадцать лет спустя в Японии.

У этой теоремы есть, к сожалению, один существенный "недостаток". Доказательства этой теоремы (см. список в конце статьи) довольно сложны. Как правило, учителя, рассказывая ученикам об этой теореме, говорят в каком году и кем она была открыта, показывают красивый чертеж, но очень редко ее доказывают.

Нам удалось придумать доказательство, доступное практически любому ученику.

Чтобы понять это доказательство, достаточно разобраться в трех совершенно нетрудных задачах. Их даже можно предложить решить *самостоятельно* — это многим ученикам вполне по силам.

Обычно математики такие задачи называют *леммами.* Лемма, как известно, — это доказанное утверждение, полезное не само по себе, а для доказательства других утверждений. Но данные три задачи можно предлагать на уроках даже вне всякой связи с теоремой Морлея. Просто в качестве полезных *упражнений.* В случае затруднений, с решением этих задач можно ознакомиться в журналах "Квант" (см . например, [6]).

После этих задач доказательство теоремы Морлея становится практически *очевидным.*

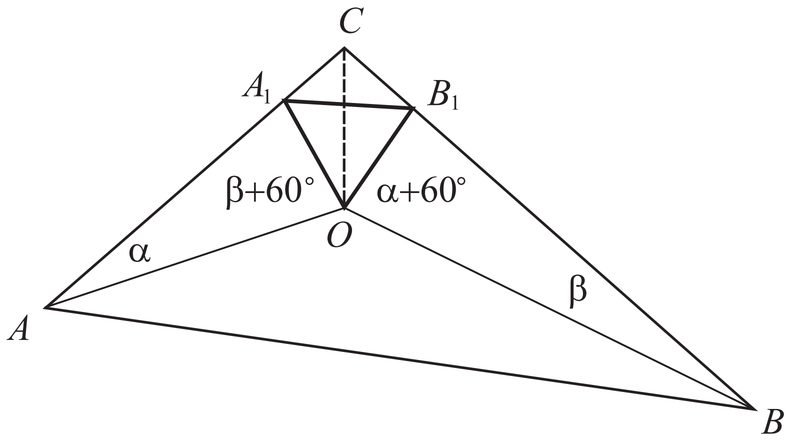
Задача 1 о биссектрисах. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Доказать, что угол COB на $90°$ больше, чем половина угла A.

Задача 2, снова о биссектрисах — обратная к задаче 1.

Внутри треугольника ABC взята точка O так, что угол COB на $90°$ больше, чем угол CAO, а угол COA на $90°$ больше, чем угол CBO. Доказать, что AO, BO и CO являются *биссектрисами* углов данного треугольника.

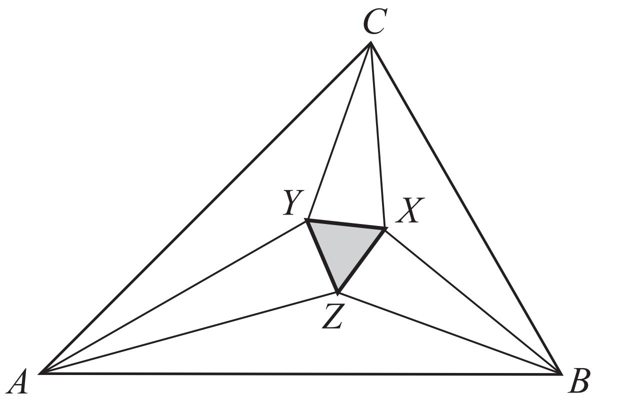
Задача 3 о биссектрисах и равностороннем треугольнике.

На сторонах OA_1 и OB_1 равностороннего треугольника A_1OB_1 (см.рис.) построили внешним образом треугольники A_1OA и B_1OB так, что угол B_1OB на $60°$ больше, чем угол A_1AO , а угол A_1OA на $60°$ больше, чем угол B_1BO. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C. Доказать, что AO, BO и CO являются биссектрисами углов треугольника ABC.



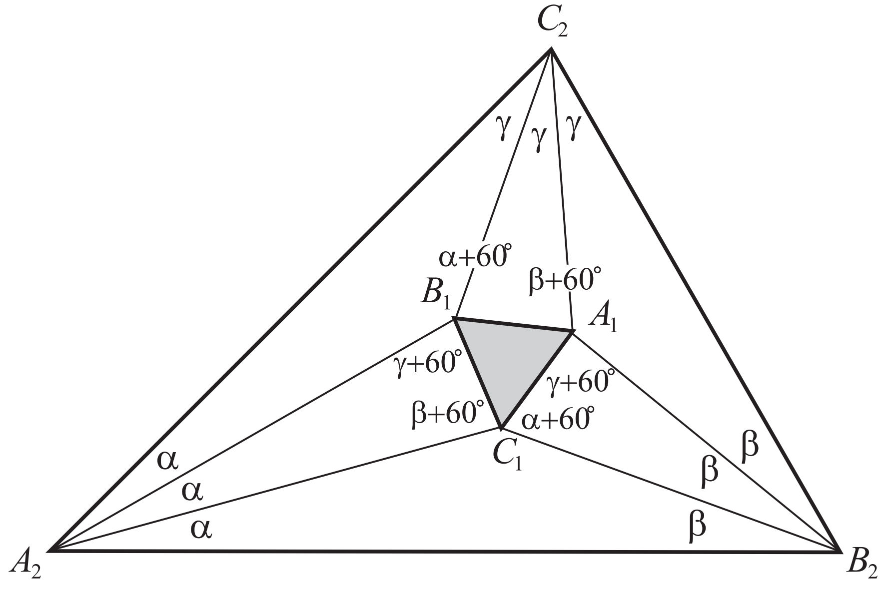
Авторское доказательство теоремы Морлея

Пусть ABC — данный треугольник, а треугольник XYZ образован трисектрисами углов данного треугольника. Докажем, что треугольник XYZ равносторонний. Введем обозначения: $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$.



Рассмотрим произвольный равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$. Построим на стороне B_1C_1 треугольник $A_2B_1C_1$ так, чтобы $\angle A_2B_1C_1 = \gamma + 60\,°$, а $\angle A_2C_1B_1 = \beta + 60\,°$.

Очевидно, что $\angle B_1A_2C_1 = \alpha$, так как $\alpha + \beta + \gamma = 60\,°$. Точно так же построим еще два треугольника $A_1C_1B_2$ и $A_1B_1C_2$.



Если продолжить стороны A_2B_1 и B_2A_1, то они пересекутся в некоторой точке M(эти прямые наверняка пересекутся, так как сумма односторонних углов при секущей A_1B_1 больше 180 градусов).

При этом для треугольника A_2B_2M выполняются условия задачи 3. Поэтому A_2C_1 будет биссектрисой угла $B_1A_2B_2$, а B_2C_1 будет биссектрисой угла $A_1B_2A_2$. Это означает, что $\angle\, C_1A_2B_2 = \alpha$, а $C_1B_2A_2 = \beta$.

Аналогичный результат получается и в остальных случаях (для A_2B_1, C_2B_1, C_2A_1 и B_2A_1).

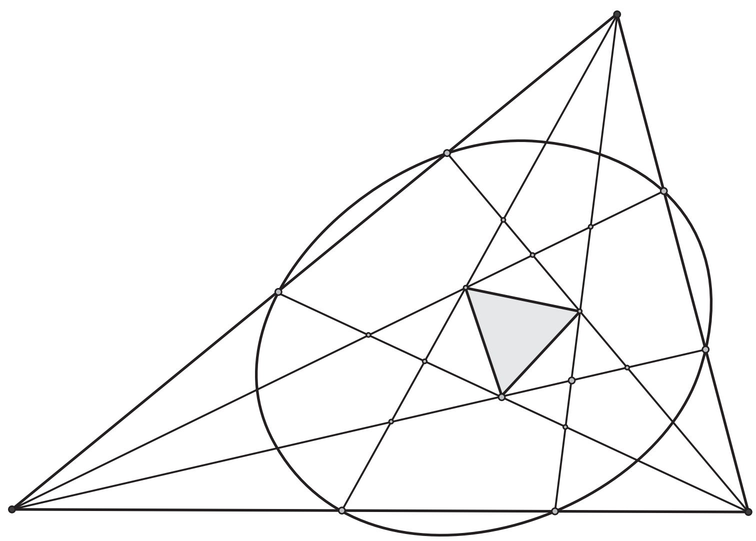
То есть оказывается, что в треугольнике $A_2B_2C_2$ проведены *трисектрисы*, и они при своем пересечении определяют равносторонний треугольник. Но, очевидно, что треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC подобны (по углам). Следовательно, и треугольник XYZ также ***равносторонний.***

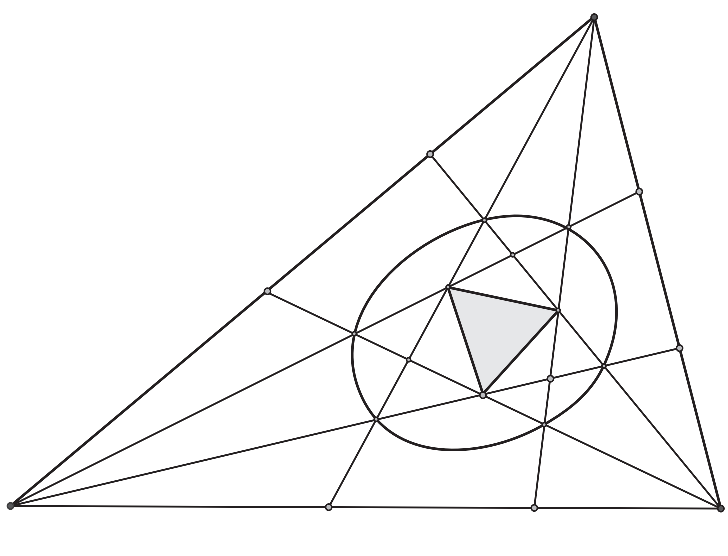
Теорема Морлея доказана.

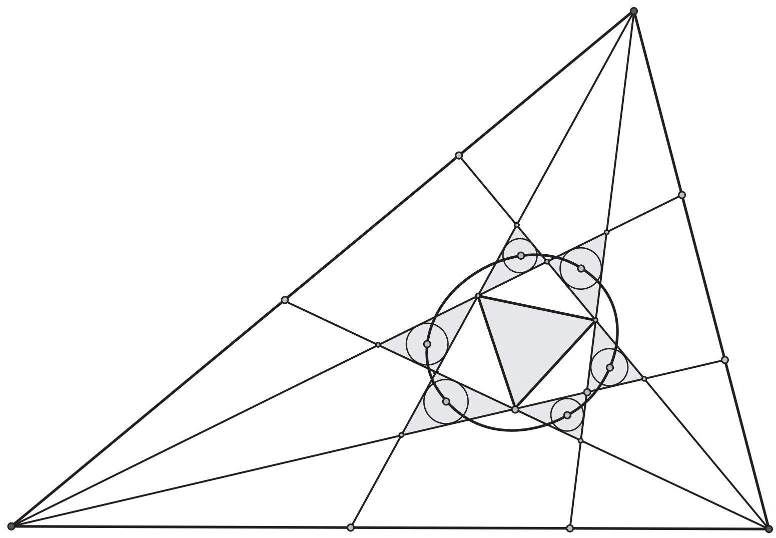
Эллипсы в конструкции Морлея

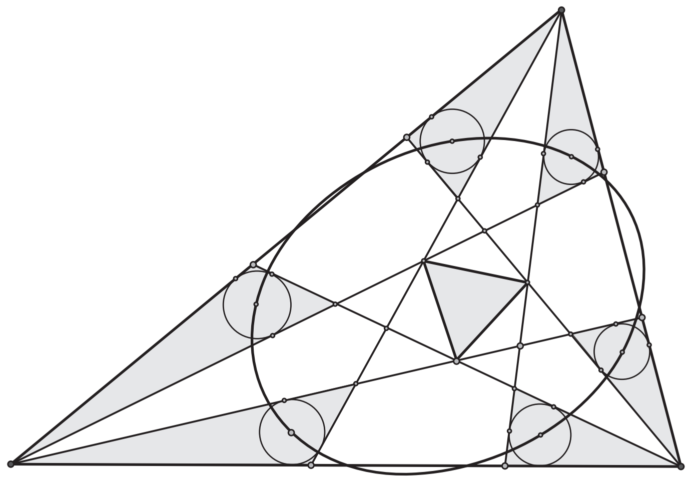
Оказывается, конструкция этой теоремы порождает громадное количество эллипсов. Но, к сожалению, и это пока только гипотезы.

Приведем лишь несколько чертежей к этим гипотезам. Надеемся, что из чертежей будет вполне понятно, о каких шести точках на эллипсе идет речь.









