ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год семнадцатый

№ 1-2 (65-66)

январь – июнь 2013 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения

117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 1-2 (65-66), 2013 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2013 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 28.06.2013 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 5,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1-2 (65-66), январь – июнь 2013 г.

Содержание

К 90-летию И. Р. Шафаревича

От редакции

3 июня этого года исполнилось 90 лет выдающемуся русскому математику академику Игорю Ростиславовичу Шафаревичу. В честь юбилея Математическим институтом им. В. А. Стеклова Российской академии наук была организована Международная конференция

"АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ, АЛГЕБРА и ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ"

(МИАН, Москва, 3-5 июня 2013 г.).

Организаторами конференции выступили:

В. В. Козлов (председатель), Вице-президент Российской академии наук, директор МИАН имени В. А. Стеклова, академик РАН;

А. Н. Паршин (зам. председателя), заведующий Отделом алгебры и теории чисел МИАН, академик РАН;

С. О. Горчинский, старший научный сотрудник Отдела алгебры и теории чисел МИАН;

Вик. С. Куликов, профессор, ведущий научный сотрудник Отдела алгебры и теории чисел МИАН;

Д. О. Орлов, заведующий Отделом алгебраической геометрии, член-корр. РАН, заместитель директора МИАН по научной работе;

В. В. Пржиялковский, научный сотрудник Отдела алгебраической геометрии;

Н. А. Тюрин, научный сотрудник Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений ВШЭ, доцент Факультета математики ВШЭ.

В ходе конференции были прочитаны доклады:

А. Н. Паршин. Программа Ленглендса и дзета-функции

В. А. Колывагин. О некоторых приложениях метода Эйлеровых систем к теории чисел

В. А. Абрашкин. p-расширения локальных полей с группой Галуа класса нильпотентности меньше p

С. В. Востоков. К работе И. Р. Шафаревича "Общий закон взаимности"

Г. Б. Шабат. Об одном обобщении теоремы Белого

В. В. Никулин. Пучки эллиптических кривых и группы автоморфизмов поверхностей $K3$

М. Х. Гизатуллин. Многообразия с плотной по Зарисскому автоморфной орбитой

Ф. А. Богомолов. О некоторых аспектах рациональности и унирациональности алгебраических многообразий

Вик. С. Куликов. О линейных проекциях поверхностей на плоскость

Е. С. Голод. Некоторые вопросы, касающиеся стандартных базисов

А. В. Пухликов. Бирационально жесткие многомерные многообразия Фано

Ю. Г. Зархин. Абелевы многообразия с гомотетиями (и без) над полями конечной характеристики

В. Л. Попов. Вопросы Гротендика о действиях полупростых групп на себе сопряжениями

К. А. Шрамов. Группы бирациональных автоморфизмов

Ю. Г. Прохоров. О стабильной эквивалентности подгрупп группы Кремоны

Более подробную информацию о конференции можно найти на странице
http://shafarevich90.mi.ras.ru/

Игорь Ростиславович — постоянный автор нашего журнала. Список его публикаций в журнале "Математическое образование" содержится в номере 2(46), 2008г.

Редакция поздравляет юбиляра и желает ему долгих лет жизни и новых творческих успехов!

Математическая биография И. Р. Шафаревича

Источник: http://www.mi.ras.ru/ shafarev/biogr.html

Влияние И. Р. Шафаревича на отечественную и мировую математику огромно. Оно измеряется не только его личным вкладом в алгебру, теорию чисел и алгебраическую геометрию, но и тем магнетическим влиянием, которое он оказывал на молодежь в течение многих десятилетий своими университетскими лекциями, семинарами, книгами, неповторимым умением раскрыть талант. Каждый из его многочисленных учеников может вспомнить путь, пройденный рядом с Игорем Ростиславовичем, как счастливейший этап в своем творческом становлении.

Яркие математические способности Шафаревича проявились уже в школьные годы. Его родители Ростислав Степанович (выпускник МГУ, преподаватель теоретической механики) и Юлия Яковлевна (филолог по образованию) не могли нарадоваться успехам сына, окончившего в 1939 г. школу. Из семьи и сохранившихся еще от деда книг приобрел любовь к русской литературе, сказкам, былинам. Немного позже — к истории. Следующим увлечением была математика. Учась в школе, сдавал экстерном экзамены на механико-математическом факультете МГУ, который окончил в 1940 г.

С 1944 г., уже после окончания аспирантуры, И. Р. Шафаревич становится преподавателем МГУ, а с 1946 г., после защиты докторской диссертации, сотрудником Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Однако активная преподавательская деятельность в МГУ, уже в качестве профессора, не прерывалась вплоть до 1975 г., когда она была прекращена в связи с его общественной деятельностью. Шафаревич был вынужден перенести свой семинар в Стекловку, где он действует и поныне, неизменно привлекая большое число участников.

Собственно научные исследования И. Р. Шафаревича были начаты работой по нормированным топологическим кольцам (кандидатская диссертация), а затем на целое десятилетие областями его научных интересов стали теория Галуа и теория алгебраических чисел. К этому периоду относятся такие замечательные достижения, как решение обратной задачи теории Галуа (сначала для p-расширений локальных полей, а затем для полей алгебраических чисел и разрешимых групп Галуа) и решение проблемы Гильберта о нахождении общего закона взаимности. Каждый из этих результатов был доказан при помощи техники, основанной на привлечении тонких арифметических свойств полей. Так, эффективное построение полей с заданной разрешимой группой Галуа проходит по этапам, а согласованность результатов каждого этапа (первое и второе препятствия в сопутствующей задаче погружения) требует поистине филигранной отделки каждой детали конструкции. В свою очередь, общий закон взаимности, частные аспекты которого связаны с именами Гаусса, Якоби, Куммера, в интерпретации И. Р. Шафаревича базируется на аналогии между символом норменного вычета $\left(\frac{\alpha,\beta}{\wp}\right)$ в поле алгебраических чисел и вычетом абелева дифференциала $\alpha\, d\beta$ в точках римановой поверхности. Найденный им самый общий закон взаимности степенных вычетов в полях алгебраических чисел явился в известной мере завершающим этапом в 150-летней истории арифметических законов взаимности, восходящей к Эйлеру и Гауссу. Общий закон взаимности позволил более естественно построить теорию полей классов, как локальную, так и глобальную.

В начале 60-х годов И. Р. Шафаревич возвращается кизучению групп Галуа p-расширений, изложив заманчивые идеи и новые результаты в обзорном докладе на Международном математическом конгрессе в Стокгольме [1]. В частности, им было сообщено об оценке $r \le d + \rho$, где ρ — число образующих группы единиц поля алгебраических чисел k, d— минимальное число образующих, а r— число соотношений группы Галуа $G(p)$ максимального неразветвленного p-расширения поля k. И. Р. Шафаревич обратил внимание на то, что из этой оценки вытекает решение известной проблемы башни в теории полей классов, если число соотношений $r = r(G)$ конечной p-группы G с необходимостью достаточно велико по сравнению с числом образующих $d = d(G)$ при $d \to \infty$. Вскоре им вместе с Е. С. Голодом было показано [2], что в действительности $r > [(d-1)/2]^2$. Это и дало решение проблемы башни почти пятидесятилетней давности. Полученное решение, а главное — техника его доказательства имеют много следствий в теории чисел и алгебре. Достаточно упомянуть доказательство существования полей алгебраических чисел, не вложимых в одноклассные, точные оценки роста дискриминанта числового поля в зависимости от его степени, отрицательное решение ряда проблем бернсайдовского типа в теории p-групп и алгебр Ли. Статья [2] вызвала настолько острый резонанс, что ее основной результат (вместе с немного измененным доказательством, дающим неравенство $r > d^2/4$) вошел почти сразу же в монографическую и учебную литературу.

Несколько ранее, в середине 50-х годов, И. Р. Шафаревич начинает заниматься алгебраической геометрией, более точно, задачами, находящимися на стыке теории чисел и геометрии. Первые идеи были высказаны в докладе на 3-м Всесоюзном математическом съезде [3], где указывалось на аналогию между задачей погружения в теории Галуа полей алгебраических чисел и задачей классификации эллиптических кривых, определенных над такими полями. Две основные гипотезы в этой области были доказаны в работах 1957 г. [4], [5], что явилось одним из первых шагов в новом разделе алгебраической геометрии — теории главных однородных пространств. Построив локальную теорию главных однородных пространств, И. Р. Шафаревич обратился к глобальной ситуации. Введенное им ядро естественного гомоморфизма локализации, состоящее из локально тривиальных однородных пространств, в честь автора обозначается в мировой математической литературе русской буквой Ш. Его вычисление и, в частности, доказательство предполагаемой конечности являются одними из труднейших и интереснейших проблем теории диофантовых уравнений. Лишь в последние годы были получены первые примеры эллиптических кривых с конечной группой Ш. Наиболее сильные результаты здесь получены учеником И. Р. Шафаревича В. А. Колывагиным.

Большое влияние на исследования алгебраических поверхностей во всем мире оказала монография [6], явившаяся результатом активной работы небольшого коллектива энтузиастов во главе с И. Р. Шафаревичем и долгое время служившая единственным систематическим изложением теории поверхностей, соединяя красоту классических геометрических методов итальянской школы с мощью новейших аналитических и топологических методов. Одним из ярких феноменов теории алгебраических поверхностей являются поверхности типа $K3$, для которых И. Р. Шафаревичем (совместно с И. И. Пятецким-Шапиро) был доказан аналог знаменитой теоремы Торелли о римановых поверхностях, а в цикле работ конца 70-х – начала 80-х годов (совместно с А. Н. Рудаковым) исследованы поверхности типа $K3$ над полями конечной характеристики. Развитая здесь техника изучения векторных полей на алгебраических поверхностях в положительной характеристике имеет многочисленные применения.

Среди других исследований по алгебраической геометрии: изучение группы автоморфизмов аффинной плоскости, построение оснований теории бесконечномерных алгебраических многообразий, теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация.

В конце 80-х годов И. Р. Шафаревич обратил внимание на то, что остается совершенно открытым вопрос об описании рациональных отображений поверхностей типа $K3$, в то время как теорема Торелли дает полное описание самих поверхностей. Иначе говоря, вопрос стоит в выяснении того, как восстановить категорию поверхностей типа $K3$ из категории решеток периодов и морфизмов между ними. Более точно, рациональное отображение поверхностей определяет ортогональный морфизм (изогению) рациональных структур Ходжа, соответствующих трансцендентным циклам, и задача состоит в определении тех изогений, которые отвечают рациональным отображениям исходных поверхностей. Ранг соответствующих $\mathbf{Q}$-пространств может принимать значения от 2 до 21. Для случаев ранга 2 и 3 было показано (совместно с В. В. Никулиным), что отображения поверхностей описываются изогениями рациональных структур Ходжа.

Другая большая область интересов И. Р. Шафаревича — это теория алгебр, как алгебр Ли, так и, в последнее время, ассоциативных алгебр.

К середине 60-х годов в широких кругах математиков пробудился интерес к классификации Э. Картана простых транзитивных псевдогрупп преобразований. В МИАНе некоторое время (1964-1966) функционировал семинар под руководством И. Р. Шафаревича, на котором обсуждались разные работы по псевдогруппам Ли. Отчасти результатом этой деятельности явились две работы [7], [8], определившие на четверть века программу классификации простых конечномерных алгебр Ли над полями конечной характеристики. Эти работы цитируются практически в каждом исследовании, посвященном модулярным простым алгебрам Ли (более подробный обзор математических работ И. Р. Шафаревича, написанных до 1983 г., см. в УМН, 1984, Т. 39, №1, с. 167-174).

В последние годы внимание И. Р. Шафаревича было привлечено к изучению структуры многообразия неполупростых коммутативных алгебр. Наличие в этой задаче непрерывных параметров делает естественным использование методов алгебраической геометрии. Все коммутативные и ассоциативные законы умножения на данном n-мерном векторном пространстве определяют алгебраическое многообразие. В работе [9] автор ограничивается рассмотрением первого нетривиального случая, когда изучаемые алгебры N имеют класс нильпотентности 2 (т.е. $N^3 = 0$). Изучаются неприводимые компоненты вмногообразии таких алгебр, найдены их размерности и особые точки. Оказывается, что компоненты определяются рангом r квадрата N^2 алгебры N. Все компоненты можно разделить на два класса — устойчивые и неустойчивые. Если d — число образующих алгебры, то доказано, что компоненты, соответствующие значениям $2 < r \leq (d-1)(d-2)/6+2$, являются устойчивыми, кроме, быть может, случая $d=5$, $r=4$, а компоненты с $r \geq (d^2-1)/3$ и $r=1,2$ неустойчивы. Так как всегда $r \leq d(d+1)/2$, то интервал возможных значений для r разделяется на три примерно равные части (асимптотически по d), причем часть меньших значений для r соответствует устойчивым компонентам, часть больших значений — неустойчивым, а для средней части ответ остается неизвестным. Каждая алгебра класса два определяет r симметрических матриц, в терминах которых формулируется критерий устойчивости. Для $r=3$ он тесно связан сизвестным в теории векторных расслоений на проективной плоскости условием Барта. Все эти конструкции и результаты являются первыми шагами в новой теории классификации коммутативных алгебр.

Помимо работ и личного общения, И. Р. Шафаревич оказывает большое влияние и своими монографиями и учебниками. Созданные на основе многократно читавшихся им курсов, они вошли в золотой фонд математики. Прозрачность и ясность изложения, обилие неформальных примеров и мотивировок (так обожаемых студентами), постепенный переход от простейших ситуаций к более сложным — характерные черты книг И. Р. Шафаревича.

Это в полной мере относится к обзорам [10], [11], [12], написанным Шафаревичем для "Энциклопедии математических наук", начавшей выходить у нас в 80-е годы стараниями Р. В. Гамкрелидзе. И. Р. с самого начала принял активное участие в формировании общих принципов этого издания, по существу совпадающих с приведенными выше особенностями его книг. Редактируя выпуски по алгебре, теории чисел и алгебраической геометрии, он оказал определяющее влияние на содержание и стиль вошедших в них обзоров. Написанный на едином дыхании обзор основных понятий алгебры [10] сразу же приобрел широкую известность и не только в математических кругах. Почти 80 выпусков этого издания, в появлении которого роль И. Р. Шафаревича весьма велика, дают панораму почти всей современной математики.

Литература

1. Поля алгебраических чисел // Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm 1962. Djursholm: Inst. Mittag-Lefler, 1963, p.163-176.

2. О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, №2, с. 261-272 (совместно с Е. С. Голодом).

3. Теория Галуа и арифметика полей алгебраических чисел // Тр. 3-го Всесоюз. математического съезда. Москва, 1956. Т. 2, с. 8.

4. О бирациональной эквивалентности эллиптических кривых // ДАН СССР. 1957. Т. 114, №2, с. 267-270.

5. Показатели эллиптических кривых // ДАН СССР. 1957. Т. 111, №4, с. 714-716.

6. Предисловие. Линейчатые поверхности. Поверхности с пучком эллиптических кривых // Алгебраические поверхности: Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 75, с. 3-11; 48-74; 138-154. Англ. пер.: Providence: Amer. Math. Soc., 1967. Нем.: Leipzig: Akad. Verlagsges., 1968.

7. Псевдогруппы Картана и p-алгебры Ли // ДАН СССР. 1966. Т. 168, №4, с. 740-742 (совместно с А. И. Кострикиным).

8. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, №2, с. 251-322 (совместно с А. И. Кострикиным).

9. Деформации коммутативных алгебр класса 2 // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, №6, с. 178-194.

10. Основные понятия алгебры // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 11. Алгебра-1. 288 с. (Итоги науки и техники).

11. Введение // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 23. Алгебраическая геометрия-1. С. 7-19. (Итоги науки и техники).

12. Алгебраические поверхности // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 35. Алгебраическая геометрия-2. С. 131-271 (совместно с В. А. Исковских).

40 лет Математическому Обществу “Архимед”, Сербия

От редакции

В этом году исполняется 40 лет Математическому Обществу “Архимед” (Сербия). Общество оказывает большое влияние на математическое образование в своей стране, особенно в плане поддержки одаренных юных математиков. Установлены тесные связи с аналогичными организациями других стран, в том числе с российскими, в частности, “Архимед” обеспечивает ежегодное участие Белграда в Международном математическом Турнире городов, оргкомитет которого находится в Москве; финалисты Турнира активно участвуют в Летних конференциях Турнира. Приводим небольшой рассказ о структуре, деятельности и достижениях Общества, а также о директоре “Архимеда” Профессоре Боголюбе Маринковиче.

Источник: www.arhimedes.rs

1. Что такое математическое общество “Архимед”?

Математическое Общество “Архимед” (ранее клуб молодых математиков “Архимед”) — специализированное профессиональное общество в области образования и воспитания, которое объединяет главным образом одаренных молодых математиков и других любителей математики и информатики разных возрастов (учащихся начальной и средней школы, студентов, учителей и других взрослых, занимающихся математикой) по всей Республике Сербия (но главным образом в Белграде). Общество основано 1 октября 1973 г. в Белграде. Оно имеет две категории членов: а) взрослые; б) ученики и студенты (младший состав Общества). На сегодняшний день зарегистрировано более 29300 членов (27500 учеников и 1800 преподавателей и других любителей математики, информатики и естественных наук). Это число включает и учащихся “Архимедовых” школ молодых математиков, но не включает членов клуба “Мыслитель”, которых всего около 180000.

Общество официально зарегистрировано в соответствии с действующим законодательством. Уставом Общества утверждены его цели и задачи, организационная структура и органы управления, а также круг его деятельности. Работой Общества руководит Управляющий Комитет из 11 членов, среди которых профессора университетов, учителя начальных и средних школ и коллеги из других учреждений.

2. Что предлагает Математическое Общество “Архимед”?

“Архимед” уже давно стал настоящим специализированным центром для одаренных молодых математиков и других любителей математики и информатики, с продуманной системой работы и обширной деятельностью по нескольким направлениям:

- Математические и компьютерные школы и курсы

  Постоянная “Архимедова” школа молодых математиков (АШММ), олимпийская группа. Заочная математическая школа, интернет-школа. Летние и зимние школы молодых математиков. Компьютерные курсы. Специальные курсы. Математический практикум. Различные разделы математики.

Урок в “Архимедовой” школе

- Популяризация математики и науки в целом

  Научно-популярные лекции вне программы АШММ (знакомство с великими математиками, приложения математики, поощрение молодежного творчества и т.п.). Математические события, викторины, встречи, выставки, конкурсы, акции (в рамках АШММ, по случаю Дня математиков Белграда, празднование значительных годовщин Общества, во время математических турниров и в других подходящих случаях). Статьи в журналах и СМИ. Знакомство школ и учителей с сербскими и зарубежными математическими и смежными журналами.

- Математические турниры и другие соревнования

  Математические турниры — командное первенство начальных и средних школ Сербии по математике (математические олимпиады НШ и СШ). Заочная математическая олимпиада, интернет-олимпиада. Массовое математическое соревнование “Мыслитель”. Международный математический Турнир городов (Белград).

- Профессиональные занятия учителей (усовершенствование учителей)

  Математические курсы для преподавателей математики. Математические курсы для учителей. Зимние специализированные семинары для преподавателей (три семинара: математика, информатика, преподавание). Тематические семинары и практикумы. Летние и зимние школы (семинары) для учителей-наставников по работе с одаренными учащимися. Подготовка преподавателей для дополнительной работы и т.п. Консультации. Сотрудничество со школами и другими организациями в стране и за рубежом. “Архимед” в настоящее время имеет 11 аккредитованных семинаров в Институте развития образования и воспитания (ЗУОВ).

- Издательская деятельность (учебная и справочная литература для учащихся и преподавателей)

Материалы для молодых математиков. Сборники задач по математике (по разделам, для начальной школы). Издание "Математика сербского народа". Малая учебная библиотека "Математическое обсуждение". Библиотека "Специальный выпуск". Сборник тестов по математике для начальной школы. Методические пособия. Журнал "Математическое развлечение". Сборник портретов известных математиков и физиков. Плакаты "Математика в цвете" (с математическим содержанием).

- Специализированная библиотека (книги, журналы)

  Энциклопедии, словари, общие руководства. История математики, великие математики. Преподавание математики. Учебники всех уровней математического образования. Литература для молодых математиков. Журналы. Шахматы.

- Другие виды деятельности (информационно-документальная, общая, техническая)

  Информационно-документальная, административно-бухгалтерская, техническая и др., поддержка сайта.

3. Что сделало к настоящему времени Математическое Общество "Архимед"?

Статистика, как правило, вводит в заблуждение. Тем не менее, в истории "Архимеда", без статистической информации мы не имели бы реальной картины его вклада в математическое образование в Сербии, особенно в Белграде. А этот вклад является весьма значительным. Вот то, что было сделано за 39 лет, в основном на основе энтузиазма (в течение первых 20 лет концепции платы за обучение в "Архимеде" просто не существовало), информация по состоянию на сентябрь 2012 г.:

- Проведено примерно 58200 часов занятий для 39 600 студентов в школе "Архимед" для молодых математиков, а также других курсов: 38 поколений непрерывно обучались в школах "Архимед" — около 25 520 учащихся начальных и средних школ (всех видов); проведено 11 летних и зимних школ с 10100 учащимися; для 2060 учащихся по различным разделам математики в детском саду; для 1120 учащихся на 45 Компьютерных курсах (1150 часов), 900 учащихся в математическом практикуме (2270 часов).

- 5920 учащихся в заочной школе молодых математиков (начальная школа), с письменными уроками по всем предметам (IV-VII классы), а также интернет-вариант.

- Проведено 84 научно-популярных лекции, а также 203 различных математических мероприятия (викторины, выставки, встречи, конкурсы, акции и т.п.), в которых приняло участие около 24 350 участников; среди них выделяется Педагогический музей на выставке 30-летия "Архимеда". Напечатано 200 статей в журналах и других средствах массовой информации, от математических изданий до "Политика Экспресс" (раздел для учащихся по вторникам), в журнале "Кекес", "Детской газете", "Уголок Архимеда" в журнале "Компьютер" в 1988-1990 и т.п. Знакомство для всех школ бывшей Югославии с соответствующими материалами 30-и отечественных и зарубежных математических журналов для студентов и преподавателей.

- Проведено 72 турнира по математике — математическая олимпиада начальных и средних школ (в командном чемпионате Сербии по математике): 38 для начальных и 34 для средних школ — в общей сложности 4226 команды с 19192 участниками. Семь раз (2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, и 2012 гг.) провели новую массовую математическую олимпиаду "Мыслитель" с более чем 183 000 участников (по образцу конкурса "Кенгуру"). Провели шесть раз заочную математическую олимпиаду для начальной школы в течение первой половины

2006 года, 2007, 2008, 2009, 2010 и 2011-ом гг. (два тура и финал) с около 8900 участников. Проведена дважды Интернет-олимпиада по математике для начальной школы (500 учащихся), организовано участие Белграда 14 раз (400 учащихся) в Международном математическом Турнире городов (который обычно включает в себя более чем 100 городов по всему миру), в том числе участие в 14-и Летних конференциях Турнира городов (участие 54 студентов-представителей Белграда). Составили 1405 задач для 168525 учащихся для других конкурсов по математике; организован конкурс молодых программистов Югославии 1988-1990 в сотрудничестве с журналом "Компьютер" и математическим факультетом Университета в Белграде (отборочные туры в течение учебного года и финал в мае).

В компьютерном классе

- Проведено в общей сложности 1825 курсов для учителей на 980 семинарах и других профессиональных встречах: 376 математических форума для учителей математики в начальных и средних школах, 60 математических дискуссий для учителей, компьютерных обсуждений — 55, 69 зимних республиканских специализированных семинаров (28 по математике, 28 по информатике 13 по преподаванию), 125 коротких тематических семинаров, 160 индивидуальных занятий и 140 инструктивно-консультативных совещаний, на которых присутствовало в общей сложности более 73 000 учителей; причем участники этих занятий (через оценочные анкеты и другими способами) дали самые высокие оценки за содержание и качество всех семинаров "Архимеда" и других деловых встреч, все эти семинары аккредитованы (в соответствующей категории).
- Написано и опубликовано более 360 наименований различных изданий общим тиражом более 2,365 млн. экземпляров. Например, только в специализированном издании "Материалы для молодых математиков", было опубликовано 159 наименований тематических брошюр.
- Создана специализированная библиотека, содержащая около 26 400 книг и 5500 журналов (на родном и иностранных языках), во многом уникальная для этой области деятельности, всегда находящаяся в распоряжении учащихся и преподавателей.

Как видно из вышесказанного, достигнутые результаты впечатляют. Концепция математической школы "Архимед" и другие мероприятия дали исключительные результаты.

Среди победителей различных местных и национальных математических соревнований большая доля учащихся “Архимедовых” математических школ. Аналогичная картина наблюдается, когда речь идет о международных математических соревнованиях: Международная математическая олимпиада для учащихся средней школы (IMO), Юниорская балканская математическая олимпиада для старших учащихся начальной школы (ЮБМО), Балканская математическая олимпиада для учащихся средней школы (БМО), Международный математический Турнир городов (ММТГ). Последние пятнадцать лет большинство наших национальных сборных являются “Архимедовыми” (в последние 10-13 лет “Архимедовыми” оказываются и олимпийские команды) — почти все медали, завоеванные на международных олимпиадах по математике, были заработаны ими. Например, на IMO для учащихся средней школы, а также на БМО в период 1995-2012 гг. из в общей сложности 160 медалей, завоеванных нашей страной, 134 были “Архимедовыми”, то есть 83,75% всех медалей! На протяжении 14 лет все Летние конференции (финалы) Международного математического Турнира городов были “Архимедовыми” (“Архимедовцы” составляли большинство участников из Сербии и каждый год выигрывали награду).

“Архимедовцы” — в числе самых успешных в конкурсе для зачисления в высшие математические учебные заведения. Они становятся успешными студентами всех факультетов. Например, поколение студентов на факультете математики в Белграде в течение 9 лет (до 2010 года) было исключительно “Архимедовым” (также “Архимедовой” была Олимпийская команда). Добавим, что “великолепная шестерка”, которая сейчас учится в Кембридже, тоже обучалась в “Архимедовой” школе в течение нескольких лет (7-9 лет).

Многие успешные “Архимедовцы” обучались в “Архимедовых” школах еще задолго еще до поступления в высшие математические учебные заведения или другие вузы (некоторые — в первом классе начальной школы), и, конечно, многому там научились. Тем не менее, вклад “Архимеда” в упомянутые успехи в учебе и общественной жизни часто недооценивают и их в основном связывают с учебой в основной школе.

В “Архимеде” расширили свои математические горизонты многие студенты, имена которых в настоящее время стали известны в области математики и технических наук. Многие учатся или работают в престижных зарубежных университетах, а некоторые защитили там диссертации.

Без преувеличения можно сказать, что “Архимед” стал школой воспитания успешных математиков, инженеров и других специалистов. Конечно, не следует делать вывод, что “Архимед” приписывает исключительно себе все их успехи.

Правильную оценку вклада “Архимеда” в общее математическое образование дают реальные успехи учащихся в своих различных видах деятельности.

Подробнее об их успехах и достижениях говорится в разделах “Лична карта”, Note about “Archimedes”, “Успеси” и “Олимпијска группа” на сайте: www.arhimedes.rs

4. Каковы основные особенности деятельности “Архимеда”?

“Архимед” был инициатором и исполнителем целого ряда новых видов деятельности.

Никакая активность Общества не носит случайного характера. Каждый вид деятельности является комплексным, долгосрочным и тщательно продуманным. Высокий профессиональный уровень и качество — основная характеристика всех видов деятельности. “Архимед” в качестве партнеров собирает квалифицированных преподавателей начальной и средней школы, наших и международных экспертов из университетов и других учреждений, в первую очередь — энтузиастов. Среди участников — известные иностранные активисты в той сфере деятельности, которой занимается “Архимед”.

О том, что люди науки ценили и ценят деятельность “Архимеда”, говорит тот факт, что среди его почетных членов и ассоциированных преподавателей — светила сербской математической науки, ученые: Duro Kurepa, Slobodan Aljančić, Tatomir Andelić, а также известные профессора Dragoslav Mitrinović и Slaviša Prešić.

5. Какие трудности испытывает "Архимед"?

Математическое Общество "Архимед" не имеет постоянного источника финансирования, а также достаточно просторного помещения для работы и размещения библиотеки. Обеспечение финансирования складывается из взносов его членов и ассоциированных членов, поступлений от издательской деятельности, профессиональных услуг и т.п. "Архимед" не имеет постоянных сотрудников.

В последнее время государство сделало кое-что для создания условий и помощи работе "Архимеда", хотя в основном ограничивалось добрыми пожеланиями и обещаниями. Почти все, что сделано, является результатом волонтерской работы энтузиастов. За 39 лет существования и работы "Архимед" получил от государства (в первую очередь, от Министерства образования и Министерства науки и технологий) только около 5% средств, необходимых для осуществления своей деятельности. А именно, в период, который окончился 12 лет назад, стоимость зимних республиканских семинаров для учителей частично покрывало Министерство образования (как и для других профессиональных обществ). Ранее оно также участвовало в в финансировании республиканских соревнований, выделяя "Архимеду" до 50% необходимых средств, а за последний год обеспечена лишь на 5% и 10% стоимость двух соревнований национального уровня, которые "Архимед" организовывал (командные математические олимпиады начальных и средних школ Сербии), а для других наших конкурсов (в том числе для участия в финале Международного математического Турнира городов на Урале), "Архимед" не получил ни копейки. Для этого конкурса в 2012-ом году получено порядка 20% необходимых средств, но не для других соревнований. Отметим также, что "Архимед" от SGB (секретариат финансов) получил однократную финансовую помощь на математические и компьютерные стенды в 2005-ом году. Что касается пожертвований, за исключением двух или трех, они были достаточно незначительными.

Одной из больших проблем для расширения миссии "Архимеда" и его более успешной работы является то, что средства массовой информации в Сербии (печать и телевидение) редко передают информацию об "Архимеде" и его деятельности, хотя Общество регулярно предоставляет им необходимые сведения.

Тем не менее, "Архимед" добился выдающихся результатов во всех своих мероприятиях и Общество внесло значительный вклад в области математического образования.

Если бы Республика и город Белград больше помогали "Архимеду", в частности, финансированием образовательных, научных и опытно-конструкторских работ, а также при надлежащей поддержке средств массовой информации, достигнутые результаты были еще значительней, глубже и шире по диапазону.

То, что сделал и достиг "Архимед" к настоящему времени, учитывая описанные выше непростые условия, — это, по мнению экспертов и школьной общественности, большое достижение. Было бы интересно представить, что мог бы делать и сделать "Архимед" при адекватной помощи государства по созданию нормальных условий работы?!

Профессор Боголюб Маринкович

Профессор Боголюб Маринкович

Один из основателей Общества и главный его активист, в течение многих лет директор Общества — Профессор Боголюб Маринкович. Около 40 лет работает советником по математическому образованию в Белградском городском совете по образованию, Сербском национальном совете по образованию и в Министерстве образования Сербии. За плодотворную работу в области математических соревнований национального уровня награжден премией Поля Эрдеша в 2002 г. Премию вручил Профессор Питер Тейлор, президент Всемирной федерации национальных математических соревнований в августе 2003 г. на специальной церемонии в помещении Общества “Архимед” в Белграде.

Боголюб Маринкович (которого все, кто его знает, — друзья, студенты, коллеги — называют коротко “Боги”) — известный энтузиаст популяризации математики среди юных любителей математики (как и Поль Эрдеш), выдающийся творец и организатор, пионер в этой области по многим направлениям. Практически всю свою жизнь посвятил улучшению математического образования для молодежи, а также преподавания математики на всех уровнях. Он занимается этим как на своем непосредственном рабочем месте (в качестве советника по математике в педагогических учреждениях и в качестве советника Министерства образования), так и в различных профессиональных объединениях математиков (Сербское Физическое общество, Математическое Общество “Архимед”). Он основатель и “столп” всей деятельности “Архимеда”, в котором за последние 40 лет занимались десятки тысяч учащихся.

1930-1956 гг. Возрождение и рост русской школы (статья третья)

И. П. Костенко

Редакция продолжает публикацию серии статей, посвящённых *проблеме качества* отечественного математического образования. Первая статья И. П. Костенко "Динамика качества математического образования. Причины деградации" опубликована в 2011 г., в 58-м номере нашего журнала. Вторая статья "1918 – 1930 гг. Первая коренная реформа русской школы" напечатана в предыдущем номере.

"Дерево доброе приносит и плоды добрые..."
Матф., VII, 17.

1. 1930-1937 гг. Как управленцы 1930-х гг. восстановили школу?

В конце 1920-х гг. руководители страны осознали, что дела в образовании зашли в тупик. В сентябре 1929 г. нарком просвещения А. В. Луначарский, вся программа которого провалилась, был смещён и заменён А. С. Бубновым[1]. Вместе со старым наркомом ушла и вся его Коллегия[2], за исключением Н. К. Крупской. В ноябре 1929 г. пленум ЦК ВКП(б) поставил перед Наркомпросом задачу повысить уровень общеобразовательной подготовки учащихся. Для компетентного решения этой задачи аппарат Наркомпроса в 1931 г. был сокращён до 355 человек (в 1920 г. там было до 8,5 тыс. сотрудников). Интересно, сколько сегодня? И сколько — с учётом местных департаментов?

В 1930-х гг. произошло нечто, совершенно неожиданное для "реформаторов", — были сметены все их "достижения" и восстановлена русская школа. Решительно и быстро! За 8 лет (1930-1937 гг.)! Этот период советские историки педагогики тоже называли "реформой". Не верно. Не реформа, а *реставрация* — восстановление разрушенного. Новшество было одно — идеологизация гуманитарного образования, но она не коснулась естественнонаучного, которое вернулось к дореволюционным формам, программам, учебникам и методике.

О том, как Правительство управляло восстановлением образования, можно судить по главным документам — Постановлениям ЦК ВКП(б) и СНК СССР с 1930 г. по 1936 г. Эти документы показывают нам ответ на наш актуальный и неразрешимый сегодня вопрос: "что делать?"

Давайте вникнем в содержание важнейших из этих документов и оценим их высокий педагогический профессионализм, управленческую грамотность и практическую эффективность. Все они содержат: 1) глубокий, конкретный, всесторонний *анализ* реальности; 2) немногочисленные, чёткие, понятные, проверяемые *цели*; 3) ясные *пути* их достижения с определением конкретных мер, исполнителей и жёстких сроков; 4) государственное *обеспечение* необходимых для достижения целей условий. Все эти качества заметны уже в первом Постановлении ЦК ВКП(б) от

[1] Бубнов А. С. (1884-1938) — партийный и государственный деятель. Активный участник двух революций 1905 г. и 1917 г. и гражданской войны, — подвергался арестам, был в ссылке, входил в состав Реввоенсоветов и был начальником политотделов различных армий. В 1924-1929 гг. начальник Политуправления РККА, в 1924-1937 гг. член ЦК ВКП(б), в 1929-1937 гг. нарком просвещения РСФСР.