Будем рады, если читателям удастся внести свой вклад в решение приведенных гипотез.

Библиография

1. *Г.С.М.Коксетер, С.П.Грейтцер.* Новые встречи с геометрией (1978).
2. *Тоноян Г., Яглом И.* Теорема Морлея. ("Квант", №8, 1978).
3. *З. А. Скопец.* Геометрические миниатюры (1990).
4. *В. В. Прасолов.* Геометрия. Задачи по планиметрии (2007).
5. *Connes, Alain.* A new proof of Morley's theorem. Publications Mathématiques de l'IHÉS, S88 (1998), p. 43-46.
6. *Л.А. Штейнгарц.* Снова о теореме Морлея ("Квант", №5, 2009).

Штейнгарц Лейб Александрович,
преподаватель математики и организатор
школьного Музея Математики,
школа "Шуву", Иерусалим, Израиль,
доктор педагогики.

leybleyb@yahoo.com

О некоторых окружностях, связанных с треугольником

Алексей Мякишев

Автор рассматривает ряд красивых конструкций, связывающих замечательные точки и прямые треугольника с более сложными линиями — коническими сечениями, — обращая специальное внимание на случаи, когда это коническое сечение оказывается окружностью. Кроме того, статья содержит интересные замечания о психологии математического творчества.

Примечания к основному тексту вынесены в конец — в отдельный раздел. Статья печатается с продолжением.

Tempus fugit, aeternitas manet[1].

Резюмируя наши положения, мы приходим к следующим выводам: в физиологическом отношении между нормальным состоянием гениального человека и патологическим — помешанного существует немало точек соприкосновения. Между гениальными людьми встречаются помешанные и между сумасшедшими — гении. Но было и есть множество гениальных людей, у которых нельзя отыскать ни малейших признаков умопомешательства, за исключением некоторых ненормальностей в сфере чувствительности.

Хотя моё исследование ограничивается скромными пределами психологических наблюдений, но я надеюсь, что оно может дать солидную экспериментальную точку отправления для критики артистических, литературных и, в некоторых случаях, даже научных произведений. Так, во-первых, оно заставит обратить внимание на чисто патологические признаки: излишнюю тщательность отделки, злоупотребление символами, эпиграфами и аксессуарами, преобладание одного какого-нибудь цвета и преувеличенную погоню за новизной. В литературе и учёных статьях такими же признаками служат претензии на остроумие, излишняя систематизация, стремление говорить о себе, склонность заменять логику эпиграммой, пристрастие к напыщенности в стихах, к созвучиям — в прозе и тоже погоня за оригинальностью.

(*Чезаре Ломброзо.* Гениальность и Помешательство.)

§1. О некоторых семействах коник, содержащих окружности. Постановка задачи

Так случилось, что последняя пара-тройка лет сложилась для автора этих строк не самым лучшим образом: ему пришлось пережить довольно-таки затяжной период творческого**[1]** бессилия — никак не удавалось придумать хотя какую-нибудь, сравнительно свежую и небанальную, геометрическую конструкцию**[2]**. Многие обстоятельства послужили тому причиной — здесь и довольно напряженная, но скучноватая, работа над учебником/задачником по геометрии, и берущие своё годы, и скорбные мысли о том, *а на кой ляд* (прошу прощения) *это всё нужно* — да мало ли что ещё! В *глобальных*, например, масштабах — сильно докучало жутковатое ощущение каких-то непоправимых сдвигов и трещин в самом фундаменте всего вообще мироздания**[3]**, что никак не способствовало ни бодрости духа, ни ясности ума. (Пожалуй, достаточно о причинах).

И вот, как бы оно там ни складывалось, прошлым летом решил я непременно кризис одолеть — и чего-нибудь эдакое открыть, доказав самому себе, что ещё на что-то годен. Причём, мало помалу, даже выкристаллизовалось (не знаю, почему) странное, но вполне конкретное желание открыть не абы что, а непременно и обязательно, некую *окружность*. Довольно сложно изобрести что-либо действительно новое (в любой сфере деятельности) — а особенно по заказу.

[1] "Время бежит, вечность остается" — народная латинская поговорка.

Но, как говорится, мобилизовав все скрытые ресурсы, я попытался. Об этих попытках и сопряженных с ними усилиях — прилагаемый ниже пространный (и, отчасти, *трагикомический*) отчёт.

Начал я с того, что освежил в памяти классические образчики окружностей, связанных с треугольником. Обнаружилось, что многие из них являются представителями того или иного семейства коник[4], проходящих через 6 определенных точек[5] и порождаемых по определенным правилам произвольной точкой (точками), расположенной в плоскости треугольника. При некоторых положениях точки (точек) коники вырождаются в окружность. Вот ряд примеров.

1.1 *Окружность Эйлера* ([3]: 5.129–5.137, [4]: 457–465)

Это окружность, содержащая основания высот и середины сторон треугольника. По количеству разнообразных замечательных свойств её следует считать «окружностью № 1» в геометрии треугольника.

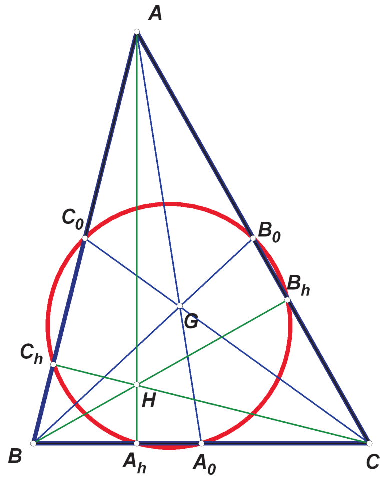


Рис. 1.

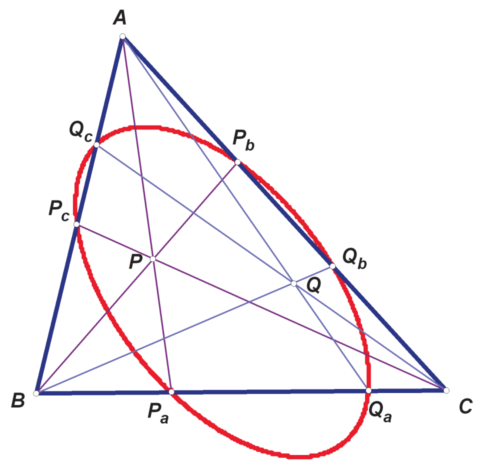


Рис. 2.

Соответствующее семейство коник образуют коники, содержащие основания чевиан двух произвольных точек. Коника из этого семейства вырождается в окружность Эйлера, если в качестве «стартовых» точек возьмем центроид G и ортоцентр H.

1.2 *Окружность Тейлора* ([7,8])

Если из оснований высот провести перпендикуляры к соответствующим сторонам (или их продолжениям) треугольника, то все шесть их оснований попадут на одну окружность.

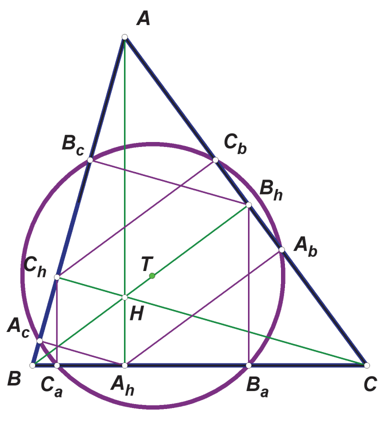


Рис. 3.

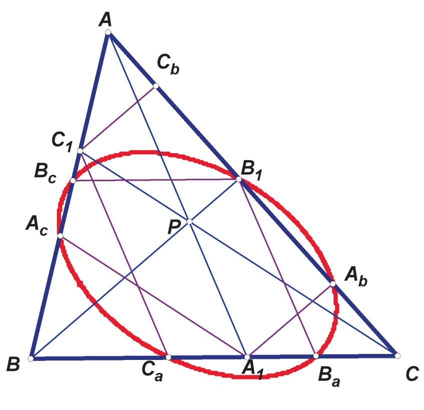


Рис. 4.

Семейство коник, содержащее эту окружность, строится по произвольной точке P следующим образом: из оснований чевиан, проходящих через точку P, проводятся прямые, параллельные соответствующим чевианам до пересечения с соответствующими прямыми, содержащими стороны треугольника. (C_a — точка пересечения CB и прямой, проходящей черезC_1 параллельно AA_1 и т. д.)

1.3 *Окружность Лемуана (первая)* ([3]:5.161,[7,8])

Здесь шесть *коциклических* точек получаются, если провести параллели через точку Лемуана K[6] до пересечения с соответствующими сторонами треугольника ABC. А порождающее эту окружность семейство коник получается, если рассматривать параллели, проходящие через произвольную точку P.

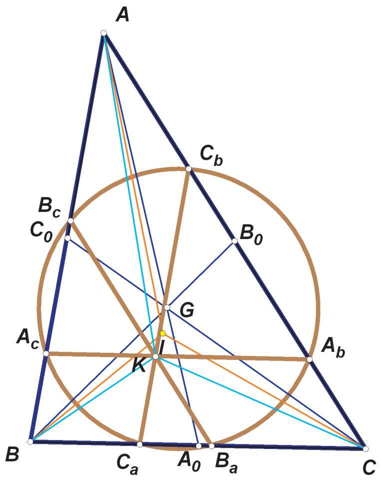


Рис. 5.

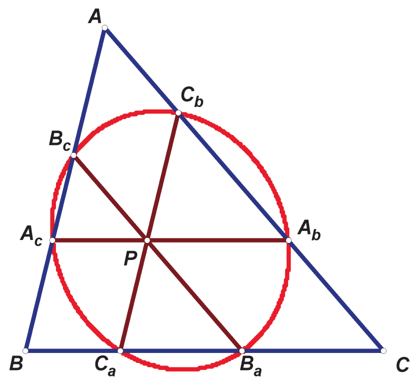


Рис. 6.

1.4 *Окружность Адамса* ([7])

А в этом случае коциклические точки возникают, если проводить параллели к сторонам *треугольника Жергонна*[7] через точку Жергонна J[8] — опять-таки, до пересечения со сторонами исходного треугольника ABC.

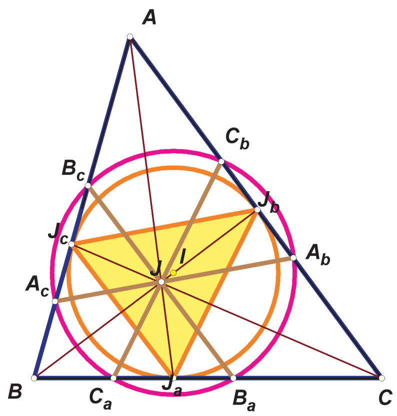


Рис. 7.

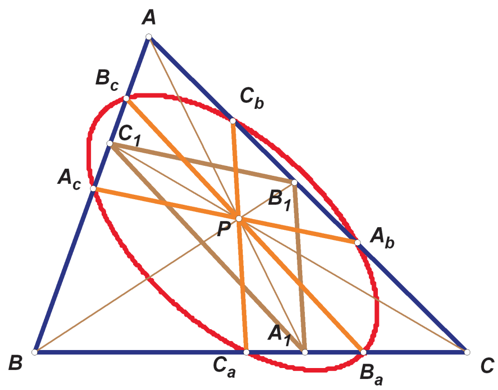


Рис. 8.

Соответствующие коники получаются, если проводить параллели к сторонам чевианного треугольника произвольной точки P. Существование коник доказать во всех приведенных конструкциях несложно и доказательства похожи, как четыре капли воды. В качестве главного орудия используется *теорема Карно:*

Пусть шесть точек попарно расположены на прямых, содержащих стороны некоторого треугольникаABC: $A_1, A_2 \in (BC)$; $B_1, B_2 \in (CA)$; $C_1, C_2 \in (AB)$. Тогда они принадлежат одной конике, если и только если выполнено *условие Карно* ([1,4,7]):

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right) = 1.$$ [9]

В каждом из рассмотренных примеров выполнение условия Карно проверяется посредством применения в нужный момент теоремы Чевы ([3]: 5.85, [4]: 3.40, 3.41), а отношения вычисляются, исходя из соображений подобия.

Окружность Ламуна ([3]: 5.17)

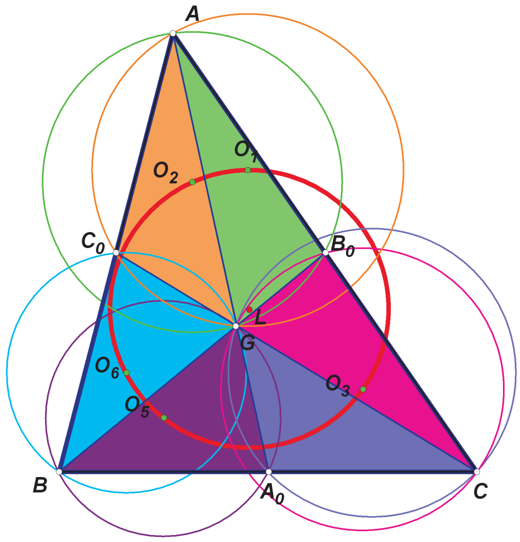


Рис. 9.