[2] П. Н. Лепешинский, В. Н. Познер, П. Б. Рязанов, П. К. Штернберг и др.

25 июля 1930 г. "О всеобщем обязательном начальном обучении". Процитируем в сокращённом виде основные положения, выделяя курсивом ключевые слова и фразы:

"Развитие социалистического строительства и связанные с этим огромные задачи по подготовке кадров, ликвидации культурно-технической отсталости ... требуют скорейшего проведения всеобщего обязательного начального обучения ...

... ЦК признаёт необходимым:

1. Ввести с 1930/31 года повсеместное всеобщее обязательное обучение детей в возрасте 8-9-10 лет... . Приступить с 1930/31 г. к введению всеобщего обязательного обучения в объёме школы-семилетки в промышленных городах...

2. Для обеспечения осуществления всеобщего начального обучения, наряду со значительным увеличением бюджетных *ассигнований*, всемерно привлечь к финансированию... общественные организации...

3. В целях обеспечения... педкадрами: а) срочно развернуть сеть и контингенты пединститутов, педтехникумов...; б) учитывая растущие новые задачи, возлагаемые на учительство, *значительно улучшить материальное положение педкадров* начального обучения. Обеспечить для учителей сельской школы нормы рабочего снабжения. ...

4. В целях обеспечения действительной доступности школы... значительно усилить с 1930/31 г. материальную *помощь... детям... бедноты* путём увеличения бюджетных ассигнований на эту помощь, ... а также за счёт средств от специально для этого образуемых фондов...

5. В целях усиления руководства... ЦК предлагает всем парторганизациям: а) рассматривать введение всеобщего обязательного начального обучения как *важнейшую политическую кампанию на весь ближайший период*; б) добиться систематического и активного участия членов партии в работе комитетов содействия...

6. Решительное преодоление... трудностей может быть достигнуто лишь при условии, когда дело.. превратится в *массовую общественно-политическую кампанию*, опирающуюся на инициативу и самодеятельность всей пролетарской общественности... ." [1, с. 109-111].

Последующие документы проявляют грамотную управленческую тактику: ежегодную *проверку* качества достижения поставленных ранее целей; всесторонний, профессиональный *анализ* новой реальности, выявление главных недостатков и *причин*; выработку корректирующих *воздействий* (обратная связь), последовательную постановку новых конкретных *целей*. А начали правильно с фундамента, с начального образования.

Конечная цель (обеспечить вузы грамотным пополнением) и направление её достижения (возврат к традиционным ценностям русской гимназии) заданы в основополагающем (историческом) Постановлении ЦК ВКП(б) от *25 августа 1931 г. "О начальной и средней школе"*.

"ЦК считает, что *коренной недостаток* школы в данный момент заключается в том, что обучение в школе не даёт достаточного объёма общеобразовательных знаний и неудовлетворительно разрешает задачу подготовки для техникумов и для высшей школы вполне грамотных людей, *хорошо владеющих основами наук*..., преподавание которых должно быть поставлено на основе строго определённых и тщательно разработанных программ, учебных планов и проводиться по строго установленным расписаниям... .

1. **Основные задачи школы.** Предложить Наркомпросам... *немедленно* организовать... проработку *программ*, обеспечив в них *точно очерченный круг систематизированных знаний*, с расчётом, чтобы с 1 января 1932 г. начать преподавание по пересмотренным программам... развернуть решительную борьбу против легкомысленного методического *прожектёрства*, насаждения в массовом масштабе методов, предварительно на практике не проверенных... . Вытекавшие из антиленинской теории "отмирания школы" попытки положить в основу всей школьной работы так называемый "метод проектов" *вели фактически к разрушению школы. ...*

2. **Улучшение методического руководства школой.** Отмечая неудовлетворительное состояние кадров и организаций методического руководства школой, ЦК предлагает Культпропу... в месячный срок разработать мероприятия по подготовке кадров для методической работы в органах народного образования... .

Отмечая значительный отрыв научно-исследовательских учреждений в области педагогики от практических задач школы, ЦК ВКП(б) предлагает Наркомпросам... сосредоточить работу соответствующих исследовательских институтов главным образом *на изучении и обобщении опыта*, накопленного практическими работниками школы...

Обязать Наркомпросы... ввести... институт *инструкторов*, начиная с районных звеньев, для постоянной практической *помощи учителю*... . Состав инструкторов укомплектовать из опытных учителей, ...

из расчёта не менее двух на район. ...

Пересмотреть... периодические издания по вопросам педагогики в целях... поворота их *лицом к школе и её нуждам*, с обязательным привлечением в редакционный аппарат учителей.

3. **Кадры.** ... предложить Госплану СССР и Наркомпросам... составить в 2-месячный срок план подготовки педагогических кадров... Поручить... в декадный срок разработать мероприятия по *повышению зарплаты для учительства*[3]... . ЦК союза рабпрос... в месячный срок разработать систему дифференцированной оплаты труда учителей по... квалификации и качеству работы. ... Снабжение учителей продуктами и промтоварами должно проводиться... через прикрепление к закрытым рабочим распределителям и столовым по нормам промышленных рабочих :

4. **Материальная база** ... крайне недостаточна и становится одним из препятствий улучшения работы школ. ЦК предлагает Госплану Союза разработать пятилетний план нового школьного строительства. ... Совнаркомам... в кратчайший срок организовать производство на местах учебных пособий и учебного оборудования для массовой школы... .

5. **Управление и руководство школой.** ЦК партии подчёркивает, что улучшение качества работы школы невозможно без решительного повышения качества руководства школой со стороны органов Наркомпроса, скорейшего перехода к *оперативному, конкретному, и дифференцированному руководству*, ... с установлением во всех звеньях народного образования строгой, исключающей обезличку *ответственности* за порученную работу. ...

Наркомпросам... обеспечить осуществление *единоначалия* в управлении школой..., повысить ответственность учительства за качество школьной работы, выделяя и поощряя преданных и знающих своё дело учителей. ...

ЦК обращает внимание всех партийных организаций на необходимость решительного усиления внимания *массовой школе*, работе *учителя* и укреплению повседневного конкретного *руководства* школой." [там же, с. 156-161].

Стоит обратить внимание, что уже в этом Постановлении начато выкорчёвывание деяний реформаторов-20: метод проектов, теория отмирания школы, снижение роли учителя. Одновременно фиксируется наличие в наркомпросовских кругах широкого сопротивления и "извращения" политики партии (вредительство?). Отметим также, что в Постановлении содержится ряд ошибочных догматических положений, которые в дальнейшем (1937 г. и 1944 г.) будут отвергнуты, — политехнизация школьного обучения, соцсоревнование учителей.

Проиллюстрируем, как претворилось в работе наркомпрософских методистов требование "немедленно организовать проработку программ". К декабрю 1931 г. была издана новая программа по математике для начальной школы. Во вводной записке восстанавливались традиционные *принципы* отечественной методики обучения математике:

"Ни в одной учебной дисциплине *система* не играет такой большой роли, как в арифметике и геометрии. Здесь каждая новая ступень может быть понята и усвоена только в том случае, если хорошо проработана и усвоена предшествующая ступень. Здесь каждый новый навык вырастает из предшествующих навыков. Поэтому в математике каждый, даже малейший пробел в основах затрудняет всю дальнейшую работу ... знания и навыки по математике, сообщаемые учащимся, должны располагаться в определённой *системе* и строгой *последовательности*; основные сведения по математике должны прорабатываться особенно *тщательно*; переход от одной ступени к другой может совершаться лишь тогда, когда хорошо усвоена предыдущая ступень" [3, с. 19, 20].

Ровно через год, *25 августа 1932* г. выходит Постановление ЦК ВКП(б) *"Об учебных программах и режиме в начальной и средней школе"*. Постановление сосредотачивается на двух узловых вопросах: первый — программы и методы обучения; второй — организация всего школьного учебно-воспитательного процесса, в частности, повышение дисциплины учащихся.

"ЦК ВКП(б) устанавливает, что в области начальной и средней школы по РСФСР за последний год произошли значительные сдвиги... . Однако ещё не устранён коренной недостаток школы... . Важнейшими причинами этого являются недостатки *программ*..., неудовлетворительность *методов* школьной работы и

[3]Зарплата учителей была поднята до средней по промышленности. Со середины 1950-х гг. её стали планомерно снижать. Министр 1990-х г. Е. В. Ткаченко привёл на Правительственной комиссии такие цифры: "если в 1940 году среднемесячная зарплата в образовании составляла 97% от зарплаты в промышленности, в 1960-м — 80%, то в 1993-м уже 62%, в 1995 — менее 45%" [2, с. 8].

слабость методического *руководства* со стороны наркомпросов и их местных органов, слабая *дисциплина* в школе, а иногда — отсутствие всякой дисциплины и порядка. ...

ЦК ВКП(б) постановляет:

I. **Об учебных программах.** Констатируя, что... учебные программы, в особенности программы I ступени значительно улучшились, стали выше по объёму знаний и систематичнее, ... ЦК считает, что они всё ещё страдают существенными недостатками... . Основными недостатками программ являются: а) *перегрузка* программ учебным материалом, приводящая к тому, что ряд дисциплин проходятся *наспех*, а знания и навыки детьми твёрдо не усваиваются и *не закрепляются*... б) недостаточность и даже *отсутствие увязки* между отдельными программами, в особенности между программой по математике и черчению...

ЦК предлагает НКПросу РСФСР... провести внутреннее *перераспределение* учебного материала программ по математике..., приведя объём и характер учебного материала в полное соответствие с *возрастными особенностями* детей... . Одновременно с этим необходимо произвести и частичное *сокращение* программ 2-го концентра... с тем, чтобы обеспечить *твёрдое и прочное усвоение и закрепление* основ каждой науки; ... предусмотреть *увеличение количества часов* на математику, построив курс... таким образом, чтобы обеспечить переход к следующим ступеням профтехнического образования. ...

II. **Об организации учебной работы и укреплении школьного режима.** Отметить, что... в школе... установлен больший порядок (твёрдые расписания, более чёткая организация... хода учебных занятий). Однако, несмотря на указание ЦК... в практике работы школ получил распространение как основной так называемый "лабораторно-бригадный метод", который сопровождался организацией постоянных и обязательных бригад, приведших к *извращениям в виде обезлички* в учебной работе, к снижению роли педагога и игнорированию во многих случаях индивидуальной учёбы каждого учащегося.

ЦК ВКП(б) предлагает наркомпросам... ликвидировать эти *извращения*, а учебный процесс в школе организовать на следующей основе:

а) Основной формой... должен быть *урок* с данной группой учащихся, со строго определённым расписанием занятий и твёрдым составом учащихся. ...

б) Преподаватель обязан систематически, *последовательно излагать* преподаваемую им дисциплину, всемерно *приучая детей к работе над учебником* и книгой, к разного рода письменным работам... *помогать детям* при затруднениях в их учебных занятиях. Надо *систематически приучать детей к самостоятельной работе*, широко практикуя различные задания... .

в) В основу учёта школьной работы должен быть положен *текущий индивидуальный, систематически проводимый учёт знаний учащихся.* Преподаватель должен в процессе учебной работы внимательно изучать каждого ученика. ... Всякие сложные формы учёта и отчётности — запретить. Считать необходимым установление в конце года *проверочных испытаний* для всех учащихся.

г) Предложить Наркомпросу срочно *разработать методики* по отдельным дисциплинам... .

д) ... вменить в обязанность заведующим школами и педагогам повести настойчивую воспитательную работу, *борясь с нарушающими порядок в школе проступками учащихся*..., а неисправных из учащихся, хулиганствующих и оскорбляющих учащий персонал... исключать из школы без права поступления в школу сроком от одного года до трёх лет. ...

III. **Об учительских кадрах.** Отмечая значительный рост активности учителя и повышение его ответственности..., ЦК ВКП(б) подчёркивает всё возрастающую роль учителя в деле обучения детей основам наук, воспитания..., *обязывает* наркомпросы..., советские и партийные органы всемерно *обеспечить учителю в его работе необходимые условия* для успешного выполнения им ответственных и почётных обязанностей..., безоговорочное и точное выполнение директив... о приравнивании учителя по снабжению продуктами и промтоварами к промышленному рабочему, ... забота о квартире, семье и отдыхе учителя... .

Предложить местным органам *не отрывать учителя для общественной работы*..., категорически запретив использование учителя для выполнения различных технических поручений... .

ОГИЗу к 1 января 1933 г. организовать подбор и рассылку учителям по доступной цене комплектов книг, наиболее необходимых педагогам... .

Наркомпросу... в кратчайший срок поставить надлежащим образом всё дело *педагогического образования*, заочного и краткосрочного обучения учителей, обратив особое внимание на овладение учительством методикой... . Всемерно расширить практику *поощрения и премирования учителей* за лучшие образцы работы, а также учёт и использования в руководстве достижений передовых школ и учителей.

IV. **О старших группах средней школы.** ... Приступить, начиная с 1932/33 учебного года, к реорганизации семилетней политехнической школы в десятилетнюю..., предложить СНК СССР в месячный срок утвердить конкретный план и размеры организации в предстоящем учебном году над семилеткой

8-х групп, как *первый шаг к десятилетней школе.*" [1, с. 161-164].

В сущности, всё это Постановление, все меры имеют своим фокусом УЧИТЕЛЯ, стремятся создать учителю максимально благоприятные условия для "выполнения им ответственных и почётных обязанностей" — дать ему посильные для детей программы, вооружить правильной методикой, организовать постоянную методическую помощь, в частности, обеспечив его педагогической литературой и учебными пособиями, освободить от посторонней работы, создать в школах атмосферу уважения учащихся к учителям, повысить их материальное положение и моральное самоощущение. Руководители государства понимали, что поднять качество образования может только учитель. Никакими административными мерами и инновациями это сделать невозможно, если учитель будет "в загоне" (как сегодня).

Показательно, что ЦК вторично требует от советских и партийных органов "*безоговорочного* и точного выполнения директив о приравнивании учителя по снабжению продуктами и промтоварами к промышленному рабочему". Значит, на практике эти директивы имели тенденцию не выполняться или выполняться "с оговорками". ЦК вынужден скорректировать эту практику, понимая, что нельзя разочаровывать учителя, подрывая его доверие к словам и обещаниям руководителей государства.

Наконец, опять надо отметить, что директивы ЦК продолжали нарушаться, — вместо "метода проектов" появился "лабораторно-бригадный метод", который приводил к очередным "извращениям" правильного обучения. По-видимому, в Наркомпросе, наряду с грамотными профессионалами-методистами продолжала существовать и действовать группа "реформаторов", удержавшаяся с 20-х годов. И мы ещё увидим их действия.

В 1933 г. в программу X класса были вновь включены элементы аналитической геометрии и математического анализа. В следующем 1934 г. они были исключены и освободившееся время заполнено повторительным (!) курсом математики. Практика опять сразу же показала пагубность введения в школу высшей математики. Надо бы знать, *кто* настоял на введении этих элементов? К сожалению, мы не можем привести персоналий. Но можно предположить, что они — те же самые или связаны с теми, кто уже дважды вводил их в программы 1918 г. и 1920 г.

Через полгода, *12 февраля 1933 г.* выходит Постановление ЦК ВКП(б) *"Об учебниках для начальной и средней школы"*. Ставится следующий узловой вопрос и устраняется ещё одна вредоносная реформаторская идея 1920-х гг.

> "Непременным и решающим условием проведения в жизнь обеих постановлений ЦК ... является наличие по всем предметам *стабильных учебников*, призванных ликвидировать существующий "метод" нескончаемого "проектирования" учебников (метод "вариативности", если говорить современным асмоловским языком, — И.К.). ... Осудить и отменить... Постановление коллегии Наркомпроса от 28 марта 1930 г., признававшее "невозможным в настоящий момент придерживаться принципа стабилизации учебников". Поручить Наркомпросу и ОГИЗу обеспечить на деле издание стабильных учебников, рассчитанных на применение их в течение большого ряда лет... чтобы ввести их в дело с началом учебного года — 1 сентября 1933 г. ... Отменить существующий порядок издания учебников самостоятельно каждой областью, краем... . Установить, что по каждому отдельному предмету должен существовать единый обязательный учебник, утверждаемый Наркомпросом РСФСР и издаваемый Учпедгизом" [там же, с. 164-165].

3 сентября 1935 г. появляется завершающее Постановление СНК СССР и ЦК ВКП(б) *"Об организации учебной работы и внутреннем распорядке в начальной, неполной средней и средней школе"*.

В этом постановлении подчищались недоработки пятилетнего труда по восстановлению школы: устанавливалась единая организация учебного года, количество ежедневных уроков, порядок приёма учащихся в школы и перевода в другую школу, вводился экстернат, отличникам предоставлялось право поступления в вуз без вступительных экзаменов. Вводились "специальные школы с особым режимом для дефективных детей и тех учащихся, которые систематически нарушают школьную дисциплину, дезорганизуют учебную работу и отрицательно влияют своим антиобщественным поведением на остальных учащихся" [там же, с. 171]. Ставились задачи разработать Устав школы, Правила поведения учащихся, установить в школах чистоту и внешний порядок, установить единую форму одежды школьников.

Наркомпросу указывалось: "Учебные планы подвергаются ежегодным изменениям, чем нарушаются устойчивость и системность прохождения основ наук в школе. Всё это влечёт за собой дезорганизацию учебной работы, дезорганизует *учителя*, вследствие чего знания учащихся остаются всё ещё неудовлетворительными" [там же, с. 170].