Здесь коцикличными являются центры окружностей, описанных около шести треугольников, на которые исходный треугольник разбивается своими медианами.

Соответствующие коники образуются центрами окружностей, описанных около шести треугольников, на которые исходный разбивается чевианами произвольной точки P. Этот пример[10] несколько отличается от предыдущих: точки, порождающие конику, не попадают (вообще говоря) на стороны треугольника. Соответственно, и доказательство ее существования не опирается на теорему Карно — тут следует воспользоваться *обратной теоремой Паскаля* ([1,5,8]): Если точки пересечения прямых, содержащих противоположные[11] стороны некоторого шестивершинника[12] лежат на одной прямой, то его вершины лежат на одной конике. В данном случае получаем, очевидно, всякий раз шестиугольник, у которого противоположные стороны *параллельны* (как перпендикуляры к одной и той же чевиане), т. е., с проективной точки зрения, точки их пересечения лежат на *бесконечно удаленной прямой.* ([1,2])

Итак, цель определилась:*отыскать какие-нибудь сходные и относительно новые конструкции, аналогичные рассмотренным.*

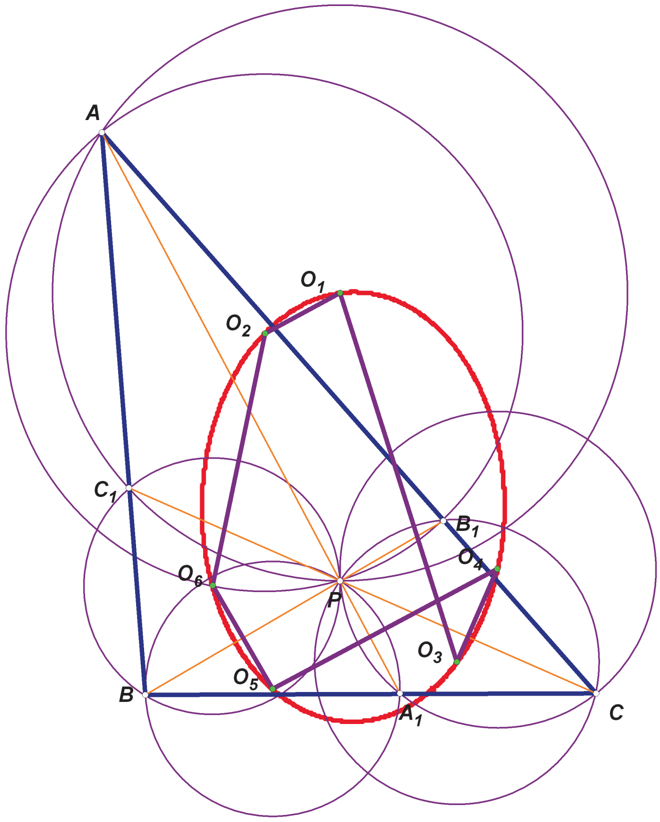


Рис. 10.

§2. На подступах — дальних и не очень: некоторые попытки создания аналогичных конструкций

Повезло не сразу. Вначале были рассмотрены следующие три.

2.1

Будем проводить прямые, выходящие из вершин исходного треугольника ABC параллельно соответствующим чевианам произвольной точки P, до пересечения с прямыми, содержащими стороны исходного треугольника. Так, C_a есть точка пересечения BC и прямой, проходящей через вершину A параллельно чевиане CC_1 и т. д.

Несложно проверить, что для построенной таким образом шестерки точек условие Карно выполняется. А если проделать вычисления, аналогичные тем, что подробно проделаны в §3, то получим для барицентрических координат[13] точки P следующее условие *коцикличности*:

$$\frac{p^3\,(q+r)}{a^2}=\frac{q^3\,(r+p)}{b^2}=\frac{r^3\,(p+q)}{c^2}.$$

Решить эту систему (как и следующие две) нам не удалось — уж больно высокие степени выскакивают[14].

2.2

А тут рассмотрены коники, проходящие через основания чевиан двух *изотомически сопряженных* точек[15] P, P_m.

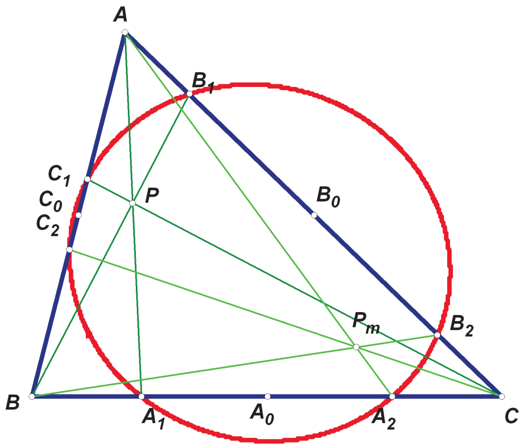


Рис. 11.

Вот результат, тоже не очень утешительный.

$$\frac{p\,(q+r)^2}{a^2}=\frac{q\,(r+p)^2}{b^2}=\frac{r\,(p+q)^2}{c^2}$$

2.3

Изогональное сопряжение также не порадовало:

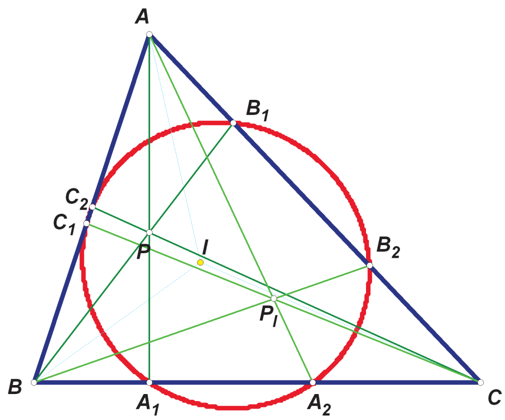


Рис. 12.

$$p\,(q+r)\left(qc^2+rb^2\right)=q\,(r+p)\left(ra^2+pc^2\right)=r\,(p+q)\left(pb^2+qa^2\right).$$

§3. Улыбка фортуны: конструкция первая

Наконец, удалось набрести на конструкцию, оказавшуюся-таки успешной — в смысле поисков соответствующей окружности. Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC, но не лежащая на прямых, содержащих его стороны. Пусть, далее, $A_1\in(BC)\,,B_1\in(CA)\,,C_1\in(AB)$ — основания чевиан этой точки. Через точку A_1 проведем прямые, параллельные сторонам AB и AC — и отметим точки A_b, A_c пересечения этих прямых с прямыми, содержащими стороны AC и AB соответственно. Точки B_a, B_c, C_a, C_b определяются аналогично.

Утверждение 3.1. Точки $A_b, A_c,\ B_a, B_c, C_a, C_b$ всегда принадлежат одной конике[16].

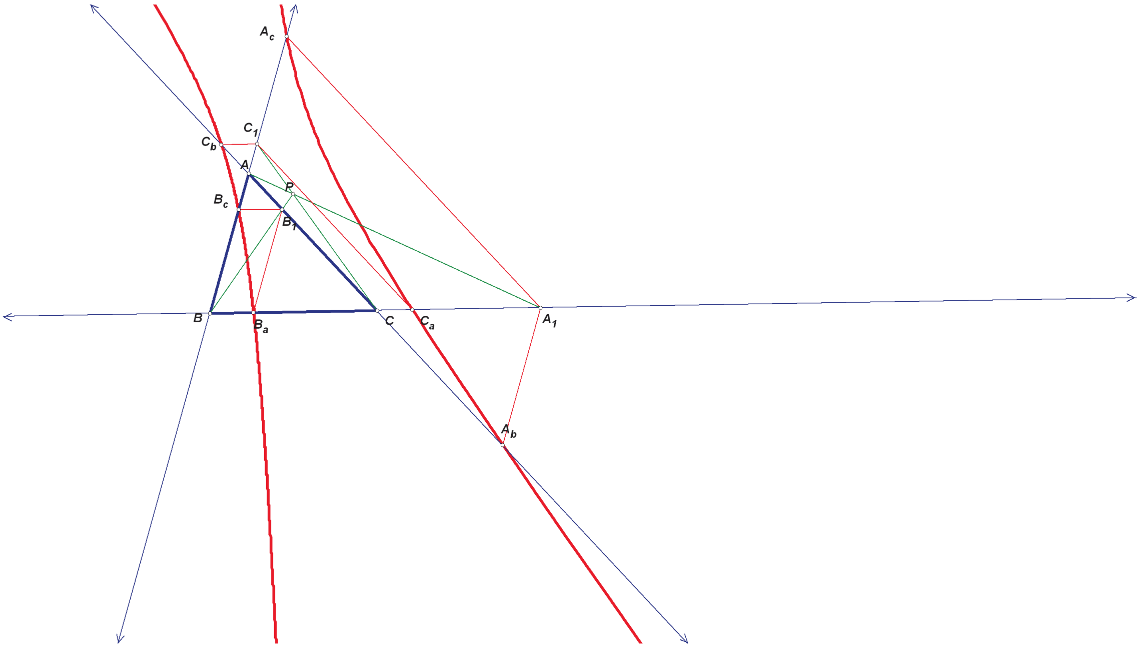


Рис. 13.

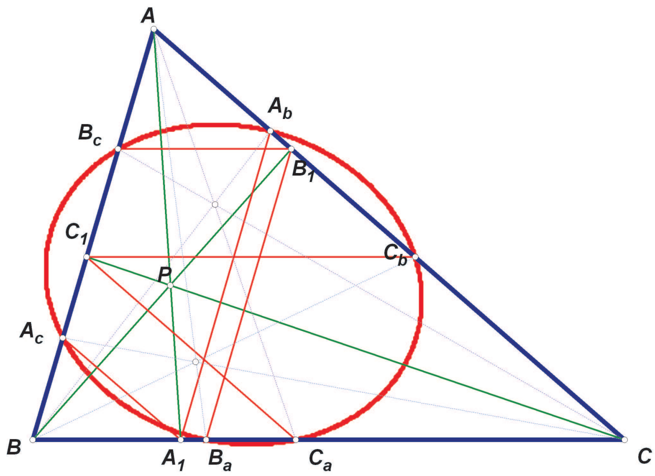


Рис. 14.

Доказательство: Выпишем левую часть условия *Карно*, заменим входящие в него отношения по подобию, и применим теорему Чевы[17].

$$\left(\frac{BB_a}{CB_a}\cdot\frac{BC_a}{CC_a}\right)\cdot\left(\frac{CC_b}{AC_b}\cdot\frac{CA_b}{AA_b}\right)\cdot\left(\frac{AB_c}{BB_c}\cdot\frac{AA_c}{BA_c}\right)= \\ =\left(\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\right)\cdot\left(\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}\right)\cdot\left(\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}\right)= \\ =\left(\frac{CA_1}{BA_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{AB_1}{CB_1}\right)^2=1.$$[18]

Утверждение 3.2. Пусть $P=(p:q:r)$ [19]. Тогда барицентрические координаты рассматриваемых шести точек имеют вид:

$$B_a=(0:p:r)\,,\qquad B_c=(p:r:0)\,,\qquad C_a=(0:q:p)\,,$$
$$C_b=(p:0:q)\,,\qquad A_b=(q:0:r)\,,\qquad A_c=(r:q:0)\,.$$

Доказательство: Действительно, очевидно, что

$$\frac{BB_a}{CC_a}=\frac{AB_c}{BB_c}=\frac{AB_1}{CB_1}=\frac{r}{p}\Rightarrow B_a=(0:p:r)\,,B_c=(p:r:0)\,.$$

Для остальных точек рассуждения аналогичны.

Теперь выведем уравнение коники, проходящей через эти точки. Как известно, в барицентрических координатах уравнение коники имеет вид: $ux^2+vy^2+\omega z^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$[20]. (переходит в равносильное), если все коэффициенты (или все переменные) умножить одновременно на любой постоянный ненулевой множитель ([5,8]).

Утверждение 3.3. Коэффициенты коники, проходящей через точки $B_a=(0:p:r)$, $B_c=(p:r:0)$, $C_a=(0:q:p)$, $C_b=(p:0:q)$, $A_b=(q:0:r)$, $A_c=(r:q:0)$, могут быть представлены в виде:

$$u=-2rq;\qquad v=-2pr;\qquad w=-2pq;$$
$$f=p^2+qr;\qquad g=q^2+rp;\qquad h=r^2+pq.$$

Доказательство: Подставив координаты точек в уравнение коники, придем к системе из 6-ти уравнений[21]:

$$\begin{cases} B_a: vp^2+wr^2+2fpr=0, & (1)\\ C_a: vq^2+wp^2+2fqp=0, & (2)\\ C_b: up^2+wq^2+2gpq=0, & (3)\\ A_b: uq^2+wr^2+2gqr=0, & (4)\\ A_c: ur^2+vq^2+2hrq=0, & (5)\\ B_c: up^2+vr^2+2hpr=0. & (6)\end{cases}$$

Из первых двух имеем:

$$v\left(\frac{p}{r}-\frac{q}{p}\right)=\omega\left(\frac{p}{q}-\frac{r}{p}\right)\Leftrightarrow\frac{v}{r}\left(p^2-qr\right)=\frac{w}{q}\left(p^2-qr\right).$$

Это значит, что либо $\frac{v}{r}=\frac{w}{q}$, либо $p^2-qr=0$. Третье и четвертое уравнение ведет к развилке $\frac{w}{p}=\frac{u}{r}$ или $q^2-rp=0$. И, наконец, пятое и шестое — $\frac{u}{q}=\frac{v}{p}$ или $r^2-pq=0$.

Будем пока считать, что «правые» альтернативы не имеют места. (Равенства правых частей нулю будут рассмотрены в §4 — и там же мы поговорим подробнее о том, почему одновременное равенство нулю всех трех выражений соответствует совпадению исходной точки P с центроидом G).

Далее, в силу однородности уравнения коники, можно считать, что $h = 1$**[22]**. Тогда, подставив выражение $v = \frac{p}{q}u$ в (5), получим: $ur^2 + \frac{p}{q}q^2u + 2rq = 0 \Rightarrow u = -\frac{2qr}{pq+r^2}$. Значит, $w = \frac{p}{r} \cdot u = -\frac{2pq}{pq+r^2}$; $v = \frac{r}{q}w = -\frac{2pr}{pq+r^2}$. Наконец, отыщем f и g. Подстановки в (3) и (1) быстро ведут к цели:

$$\frac{-2rq \cdot q^2 - 2pq \cdot r^2}{pq + r^2} = -2gqr \Rightarrow g = \frac{rp + q^2}{pq + r^2} \quad \text{и,} \quad \text{аналогично,} \quad f = \frac{qr + p^2}{pq + r^2}.$$

Чтобы получить теперь искомые формулы для коэффициентов, остается домножить их всех на величину $k = pq + r^2$.

Согласно [5], коника вырождается в окружность, если и только если выполняются следующие равенства: $\frac{v+w-2f}{a^2} = \frac{w+u-2g}{b^2} = \frac{u+v-2h}{c^2} = \lambda\,(\neq 0)$ **[23]**. Ими и воспользуемся для доказательства основного результата:

Утверждение 3.4. Рассматриваемое семейство коник содержит единственную окружность. Ее порождает точка $X\,(194) = \left(\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\right)$ [6].

Доказательство. Поскольку

$$v + w - 2f = p^2 + pr + qp + rq = p\,(p + r) + q\,(p + r) = (p + r)\,(r + q)\,,$$

и остальные числители выражаются аналогично, то условие вырождения коники в окружность запишется в виде:

$$\frac{(p + r)\,(p + q)}{a^2} = \frac{(q + p)\,(q + r)}{b^2} = \frac{(p + r)\,(q + r)}{c^2}.$$

Или, разделив все равенства на $k = (q + r)\,(r + p)\,(p + q)$,

$$\Leftrightarrow \frac{1}{q + r} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{r + p} \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{1}{p + q} \cdot \frac{1}{c^2} = \lambda.$$

Пусть $s = p + q + r$. В этих обозначениях приходим к системе:

$$\begin{cases} s - p = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{a^2} \\ s - q = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{b^2} \\ s - r = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{c^2} \end{cases} \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right); \quad q = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right); \quad r = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right).$$

Отбросив (сократив на) общий множитель, получаем, наконец:

$$X_{194} = (\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right))$$ **[24]**.

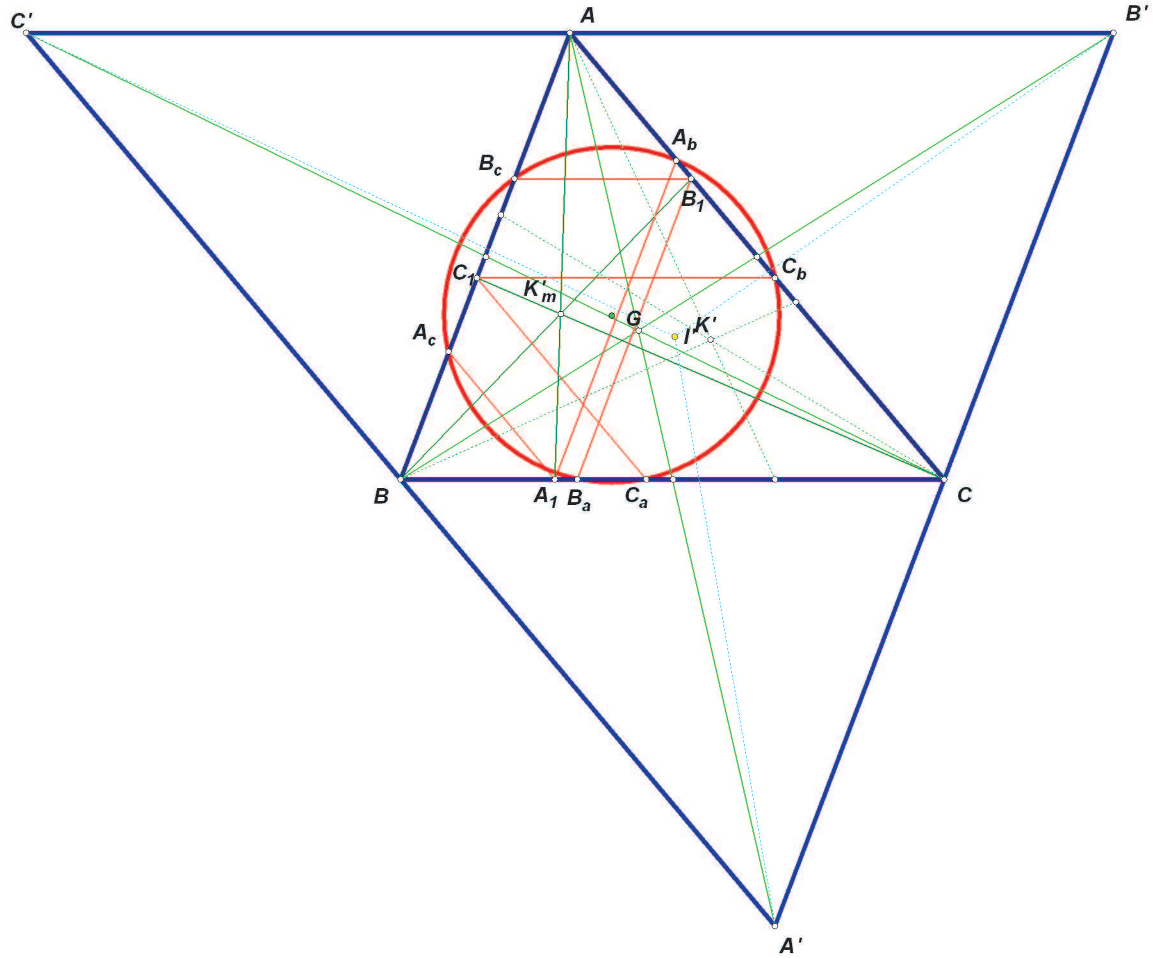


Рис. 15.

Оказывается, найденная точка имеет недурной геометрический смысл. А именно, справедливо

Утверждение 3.5. Точка

$$X_{194} = \left(\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\right)$$

есть *точка, изотомически сопряженная точке Лемуана антидополнительного треугольника* $A'B'C'$[25] (изотомия также рассматривается относительно антидополнительного треугольника).

Доказательство. Отметим один факт, из которого наше утверждение получается сразу.

Лемма: Пусть заданы две точки Q и Q', имеющие относительно треугольника ABC следующие барицентрические координаты:

$$Q = (p : q : r)\,, \qquad Q' = (q + r - p : r + p - q : p + q - r)\,.$$

Тогда гомотетия с центром в центроиде G и коэффициентом -2 переводит точку Q в Q':

$$Q' = \mathrm{H}_G^{-2}(Q)\,.$$

А поскольку та же самая гомотетия переводит исходный треугольник ABC в его антидополнительный треугольник $A'B'C'$ (ведь центроиды обоих треугольников совпадают, а медианы делятся в отношении $2:1$, считая от соответствующих вершин) и, будучи подобием, замечательные точки переводит в одноименные — другими словами можно сказать, что точка Q'

будет играть для треугольника $A'B'C'$ ту же роль, какую играет для треугольника ABC точка Q.

Доказательство леммы: Пусть $s = p+q+r$. Тогда $Q' = (s-2p : s-2q : s-2r)$, а суммарная масса этой точки равна $S' = 3s - 2s = s$. Координаты Q можно записать как $Q = (2p : 2q : 2r)$ с суммарной массой $S = 2(p+q+r) = 2s$.

Рассмотрим систему материальных точек sA, sB, sC с центром масс в центроиде $G = (s : s : s)$. Эту систему можно разбить на две подсистемы: $2pA, 2qB, 2rC$ (с центром масс в Q и суммарной массой $2s$) и $(s-2p)\,A, (s-2q)\,B, (s-2r)\,C$(с центром в Q' и суммарной массой s. Из правил группировки и рычага тогда получим, что $2s \cdot QG = s \cdot Q'G \Leftrightarrow \frac{Q'G}{QG} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow Q' = \mathrm{H}_G^{-2}(Q)$ (т. к. суммарные массы одного знака, деление отрезка QQ' точкой G осуществляется *внутренним* образом).

В нашем случае $Q = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}$. Хорошо известно, что точка эта является изотомически сопряженной к точке K Лемуана исходного треугольника ABC. ([6] — X_{76}, X_6).

§4. Случай касания и сопутствующие калькуляции[26]

Как известно ([5,8]), по заданному уравнению коники $ux^2+vy^2+\omega z^2+2fyz+2gzx+2hxy = 0$, координаты ее центра можно отыскать по формулам:

$$U+G+H : V+F+H : W+F+G,$$

где

$$U = vw - f^2, V = uw - g^2, W = uv - h^2, F = gh - uf, G = fh - vg, H = fg - wh.$$

Пользуясь этими соотношениями, можно вычислить координаты центра найденной нами окружности. С помощью программы *Mathematica* 5.1 мы получили следующее выражение для первой координаты (остальные две получаются из нее циклическими сдвигами $a \to b \to c \to a$).

$$8a^4b^2c^2\left(-a^2\left(b^2+c^2\right)\left(b^4-5b^2c^2+c^4\right)+a^4\left(b^4-4b^2c^2+c^4\right)+b^2c^2\left(b^4-4b^2c^2+c^4\right)\right)$$

Эта точка отсутствует в *ETC* ([6]).

Теперь вернёмся к обсуждению условий вида $p^2 - qr = 0$,$q^2 - rp = 0$, $r^2 - pq = 0$, возникших в предыдущем параграфе. Заметим, что одновременное выполнение любых двух равенств автоматически влечет за собой и выполнение третьего. В самом деле, пусть, например, справедливы первые два. Тогда

$$\begin{cases} p^2 = qr \\ q^2 = rp \end{cases} \Rightarrow p^2q^2 = r^2pq \Rightarrow r^2 = pq \Rightarrow r^2 - pq = 0.$$

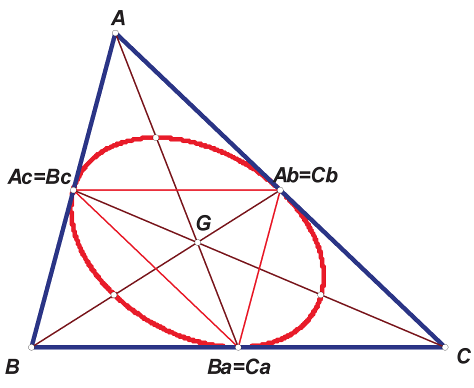


Рис. 16.