Обратим внимание, — в неудовлетворительных знаниях учащихся руководители государства обвиняют не учителей, а управленцев, и объясняют — почему! В отношении математики упрёк не вполне справедлив, ибо, здесь программы выверялись практикой, учителями и корректировались с целью исключения перегрузки и обеспечения возможности их качественного усвоения.

Как и раньше, подчёркивалось, что "указанные недостатки... являются следствием не изжитой ещё до конца среди значительной части работников народного образования глупой антиленинской теории «отмирания школы»" [там же].

Самое замечательное в четвёртом постановлении, это *требование объективной оценки знаний учащихся.*

"Установленная ... система оценки успеваемости учащихся не даёт представления о фактических знаниях ученика и ведёт на практике к понижению уровня учёбы. ... "Индивидуальные вопросники", заранее устанавливающие вопросы, на которые должен отвечать учащийся при испытаниях, приводят на практике к снижению значения испытаний и не дают подлинного представления о действительных знаниях учащихся. ... Прекратить... практику "индивидуальных вопросников"... . При проведении выпускных и переводных испытаний обеспечить проверку знаний учащихся *по разным разделам* программы. ... Установить в школах следующие пять степеней оценки успеваемости учащихся (отметки): 1) очень плохо, 2) плохо, 3) посредственно, 4) хорошо, 5) отлично. Поручить Отделу школ ЦК ВКП(б) ... разработать обязательные для всех школ СССР *нормы оценки* успеваемости учащихся, с тем, чтобы один и тот же уровень знаний одинаково оценивался во всех школах" [там же, с. 170-171].

Завершается Постановление так: "Совет Народных Комиссаров Союза ССР и Центральный Комитет ВКП(б) предлагают народным комиссариатам просвещения и их местным органам поставить в качестве *важнейшей задачи инспектирование и организацию систематического оперативного контроля над состоянием и работой школы*, проверяя, как на практике реализуются решения партии и правительства о школе" [там же, с. 172].

Ещё через 10 месяцев *4 июля 1936 г.* выходит пятое Постановление ЦК ВКП(б) "*О педологических извращениях в системе Наркомпросов*". Дошла очередь до самого источника всевозможных "извращений", о которых говорилось во всех предыдущих постановлениях, до главного детища наукообразных реформаторов 1920-х гг. (А. Б. Залкинд, П. П. Блонский), до педологии и её адептов — носителей теории отмирания школы.

"Практика педологов, протекавшая в полном отрыве от педагога и школьных занятий, свелась в основном к *ложнонаучным* экспериментам и проведению среди школьников и их родителей бесчисленного количества обследований... , направлялись по преимуществу против неуспевающих или не укладывающихся в рамки школьного режима школьников и имели своей целью... найти повод для удаления школьников из нормального школьного коллектива. ... Всё это вело к тому, что всё большее и большее количество детей зачислялось в категории умственно отсталых и "трудных" [там же, с. 173].

Постановление недвусмысленно квалифицирует деятельность педологов и поддерживающих их наркомпросовских структур, как *вредительскую*. Термины "вред", "вредные взгляды", "вредная деятельность", "преступная безответственность" встречаются в тексте постановления много раз. И оценки эти убедительно оправданы приводимыми фактами, практическими результатами этой "деятельности".

Можно добавить, что эти "взгляды", как и все реформаторские "взгляды", заимствованы с Запада: "перенесение в советскую науку антинаучных принципов буржуазной педологии тем более вредно, что оно *прикрывается "марксистской" фразеологией*" [там же, с. 174]. Приём прикрытия вредных идей политическими фразами и лозунгами мы будем встречать у наших "реформаторов" во все времена.

Вот какие глубокие корни в управлении образованием и в его "научном" обеспечении пустили реформаторы с 1920-х гг. На их выкорчёвку понадобилось 5 лет. В 1937 г. часть из них была арестована (Пинкевич, Бем, Эпштейн, Гордон, Крупенина и др.) и осуждена. Безвинно? Но их дело не пропало. Сегодня выбраковка детей, которую они пытались внедрить в нашу школу, успешно реализуется под видом "дифференциации". Сегодня мы можем также констатировать, что школа не даёт никаких знаний и, действительно, отмерла.

Выше мы достаточно подробно ознакомились с содержанием пяти важнейших Постановлений ЦК ВКП(б) о школе. В дальнейшем, даже в годы войны государство не упускало из поля зрения школу и эффективно откликалось на её нужды. Последующие постановления выходят от имени СНК СССР.

Замечательно, на какую высоту был поднят престиж учителя. Газета "Правда" писала 01.04.39: "Страна должна знать имена лучших педагогов, как знает имена прославленных лётчиков, героев труда". И это не было пустой фразой. В конце 1939 г. журнал "Математика в школе" в передовой статье привёл факты: "Специальным постановлением правительства лучшие из них (учителей, — И.К.) — четыре с половиной тысячи одних только сельских учителей! — отмечены высокой наградой — орденами Советского Союза. Кто они? ... рядовые работники сельских школ. Они рассеяны по всем уголкам... Посмотрите на список награждённых ... вы увидите десятки названий самых глухих, самых безвестных деревушек" [4 (1939, №6), с. 3].

Теперь посмотрим на результаты. В 1935 г. выступая на Всероссийском совещании по вопросам преподавания математики в средней школе, инспектор ЦИК СССР проф. Фурсенко доложил: "Приёмные испытания в высшую техническую школу Союза ССР и наблюдения над работой студентов 1 и 2 курсов показали, что *с каждым годом* имеется *несомненное* повышение уровня знаний поступающих в высшую школу по математике [5, с. 32]... Я говорю на основании тех данных, которые были изучены мною как работником Всесоюзного комитета по высшей технической школе, и получены из многих вузов, а также на основании того опыта, который я имею, как профессор высшей технической школы" [там же, с. 33].

К 1937 г. задача подготовки для вузов качественного пополнения, поставленная ЦК в 1931 г., была, в основном, решена. Директор МЭИ И. И. Дудкин: "В текущем году средняя школа дала *значительно* лучше подготовленную молодёжь, чем в 1936 г. Это подтверждается материалами приёмных испытаний" [6, с. 41].

Такой же вывод делает доцент Киевского индустриального института И. Солодовник: "Анализируя итоги испытаний, необходимо, прежде всего, подчеркнуть, что за истекший год наша средняя школа, в первую очередь, десятилетки, сделали *значительный* шаг вперёд. В целом, подготовка выпускников десятилеток в этом году *несравненно* выше, чем в 1935 и 1936 гг. Для подтверждения этого достаточно привести несколько цифр. В прошлом году по математике не выдержали испытания 41,4% экзаменовавшихся выпускников киевских школ..., в этом мы имеем не выдержавших по математике 15,9%. Менее резки, но всё же показательны успехи иногородних десятилеток. В прошлом году 71,2%..., в этом 33,3%... Хуже всего поступающие знают арифметику" [7, с. 48].

"Тяжёлое положение с подготовкой по арифметике" отмечают и другие вузы, например МЭИ [6, с. 45]. И это закономерно, ибо абитуриенты, поступавшие в вузы в 1937 г., изучали арифметику в конце 1920-х гг., в период первой разрушительной реформы. А "по Киселёву" (алгебра) они учились, всего лишь, последние три-четыре года. И за такой короткий срок, на таком слабом фундаменте Киселёв смог существенно поднять качество знаний. Вот что может хороший учебник! Вот что может Киселёв!

Устные экзамены показали, что абитуриенты "лучше всего знают тригонометрию, по-прежнему хромают пространственные представления; очень многие не умеют решать задач на построение, не знают доказательств теорем по геометрии" [там же, с. 50]. То же отмечали и другие вузы, например, ЛГУ [8, с. 48].

Эти результаты во многом определялись учебниками: обучение тригонометрии направлял с 1933 г. старый, методически отшлифованный и проверенный временем учебник Н. А. Рыбкина, а геометрии — новый, сырой, написанный за один год (1932) учебник Ю. О. Гурвица и Р. В. Гангнуса. В 1938 г. этот не очень удачный учебник геометрии, а также учебник арифметики И. Г. Попова были заменены учебниками А. П. Киселёва.

У нас нет количественных данных вузовских вступительных испытаний на конец 1930-х гг., но есть компетентное свидетельство человека, который окончил школу в 1940 г. Член-корреспондент РАН Л. Д. Кудрявцев: "к концу тридцатых годов, если отвлечься от идеологической направленности образования, средняя школа в нашей стране, по моему мнению, достигла своего *наивысшего* уровня. Этот уровень был достаточно высок и отвечал потребностям своего времени" [9, с. 47]. Но здесь Л. Д. Кудрявцев немного не прав, — к концу 1930-х гг. наша школа ещё не достигла своего наивысшего уровня. Как увидим далее, пика она достигнет к началу 1950-х гг.

Оценим качество математических знаний абитуриентов 1937 г. по данным Киевского индустриального института. И. Солодовник приводит сводную таблицу результатов испытаний по математике: отличных отметок — 8,9%, хороших — 18,3%, посредственных — 53,6%, плохих — 18,9%, очень плохих — 0,3% [7, с. 48]. Следовательно, *по этой выборке качество-1 оценивается в 27%, качество-2 в 80%.* Эти оценки согласуются с оценками по выборке МЭИ этого же года: качество-1 — 34%, качество-2 — 79% [6, с. 41]. Заметное увеличение качества-1 у МЭИ объяснимо его большей престижностью.

Данные оценки сделаны по двум выборкам — КИИ и МЭИ. К сожалению, в печати нет более широкого спектра выборок за 1937 г. Логично предположить, что учёт более широкого спектра выборок должен понизить (но не очень сильно) наши оценки, причём, качество-2 понизится больше, чем качество-1. Понизим их на 3-5% (качество-1 — на 3%, качество-2 — на 5%). И будем ориентировочно считать, что *в 1937 г. качество математической подготовки втузовских абитуриентов оценивается так: качество-1 — 24%, качество-2 — 75%.*

Следует отметить, что рост качества знаний абитуриентов отмечался не только по математике, а и по всем другим предметам: русскому языку, литературе, физике, меньше по химии [там же, с.41-43, 48-52].

Фантастически быстрое восстановление качественного образования стало возможным потому, что была государственная воля, и потому, что сохранились кадры — носители традиций "старой" педагогической культуры. Без этих кадров такое быстрое восстановление было бы невозможным.

Познакомимся теперь с работой методистов и учителей. В 1935 г. нарком А. С. Бубнов организовал Всероссийское совещание по вопросам преподавания математики в средней школе. География совещания была очень обширной — от Винницы и Харькова до Томска и Тюмени, от Баку и Орджоникидзе до села Теньки и Ленинграда. Было сделано более 100 весьма содержательных докладов. Материалы совещания изданы книгой [5] в том же году[4].

Основной доклад на совещании Е. С. Березанская начала так: "Историческое постановление ЦК партии о школе чётко поставило перед школой требование дать грамотных людей, владеющих основами наук, способных активно участвовать в социалистическом строительстве нашей страны" [5, с. 14].

Название доклада: "Состояние преподавания математики по результатам выборочных исследований НКП РСФСР". Доклад очень конкретный и обоснованный, — не чета нынешним пустым, трескучим, самодовольным и лживым. Из доклада и из выступлений участников отчётливо вырисовывается реальная объективная картина состояния знаний учащихся и организаторская работа методистов НКП и учителей по улучшению их качества. Идейное содержание конференции актуально и поучительно для нас, оно отвечает на наш вопрос: что надо реально делать, чтобы повысить качество обучения? Поэтому приведём краткий обзор этого доклада

[4]Сегодня материалы совещания 1935 г. можно найти в журнале "Математика в школе" (1993, №4).

с комментариями. Курсивом будем выделять общие, принципиальные методические установки, а также обращать внимание на слова, за привычной обыденностью которых стоит ценное методическое содержание.

Основная масса учителей имела педагогический стаж 30-40 лет и выше [там же, с. 17]. Это значит, что они начали работу в конце XIX – начале XX века и, следовательно, они несли высокую методическую культуру, выработанную дореволюционной русской школой. Оказалось, что "реформаторы" 1920-х гг., как ни старались, не смогли её уничтожить.

Отличительным свойством русской педагогической и методической мысли была приоритетная забота об Ученике, — учёт его возможностей, понимание его трудностей и чуткая помощь, основанная на анализе этих трудностей. Это качество отчётливо проявилось в основном докладе и во многих выступлениях. Приведу несколько примеров.

Е. С. Березанская (Москва): "Для того, чтобы учащиеся поняли эти трудные задачи - нахождение части числа и целого по части, надо *подготовить* (!) ученика к этому вопросу и после того, как вопрос пройден, надо *неоднократно* в различных комбинациях (!) к нему *возвращаться* ... Качество знаний понижается из-за того, что наши учащиеся неаккуратно пишут... Ведь, вы знаете, что в алгебре неаккуратная запись губит всё дело [там же, с. 22]... Надо сознаться, что когда мы преподаём алгебру, забываем арифметику. Мы забываем, что *учащиеся за буквами a и b часто н и ч е г о не видят и не понимают, з а ч е м над ними производят какие-то действия* (какое тонкое проникновение в детскую психологию! — И.К.). Необходимо при изучении любого отдела алгебры ставить упражнения на нахождение численного значение алгебраического выражения... Изучение арифметики не заканчивается, когда учащийся окончил V и VI классы. *Арифметические вычисления должны проходить н а в с ё м протяжении средней школы...* [там, же, с. 23]. ...А типичная ошибка учащихся, которую никак не удаётся изжить — сокращение слагаемых в числителе и знаменателе дроби, может быть *предотвращена*, если *несколько* раз на числах показать учащимся неверность получаемого ими результата [там же, с. 24]... Незнание дробей влечёт за собой незнание уравнений, незнание основных вопросов, на которые опирается всё математическое образование в будущем. ...При решении упражнений, содержащих алгебраические дроби, я настаиваю, чтобы учащиеся делали *последовательно* одну операцию за другой... Для того, чтобы научить правильно до конца и быстро выполнять преобразования, *необходимо в начале работы м е д л е н н о, т щ а т е л ь н о выяснять к а ж д у ю произведённую операцию, пока выполнение не станет прочно усвоенным навыком* (!) [там же, с. 25]. ...Надо тщательно продумывать каждую конкретную трудность [там же, с. 26]."

Замечательный по глубине и тонкости анализа доклад сделал проф. **А. М. Астряб** (Киев), доклад назывался "Почему трудно решать геометрические задачи на вычисление"[5]. Он выделил три группы трудностей: выбор необходимых теорем, рисунок, вычислительные трудности, в частности, алгебраические. Проанализировал эти трудности и поставил цель: "крайне необходимо и научно-методическим объединениям, и авторам учебников, и преподавателям-практикам заняться серьёзной работой по изучению и классификации (по их степеням трудностей) тех задач, которые имеются в стабильных учебниках, по *анализу всех этих трудностей и по изучению способов преодоления их учащимися.* ... Все задачи ... должны быть тщательно исследованы и расположены в порядке их *постепенно* возрастающей трудности. ... Из всех задач надо выделить группу *основных* задач ... главным признаком в этой основной группе должно быть то, что метод решения этой задачи можно применить к ряду других задач. ... *Язык задачи обязательно надо приспособить к детям*"[6] [там же, с. 69-70].

Проф. И. Н. Кавун (Ленинград): "каждое понятие требует *длительной планомерной* проработки — для того, чтобы оно могло быть *доведено до навыка* ... над *воспитанием внимания*

[5]Полный текст доклада А. М. Астряба можно найти в [4 (2009, №5), с. 58-64].

[6]Заметим, что та сложная, глубокая методическая работа, которую предлагает учителям и методистам А. М. Астряб, невозможна в современных условиях. Современные "демократические" принципы функционирования нашего образования (в частности, "вариативность" учебников и задачников) делают абсолютно невозможным совершенствование качества обучения. Хаос невозможно усовершенствовать.

надо работать" [там же, с. 36-37].

А. В. Бызов (Ленинград): "учащиеся плохо владеют внутренним вниманием. У них вырабатывается *машинальность*. Я прошу товарищей серьёзно обратить внимание на работу по *устному* решению задач и примеров *во всех* классах. Ввести, по возможности, "математические минутки" для повторения пройденного (особенно арифметики)" [там же, с. 39-40].

Не правда ли, все эти советы очень пригодились бы нам сегодня. Но нам упорно советуют заниматься компьютеризацией и поиском инноваций. А подлинная, глубокая, трудная методика преподавания, примеры которой приведены выше, давно реформирована в псевдонаучную схоластику. С помощью наживки диссертаций.

А вот как управленцы 1930-х годов работали над повышением качества обучения. Они ежегодно проводили массовые, выборочные, всесторонние обследования школ страны: кадры, методическая работа, выполнение программы и причины её невыполнения, обеспеченность учебниками, материальные условия, в частности, такие "мелочи", как качество классных досок и мела, освещённость классов. По всем выявленным недостаткам оперативно принимались конкретные, выполнимые и проверяемые меры.

В частности, — продолжает доклад Е. С. Березанская, — выявилось, что "программа была перегружена, что времени, которое давалось на проработку программы, не хватало для *высококачественного* (!) выполнения. ... И вы знаете, что в результате этого в настоящем году весной были даны указания на места с тем, чтобы курс девяти лет был распределён на десять лет. ... В прошлом году весной программа не была выполнена на 30%, сейчас не выполнена приблизительно на 10% ... Эта недоработка проходит красной нитью по всем школам. Преподаватели говорят по этому поводу, что слишком перегружены программы VI и IX классов. Это **учтено** ... и вы *увидите*, что вся работа идёт в направлении ещё большей разгрузки программы VI класса. Программу IX класса разгрузить труднее. Для тех школ, которые имеют X класс, программа будет разгружена" [там же, с. 15-16].