Итак, пусть выполнены все три (или два, что то же) из рассматриваемых равенств.

$$\begin{cases} r^2 = pq \\ p^2 = qr \\ q^2 = rp \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^3 = pqr \\ q^3 = pqr \\ r^3 = pqr \end{cases} \Rightarrow p^3 = q^3 = r^3 \Rightarrow p = q = r.$$

В этом случае получаем вписанный в треугольник эллипс, касающийся его сторон в серединах[27] и с центром в точке пересечения медиан G — объект, хорошо известный в геометрии: т. н. *вписанный эллипс Штейнера*, имеющий уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0$. ([5,8])

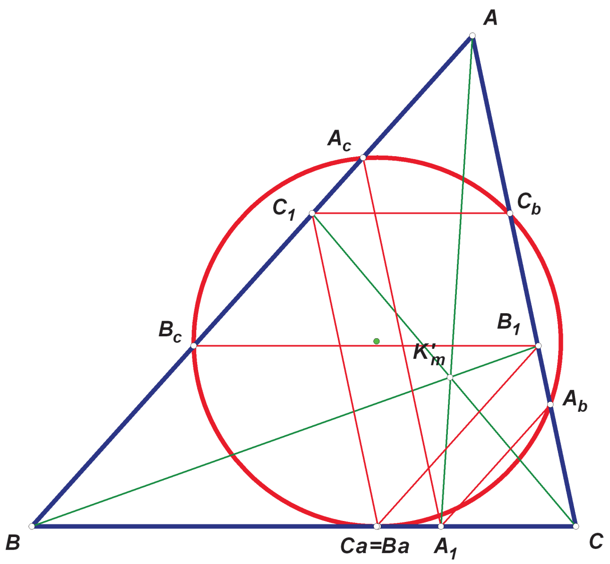


Рис. 17.

Пусть теперь выполняется ровно одно равенство из трех, к примеру $p^2 - qr = 0 q^2 - rp \neq 0 r^2 - pq \neq 0$. Тогда $\frac{w}{p} = \frac{u}{r}$и $\frac{u}{q} = \frac{v}{p}$ (см. §3). После перемножения этих двух равенств получаем, однако, что и $\frac{v}{r} = \frac{w}{q}$. Значит, мы можем рассуждать в точности, как в предыдущем параграфе, и получим в результате все ту же окружность, правда с ограничениями на длины сторон исходного треугольника вида $p^2 - qr = 0$. Вся та же программа приводит выражение в левой части равенства к виду

$2a^2\left(-b^2c^2\left(b^2+c^2\right)+a^2\left(b^4+c^4\right)\right)$[28], т. е. получаем условие $\left(b^4+c^4\right) = 2b^2c^2\left(b^2+c^2\right)$. Геометрически же равенство $p^2 = qr$ означает, что точки C_a и B_a совпадают, т. е. что наша окружность касается стороны BC в этой «сдвоенной» точке.

Действительно,

$$C_a = (0 : q : p) = (0 : qr : pr) = \left(0 : p^2 : pr\right) = (0 : p : r) = B_a.$$

И, обратно,

$$C_a = (0 : q : p) = (0 : p : r) = B_a \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{p}{r} \Rightarrow p^2 = qr.$$

Оказывается, существует бесконечное множество треугольников, длины сторон которых удовлетворяют условию касания.

В самом деле, поскольку

$$\left(b^4+c^4\right) = 2b^2c^2\left(b^2+c^2\right) \Leftrightarrow \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} = 2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

(после деления обеих частей равенства на $b^4 \cdot c^4$), то, совершив замену $\frac{1}{b^2} = x > 0, \frac{1}{c^2} = y > 0$, придем к уравнению, задающему полуокружность с центром в точке $O\,(1;1)$ и радиуса $R = \sqrt{2}$:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}, \quad \text{т. к.} \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

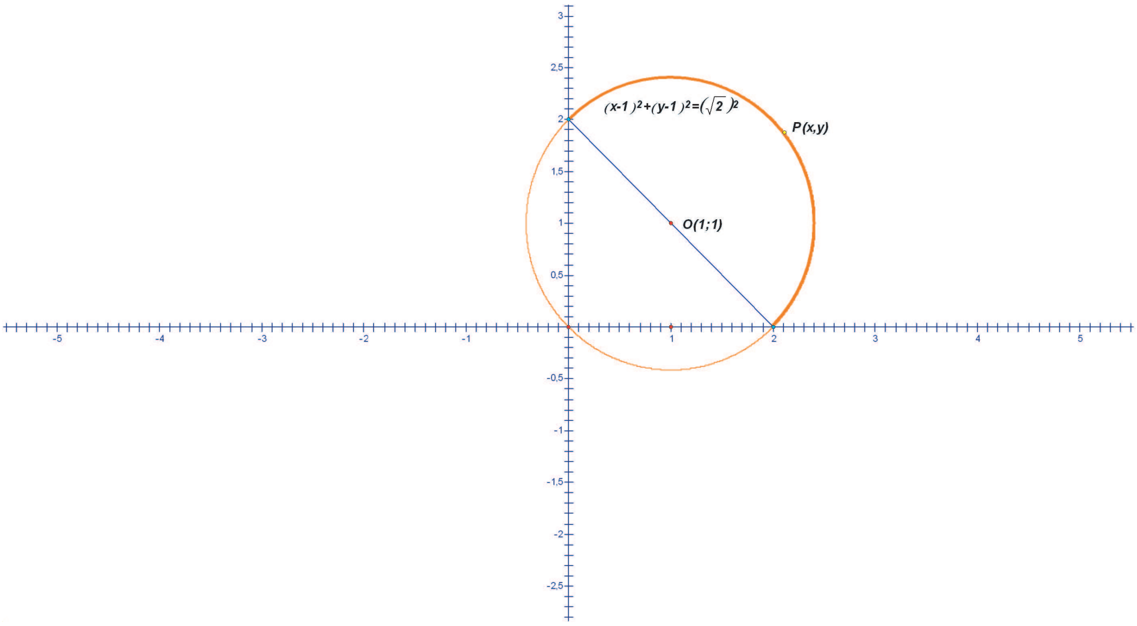


Рис. 18.

Для любой точки $P\,(x,y)$ этой полуокружности можно подобрать бесконечно много треугольников, для которых *условие касания* имеет место. Нужно только проследить, чтобы выполнялись все три неравенства треугольника. А для этого достаточно положить $b = \frac{1}{\sqrt{x}}, c = \frac{1}{\sqrt{y}}$ и $a \in \left(\max(\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right), \left(\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}\right)); \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right)$. Очевидно, что для такой тройки чисел(a,b,c) система неравенств $\begin{cases} b+c > a \\ c+a > b \\ a+b > c \end{cases}$ будет выполняться.

Цитированная литература

1. А. Акопян, А. Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

2. А. Мякишев. Элементы геометрии треугольника. М.: МЦНМО, 2009.

3. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007.

4. И. Шарыгин. Геометрия. Планиметрия (задачник 9-11). М.: Дрофа, 2001.

5. C. Bradley. The Algebra of Geometry. Cartesian, Areal, and Projective Coordinates. UK, Bath, Highperception Ltd, 2007.

6. C. Kimberling. Encyclopedia of Triangle Centers. http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

7. R. Honsberger. Episodes in Nineteenth and Twenties Century Euclidean Geometry. (New Mathematical Library, issue 37). The Mathematical Association of America, 1995.

8. P. Yiu. Introduction to the Geometry of the Triangle.
http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf

Примечания

[1] На всякий случай: именно *творческого*, но никаким боком не *креативного*! (довольно противное (ну, испорченное, если точнее) словцо, обильно тиражируемое всевозможными СМИ и модное в определенных (натурально, *креативных*) кругах, с которыми автор нипочем не хотел бы ассоциироваться).

– Пойдешь ко мне в штат? ...

... – Кем? — спросил он.

– Криэйтором.

- -Это творцом? — переспросил Татарский. — Если перевести? Ханин мягко улыбнулся.

– Творцы нам тут [...] не нужны, – сказал он. — Криэйтором, Вава, криэйтором.

(Виктор Пелевин. Generation P.)

[2] Но надо надеяться, что всё же Элементарная Геометрия от этого простоя не особо пострадала.

Я забыл, в чём была суть фельетона. Помнится смутно его начало:

«На Парнасе было скучно.

– Чтой-то новенького никого нет, – зевая, сказал Жан-Батист Мольер.

– Да, скучновато, - отозвался Шекспир...»

Помнится, дальше открывалась дверь, и входил я — черноволосый молодой человек с толстеннейшей драмой под мышкой.

Надо мной смеялись, в этом не было сомнений, – смеялись злобно все. И Шекспир, и Лопе де Вега, и ехидный Мольер, спрашивающий меня, не написал ли я чего-либо вроде «Тартюфа», и Чехов, которого я по книгам принимал за деликатнейшего человека, но резвее всех издевался автор фельетона, которого звали Волкодав.

(Михаил Булгаков. Театральный роман.)

[3] Ощущения, разумеется, субъективные (и как бы хотелось верить — что иллюзорные), но многим, увы, не чуждые.

В поэтической форме их (ощущения эти) доходчиво передаёт несомненно талантливый (но уж больно *провокативный* и *ядовитый*) Всеволод Емелин. Вот некоторые фрагменты, заимствованные из его произведений:

И, смотря на весь этот мультикультурализм,
Где слились все народы, традиции, веры,
Я подумал, что есть наша жизнь?
И понял: она есть химера.

Или такой, весьма *злободневный*, пассаж:

В Ливии, охваченной миротворческим угаром,
Разбомбили колонну союзных инсургентов.
В Ингушетии ликвидировали Доку Умарова
Как минимум на 75%.
Зато остальные 25% Доку Умарова
Привезли в столицу на генетическую экспертизу.
Мы существуем в чем-то вроде кошмара,
Все к этому привыкли, и сверху, и снизу.
В Ливии, чтобы демократию установить,
Свергнуть диктатора-кровопийцу,
Надо плохих ливийцев убить,
Оставить только хороших ливийцев.
Вот настала весна, прилетели грачи.
Грача легко отличить от синицы.
А ты попробуй в истребителе отличи
Хорошего ливийца от плохого ливийца.

Или взять такие, *воистину пронзительные*, строки, посвященные как раз *Среднему* (сиречь, *Креативному*) *Классу*:

Пускай пока весь его внешний вид
Являет собой некоторую странность,
В дальнейшем он многопартийность нам сулит,
А главное, сулит нам толерантность.
Он армию контрактную сулит,
Но главное, сулит нам толерантность.
Пускай не завтра и не послезавтра,
Но всё равно ведь все-таки сулит.
Ведь правда же сулит?
Сулит? Скажи, сулишь?
Сулишь? Сулишь, скотина?
Сулит.

Собственно, если сохранять чувство юмора, к автору серьезных претензий быть не может; его вирши — довольно естественная *защитная реакция* на происходящее вокруг (каков вопрос — таков ответ). Емелин поступает в точности, как знаменитый чукча (оленевод?) из анекдота: *что видит, о том и поёт.*

(Анекдот, на всякий случай, в одной из версий, звучит так:

Чукчу посадили, а он сидит и целыми днями поет. Его спрашивают:
– Ты о чем все поешь?
– Однако, что вижу, то пою.
Охране надоело, выключили свет, а он опять поет.
– Ну а теперь-то ты что видишь?
– Однако, темнота вижу.)

Разного рода попрёки и упрёки следует, вероятно, в большей степени отнести к этому самому *вокруг.*

[4] Мы будем называть так кривую второго порядка, представляющую собой в невырожденном случае эллипс, параболу или гиперболу. Известно, что коника однозначно задается 5-ю точками плоскости.

[5] как правило, расположенных на прямых, содержащих стороны рассматриваемого треугольника.

[6] Это — точка, изогонально сопряженная центроиду G. В *ETC* ([6]) она выступает под шестым номером: X_6.

Точка P_l, изогонально сопряженная точке P, получается в результате отражения чевиан данной точки P относительно соответствующих биссектрис — как пересечение новой тройки прямых, содержащих отраженные чевианы.

[7] Так называют треугольник с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами исходного треугольника.

[8] J — точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с противолежащими точками касания вписанной окружности. Она же — X_7 в *ETC* ([6]).

[9] т. е. точки разбиваются на две тройки, и для каждой из них надо записать условие, фигурирующее в теореме Чевы, а после эти условия перемножить

[10] Но привести его очень хотелось: дело в том, что указанная окружность была открыта сравнительно недавно, в начале этого века, нидерландским математиком Ламуном (*Floor van Lamoen*). Это свидетельствует о том, что в элементарной геометрии всё еще остается место подвигу.

[11] т. е. идущих через две.

[12] т. е. замкнутой шестизвенной ломанной, возможно, с самопересечениями.

[13] Здесь и далее все выкладки ведутся именно в них. Подробнее о барицентрических координатах см. [2,3]: глава 14; [5,8].