Самым главным и самым ценным направлением управляющей работы Наркомпроса была методическая помощь учителям, высокопрофессиональная и реально действенная. Во время проверок проводились письменные контрольные работы по всем предметам. Анализ работ с выявленными типичными ошибками, объяснениями их причин и методическими рекомендациями по их *исправлению* (!!) оперативно рассылался учителям в виде методических писем. На следующий год показатели школ сравнивались с предыдущим. Докладчик поясняет: "особо изучаются те вопросы, которые известны, как слабо усваиваемые учащимися, обычно дающие типичные ошибки; учитывается, насколько продвинулась школа в их ликвидации" [там же].

Впечатляющи цифры: "В 1932 г. было проверено 65 средних школ 9 областей с охватом 25 тыс. учащихся; в 1933 г. было проверено 182 школы 10 областей с охватом до 165 тыс. учащихся. Весной 1934 г. было проверено 120 школ 14 краёв и областей с охватом до 100 тыс. учащихся по всем предметам... В 1935 г. будет проверено около 400 школ с очень большим охватом учащихся" [там же, с. 14].

Качество знаний после такой по настоящему управляющей (с обратной связью и корректирующими воздействиями) работы возрастало удивительными темпами: "Если вас интересует продвижение учащихся IV класса, то можно указать, что упражнения на целые числа в массовой школе в 1933 г. дали 29% решаемости контрольной работы, весной 1934 г. — 58%, а в декабре 1934 г. — 79%" [там же, с. 18].

Следует подчеркнуть объективность Наркомпросовского контроля, — в том же докладе признаётся: "числовые результаты, которые мы получали, всегда были *значительно* ниже тех показателей, которые давала нам школа" [там же, с. 15]. Для управленцев 1930-х годов не было нужды в фальсификации, — они умели делать дело, а не создавать доктрины и концепции.

Главная цель — *сознательность* усвоения знаний. Вот какое было принято обращение к учителям. "Всё преподавание математики нужно поставить на большую научную высоту, кладя в основу преподавания *тщательное* изучение теории и *сознательное* применение её выводов к решению задач и примеров. ... Совещание особо подчёркивает необходимость развития у учащихся математического мышления, конструктивных способностей и пространственных представлений; ... прививать учащимся *глубокий* интерес к *точному* знанию; ... повседневно приучать учащихся к *аккуратности* в работе, к тщательному выполнению чертежей и записей" [там же, с. 151].

Какой ясный, точный, понятный учителям наказ! И слова эти не были декларативными. Я помню, что именно так нас учили учителя в 1940-50-х гг. За помарки в тетрадях и за небрежные чертежи нам снижали оценки. Глубокий интерес к точному, доказательному знанию формировала, прежде всего, "Геометрия" Киселёва, а сознательное приложение знаний к решению задач и "стремление к созданию нового фактического материала" — замечательный задачник Рыбкина, в котором была глубоко продумана система и последовательность взаимосвязанных задач, *посильных* и одновременно стимулирующих.

Следует обратить внимание на то, как понималась научность преподавания. Это не формальная строгость определений и доказательств, как считали "реформаторы", а *сознательность*, т. е. осмысленность усвоения, понимание смыслов, сути. Только на таком фундаменте может базироваться умение прилагать знания к решению задач и формироваться глубокий интерес к предмету.

Подчеркнём ещё раз, — не увеличение объёма теории путём добавления новых "научных" абстракций (как предлагали "реформаторы"), а *углубление её понимания* (фундаментализация!). Углубление понимания теории может идти только в органическом единстве с её приложениями, с самостоятельными рассуждениями и действиями учащихся при решении задач и примеров.

Педагогические законы единства теории и практики в обучении, единства мышления и действия хорошо знали учителя, педагоги и методисты 1930-х гг. Знали, что мышление учащихся неторопливо взращивается отнюдь не демонстрацией строгой логической системы (как казалось "реформаторам"), а только в процессе *самостоятельных* усилий и действий учащихся при решении задач. Базой же для успешности этих действий является глубокое понимание теории, её смыслов. На основе этих законов ещё дореволюционной русской школой были выработаны программы и созданы прекрасные учебники и задачники (Киселёв-Рыбкин), на которых построена вся система математического образования того времени. Эта система была возвращена советской школе в 1930-х гг.

Здесь же надо сказать, что, начиная с середины 1950-х гг., в с е эти принципы стали постепенно вытесняться из реального преподавания и в 1970-х гг. были полностью заменены антипедагогическим принципом "высокого теоретического уровня" (ВТУ) обучения. Это мы ещё увидим. Увидим и результаты замены.

2. 1937-1956 гг. Совершенствование обучения и рост качества знаний

К концу войны Правительство приняло ряд мер, направленных на дальнейшее повышение образовательного уровня молодёжи. И меры эти заключались, опять же, в восстановлении традиций русской школы.

21 июня 1944 г. вышло Постановление СНК СССР "О мероприятиях по улучшению *качества обучения* в школе". Вводились обязательные экзамены за начальную и за семилетнюю школу. Вводились экзамены на аттестат *зрелости*, как это было в дореволюционных гимназиях. Учреждались золотые и серебряные медали для лучших выпускников школ. Отменялось соцсоревнование, как среди учащихся, так и среди учителей и *осуждалась процентомания*.

Были введены "переводные" экзамены во всех классах, начиная с четвёртого. В десятом классе выпускные экзамены на аттестат зрелости проводились почти по всем предметам. Причём, билеты на этих экзаменах охватывали материал, пройденный за предыдущие годы, начиная с пятого класса. И на перегрузку никто не жаловался.

В разгар войны "11 августа 1943 г. был принят закон о повышении заработной платы учительству. В ассигнованиях на школу фонд заработной платы увеличился с 2257 млн. руб. в 1943 г. до 4165 млн. руб.", — докладывал нарком В. П. Потёмкин учителям на Всероссийском совещании 1944 г. [10, с. 186]. За один военный год рост почти в два раза! "В 1945 г. ассигнования на народное *просвещение* только по системе народного комиссариата достигают 9 млрд. 281

млн. руб. В 1941 г. они составляли 5961 млн. руб." [там же, с. 243]. Рост более чем в полтора раза. Эти факты проявляют приоритетность образования в государственной политике даже во время войны.

Главная государственная задача, которую народный комиссар В. П. Потёмкин[7] ставил перед учителями и перед управленцами всех уровней, — это задача повышения *качества* преподавания и воспитания.

Всероссийское совещание по народному образованию 15 августа 1944 г. "целиком посвящается той же проблеме улучшения качества обучения и воспитания нашей молодёжи" [там же, с. 190]. Через год на таком же августовском совещании 1945 г. он поставил тот же вопрос — "о *дальнейшем* улучшении учебно-воспитательной работы в школе".

Коренным недостатком в знаниях учащихся, по заключению совещаний, является *формализм.* Кроме формализма "основными недостатками знаний ... являются их поверхностность, неполнота, отрывочность и *непрочность*" [там же, с. 212]. В. П. Потёмкин констатировал это с полным знанием дела, — он сам присутствовал на экзаменах в ряде школ и приводил участникам совещания впечатляющие примеры.

Замечательна методология решения проблемы наркомом. В заключительном слове В. П. Потёмкин подводит итоги совещания 1945 г.: "В постановку вопросов, связанных с этой общей проблемой, внесена необходимая *отчётливость.* Раскрыто *понятие* формализма ... Указаны *причины*, порождающие этот недостаток нашей школы. Наконец, намечены *средства* его преодоления" [там же, с. 266].

Сущность формализма определена так: "Механическое усвоение учебного материала, содержание которого не раскрыто и не продумано; заучивание школьниками словесных формул, лишённых для них конкретного смысла; отсутствие связи между приобретаемыми знаниями и жизнью практической — вот основные признаки того, что мы называем формализмом в обучении" [там же, с. 252].

Причины, порождающие формализм обучения: "Это, прежде всего, слабая теоретическая, практическая и *общекультурная* подготовка части учителей; это недостаточная методическая *помощь* им со стороны органов народного образования; это скудость литературы, которой пользуются наши учителя; это, конечно, слабая работа учителей над *самообразованием*; это забвение ими основного дидактического правила, требующего *конкретного* обучения, связи сообщаемых школьникам знаний с жизнью практической; это ещё не изжитая погоня за формально высокими *показателями* успеваемости. Нельзя обойти молчанием и непривычку многих учащихся к *самостоятельному* труду ..., а также ещё неустранённого несовершенства наших *программ* и *учебников*" [там же, с. 252-253].

Средства преодоления: "устранить эти недостатки улучшением *педагогического* процесса, в котором на первый план выдвигается *укрепление* знаний учащихся путём *систематического* повторения и *регулярной* проверки"[8] [там же, с. 212-213]. Причём, "повторения с учащимися

[7]Потёмкин В.П. (1874-1946) — советский государственный, партийный деятель, дипломат, учёный-гебраист и историк. Окончил историко-филологический факультет Московского университета (1893) и был оставлен при кафедре всеобщей истории для подготовки к профессорскому званию. В 1899-1917 гг. вёл научную и педагогическую работу, преподавал историю, французский язык, законоведение в гимназиях и институтах, участвовал в работе Педагогического общества при Московском университете, был связан с революционными кружками молодёжи. В 1917 г. член Государственной комиссии по просвещению, а затем зав. отделом Съездов Наркомпроса. С 1919 г. член РКП(б). В 1919-1921 гг. участник гражданской войны (начальник политотдела Фронта, член Реввоенсовета Армии). В 1921-1940 гг. на дипломатической работе, с 1939 г. член ЦК ВКП(б), с 1940 г. нарком просвещения РСФСР, с 1943 г. президент АПН РСФСР и академик АН СССР. Труды по истории Франции, английского рабочего движения, международных отношений. Главный редактор "Истории дипломатии" (Гос. премия СССР 1942, 1946).

[8]Этот методический принцип регулярной проверки знаний будет упразднён "реформаторами" в конце 1950-х гг. под тем предлогом, что он занимает слишком много времени урока, в то время как новые "активные" методы обучения требуют, чтобы учащиеся усваивали новый материал на самом уроке. Одновременно упразднялись домашние задания, которые воспитывали привычку к самостоятельному труду. Так разрушалась классическая методика организации урока, восстановленная В. П. Потёмкиным.

пройденного материала, как за курс данного года обучения, так и за предшествующие классы" [там же, с. 254].

Другое средство улучшения учебного процесса — "улучшение контроля за работой школ и учителей и постановки учёта знаний учащихся" [там же, с. 190]. Контроль не надзирающий, а помогающий. В. П. Потёмкин так определял характер контроля: "инспектор является не только государственным контролем школы. Он — её инструктор, учитель учителей, своим советом, примером помогающий им повысить качество их работы" [там же, с. 256-257]. И требовал, чтобы местные ОНО не отвлекали инспекторов от их прямой задачи, не нагружали их канцелярскими делами и административно-хозяйственными поручениями.

Управленцы того времени не просто призывали улучшить обучение, они помогали учителям и направляли их на методически верный путь, выработанный вековым развитием отечественной педагогики и методики. Они разговаривали с учителями на уважительном и профессионально понятном языке. И они не снимали ответственности с себя. Со своей стороны они вели "работу по пересмотру учебных планов и программ школы, в целях *разгрузки* программ от лишнего материала, рационализации учебного плана и придания большей законченности курсу начального и семилетнего обучения" [там же, с. 202].

Особое внимание уделялось системе составления, улучшения и отбора *учебников*, особенно, для начальной школы. Интересно, что уже тогда "некоторые авторские коллективы оказывались как бы монополистами своего рода" [там же, с. 204]. Для нейтрализации монополизма Наркомпрос "применяет отбор учебников, проводя их через специальное жюри. По всем дисциплинам в жюри поступает по несколько рукописей" [там же].

В результате такой грамотной комплексной общей дружной работы формализм в знаниях учащихся по математике, как увидим, вскоре во многом будет преодолён.

Совершенствование работы учителей направлялось внимательными наблюдениями за недостатками знаний учащихся и профессиональным анализом их причин. Журнал "Математика в школе" ежегодно, с 1947 г. по 1956 г. публиковал отчёты вузов и техникумов о результатах приёмных испытаний, сопровождаемые текстами заданий и *анализом* типичных ошибок абитуриентов и обнаруженных в их подготовке недостатков.

Большую пользу министерским управленцам и учителям приносили и старые методисты, работавшие в Секторе методики математики НИИ методов обучения АПН РСФСР. В этот Сектор в 1944 г. перешли грамотные методические кадры НИИ школ Наркомпроса, управлявшие методической работой учителей в 1930-х гг. под руководством Е. С. Березанской.

В 1940-х гг. методы управления, основанные на обратной связи, продолжались и совершенствовались. Это видно из книги [11], изданной АПН в 1949 г.: "Сектор ... систематически занимается изучением состояния преподавания математики в средней школе и уровня знаний учащихся. С этой целью Сектором ежегодно проводятся проверочные работы во всех классах и по всем математическим предметам ... и охватывают ежегодно до 10-15 тысяч учащихся из нескольких десятков школ разных областей. Помимо этого, научные сотрудники Сектора посещают уроки математики в школах... Настоящее письмо ставит своей целью *помочь учителю* (!)..." [11, с. 3].

В результате тщательного анализа огромного количества проверочных работ школьников ("29175 индивидуальных решений" [там же, с. 5]) авторы книги делают такие выводы: "техника арифметических вычислений заметно отстаёт от решения задач;... геометрия даётся учащимся труднее, чем остальные математические дисциплины, причём, особенно трудно даются учащимся задачи, требующие самостоятельного рассуждения и доказательства" [там же, с. 7].

И, тем не менее, с задачами на доказательство справлялась половина учащихся 7-х классов (сколько сегодня? 0%?), а стандартные геометрические задачи на вычисление решали почти 90% восьмиклассников[9]. В старших IX-X классах этот процент падал примерно до 70%, видимо, из-за повышения сложности задач и трудностей стереометрии.

[9] В 1996 г. с простой планиметрической задачей справлялись лишь около 30% абитуриентов МГУ [4 (1996. №1), с. 1], в 2002 г. — 1% абитуриентов МАДИ [4 (2002, №2), с. 63].

Относительно вычислительных примеров, можно заметить, что рост решаемости в VI классах, по сравнению с V классами, составил 7,6% (73,5% против 65,5%). Очевидно, столь значительный рост объясняется сохранением арифметики в VI классе. Если бы арифметика закончилась в V классе, как требовали "реформаторы", то был бы не рост, а резкое снижение, что потом сильно затруднило бы изучение алгебры.

Авторы книги видят следующие причины: "преподавание арифметики не обеспечивает сознательность (!) усвоения. В недостаточном количестве проводятся упражнения по арифметике, вследствие чего навыки учащихся оказываются непрочными и легко утрачиваются. При выполнении вычислений и преобразований учащиеся приучаются к шаблону... Законы и свойства действий проходятся наспех, без достаточного количества примеров, без должных упражнений в их применении. В силу этого учащиеся не пользуются этими свойствами для упрощения вычислений".

Какие же рекомендации даются учителям? "В V и VI классах заканчивается изучение систематического курса арифметики. Здесь имеется полная возможность уточнить математические понятия, правила и определения, полученные учащимися в младших классах и дополнить их новыми, применительно к программам пятого и шестого классов... В частности, особое внимание должно быть уделено изучению *свойств арифметических действий*. Это можно сделать и в порядке повторения и в порядке изучения нового.

Само собой разумеется, что свойства арифметических действий не могут быть строго доказаны в V классе, но рассмотреть их на конкретных примерах и сформулировать крайне важно вообще и, в частности, для осмысленного изучения алгебры в старших классах... Ошибки вроде $\frac{a^3+b}{b^2} = a + b$ не будут иметь места, так как учащийся с о з н а т е л ь н о усвоил в курсе арифметики, что для того, чтобы разделить сумму на число, надо разделить на это число все слагаемые этой суммы. Особое внимание ... *устным вычислениям*. Все вычисления, которые могут быть выполнены в уме, должны производиться устно" [там же, с. 18-19].

При решении *задач* "должна соблюдаться строгая последовательность ... на решение задач, как правило, следует выделять около половины учебного времени. Особое внимание ... следует уделять отчётливому пониманию учащимися *условий* задачи" [там же, с. 20].

"В заключение следует сказать, что изучение арифметики на должно ограничиваться пятым и шестым классом. И в старших классах школы учитель должен стремиться к тому, чтобы арифметические знания и навыки учащихся не ослабевали, а совершенствовались, чтобы вычисления производились осмысленно и наиболее рационально" [там же, с. 22].

Обратим внимание на простоту, конкретность и ясность рекомендаций, на их методический профессионализм. Такая качественная помощь учителям не могла не давать результатов. "Во многих школах учащиеся приучены к проверке полученного результата, что раньше встречалось крайне редко. Учащиеся усвоили порядок действий и поэтому ошибки в нарушении порядка действий встречаются сейчас реже, тогда как раньше подобные ошибки были массовым явлением... Значительно больше внимания в школе стали уделять решению задач ... значительно шире используется *анализ* при разборе задачи и составлении *плана* решения, уделяется внимание *точной формулировке вопросов*... Внимание, уделяемое школой воспитательной стороне преподавания арифметики, проявляется в приучении детей к *аккуратности*, к ответственности за полученный результат, в выработке у учащихся логического мышления, *обоснованности* суждений, самостоятельности" [там же, с. 9-10].

Геометрия: "Преподаватель должен постоянно требовать, чтобы в записи условия были сформулированы *взаимоотношения* между элементами фигуры. Например, вместо того, чтобы записать: "Дано: $\Delta\, ABC$ равнобедренный", нужно записать: "Дано: $\Delta\, ABC$, $AB = AC$"[10]. ... Обращают на себя внимание очень небрежные и неточные чертежи геометрических фигур" [там же, с. 32]. "Курс геометрии должен быть построен в строгом соответствием с *возрастными* особенностями учащихся. Логическая сторона предмета должна раскрываться *постепенно*, по

[10]Я помню, что именно так в 1950-х гг. учительница В. С. Рощупкина учила нас записывать условие задачи, составлять план решения, учила ставить точные вопросы, обосновывать каждый шаг решения.

мере усвоения учащимися важных понятий и фактов" [там же, с. 39]. "Воспитание *пространственного* воображения нужно начинать с возможно более раннего возраста и систематически проводить путём целесообразно подобранных упражнений и задач с геометрическим содержанием" [там же].

Алгебру и тригонометрию анализировал новый прогрессивный методист И. А. Гибш. Он признаёт, что "с каждым годом практические знания учащихся по алгебре становятся всё прочнее и отчасти разностороннее" [там же, с. 45]. Но вместо того, чтобы проанализировать качество знаний, выявить ещё имеющиеся недостатки (знаний!) и предложить средства их исправления, Гибш основным недостатком объявляет то, что "курс алгебры недостаточно отображает *научное* состояние этой дисциплины, ... *обедняет* идейное содержание ... усиливает *разрыв* между средней и высшей школой" [там же, с. 45] Стандартные бессмысленные "реформаторские" словесные штампы.

При решении тригонометрических уравнений и доказательстве тождеств: "очень большая часть учащихся справилась с выполнением этих примеров вполне удовлетворительно, обнаружив наличие необходимых для этого *навыков*" [там же, с. 78]. И опять Гибш игнорирует анализ знаний, взамен требует перестроить учебный предмет и "рассматривать тригонометрию, как учение о тригонометрических функциях" [там же, с. 77]. В частности, даёт такую методическую рекомендацию: "В основу определений тригонометрических функций должно быть положено понятие об отношении отрезков, как об отношении чисел, выражающих измерения этих отрезков с помощью произвольной, но одной и той же единицы измерения". Обоснование — учащиеся "смешивают самый отрезок ... с числом, выражающим его длину, что порождает : недостаточную ясность в понимании". Требует усилить "логическую строгость доказательства формул" [там же, с. 86-87].

Но возрастные особенности мышления детей совершенно естественно отождествляют отрезок и его длину, у них нет никакой потребности в тонком различении этих понятий (отрезок — множество точек, длина — мера множества). Более того, навязываемое им различение противоестественно, противоречит их непосредственному восприятию, запутывает простое и ясное детское мышление. Такое различение вносит большую ясность только в подготовленные умы зрелых математиков, оплодотворённых теорией множеств, но не в умы детей.

Итак, мы видим, что с 1949 г. "реформаторы" начинают переориентацию классической методики с понимания на научность, опять пытаются вносить вредные вирусы в реальное преподавание и начинают сеять свои идеи в среде учителей.

Посмотрим на качество знаний абитуриентов в 1940-х гг. Анализируя результаты приёмных экзаменов 1947 г. в МГУ, П. С. Моденов пишет: "Приёмные испытания ... свидетельствуют о положительных сдвигах в подготовке учащихся средней школы по математике за последний год (заметное улучшение только за *один* год! — *И. К.*). Если же провести сравнение за более длительный период времени, то разница в подготовке получится более внушительной. Причины *неуклонно* растущей подготовки учащихся средней школы кроются в целом комплексе мероприятий, принимаемых для улучшения работы средней школы. Сеть курсов повышения квалификации..., лекции для учителей и учащихся... Изменилось и преподавание в вузах. К студентам с самого начала предъявляются более высокие требования... *Возросшие требования* к абитуриентам можно иллюстрировать темами работ... Многие из предложенных задач были блестяще решены абитуриентами. Это ещё раз свидетельствует о том, что в наши вузы идёт талантливая и в большинстве своём *отлично* подготовленная молодёжь" [4 (1948, №2), с. 15]. Заметим, после 1956 г. мы никогда больше не услышим от вузовских преподавателей подобных оценок.

Примеры заданий при поступлении на мехмат и на физфак МГУ в 1947 г.:

"1) Длины сторон треугольника образуют возрастающую геометрическую прогрессию. В каких границах может меняться знаменатель этой прогрессии?

2) Упростить выражение:

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}, \text{ если } x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}, \text{ где } 0<a<b<2a.$$

3) Решить уравнение: $\log_a x \cdot \log_b x = \log_a b$ [там же, с. 16][11].

В том же номере журнала Е. И. Пузанова анализирует "материалы приёмных экзаменов 1947 г. трёх институтов: Московского высшего технического училища, Московского текстильного института и Московского автомеханического института. Экзамены по математике, как обычно, проводились устные и письменные. Задачи на письменных экзаменах, как по алгебре, так и по геометрии, давались *средней* трудности..., но оценивались они *строго*. При проверке принимались во внимание самые незначительные ошибки и влекли за собой понижение оценки, а *хотя бы одна грубая ошибка* приводила к неудовлетворительной оценке. ... Ученики московских школ оказались в среднем сильнее учеников провинциальных школ. Они дали *несколько* меньший процент неудовлетворительных оценок и больший процент повышенных оценок" [там же, с. 21]. Заметим, официальные нормы оценки знаний школьников ставили "неуд" за *две* грубых ошибки.

Примеры заданий:

$$\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y; \\ y^{\sqrt{y}} = x^4. \end{cases} \quad \begin{cases} lg\,x + lg\,y = lg\,11 + lg\,9; \\ lg(x+y) - lg(x-y) = 1. \end{cases} \quad ctg\,x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2.$$

Результаты "позволяют сделать вывод, что подготовка школьников по математике за последние два года значительно улучшилась. Поднялось общее математическое развитие, что сказалось на обстоятельных *объяснениях* и *обоснованных* исследованиях решений задач по геометрии и алгебре, которые дали очень многие экзаменующиеся. Улучшилось пространственное представление. Ошибки, о которых я говорила, встречались реже, чем в предыдущие годы" [там же, с. 25].

Заметим, решения задач не формальные, а *обоснованные*. И такие решения дали "*очень* много" абитуриентов. Вот результат сосредоточенной всеобщей методической работы по преодолению формализма в знаниях учащихся. И результат этот достигнут, действительно "в кратчайшие сроки", — за 3 года.

Сводная таблица результатов 1563 абитуриентов показывает 35% повышенных оценок и 48% посредственных [там же, с. 21]. Следовательно, **по этой выборке качество-1 оценивается в 35%, качество-2 в 83%**. Не забудем, что оценки эти сделаны по очень строгой мерке (одна грубая ошибка — "двойка").

"Возросшие требования к абитуриентам" предъявляет и МГУ и, конечно, другие вузы. Объясняется эта тенденция, очевидно, "неуклонно" растущим уровнем абитуриентов и большим конкурсом. Принимать в таких условиях вузовские оценки качества знаний абитуриентов за оценки качества знаний выпускников школ страны, было бы ошибкой. Качество-1 выпускников должно быть значительно выше, а качество-2 немного ниже. Что мы и увидим далее.

Оценка качества знаний выпускников школы 1949 г. может быть сделана по результатам проверочных работ учеников V-X классов разных регионов страны, проведённых сектором АПН в конце марта 1949 г. Сектором проанализированы 14193 работы учеников из 70 школ 14 областей РСФСР и школ г. Москвы. Задачи и примеры брались из стабильных учебников и задачников. Приведём примеры заданий по арифметике и алгебре.

V класс: "В первый день продали 1/3 куска сукна, во второй 2/5 остатка, а в третий остальные 12 м. Сколько метров сукна было во всём куске?"

[11] Сравните по трудности вышеприведённые задания МГУ 1947 г. и следующие задания МГУ 2011 г.: 1) Вычислить значение функции $x^2 - 0,615x - 1/8$ в точке $x = 4/5$; 2) Решить уравнение $\log_2(3x-4) = \log_4(2-x)$; 3) Решить уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = 1$ [4 (2012, №3), с. 3)].

VII класс: “Переднее колесо повозки имеет в окружности a метров, заднее — b метров. Как велик путь, на котором переднее колесо сделает на один оборот больше заднего?”

Доказать тождество: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$.

Упростить: $(3^{-6}a^{-18}):(2^{-6}x^{-12}y^{-6})$.

Решить уравнение: $x+\frac{12-x}{4}=\frac{26-x}{2}$.

Решить уравнение: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=1$.

Задания АПН немного проще, чем задания на вузовских приёмных экзаменах, что понятно, ибо АПН проверяли фундаментальные знания и навыки, а вузы обеспечивали себе конкурсный отбор.

Результаты работ отражены в сводной таблице [11, с. 6]. Здесь приведём небольшой фрагмент этой таблицы, позволяющий обобщённо и быстро оценить качество знаний школьников того времени.

Таблица 1

Предметы и классы		Темы	Процент верных решений	Процент не начатых или не оконченных решений
Арифметика	V-VI кл.	Текстовая задача	82,5	7,0
		Вычислительный пример	69,0	4,0
Алгебра	VI-VII кл.	Тождественные преобразования	80,0	6,0
Алгебра	VII кл.	Задача на составление уравнения	78,0	10,0
	VIII кл.		69,0	6,5
	IX кл.		72,0	11,0
Алгебра	VIII-X кл.	Примеры и упражнения	79,0	10,0

Из таблицы 1 можно извлечь показатель качества знаний алгебры выпускниками школы конца послевоенных 1940-х годов, — оценить его можно в **72%** (мы взяли минимальный процент верных решений учащихся IX-X классов). Поскольку верные решения предполагают хорошую или отличную оценку, то 72% — это качество по максимально жёсткому критерию.

Обратим внимание на стабильность качества знаний по всем годам обучения: колебания качества-1 с V по X класс находятся в пределах 70-80%. А средний процент в младших (V-VII) классах — 77,4% даже выше, чем в старших (VIII-X) — 72,5%. Обратим также внимание на то, что в 1940-х гг. уверенно решали смысловые задачи более 80% (!) пятиклассников.

Сделаем теперь среднюю оценку качества знаний всех математических предметов, используя результаты таблицы АПН [11, с. 6] в части IX-X классов. Средний процент верных решений по алгебре, тригонометрии и геометрии получается таким: (72+76+81+74,5+67,5):5=74. И можно считать, что примерно **74% выпускников школы конца 1940-х гг. знали математику на “хорошо” и “отлично”** (качество-1).

Стоит обратить внимание на очень низкие проценты не оконченных решений по всем классам. Неоконченные решения оценивались в те времена баллом 1 (“очень плохо”), их можно рассматривать, как свидетельства абсолютного незнания. Процент старшеклассников, абсолютно не владеющих алгеброй, можно принять за 10%.

В подтверждение объективной истинности сделанных выше оценок приведу результаты по своему краснодарскому выпуску 1953 г. Итоговые ведомости по четырём классам школы (104 человека) показывают, что качественные знания алгебры (оценки “4” и “5”) имели 72,1% выпускников, геометрии — 74%, тригонометрии — 75%[12].

[12]Из 26 выпускников моего класса поступили в вузы (в том числе в высшие военные училища) 19 (73%), причём, в московские и ленинградские вузы — 6 (23%). Все поступившие успешно закончили обучение и в дальнейшем принесли ощутимую профессиональную пользу обществу (профессора, доценты, директор ракетного ОКБ, зам. директора НИИ по науке, учителя, врачи, инженеры, мелиораторы, подполковник и полковник, капитаны 2-го и 1-го ранга). Финансистов, банкиров, “торгашей” ни одного. Из 4-х наиболее слабых выпускников двое стали рабочими-специалистами высшей квалификации.

Если же добавить тех, кто знал математику "удовлетворительно", то процент значительно повысится. Таблица 1 не даёт нам этих данных, поэтому я использую данные по своему выпуску 1953 г. Будем считать, что неудовлетворительно знают математику те, кто имеет в аттестате по всем трём математическим предметам "тройки". Таких в нашем выпуске 19 человек из 104-х, т. е. примерно 18%. В выпусках 1949 г. этот процент был, наверное, побольше (пусть 20%), поскольку здесь учились молодые люди, имевшие перерыв в учёбе в военные годы.

Итак, **качество-1 на конец 1940-х гг. можно оценить примерно в 74%, качество-2 — не менее 80%.**

Сравнение с 1937 г. показывает, что качество-2 немного повысилось (с 74% до 80%), а качество-1 возросло почти в 3 раза (с 24% до 74%). Этот рост проявляет высочайшую эффективность обучения, правильность классической отечественной методики, возвращённой в школу через учебники Киселёва и Рыбкина. Малое изменение качества-2, наверное, имеет своё объяснение в пониженной способности к учению примерно 20% школьников.

80%! Это высший показатель для качества-2! Более высокого процента уже невозможно достигнуть в массовой школе по не зависящим от методов и качества обучения причинам. Между прочим, в дореволюционной русской школе нормой считалась 75-процентная успеваемость и более низкая ставилась в вину учителю. Это объективно оправдано и справедливо. Очевидно, что такая норма была выработана долгой практикой совершенствования методов обучения и наблюдениями за динамикой результатов.

Из таблицы АПН [11, с. 6] можно извлечь и такой вывод: **в 1949 г. примерно 75% школьников в с е х (!) ступеней полноценно усваивали в с е основные разделы школьного курса математики.**

Примечание. В дальнейшем мы будем сравнивать качество знаний выпускников 1940-50-х гг. с качествами 1980-х гг. и последующих десятилетий и нам будут возражать, что эти сравнения некорректны, ибо до реформы-70 обязательным было семилетнее обучение, а после одиннадцатилетнее[13]. Смысл аргумента в том, что после реформы государство заставило учителей учить в старших классах детей, которые, как считают "реформаторы", по своим природным данным учиться не могли, они-то и понизили проценты успеваемости.

Этот аргумент опровергается той же таблицей-1, — проценты верных решений в V-VII классах столь же высоки, и даже выше, чем в IX-X классах (77,4% против 72,5%). Высокое качество знаний выпускников школы-семилетки подтверждается также результатами вступительных экзаменов в техникумы.

И я помню, что после VII класса уходили в техникумы хорошие ученики, а причина ухода заключалась не в трудности учёбы, а в желании поскорее получить специальность. Все они в дальнейшем получали высшее образование заочно.

В начале 1950-х гг. продолжался рост качества знаний. Так, в 1955 г. преподаватель Харьковского авиационного института В. Е. Семёнов пишет в журнал "Математика в школе": "Опыт приёмных экзаменов ... за последние три года убеждает нас в том, что средние школы дают основной массе выпускников *твёрдые знания* по элементарной математике, *достаточные* для перехода к изучению высшей математики и технических дисциплин" [4 (1955, №2), с. 44].

В 1956 г. методист П. В. Стратилатов в статье, обобщающей опыт проведения экзаменов 1955 г. в средних школах, заключает: "*знания учащихся по математике постоянно повышаются.* Это отмечают в с е авторы статей и материалы инспекторских обследований работы школ" [4 (1956, №2), с. 17]. Вывод сделан на основе десяти статей преподавателей школ, *техникумов* и вузов, присланных в редакцию из восьми городов: Саратова, Куйбышева, Феодосии, Чернигова,

[13] А. М. Абрамов объясняет неудачу реформы-70 так: "перед образованием были поставлены две несовместимые, взаимоисключающие задачи: повышение научного уровня преподавания и введение всеобщего среднего образования" [4 (2011, №1), с. 11]. На самом же деле, задача введения всеобуча была выполнимой без понижения качества знаний, как показывает таблица 1. А вот задача "повышения уровня" была совершенно не нужной, ложной и заведомо невыполнимой. Что доказала жизнь.

Пензы, Горького, Тирасполя, Томска. Заметим, в техникумы после 7-го класса шли такие же хорошо подготовленные учащиеся, как и в вузы.

В 1957 г. учитель и методист К. П. Сикорский (Москва) разносторонне анализирует качество алгебраических знаний учащихся в 1955-56 учебном году: “Присутствуя неоднократно на экзаменах ..., просматривая многочисленные экзаменационные письменные работы ..., посещая уроки математики в школах, можно составить представление о знаниях учащихся ... Учащиеся вполне удовлетворительно, часто *хорошо разбираются в вопросах теории*, имеют правильное представление об иррациональных числах, о комплексных числах, ... могут проследить изменение определений суммы и произведения по мере развития понятия о числе ... Учащиеся нередко отчётливо формулируют принцип математической индукции, применяют его ... Учащиеся дают правильное определение функции (чаще, как соответствия), пользуются обозначениями $f(x)$, $f(a)$ и т.п. ... умеют правильно формулировать свойства квадратной функции, показательной, логарифмической, умеют иллюстрировать свойства этих функций на графиках[14]. ... Решение задач на составление уравнений в VII и VIII классах учащиеся сопровождают *вполне удовлетворительными объяснениями*” [4 (1957, №2), с. 12-13]. Оцените, какие осмысленные, глубокие, прочные, не формальные знания давала учащимся наша школа когда-то!

Далее: “Несмотря на отмеченные положительные стороны ..., мы можем указать ещё много проблем ... Юноши и девушки, получившие аттестат зрелости, сплошь и рядом не могут устно произвести деления $24 : 0,02$, получают неправильное частное при делении $231231 : 231$, ... не могут объяснить правил умножения десятичных дробей ... Учащиеся, начиная с VIII класса, боятся больших чисел... Не знают элементарных правил приближённых вычислений... Умея давать определения, зная формулы и их выводы, учащиеся далеко не всегда могут привести соответствующие примеры... Учащиеся решают неравенства, системы неравенств, но не могут, например, вычислить следующей суммы “$C_{3n}^{38-n} + C_{21+n}^{3n}$” [там же, с. 13-15].