[14] Хотя во всех случаях компьютер показывает наличие окружности. Однако мы не занимались вопросами существования или отсутствия решений, вырождающих конику в окружность — задача была именно в том, чтобы отыскать явные решения.

[15] Точка P_m, изотомически сопряженная точке P, получается в результате отражения оснований чевиан данной точки P относительно середин соответствующих сторон — как пересечение новой тройки прямых, соединяющих вершины треугольника с противолежащими им отраженными основаниями.

[16] Во всех предыдущих случаях на рисунках изображался эллипс, но вовсе не потому, что коника обязательно имеет именно такой вид — вовсе нет. И парабола, и гипербола также возможны — просто эллипс как-то более радует глаз на рисунке. Ну, вот, ради разнообразия, здесь помещаем одну картинку с гиперболой.

[17] Для удобства вычислений мы считаем здесь и далее (разумеется, не ограничивая общности), что точка P расположена *внутри* треугольника. Для внешних точек результат не меняется.

[18] Кстати, отсюда также следует (по теореме Чевы) *конкурентность* двух троек прямых: AB_a, BC_b, CA_c и AC_a, BA_b, CB_c.

[19] Так как мы исключили из рассмотрения точки, лежащие на прямых, содержащих стороны исходного треугольника, т. е. в тройку координат точки P не могут входить нули.

[20] И является однородным как относительно коэффициентов, так и относительно переменных, т. е. не меняется (переходит в равносильное), если все коэффициенты (или все переменные) умножить одновременно на любой постоянный ненулевой множитель.

[21] Одно из которых, конечно, является следствием остальных. Но, для полноты, выпишем их все.

[22] Несложно убедиться (рассмотрев соответствующую систему уравнений) в том, что случай $f = g = h = 0$ не может быть реализован для рассматриваемого семейства коник.

[23] Эти соотношения легко вывести, располагая уравнением коники и уравнением окружности $a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + x)(u_0x + v_0y + z_0x) = 0$ (см. [5,8]).

[24] Чувства, охватившие автора при виде зримого претворения праздной мозговой игры (по выражению Андрея Белого) в проявившуюся на экране ноутбука и Бог весть из недр какого бытия-небытия извлеченную *окружность* — лучше всего, пожалуй, можно описать ёмким словом *«катарсис»*.

Которое, в развернутом и отчасти приземленном переводе с древнегреческого, означает примерно следующее:

– Да, – промолвил Манилов, – уж она, бывало, всё спрашивает меня: «Да что же твой приятель не едет?» – «Погоди, душенька, приедет». А вот вы наконец и удостоили нас своим посещением. Уж такое, право, доставили наслаждение... майский день... именины сердца... (Николай Гоголь. Мертвые души.)

[25] Т. е. такого, для которого исходный треугольник ABC является *серединным.*

[26] *– А не посчитать ли нам, ученые кроты?*

– как говаривали одноименные персонажи замечательного отечественного мультфильма «Дюймовочка» – безусловно, все, как один – *грамотные потребители*, обильное взращивание и пестование которых министр образования Фурсенко (теперь уже бывший) объявил приоритетной задачей российской школы. Представляется, что таковой она (задача) и продолжает оставаться — после отставки Фурсенко.

[27] Это и без всяких вычислений ясно. Вспомнив, как мы определяли нашу конику, видим непосредственно, что в случае центроида каждая из середин сторон исходного треугольника встречается среди точек пересечения соответствующих параллелей (ими будут средние линии) со

сторонами ровно дважды — т. е. имеем, как ни крути, три «двойные» точки в серединах сторон. И если мы в коэффициенты коники подставим $G\,(1:1:1)$, то получим всё то же уравнение вписанного эллипса Штейнера — в чем легко убедиться непосредственно.

[28] После приведения всех координат к общему знаменателю и последующего на него сокращения.

Мякишев Алексей Геннадьевич,
преподаватель математики
Химического Лицея №1303, г. Москва.

Email: myakishev62@mail.ru

О равносильных определениях связности открытого множества и формуле Гурса́, восстанавливающей аналитическую функцию по ее действительной части

С. В. Шведенко

В первой части заметки доказана равносильность трех определений связности для открытого множества на комплексной плоскости. Во второй части рассмотрен вопрос о восстановлении аналитической функции по ее действительной или мнимой части, модулю или аргументу и доказана формула Гурса́ восстановления аналитической функции по ее действительной части.

1. Следующее утверждение, формулируемое для комплексной плоскости $\mathbb{C}$, справедливо в координатном пространстве любой размерности.

Если множество $D\subset\mathbb{C}$ является открытым[1], *то следующие три условия оказываются равносильными*:
1° множество D не является объединением двух (или большего числа) непересекающихся открытых множеств;
2° любые две точки множества D можно соединить ломаной, не выходя за пределы множества D; дополнительно можно потребовать, чтобы каждое звено этой ломаной было параллельно одной из осей координат;
3° для любых двух точек $z_*, z^*\in D$ существует соединяющий их путь, проходящий по множеству D, т. е. непрерывная на некотором отрезке $[a,b]$ функция $z=z(t)$ со свойствами: $z(a)=z_*,\ z(b)=z^*,\ z(t)\in D$ при $a<t<b$; дополнительно можно потребовать, чтобы функция $z=z(t)$ имела непрерывную производную $\dot z(t)$ на отрезке $[a,b]$.
При выполнении какого-либо из этих трех условий (а следовательно, и остальных двух) открытое множество D считают <u>связным</u> и называют <u>областью</u>.

<u>Доказательство</u>. 1° ⇒ 2° (“от противного”). Пусть условие *2° не выполняется*, т, е. некие точки $z_*, z^*\in D$ *нельзя* соединить *ломаной*, лежащей в множестве D. В этом случае множество D оказывается *объединением* $D=D_+\cup D_-$ *непересекающихся* множеств D_+ и D_- — тех точек $z\in D$, которые соответственно *соединимы* и *не соединимы* с точкой z_* *ломаной*, лежащей в множестве D (при этом $z_*\in D_+$, а $z^*\in D_-$). Если z — произвольно взятая точка множества D_+, а K — принадлежащий множеству D *круг* с центром z, то возможность продления *ломаной*, соединяющей (в множестве D) точку z_* с точкой z, присоединением к ней *ломаной*[2] соединяющей в *круге* K его центр z с произвольно взятой точкой $\zeta\in K$, показывает, что любая точка круга $K\subset D$, центр которого принадлежит множеству D_+, также принадлежит множеству D_+. По сходным соображениям любая точка *круга* $K\subset D$, центр которого принадлежит множеству D_-, также оказывается принадлежащей множеству D_-. Оба множества D_+ и D_- являются поэтому *открытыми*, так что условие *1°* для множества D *не выполняется.*

2°⇒3°. Пусть z_* и z^* — любые точки множества D, а $z_*, z_1,\dots,z_n, z^*$ — последовательные вершины *ломаной* L (со звеньями, параллельными осям координат), проходящей по множеству D. Тогда *непрерывная* на отрезке $[0,n+1]$ функция $z=z(t)$, где

[1] Т. е. каждая его точка является *внутренней точкой* этого множества — имеет *окрестность*, принадлежащую этому множеству; в символической записи (если считать переменные z и ζ точками комплексной плоскости): $\forall z\big(z\in D\Rightarrow \exists\delta>0\forall\zeta(|\zeta-z|<\delta\Rightarrow\zeta\in D)\big)$. Хотя для *пустого* множества ($D=\varnothing$) значение последней формулы есть *истина*, все упоминаемые *открытые* множества предполагаются *непустыми*.

[2] Из трех или менее звеньев, параллельных осям координат.

$$z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z_* + (z_1 - z_*)t, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ z_1 + (z_2 - z_1)(t-1), \text{ если } 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n + (z^* - z_n)(t-n), \text{ если } n \leqslant t \leqslant n+1, \end{cases}$$

представляет собой *путь*, проходящий по множеству D (вдоль ломаной L), соединяющий точки z_* и z^*. Полагая же

$$z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z_* + (z_1 - z_*) \sin^2 \frac{\pi t}{2}, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ z_1 + (z_2 - z_1) \sin^2 \frac{\pi (t-1)}{2}, \text{ если } 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n + (z^* - z_n) \sin^2 \frac{\pi (t-n)}{2}, \text{ если } n \leqslant t \leqslant n+1, \end{cases}$$

можно получить *путь* $z = z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant n+1$, обходящий ту же ломаную L, но уже с непрерывной "скоростью"[3].

3° $\Rightarrow$ *1°* ("от противного"). Пусть открытое множество D является объединением двух (или бо́льшего числа) *непересекающихся* открытых множеств и пусть D_* — одно из них. Если допустить, что для каких-то точек $z_* \in D_*$ и $z^* \in D \setminus D_*$ существовал *путь* $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, проходящий по множеству D и соединяющий эти точки $(z(a) = z_*,\ z(b) = z^*)$, то деление отрезка $[a, b]$ пополам приводило бы к двум отрезкам, для одного из которых, далее обозначаемого $[a_1, b_1]$, выполнялось бы условие: $z(a_1) \in D_*$, а $z(b_1) \in D \setminus D_*$. Применение этой же процедуры к отрезку $[a_1, b_1]$ приводило бы к отрезку $[a_2, b_2]$ со свойством $z(a_2) \in D_*$, а $z(b_2) \in D \setminus D_*$ и т. д. Если c — общая точка для образующейся последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, то[4] в любую окрестность точки $z(c)$ попадают как точки $z(a_n) \in D_*$, так и точки $z(b_n) \in D \setminus D_*$. Как следствие (ввиду *открытости* множеств D_* и $D \setminus D_*$) точка $z(c) \in D$ не принадлежит ни множеству D_*, ни множеству $D \setminus D_*$ — *противоречие*[5].

2. Функцию комплексной переменной $w = f(z)$ называют *аналитической в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если ее *производная* $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ существует не только в самой точке z_0, но и в некоторой ее окрестности. (Фундаментальный факт комплексного анализа состоит в том, что последнее условие равносильно разложимости функции $w = f(z)$ в окрестности точки z_0 в ряд по целым неотрицательным степеням $z - z_0$.)

Сразу из определения следует, что множество *точек аналитичности* любой функции является *открытым* (или же пустым). Если это множество состоит из *непересекающихся* открытых множеств, то данную функцию удобнее рассматривать на каждом из этих множеств отдельно, так что, говоря об *аналитической функции*, традиционно подразумевают функцию, заданную и имеющую *производную* в некоторой *области*.

Для того чтобы функция $w = f(z)$, аналитическая в области $D \subset \mathbb{C}$, была постоянной в этой области, достаточно выполнения какого-либо из следующих условий:

1) $f'(z) \equiv 0$; *2)* $\operatorname{Re} f(z) \equiv \text{const}$; *3)* $\operatorname{Im} f(z) \equiv \text{const}$; *4)* $\arg f(z) \equiv \text{const}$; *5)* $|f(z)| \equiv \text{const}$.

Доказательство. Для начала следует удостовериться, что выполнение любого из этих условий влечет тождественное обращение в нуль (в области D)[6] частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$

[3] С учетом того, что в *концевых* точках отрезков $[0, 1]$, $[1, 2]$, ... $[n, n+1]$ функция $z = z(t)$ имеет *односторонние производные*, равные *нулю*, она обладает *непрерывной производной* $\dot{z}(t)$ на отрезке $[0, n+1]$.

[4] Ввиду *непрерывности* функции $z = z(t)$ на отрезке $[a, b]$.

[5] Его источник — предположение о *соединимости* точек $z_* \in D_*$ и $z^* \in D \setminus D_*$ *путем* в множестве D.

[6] Рассматриваемой уже не на плоскости $\mathbb{C}$ (переменной z), а на *геометрически* идентичной ей координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ (переменных x, y).

функций $u=\mathrm{Re}f(x+iy)$, $v=\mathrm{Im}f(x+iy)$. В случае выполнения первого условия это вытекает из эквивалентности утверждений:

а) $\lim\limits_{\triangle z\to 0}\frac{\triangle w}{\triangle z}=a$; *б)* $\triangle w=a\triangle z+o(|\triangle z|)$ *при* $\triangle z\to 0$;

в) $\triangle w=a\triangle x+ia\triangle y+o(\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2})$ *при* $\triangle x\to 0$ *и* $\triangle y\to 0$;

г) функция $w=f(x+iy)$ *(двух действительных переменных) дифференцируема, при этом* $a=\frac{\partial f}{\partial x}=-i\,\frac{\partial f}{\partial y}$.

Комментарий по ходу доказательства: второе из двух последних равенств есть не что иное, как *уравнение* (или *условие*) *Коши–Римана*[7]; его запись в виде системы равенств $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$ (в которых $u=\mathrm{Re}f$, $v=\mathrm{Im}f$) правильнее называть *уравнениями* (или *условиями*) *Даламбера–Эйлера*[8].