Ох, нам бы сегодня эти проблемы.

Итак, все многочисленные эксперты единогласно утверждают, что в этот период происходил непрерывный рост качества знаний школьников. Если обратиться к количественным оценкам и взять ориентиром выборку Краснодарской школы №2 1953 г., то увидим, что проценты почти не изменились: **качество-1 — 74%, качество-2 — 82%**. Значит, рост качества шёл уже не за счёт увеличения количества школьников, относящихся в ту или иную категорию, а за счёт всё более и более глубокого и прочного владения знаниями *всех* школьников (за исключением, приблизительно, 20%). Происходил, можно сказать, *внутренний* рост качества знаний, внутреннее его *насыщение.*

И можно сделать второй вывод: *процесс роста приблизился к своему пределу.* Советское математическое образование достигло к 1956 г. максимально высокого качества, которое только возможно для массового образования.

Третий вывод: учитывая, что за 12 лет (с 1937 г. по 1949 г.) качество-2 повысилось очень немного (с 74% до 80%), а за последующие 7 лет, если и повысилось, то всего на 2%, следует признать, что *примерно 20% учащихся массовой школы не могут овладеть программой по не зависящим от методов обучения причинам.* И ответственным управленцам не следовало бы даже ставить цели дальнейшего повышения процента успеваемости. Любое такое повышение будет фикцией и, как всякая ложь, приведёт к разрушению всего с таким трудом построенного здания высококачественного образования. Что и показала жизнь.

Тенденции роста качества знаний с 1931 г. по 1956 г. наглядно отражаются на диаграмме (рис. 1). Ломаные построены по узловым точкам, соответствующим узловым годам, для которых мы раньше обоснованно определили оценки показателей качеств-1 и 2.

Следует иметь в виду, что ломаные *не являются графиками* роста этих показателей, — они совпадают с графиками в узловых точках (кроме начальных), а между этими точками представляют линейные приближения хода графиков. Поэтому мы называем эти ломаные *тенденциями.*

[14] А. И. Маркушевич заявлял в 1949 г., что в учебник Киселёва “ещё не проникла идея функции” [12, с. 15] – ??

Здесь тенденции доведены до 1956 г., в дальнейшем нам предстоит выявить их продолжение, сначала до 1978 г. (год завершения реформы), затем до 2009 г. Так что диаграмма будет продолжена.

Необходимо пояснить пунктирное начало ломаных. Дело в том, что в начальной точке, соответствующей 1931 г., мы имеем весьма грубые оценки качеств-1 и 2 (15% и 0%). Для напоминания этого обстоятельства и введён пунктир. На ход и скорость тенденций эти оценки не влияют.

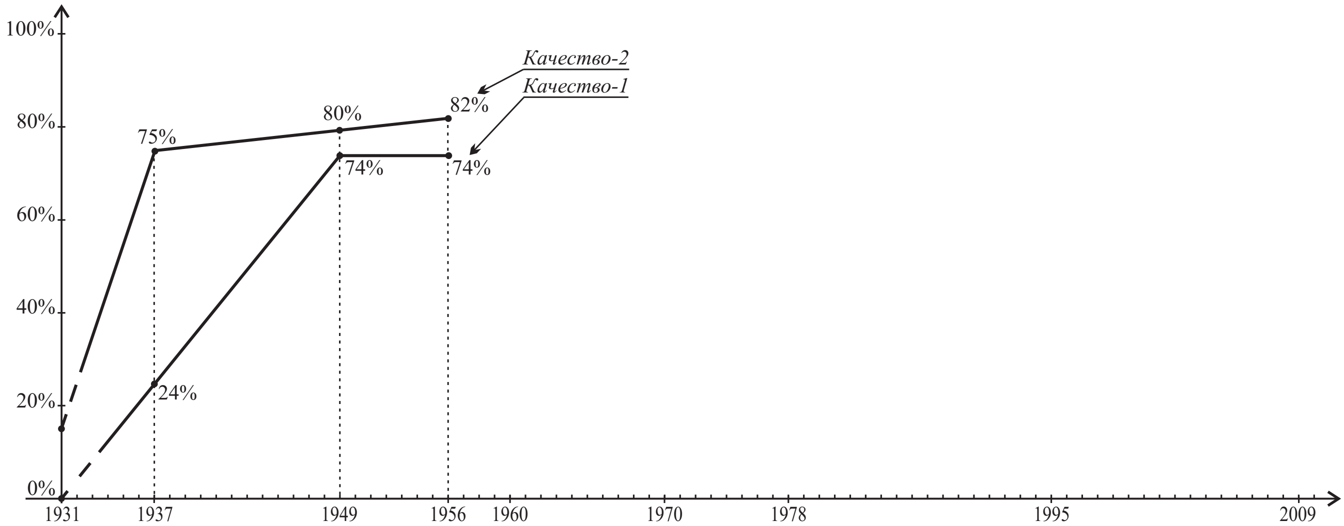

Рис. 1. Тенденции роста качества знаний выпускников школ с 1931г. по 1956г.

Анализируя диаграмму, сделаем ещё два вывода, в дополнение к сделанным выше.

Период с 1931 г. по 1937 г. — это период начального восстановления качественного образования. Сохранялись ещё недостатки (учебники геометрии и арифметики, следы слабого начального образования, ложные методы 1920-х гг.). В этот период качество-1 поднялось до 24%, а качество-2 — до 75%. Большой разрыв наводит на предположение, что качество-1 достигалось, во многом, за счёт учащихся с повышенными способностями, а качество-2 — со средними способностями. Т.е. первых оказывается 20-25%, вторых, — примерно, 50-55%.

Это предположение подтверждается резким ростом качества-1 в период с 1937 г. по 1949 г. Это период (точнее, его вторая "Потёмкинская" половина, начиная с 1944 г.) *массового* распространения классических принципов обучения. Именно традиционный метод обучения наряду с высококачественными учебниками и обеспечили поднятие огромной массы средних учащихся до хороших (рост, опять же, 50%).

Нормы оценок знаний учащихся 1940-50-х гг. зафиксированы в "Инструкции о применении цифровой пятибалльной системы оценки успеваемости и поведения учащихся начальной, семилетней и средней школы", утверждённой народным комиссаром В. П. Потёмкиным 29 февраля 1944 г.

Интересно и поучительно для нас прочитать сегодня эту инструкцию и, главное, вдуматься в её немногочисленные, точные и сжатые требования. Сразу обратим внимание на то, какие знания считались в то время качественными (оценки "5" и "4"): понимание всего программного материала, умение *применять* его, отсутствие *грубых* ошибок, правильный *язык*. И надо иметь в виду, что в те времена государственные инструкции выполнялись.

Цитируем: "При оценке успеваемости учащихся

1. Балл "5" ставится в том случае, когда учащийся исчерпывающе знает весь программный материал, *отлично понимает* и прочно усвоил его. На вопросы (в пределах программы) дает правильные, сознательные и уверенные ответы. В различных практических заданиях умеет самостоятельно пользоваться полученными знаниями. В устных ответах и письменных работах *пользуется литературно правильным языком* и *не допускает ошибок.*

2. Балл “4” ставится в том случае, когда учащийся знает весь требуемый программой материал, *хорошо понимает* и прочно усвоил его. На вопросы (в пределах программы) отвечает без затруднений. *Умеет применять* полученные знания в практических заданиях. В устных ответах *пользуется литературным языком* и *не делает грубых ошибок.* В письменных работах допускает только незначительные ошибки.

3. Балл “3” ставится в том случае, когда учащийся обнаруживает *знание основного* программного учебного материала. При применении знаний на практике *испытывает некоторые затруднения* и преодолевает их с небольшой помощью учителя. В устных ответах допускает ошибки при изложении материала и *в построении речи.* В письменных работах *делает ошибки.*

4. Балл “2” ставится в том случае, когда ученик обнаруживает *незнание большой части* программного материала, отвечает, как правило, лишь на наводящие вопросы учителя, неуверенно. В письменных работах допускает *частые и грубые ошибки.*

5. Балл “1” ставится в том случае, когда учащийся обнаруживает полное незнание проходимого учебного материала.” [1, с. 180].

Эти общие требования конкретизировались для каждой дисциплины и сопровождались разнообразными примерами по каждому виду проверки знаний (устный ответ, письменная работа, ответ у доски). Для математики учитывалась специфика по видам заданий (примеры, задачи, доказательства, вычисления, построения и пр.). Эти нормы, “*обязательные* для школ и ОНО”, чётко изложены в специальном документе и утверждены НКП в 1940 г. Опубликованы вторым изданием в 1943 г. [13]. Многократно переиздавались в регионах [14].

Процитируем требования качественного решения *примеров*: оценка “5” ставится в том случае, “если решение всех примеров доведено до конца и получены *правильные ответы*, все действия и преобразования выполнены верно, *рационально*, все записи хода решения примеров верны, *аккуратны*, расположены *последовательно*, сделана проверка...” [13, с. 10]. Обратим внимание на требования рациональности всех действий, последовательности и аккуратности их записи. “Всякого рода небрежность” наказывалась снижением оценки.

Те же строгие, простые и понятные требования предъявлялись к решению задач. К арифметическим задачам добавлялось: “даны полные и правильные *формулировки вопросов* или правильные пояснения” [там же, с. 11]. К алгебраическим задачам — “даны полные и верные пояснения ... и сделана *проверка* соответствия полученного решения условию задачи” [там же]. К геометрическим — “все *чертежи* сделаны правильно, чётко, снабжены обозначениями” [там же, с. 12].

Нормы эти уточнялись в соответствии с опытом их практического применения. В 1953 г. применяются следующие критерии: “Отметка “4” ставится, если в работе имеется один или два *недочёта.* Отметка “3” ставится, если в работе допущена *одна* грубая ошибка или имеется больше, чем два недочёта. Отметка “2” ставится, если в работе допущены *две* грубые ошибки” [14, с. 27].

3. Стратегические результаты возрождения школы

Восстановление русской Школы следует поставить в заслугу И. В. Сталину, ибо, по свидетельству Н. С. Хрущёва, на возврате школы к традициям дореволюционной гимназии настоял лично И. В. Сталин. Заметьте, — н а с т о я л . Значит, в высшем руководстве страны никто, кроме него, не понимал, как правильно решить проблему повышения качества образования. Более того, он взял на себя непосредственное руководство. Значит, он сознавал, что это ключевая проблема для выживания страны.

Ведущую роль И. В. Сталина подтверждает информированный историк образования и первый российский “демократический” министр (1990–1992) Э. Д. Днепров: “И. В. Сталин в 30-х гг. напрямую, лично руководил Отделом школ ЦК ВКПб” [15 (1996, №5), с. 42]. В 1995 г. Ф. А. Фрадкин уточняет: “Обнаруженные нами документы свидетельствуют, что в 30-х гг. школьная политика разрабатывалась при непосредственном участии И. В. Сталина” [15 (1995, №2), с. 81].

Высокое качество знаний выпускников средней школы не могло не сказаться на высшей школе и, в конечном счёте, на результатах науки и техники. Приведу интересное свидетельство академика И. Р. Шафаревича: "Во время войны отношение к науке сильно изменилось. ... Жалования практически внезапно увеличились в 2-3 раза. Очень усилился престиж. Об учёных начали писать. Наиболее престижно, конечно, было быть физиком. Следующее место, вероятно, занимали математики. Следует сказать, что это не привело к немедленному увеличению количества одарённых студентов на мехмате в 1940-е годы. Но затем, неожиданно, в середине 1950-х, по причине, которой я понять не могу, это произошло ... — взрыв, который буквально за 4 года дал такую волну замечательных математиков" [16, с. 3-4].

Добавим, — среди этих замечательных математиков (студентов 1950-х гг.) были два наших лучших современных математика, будущие академики С. П. Новиков и В. И. Арнольд. Их мы часто будем цитировать.

А причина "взрыва" талантов, тем не менее, достаточно очевидна. Она заключена в общеобразовательной школе, в качестве обучения, а также в его подлинной, широчайшей демократичности. И ещё, — не в материальных стимулах (повышение зарплат), а в идеальных (энтузиазм, престиж). Я сам заканчивал обычную провинциальную школу в начале 1950-х гг. и хорошо помню то стремление к знаниям, тот энтузиазм, которым была охвачена молодёжь. Помню традиционные вечера-встречи с бывшими выпускниками нашей школы во время студенческих каникул и то, с каким восхищением мы, старшеклассники, внимали им, — студентам МГУ, МВТУ, МАИ, Физтеха.

Выбирая профессию, мы совершенно не думали о деньгах. Совершенно! Перед нами, действительно, "все двери были открыты". Медалисты (в то время настоящие!) выбирали любой вуз и их принимали без экзаменов. Мы, провинциалы, мечтали о столичных вузах. Знаний, которые мы получали в школе, и их качества было достаточно, чтобы претендовать на любой вуз. О репетиторах никто не знал и не помышлял. Их не существовало. Такое положение было по всей стране. Страна училась по единым программам и единым учебникам высшего качества. Сельские школы давали такие же добротные знания, как и городские. Подлинное равенство возможностей! И сколько же талантов при таких условиях смогло подняться из народных глубин и реализоваться на пользу обществу!

К середине 1950-х гг. в вузы пошло молодое поколение, которое училось в школе 1940-50-х годов. Поколение с добротными знаниями и с горячим энтузиазмом. Талантливые юноши и девушки из всех уголков страны. Вот где причина "взрыва" студенческой одарённости на мехмате середины 1950-х. И не только на мехмате. И не только в МГУ.

Результатом цельной, мудрой и твёрдой государственной образовательной политики, основанной на традициях, её венцом и символом стал запуск первого в мире спутника Земли в 1957 г. и первый в мире космический полет Ю. А. Гагарина в 1961 г.

Потрясённые американцы стали искать причины неожиданного ослепительного научно-технического прорыва СССР. И пришли к выводу, что такие достижения невозможно объяснить только наличием выдающихся талантов. Для их осуществления необходимо огромное количество очень хорошо подготовленных специалистов в самых разных областях науки и техники.

Американский советолог Дж. Каунтс признал: "Рост советского могущества был бы невозможен без феноменального развития советского образования" [17, с. 22]. Замечательно название книги "*Вызов* Советского Образования". Симптоматичен год издания — 1957.

В 1960 г. председатель комиссии по изучению советского образования, американский адмирал Риковер подвёл итог: "Серьёзность вызова, брошенного нам Советским Союзом, состоит не в том, что он сильнее нас в военном отношении, а в том, что он угрожает (?!) нам *системой* образования" [18, с. 124].

"В нашей же стране именно с этого времени, как ни странно, стали снижаться расходы на образование, особенно в высшей школе, и к 1980-м годам они составляли *вдвое* меньший процент от национального дохода, чем в 50-е годы... *Были запущены... многие лжетеории в области педагогики.* Это наиболее ярко видно на примере подрыва математического и естественнонаучного образования. Данная тенденция продолжает развиваться и в настоящее время" [19, с. 4].

Эти слова написаны газетой "Советская Россия" в 1995 г. Значит, в обществе уже тогда (и раньше) присутствовало понимание не случайности процесса деградации образования, начавшегося в 1960-х гг.

Эту тенденцию, начиная от её истоков, мы в дальнейшем проследим во всех деталях. Следующая четвертая статья будет охватывать период 1936-1970 гг. и посвящена подготовке реформы-70, — будут вскрыты истоки её идей, их развитие и постепенное воплощение "реформаторами" в программах и учебниках. Пятая — период 1970-2009 гг.: реформа, результаты, их связь с идеями реформы, последствия в современном образовании.

Литература

1. Народное образование в СССР: Общеобразовательная школа: Сб. документов 1917-1973 гг. - М.: Педагогика, 1974.

2. Педагогический вестник. - 1996. - №7.

3. Никитин Н. Н. Преподавание математики в советской школе 1917-1947 гг. // Математика в школе. - 1947. - №5.

4. Математика в школе - 1939, №6, - 1948, №2, - 1950, №5, - 1956, №2, - 1957, №2, - 1996, №1, - 2002, №2, - 2011, №1, - 2012, №3.

5. Материалы Всероссийского совещания преподавателей математики средней школы, март-апрель 1935. - М., 1935.

6. Дудкин И. И. Повышение качества подготовки. Анализ приёмных испытаний в МЭИ // Высшая школа. - 1937. - №10.

7. Солодовник И. Чего мы ждём от средней школы // Высшая школа. - 1937. - №10.

6. Высшая школа. - 1938 - №4.

9. Кудрявцев Л. Д. О реформах образования в России // Образование, которое мы можем потерять. - М.: МГУ, 2002.

10. Потёмкин В. П. Статьи и речи по вопросам народного образования. - М.: АПН, 1947.

11. О преподавании математики в V-X классах. - М.: АПН РСФСР, 1949.

12. Маркушевич А. И. О повышении идейно-теоретического уровня преподавания математики в средней школе // На путях обновления школьного курса математики. Сборник статей и материалов. - М.: Просвещение, 1978.

13. Нормы оценки успеваемости учащихся по математике в V-VII классах неполной средней и средней школы. - М.: Учпедгиз, 1943.

14. Нормы оценки успеваемости учащихся в V-X классах семилетней и средней школы по русскому языку и математике. - Новгород. 1953.

15. Педагогика. - 1995, 2, - 1996, №5.

16. Математическое образование. - 2008, №2.

17. Троицкий В. Ю. Судьбы русской школы. - М.: Институт русской цивилизации, 2010.

18. Alma Mater. - 1999, №8.

19. Советская Россия. - 22 августа 1995.