В случае выполнения второго или третьего условий следует применить *уравнения Даламбера–Эйлера*. Четвертый случай сводится к третьему умножением функции на *постоянную* $e^{-i\arg f(z)}$. При выполнении пятого условия достаточно разобрать случай $|f(z)|\equiv c\neq 0$. Рассматривая вытекающие из тождества $u^2(x,y)+v^2(x,y)\equiv c^2$ равенства $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}\;u+\frac{\partial v}{\partial x}v=0\\ \frac{\partial u}{\partial y}u+\frac{\partial v}{\partial y}v=0\end{cases}$ в области D как имеющую *ненулевое* решение (u,v) систему линейных однородных алгебраических уравнений, можно сделать вывод: определитель $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ этой системы *равен нулю* (в любой точке области D).

Завершив доказательство *обращения в нуль* в области D частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, остается воспользоваться свойство соединимости любых двух точек $z_*, z^*\in D$ ломаной $L\subset D$ со звеньями, пралдельными осям координат. Применение же к функциям $u=\mathrm{Re}f(x+iy)$ и $v=\mathrm{Im}f(x+iy)$ *теоремы Лагранжа* (по переменной x на “горизонтальных” и по переменной y на “вертикальных” звеньях ломаной L) показывает их *постоянство* вдоль каждого звена ломаной, из чего следует совпадение значений $f(z_*)$ и $f(z^*)$ любых двух точек $z_*, z^*\in D$, т.е. *постоянство* функции $w=f(z)$ в области D.

Вот прямое следствие доказанного утверждения.

Аналитическая функция (в области на комплексной плоскости) может быть *восстановлена*[9]:
а) по ее *действительной* или *мнимой части* с точностью до постоянного слегаемого — соответственно *чисто мнимого* или *действительного*;
б) по ее *модулю* или *аргументу* с точностью до постоянного множителя — соответственно *равного по модулю единице* или *положительного*.

3. Традиционный способ *практического* восстановления аналитической функции комплексной переменной $w=f(z)$ по ее *действительной* части $u=u(x,y)$ состоит в

1) решении системы уравнений Даламбера–Эйлера $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$ относительно *неизвестной* функции $v=v(x,y)$ (при известной $u=u(x,y)$);

2) последующей записи функции $w=u(x,y)+iv(x,y)$ в виде $w=f(z)$ (как функции *комплексной*, а не *двух действительных* переменных).

---

[7] В работах французского математика Коши (Cauchy Augustin-Louis, 1789–1857) оно встречается по разным поводам ([1]: sér. I, t. XI, p. 303; sér. II, t. I, p. 462; sér. II, t. II, p. 233), но выдающейся роли не играет. Напротив, для немецкого математика Римана оно служит основой его понимания функции комплексной переменной: *“Функцией от комплексной величины* $z=x+iy$ *я считаю всякую величину* w*, которая изменяется вместе с ней при соблюдении условия* $i\,\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}$*, не зависимо от того, как выражается* w *через* x *и* y*”* ([2], с. 88).

[8] Первым их записал французский ученый Даламбер (d'Alembert Jean Le Rond, 1717–1783) в связи с решением задач гидродинамики (на с. 61 монографии [3]). В свою очередь, швейцарский (он же российский) математик Эйлер (Euler Leonhard, 1707–1783) первым стал интерпретировать их ([4], с. 2–3, 269–271) как условия существования *производной* функции комплексной переменной.

[9] По крайней мере в принципе.

То, что второй пункт этой программы может потребовать не меньших усилий, чем первый, видно из примера $u=-2x^4-4x^3y+12x^2y^2+4xy^3-2y^4$: на получение предварительного ответа
$$w=-2x^4-4x^3y+12x^2y^2+4xy^3-2y^4+i\,(x^4-8x^3y-6x^2y^2+8xy^3+y^4+c)$$
затрачивается меньше времени, чем на вывод из него окончательного $w=(i-2)z^4+ic$.

Более изящный способ восстановления аналитической функции по ее действительной части описывается следующим утверждением.

Если действительная часть $u=u(x,y)$ аналитической в области $D\subset\mathbb{C}$ функции $w=f(z)$ допускает подстановку $x=\frac{z}{2}$, $y=\frac{z}{2i}$ (т. е. значение $u\big(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\big)$ имеет смысл для всех значений $z\in D$), то с точностью до постоянного слагаемого в области D справедливо равенство[10] $\boxed{f(z)=2u\big(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\big)}$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{f}(z)\overset{\text{def}}{=}2u\big(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\big)$, $z=x+iy\in D$. Так как действительная и мнимая части функции $w=f(z)$ удовлетворяют *условиям Даламбера–Эйлера*, выполняются равенства:

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}=2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{1}{2i}\Big)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$
$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial y}=2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{i}{2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{i}{2i}\Big)=i\,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=i\,\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Эти равенства свидетельствуют о выполнении для функции $w=\widetilde{f}(z)$ в области D *уравнения Коши–Римана* $i\,\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}=\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial y}$, в силу чего данная функция является *аналитической* в области D, обладая *производной*

$$\widetilde{f}'(z)=\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}=\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\overset{\substack{x=\frac{z}{2}\\ y=\frac{z}{2i}}}{=}f'\Big(\frac{z}{2}+i\,\frac{z}{2i}\Big)=f'(z).$$

Поскольку $\big[\widetilde{f}(z)-f(z)\big]'=0$, следует вывод: $\widetilde{f}(z)-f(z)\equiv\text{const}$, т. е. $f(z)\equiv2u\big(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\big)+c$ в области D, что и требовалось доказать.

Замечание. Так как $\operatorname{Im}f(z)=\operatorname{Re}\big(-i\,f(z)\big)$, справедлива формула восстановления (с точностью до *постоянного слагаемого*) аналитической функции $w=f(z)$ по ее *мнимой* части $v=v(x,y)$: $\boxed{f(z)=2iv\big(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\big)}$. При условии же существования (в данной области) *однозначной ветви аргумента* (а следовательно и *логарифма*) функции $w=f(z)$ из равенства $\ln f(z)=\ln|f(z)|+i\arg f(z)$ вытекают формулы восстановления (с точностью до *постоянного множителя*) аналитической функции $w=f(z)$ по ее *модулю* $|f(z)|=\rho(x,y)$ или *аргументу* $\arg f(z)=\psi(x,y)$: $\boxed{f(z)=\rho^2\big(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\big)}$, $\boxed{f(z)=\exp\big(2i\psi\big(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\big)\big)}$

Примеры. *1.* В случае $u=-2x^4-4x^3y+12x^2y^2+4xy^3-2y^4$ $\big(=\operatorname{Re}(i-2)z^4\big)$ подстановка $x=\frac{z}{2}$, $y=\frac{z}{2i}$ дает:
$$f(z)=2u\Big(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\Big)=2\Big(-\frac{z^4}{16}-4\frac{z^4}{16i}+12\frac{z^4}{-16}+4\frac{z^4}{-16i}+4\frac{z^4}{-16i}-2\frac{z^4}{16}\Big)=(i-2)z^4.$$

2. Функция $u=\frac{x}{x^2+y^2}$ $\big(=\operatorname{Re}\frac{1}{z}\big)$ подстановку $x=\frac{z}{2}$, $y=\frac{z}{2i}$ не допускает (из-за особенности функции в начале координат). Обойти это затруднение позволяет перенос начала координат, например, в точку $z=1$, иначе говоря, замена переменной $z=\widetilde{z}-1$ (или $x=\widetilde{x}-1$, $y=\widetilde{y}$), при которой $u=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\widetilde{x}-1}{(\widetilde{x}-1)^2+y^2}$, и остается сделать подстановку $\widetilde{x}=\frac{\widetilde{z}}{2}$, $\widetilde{y}=\frac{\widetilde{z}}{2i}$ с последующим возвращением к переменной z:

$$2u\Big(\frac{\widetilde{z}}{2},\frac{\widetilde{z}}{2i}\Big)=2\,\frac{(\widetilde{z}/2)-1}{((\widetilde{z}/2)-1)^2+(\widetilde{z}/2i)^2}=\frac{\widetilde{z}-2}{-\widetilde{z}+1}=\frac{z-1}{-z}=\frac{1}{z}-1.$$

[10] Его (вместе с доказательством, основанном на разложении функции $u=u(x,y)$ в степенной ряд по двум переменным) можно найти у французского математика Гурса́ (Goursat Éduard, 1858–1936) на с. 145 тома III его учебника [5].

3. Если $v(x,y)=y\cos y\,\operatorname{ch} y+x\sin y\,\operatorname{sh} x\ \ \big(=\operatorname{Im}(z\operatorname{ch} z)\big)$, то

$$f(z)=2iv\Big(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\Big)=2i\Big(\frac{z}{2i}\cdot\frac{e^{i\frac{z}{2i}}+e^{-i\frac{z}{2i}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}{2}+\frac{z}{2}\cdot\frac{e^{i\frac{z}{2i}}-e^{-i\frac{z}{2i}}}{2i}\cdot\frac{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}{2}\Big)=$$
$$=z\operatorname{ch}\frac{z}{2}\operatorname{ch}\frac{z}{2}-z\operatorname{sh}\frac{z}{2}\operatorname{sh}\frac{z}{2}=z\operatorname{ch} z.$$

4. Для функции $\rho=(x^2+y^2)e^x\ \ \big(=\big|z^2e^z\big|\big)$ подстановка $x=\frac{z}{2}$, $y=\frac{z}{2i}$ дает $\rho\big(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\big)\equiv 0$. Следует поэтому сделать замену переменной (например) $z=\widetilde{z}-i$ (т. е. $x=\widetilde{x}$, $y=\widetilde{y}-i$), при которой $\rho=(\widetilde{x}^2+(\widetilde{y}-1)^2)e^{\widetilde{x}}$. Тогда

$$\rho^2\Big(\frac{\widetilde{z}}{2},\frac{\widetilde{z}}{2i}\Big)=\Big[\Big(\Big(\frac{\widetilde{z}}{2}\Big)^2+\Big(\frac{\widetilde{z}}{2i}-1\Big)^2\Big)e^{\frac{\widetilde{z}}{2}}\Big]^2=\big(-i\widetilde{z}+1\big)^2e^{\widetilde{z}}=(-iz+i^2+1)e^{z+i}=z^2e^ze^i.$$

5. Функция $w=a\exp\frac{z^2}{2}$ (a — положительное число) имеет следующее восстановление (с точностью до постоянного множителя) по своему аргументу $\psi=xy$: $f(z)=\exp\big(2i\frac{z}{2}\frac{z}{2i}\big)=\exp\frac{z^2}{2}$.

Литература

1. Cauchy A.-L. Œvres complètes. Sér. I–II. Paris, 1887–1974.
2. Риман Б. Сочинения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
3. d’Alembert. Essai d’une nouvelle théorie de la résistance des fluides. Paris, 1752.
4. Euler L. Opera omnia, series prima. V. XIX. Turici, 1932.
5. Гурса Э. Курс математического анализа. М.-Л.: ГТТИ, 1933.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

Дополнения до полных латинских квадратов

А. Ю. Эвнин

В статье, которая дополняет один из сюжетов публикации “Вокруг теоремы Холла” [5], приводится новое доказательство критерия Г. Райзера дополняемости латинского прямоугольника $r \times s$ до латинского квадрата $n \times n$.

Латинские квадраты известны с античных времён. В наше время они находят многочисленные применения в теории планирования эксперимента, построении расписаний, помехоустойчивом кодировании, криптографических системах разделения секрета, проектировании оптических маршрутизаторов. Задачи, связанные с латинскими квадратами, выводят на многие важные проблемы дискретной математики ([6, 7]).

В 2005 г. в журнале “Математическое образование” была опубликована наша статья “Вокруг теоремы Холла” [5]. В ней, в частности, приводилась теорема М. Холла о том, что любой латинский прямоугольник размера $m \times n$ можно достроить до латинского квадрата $n \times n$. В настоящей публикации рассматривается более общий результат — критерий Райзера. Известное доказательство этого критерия[1] весьма громоздко и осуществляется на языке двоичных матриц. Найденное нами доказательство, как и упомянутое, имеет своим исходным пунктом теорему Ф. Холла, но, как нам кажется, более наглядное и более короткое.

Предварительные сведения

Для замкнутости изложения мы напомним сначала основные определения и формулировки теорем, связанные с темой статьи.

Паросочетанием в графе называют множество попарно несмежных рёбер.

Двудольный граф G с фиксированным разбиением множества вершин на доли V_1 и V_2 будем обозначать $G(V_1, V_2)$.

Пусть $G(V_1, V_2)$ — двудольный граф. **Совершенным паросочетанием из V_1 в V_2** называется паросочетание в G, покрывающее V_1 (т. е. для всякой вершины из V_1 найдётся в паросочетании инцидентное ей ребро).

Пусть $A \subset V$ — подмножество вершин графа $G = \langle V, E\rangle$. **Окружением** множества A называют множество

$$\Gamma(A) = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v) \setminus A,$$

где $\Gamma(v)$ — множество вершин, смежных с v.

Теорема 1. (Ф. Холл, 1935 г.). *Совершенное паросочетание из V_1 в V_2 в двудольном графе $G(V_1, V_2)$ существует тогда и только тогда, когда*

$$\forall A \subset V_1 \quad |\Gamma(A)| \geqslant |A|.$$

Граф называют **регулярным**, если степени всех его вершин одинаковые.

Теорема 2. (А. Пуанкаре, 1901 г.). *В любом непустом регулярном двудольном графе $G(V_1, V_2)$ существует совершенное паросочетание.*

[1] [3](теорема 2.2 на с. 70) или [4](теорема 11.7 на с. 123).

Следствие. *Любой непустой регулярный двудольный граф распадается на совершенные паросочетания.*

Доказательство. Пользуясь теоремой, будем последовательно одно за другим выделять в графе непересекающиеся совершенные паросочетания. Это возможно, поскольку после удаления из регулярного графа рёбер совершенного паросочетания степени всех вершин уменьшаются на единицу, в результате чего вновь получается регулярный граф. □

Матрица размера $m \times n$ называется **латинским прямоугольником**, если элементы каждой строки этой матрицы образуют перестановку чисел от 1 до n, и в каждом столбце все числа разные.

Очевидно, что в силу определения число строк латинского прямоугольника m не превосходит числа его столбцов n. В случае $m = n$ латинский прямоугольник называют **латинским квадратом**.

Например, матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

представляют собой латинский прямоугольник размером 3×5 и латинский квадрат 5×5. В этом примере квадрат получается из прямоугольника приписыванием двух строк.

Теорема 3. (М. Холл, 1945 г.). *Любой латинский прямоугольник $m \times n$, где $m < n$, можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$ приписыванием новых $n - m$ строк.*

Доказательство. Построим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, в котором V_1 есть множество столбцов латинского прямоугольника размера $m \times n$, $V_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$, а вершины $i \in V_1$ и $j \in V_2$ соединены ребром тогда и только тогда, когда в i-м столбце прямоугольника нет числа j.

Например, в случае прямоугольника из рассмотренного примера имеем граф, изображённый на рис. 1. Ясно, что степень любой вершины из доли V_1 равна $n - m$. С другой стороны, любое

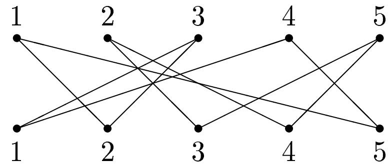


Рис. 1.

число j встречается в m строках исходного латинского прямоугольника m раз, значит, оно появляется в m столбцах и отсутствует в $n - m$ столбцах. Отсюда следует, что и степень любой вершины из V_2 также равна $n - m$.

Таким образом, двудольный граф $G(V_1, V_2)$ является непустым и регулярным. Как нам уже известно, такой граф распадается на совершенные паросочетания. Каждое совершенное паросочетание задаёт одну из новых строк латинского квадрата. □

В рассмотренном выше примере переходу от прямоугольника к квадрату соответствует выделение в двудольном графе совершенных паросочетаний: $\{12, 23, 31, 45, 54\}$ и $\{15, 24, 32, 41, 53\}$.

Критерий Райзера

Итак, произвольный латинский прямоугольник $m \times n$ дополняется до латинского квадрата $n \times n$. Рассмотрим более общую задачу.

Пусть L — матрица размера $r \times s$ ($r \leqslant n, s \leqslant n$), заполненная числами $1, 2, \ldots, n$, и при этом в каждой строке и каждом столбце L нет повторяющихся чисел. Такую матрицу будем называть **латинским прямоугольником** $r \times s$ на числах $1, 2, \ldots, n$. При каких условиях L можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$? Ответ на это вопрос даёт *критерий дополняемости*, найденный Г. Райзером. Ниже мы его сформулируем и докажем. Но сначала нам понадобится следующее утверждение, которое является обобщением следствия из теоремы Пуанкаре.

Теорема 4. *Пусть $G(V_1, V_2)$ — двудольный граф, в котором $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, $m \leqslant n$, степень каждой вершины из доли V_1 равна r, а степень каждой вершины v из доли V_2 удовлетворяет неравенству*

$$r - n + m \leqslant \rho(v) \leqslant r.$$

Тогда граф G распадается на r совершенных паросочетаний.

Доказательство. Если $m = n$, то утверждение леммы совпадает со следствием из теоремы Пуанкаре.

Пусть $m < n$. Добавим в долю V_1 $n - m$ новых вершин. Поочерёдно соединим каждую из новых вершин с r вершинами из доли V_2, текущие степени которых меньше r. В результате получится регулярный двудольный граф.

Покажем, что такая процедура осуществима. Удобно вообразить, что мы имеем n ящиков — по одному на каждую вершину из V_2, причём количество шаров в каждом ящике равно текущей степени соответствующей вершины. Ящики, содержащие менее n шаров, будем называть *неполными.* Добавление r рёбер, инцидентных новой вершине из V_1, означает добавление r шаров в r неполных ящиков. Всего нужно разложить $r(n - m)$ шаров. С другой стороны, в ящик, отвечающей вершине v, нужно добавить $r - \rho(v)$ шаров, а общее число свободных мест в ящиках равно

$$\sum_{v \in V_2} (r - \rho(v)) = rn - \sum_{v \in V_2} \rho(v) = rn - \sum_{u \in V_1} \rho(u) = rn - rm = r(n - m).$$

Получилось, что количество свободных мест совпадает с количеством размещаемых шаров. Кроме того, из условия леммы следует, что для любой вершины v выполняется неравенство $r - \rho(v) \leqslant n - m$, т. е. количество свободных мест в каждом ящике не больше $n - m$. Для раскладки первой порции из r шаров выберем наименее заполненные ящики. Покажем, что после этого не останется ящиков с количеством свободных мест, не меньшим $n - m$. Действительно, в противном случае изначально имелось бы не менее $r + 1$ ящиков, в каждом из которых $n - m$ свободных мест, а общее количество свободных мест по всем ящикам превышало бы $r(n - m)$. Значит, после первой раскладки в каждом ящике останется не больше $n - (m + 1)$ свободных мест — задача сведена к аналогичной с заменой m на $m + 1$. Поэтому указанный шаг (раскладку r шаров) можно повторить $n - m$ раз.

Таким образом, $r(n - m)$ шарами можно дополнить все неполные ящики до r шаров, причём шары раскладываются $n - m$ порциями по r штук в каждой, и шары из каждой порции попадают в r различных ящиков.

Итак, доказано, что исходный граф $G(V_1, V_2)$ является подграфом некоторого двудольного графа G', в котором степень каждой вершины равна r. По следствию из теоремы Пуанкаре G' распадается на r совершенных паросочетаний. В каждом из них удалим рёбра, инцидентные новым вершинам из доли V_1. В результате получится разбиение рёбер исходного графа на r совершенных паросочетаний. $\square$

Теорема 5. (Г. Райзер, 1951 г.) *Пусть L — латинский прямоугольник $r \times s$ на числах $1, 2, \ldots, n$; $N(i)$ — количество появлений числа i в L ($i = 1, \ldots, n$). Такой латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$ тогда и только тогда, когда для каждого i выполняется неравенство $N(i) \geqslant r + s - n$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим матрицу R размера $r \times (n - s)$, которая дополняет L до латинского прямоугольника $(L|R)$ размера $r \times n$. Пусть $M(i)$ — количество строк матрицы L, в которых отсутствует число i. Очевидно, $M(i) = r - N(i)$. В матрице R число i

должно появиться ровно $M(i)$ раз, но поскольку R состоит из $n-s$ столбцов, число i может встретиться в R не более $n-s$ раз. Отсюда $M(i) \leqslant n-s$, или $r - N(i) \leqslant n-s$, что равносильно $N(i) \geqslant r+s-n$.

Достаточность. По матрице L составим двудольный граф $G(V_1, V_2)$ с долями $V_1 = \{u_1, \ldots, u_r\}$ и $V_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, в котором наличие ребра $u_i v_j$ означает, что в i-й строке матрицы L нет числа j.

Поскольку в каждой строке L ровно s различных чисел, в ней отсутствует $n-s$ чисел, т. е. степень каждой вершины из V_1 равна $n-s$.

Оценим теперь степени вершин из другой доли. По условию теоремы, число j встречается в L не менее $r+s-n$ раз, и, значит, не встречается не более $r-(r+s-n) = n-s$ раз. С другой стороны, j в L встречается не более s раз (столько в матрице L столбцов) и, стало быть, не встречается не менее $r-s$ раз (поскольку L состоит из r строк).

Итак, $\forall v \in V_2 \quad (n-s)-n+r \leqslant \rho(v) \leqslant n-s$.

Условие теоремы 4 (с заменой m на r, а r на $n-s$) выполнено! Поэтому граф G распадается на $n-s$ совершенных паросочетаний, каждому из которых отвечает некоторый столбец. Все эти столбцы составляют матрицу R такую, что $(L|R)$ — латинский прямоугольник размера $r \times n$, который, в свою очередь, дополняется до латинского квадрата $n \times n$ (по теореме М. Холла). □

Проиллюстрируем доказательство следующим примером.

Пусть $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Граф G изображён на рис. 2.

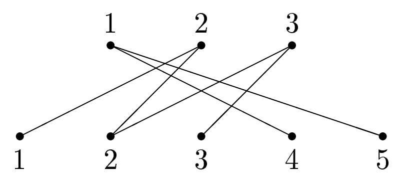


Рис. 2.

В нём можно выделить совершенные паросочетания $\{14, 22, 33\}$ и $\{15, 21, 32\}$, с помощью которых матрица L дополняется до латинского прямоугольника

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теорема Сметанюка

Латинский прямоугольник $r \times s$ на числах 1, 2, …, n является примером *частичного латинского квадрата.* В заключение статьи упомянем важный результат, связанный с частичными латинскими квадратами.

Рассмотрим следующую матрицу размером $n \times n$, в которой заполнены n клеток:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & \\ & & & & n \\ & & \ldots & & \end{pmatrix}.$$

Ясно, что пустые клетки матрицы A нельзя заполнить числами так, чтобы получить латинский квадрат, поскольку размещение в правой верхней клетке любого числа нарушает определение латинского квадрата.

Пусть теперь в матрице $n \times n$ заполнено менее n клеток, и при этом в каждой строке и каждом столбце нет повторяющихся чисел. В 1960 г. была высказана *гипотеза Эванса*: в этом случае оставшиеся клетки можно заполнить так, что получится латинский квадрат. Гипотеза

Эванса была доказана в 1981 г. Богданом Сметанюком. Доказательство теоремы Сметанюка можно найти в книге [1].

Доказательство это весьма хитроумное, но в основе его также лежит теорема Холла.

Литература

[1] Айгнер, М. *Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времён Евклида до наших дней* / М. Айгнер, Г. Циглер. — М.: Мир, 2006. – 256 с.

[2] *Вся высшая математика:* учебник / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко и др. — М.: КомКнига, 2006. – Т.7 – 208 с.

[3] Райзер, Г. Дж. *Комбинаторная математика* / Г. Дж. Райзер. — М.: Мир, 1966. – 154 с.

[4] Тараканов, В. Е. *Комбинаторные задачи и* $(0,1)$*-матрицы* / В. Е. Тараканов. — М.: Наука, 1985. – 192 с.

[5] Эвнин, А. Ю. *Вокруг теоремы Холла* // Математическое образование. – 2005. – 3(34). – С.2–23. 4(35). – С.2–19.

[6] Denes, J. *Latin squares: New developments in the theory and applications* / J. H. Denes, A. D. Keedwell. Annals of Discrete Mathematics, v. 46. — Amsterdam: Academic Press, 1990. – pp. xiv+454.

[7] Laywine, C. F. *Discrete mathematics using Latin squares* / C. F. Laywine, G. L. Mullen. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998. – pp. xviii+305.

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики
Южно-Уральского Государственного Университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru Раздел: Партнеры, журнал "Математическое образование".

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2012 год (включая стоимость пересылки) – 80 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2012 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 70 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Предполагается вывешивать статьи в формате PDF в архиве на странице журнала.

Просим авторов предоставляемых статей сообщать, согласны ли они на это.

Contents

ISSN 1992-6138
9 771992 613776 >