Костенко Игорь Петрович,
Ростовский государственный университет
путей сообщения (филиал в г. Краснодаре),
доцент, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: kost@kubannet.ru

Системы линейных сравнений и китайская теорема об остатках в задачах математических олимпиад

Валентин Лейфура, Игорь Мительман, Вячеслав Ясинский

В статье рассматриваются вопросы, связанные с решением линейных сравнений и их систем, даётся доказательство так называемой “китайской теоремы об остатках” элементарной теории чисел и её обобщения. Приводятся многочисленные примеры применения данного теоретического материала к решению задач, в первую очередь — олимпиадного уровня. Статья доступна учащимся старших профильных физико-математических классов, владеющим основными фактами и методами элементарной теории чисел (линейные сравнения, вычеты, функция Эйлера, первообразные корни, символ Лежандра-Якоби и т.п.). Статья будет также полезна руководителям математических кружков, студентам педагогических специальностей.

Теория чисел относится к старейшим разделам математики. В классическом смысле — она занимается изучением свойств целых чисел. Теорию чисел иногда называют *высшей арифметикой*: она возникла из задач, связанных с умножением и делением целых чисел. На протяжении столетий задачи теории чисел были предметом исследования многих выдающихся ученых. Ряд направлений современной математики выросли именно из попыток решить или обобщить теоретико-числовые задачи. Великий математик К. Ф. Гаусс, учитывая это, писал: “Математика — царица наук, а теория чисел — царица математики”. Задачи теории чисел привлекают внимание не только профессионалов, но и многочисленных любителей математики, поскольку формулировки таких задач зачастую вполне понятны и школьникам. Закономерно, что теоретико-числовые задачи входят в “обязательную” программу математических соревнований, в частности, задачи по теории чисел занимают почётное место в заданиях Международных математических олимпиад.

Предлагаемая статья посвящена олимпиадным задачам, связанным с решением линейных сравнений с одной переменной, систем таких сравнений, а также — смежным вопросам элементарной теории чисел.

Отметим, что интерес к задаче нахождения наименьшего натурального числа, дающего при делении на заданные числа определённые остатки, возник ещё у математиков древнего Китая свыше 2000 лет тому назад при выполнении календарных и астрономических расчётов. В работах китайского математика Сунь-цзу, жившего в начале нашей эры, на примерах проиллюстрирован метод решения таких задач, а потому общий результат принято называть ***китайской теоремой об остатках***. Подобные задачи решал и индийский математик *Брахмагупта* (588—660 гг.). Не только математики Китая и Индии, но и арабские и европейские математики занимались подобными задачами. В частности, Леонардо Фибоначчи в своей книге “Liber abaci” рассмотрел задачу о нахождении числа, кратного 7 и дающего остаток 1 при делении на 2, 3, 4, 5 и 6.

С элементарными сведениями о теории остатков и теории сравнений читатели могут познакомиться по многочисленными книгам и статьями, в частности [8–10, 13, 19, 29].

Материал статьи предназначен для подготовки школьников к математическим олимпиадам высокого уровня. В статье содержится немало упражнений для самостоятельного решения, посвященных теоретическим вопросам. Решение этих упражнений, разбор доказательств по соответствующим учебникам — хороший способ активно овладеть важными разделами и методами элементарной теории чисел.

Приведём основные сведения о линейных сравнениях и системах линейных сравнений с одним неизвестным.

Теорема 1. Если $m > 1$ и $(a;m) = 1$, то сравнение $ax \equiv b \,(\operatorname{mod} m)$[1] имеет единственное решение (класс остатков по $\operatorname{mod} m$)[2].

Доказательство. Рассмотрим числа $a \cdot 0$, $a \cdot 1$, $\ldots$, $a \cdot (m-1)$, среди которых нет никаких двух, сравнимых по $\operatorname{mod} m$, поскольку $a\,(i-j) \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} m)$, $0 \le i \ne j \le m-1$. Эти m чисел образуют полную систему вычетов (остатков) по $\operatorname{mod} m$, а потому ровно одно из них (обозначим его ax_0, $0 \le x_0 \le m-1$) сравнимо с b по $\operatorname{mod} m$. Понятно, что класс вычетов, которому принадлежит x_0, является единственным решением сравнения.

В классической теории чисел важную роль играет функция Эйлера $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которая определяется так [1, 8–10, 25]: полагаем $\varphi\,(1) = 1$, а для $n > 1$ $\varphi\,(n)$ — количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Как хорошо известно, функция Эйлера обладает свойством *мультипликативности*: если натуральные числа n и m взаимно просты, то $\varphi\,(nm) = \varphi\,(n)\,\varphi\,(m)$.

Если для числа n даётся его каноническое разложение на простые множители $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то

$$\varphi\,(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Напомним, что имеют место такие факты.

Теорема Эйлера. Если $m > 1$ и $(a;m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \,(\operatorname{mod} m)$.

Малая теорема Ферма. Если p — простое число, и a не делится нацело на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \,(\operatorname{mod} p)$.

Легко видеть, что если $m > 1$ и $(a;m) = 1$, то решение сравнения $ax \equiv b \,(\operatorname{mod} m)$ можно представить в виде $x \equiv ba^{\varphi(m)-1} \,(\operatorname{mod} m)$.

Если $\delta = (a;m)$ и $b \;\overline{\vdots}\; \delta$ (эта запись означает, что b не кратно δ), то, разумеется, сравнение $ax \equiv b \,(\operatorname{mod} m)$ не имеет решений.

Предлагаем читателям самостоятельно доказать такое утверждение.

Лемма 1. Числа класса $\overline{u}$ по $\operatorname{mod} m$ образуют k классов вычетов по $\operatorname{mod} km$, а именно — классы $\overline{u + jm}$, $0 \le j \le k-1$.

Теорема 2. Если $b \,\vdots\, \delta$, то сравнение $ax \equiv b \,(\operatorname{mod} m)$ имеет ровно δ решений — классов вычетов по $\operatorname{mod} m$. Все эти решения образуют один класс вычетов по $\operatorname{mod}(m/\delta)$.

Доказательство. Сравнение $ax \equiv b \,(\operatorname{mod} m)$ равносильно сравнению $(a/\delta)x \equiv (b/\delta) \,(\operatorname{mod}(m/\delta))$. Остается воспользоваться тем, что $((a/\delta);\,(m/\delta)) = 1$, а также предыдущей леммой.

Понятно, что если каждое сравнение системы

$$\begin{cases} a_1 x \equiv b_1 \,(\operatorname{mod} \mu_1)\,, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_n x \equiv b_n \,(\operatorname{mod} \mu_n) \end{cases}$$

имеет решения, то такая система сравнений приводится к виду

$$\begin{cases} x \equiv c_1 \,(\operatorname{mod} m_1)\,, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ x \equiv c_n \,(\operatorname{mod} m_n)\,. \end{cases}$$

[1] Эта запись означает, что числа ax и b имеют одинаковые остатки при делении на m, т.е. их разность кратна m — *Прим. ред.*

[2] Символами $(a;b)$ и $[a;b]$ обозначаются, соответственно, **наибольший общий делитель** и **наименьшее общее кратное** целых чисел a и b. Отметим также, что в статье для обозначения делимости числа a нацело на число b используются для удобства оба варианта записи: $b|a$ и $a \,\vdots\, b$.

Исследуем сначала систему двух линейных сравнений

$$\begin{cases} x \equiv c_1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv c_2 \pmod{m_2}. \end{cases}$$

Из первого сравнения получаем, что $x = c_1 + m_1 t$. Задача сводится к сравнению $m_1 t \equiv c_2 - c_1 \pmod{m_2}$. Обозначим $\delta = (m_1; m_2)$, $M = [m_1; m_2]$. Последнее сравнение имеет решения тогда и только тогда, когда $c_2 - c_1 \,\vdots\, \delta$, и при этом решения образуют один класс вычетов $\overline{t_0}$ по mod (m_2/δ). Отсюда $x = c_1 + m_1 \cdot (t_0 + (m_2/\delta)v)$, $v \in \mathbb{Z}$, т. е. $x = c_1 + m_1 t_0 + (m_1 m_2/\delta)v$, $v \in \mathbb{Z}$. Поскольку, как хорошо известно, $(m_1; m_2) \cdot [m_1; m_2] = m_1 m_2$, то $x = c_1 + m_1 t_0 + Mv$, $v \in \mathbb{Z}$. Рассматриваемая система двух сравнений имеет решения тогда и только тогда, когда $c_2 - c_1 \,\vdots\, \delta$, и при этом решения образуют один класс вычетов по $\bmod M$.

Теорема 3. Система линейных сравнений $x \equiv c_i \pmod{m_i}$, $i = \overline{1, n}$, или вообще не имеет решений, или имеет только одно решение — класс вычетов по $\bmod M$, где M — наименьшее общее кратное чисел $m_1, \ldots, m_n$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. База индукции — случай $n = 2$ — рассмотрена выше. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для любых n линейных сравнений, и возьмём систему из $n + 1$ сравнения:

$$\begin{cases} x \equiv c_1 \pmod{m_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv c_n \pmod{m_n}, \\ x \equiv c_{n+1} \pmod{m_{n+1}}. \end{cases} \tag{$*$}$$

Если система из первых n сравнений не имеет решений, то не имеет решений и система (*). Если система из первых n сравнений имеет решения, то они образуют класс x_0 по $\bmod M'$, где M' — наименьшее общее кратное чисел $m_1, \ldots, m_n$. Тогда система (*) равносильна системе

$$\begin{cases} x \equiv x_0 \pmod{M'}, \\ x \equiv c_{n+1} \pmod{m_{n+1}}. \end{cases} \tag{$**$}$$

Система (**), в свою очередь, или не имеет решений, или же все решения объединяются в один класс остатков по $\bmod [M'; m_{n+1}]$, т. е. по $\bmod M$.

Теперь уже несложно доказать *китайскую теорему об остатках.*

Теорема 4 (китайская теорема об остатках). Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — попарно взаимно простые натуральные числа, большие 1. Тогда система сравнений $x \equiv c_i \pmod{m_i}$, $i = \overline{1, n}$, имеет единственное решение, образующее класс вычетов по $\bmod M$, где $M = \prod\limits_{i=1}^{n} m_i$.

Доказательство. Для каждого $i = \overline{1, n}$ возьмём такое число y_i, что $(M/m_i)y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ (понятно, что такие числа существуют). Нетрудно убедиться (оставляем это читателям), что число $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{M}{m_i} y_i c_i$ удовлетворяет всем сравнениям $x \equiv c_i \pmod{m_i}$, $i = \overline{1, n}$. Система $x \equiv c_i \pmod{m_i}$, $i = \overline{1, n}$, является совместной, и потому, в силу предыдущей теоремы, все числа, ей удовлетворяющие, образуют один класс вычетов по $\bmod M$, причём именно класс, порождаемый числом x_0.

Замечание. Мы привели “конструктивное” доказательство. Китайскую теорему об остатках можно доказать методом математической индукции. Кроме того, при доказательстве китайской теоремы об остатках можно было бы и не использовать предыдущую теорему, а заметить, что если некоторое целое x' удовлетворяет системе, то $x' \equiv x_0 \pmod{m_i}$ для всех $i = \overline{1, n}$. Отсюда делаем вывод, что $x' - x_0 \,\vdots\, M$, поскольку числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимно простые.

С практической точки зрения находить решения таких систем сравнений удобно, решая сначала систему из двух первых сравнений (приведённым выше методом), а потом — “присоединяя” по одному остальные сравнения.

Приведём важный *критерий* совместности системы линейных сравнений (которым обобщается и *китайская теорема об остатках*).

Теорема 5. Система линейных сравнений $x \equiv c_i \pmod{m_i}$, $i = \overline{1,n}$, имеет решение тогда и только тогда, когда для любых i и j, $1 \le i < j \le n$, $c_i - c_j \,\vdots\, (m_i; m_j)$.

Доказательство. Необходимость такого условия очевидна. Достаточность для $n = 2$ установлена выше. Пусть $\delta = (m_1; m_2)$, тогда решение системы $x \equiv c_i \pmod{m_i}$, $i = \overline{1,2}$, как легко установить, имеет вид $x \equiv c' \pmod{[m_1; m_2]}$, где $c' = (c_2 - c_1)\,(m_1/\delta)^{\varphi(m_2/\delta)} + c_1$.

Теперь возьмём систему из трёх первых сравнений, равносильную системе

$$\begin{cases} x \equiv c' \pmod{[m_1; m_2]}\,, \\ x \equiv c_3 \pmod{m_3}\,. \end{cases}$$

Докажем, что $c' - c_3 = (c_2 - c_1)\,(m_1/\delta)^{\varphi(m_2/\delta)} + (c_1 - c_3) \,\vdots\, d$, где $d = ([m_1; m_2]\,; m_3)$.

Запишем каноническое разложение $d = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$. Нужно показать, что $c' - c_3 \,\vdots\, p_i^{\alpha_i}$ для каждого $i = \overline{1,s}$. Следует рассмотреть такие случаи:

Если $p_i^{\alpha_i}$ является делителем каждого из чисел m_1, m_2, m_3, то $c_2 - c_1 \,\vdots\, (m_2; m_1)$, $c_3 - c_1 \,\vdots\, (m_3; m_1)$, $(m_2; m_1) \,\vdots\, p_i^{\alpha_i}$, $(m_3; m_1) \,\vdots\, p_i^{\alpha_i}$, и потому $c' - c_3 \,\vdots\, p_i^{\alpha_i}$.

Если $p_i^{\alpha_i}$ является делителем чисел m_1 и m_3, но не является делителем числа m_2, то, разумеется, $c_3 - c_1 \,\vdots\, p_i^{\alpha_i}$. Обозначим $\beta = \max\{u \ge 0 \mid m_2 \,\vdots\, p_i^u\}$, $\beta < \alpha_i$. Число p_i^{β} является делителем числа $(m_1; m_2)$, а потому $c_2 - c_1 \,\vdots\, p_i^{\beta}$. Поскольку $(m_1/\delta) \,\vdots\, p_i^{\alpha_i - \beta}$, то $c' - c_3 \,\vdots\, p_i^{\alpha_i}$.

Если $p_i^{\alpha_i}$ является делителем чисел m_2 и m_3, но не является делителем числа m_1, то $c_2 - c_3 \,\vdots\, p_i^{\alpha_i}$, и запишем $c' - c_3$ в виде $c' - c_3 = (c_2 - c_3) + (c_2 - c_1)\left((m_1/\delta)^{\varphi(m_2/\delta)} - 1\right)$. Пусть $\gamma = \max\{u \ge 0 \mid m_1 \,\vdots\, p_i^u\}$, $\gamma < \alpha_i$. Тогда $c_2 - c_1 \,\vdots\, p_i^{\gamma}$. Поскольку $((m_1/\delta); (m_2/\delta)) = 1$, то, согласно теореме Эйлера, $(m_1/\delta)^{\varphi(m_2/\delta)} \equiv 1 \pmod{(m_2/\delta)}$. С учетом того, что $(m_2/\delta) \,\vdots\, p_i^{\alpha_i - \gamma}$, имеем теперь:

$$(c_2 - c_1)\left(\left(\frac{m_1}{\delta}\right)^{\varphi(m_2/\delta)} - 1\right) \vdots\, p_i^{\alpha_i},\; c' - c_3 \,\vdots\, p_i^{\alpha_i}.$$

Воспользуемся методом математической индукции. Возьмём $n \ge 4$ и допустим, что нужный факт имеет место для всех $k < n$. Докажем его и для $k = n$. Система, образованная первыми $n - 2$ сравнениями, имеет решение $x \equiv c \pmod{M'}$, где $M' = [m_1; \ldots; m_{n-2}]$. Тогда система $x \equiv c_i \pmod{m_i}$, $i = \overline{1,n}$, равносильна системе трёх сравнений

$$\begin{cases} x \equiv c \pmod{M'}\,, \\ x \equiv c_{n-1} \pmod{m_{n-1}}\,, \\ x \equiv c_n \pmod{m_n}\,. \end{cases} \qquad (*)$$

Системы

$$\begin{cases} x \equiv c \pmod{M'}\,, \\ x \equiv c_{n-1} \pmod{m_{n-1}} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \equiv c \pmod{M'}\,, \\ x \equiv c_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

согласно предположению индукции являются совместными, а потому $c - c_{n-1} \,\vdots\, (M';\ m_{n-1})$, $c - c_n \,\vdots\, (M';\ m_n)$. Кроме того, $c_n - c_{n-1} \,\vdots\, (m_n;\ m_{n-1})$. Таким образом, система трёх сравнений $(*)$ совместна.

Задача 1. Решить систему сравнений

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3\,, \\ x \equiv 1 \pmod 5\,, \\ x \equiv -3 \pmod 7\,. \end{cases}$$

Ответ: $x \equiv 11 \pmod{105}$.

В книге [28, сс. 24, 146-148] рассматривается задача о том, что для любого m, $5 \le m \le 16$, среди m последовательных натуральных чисел всегда есть число, взаимно простое с остальными. Для $m = 17$ приводится контрпример. В [28] также высказывается предположение (*гипотеза Ченцова*), что случай $m = 17$ носит "разделительный" характер, т. е. для $m \ge 17$ утверждение задачи не выполняется. Насколько известно авторам статьи, этот результат с доказательством впервые был напечатан значительно позже — в статье [26]. Изложим это доказательство несколько более подробно.

Теорема 6 [26]. Для каждого натурального $m \ge 17$ существует набор из m последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного числа, взаимно простого с остальными числами этого набора.

Доказательство. Пусть $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ — множество всех простых чисел. Обозначим через s количество простых чисел, меньших m. Нужный набор существует тогда и только тогда, когда множество $W_m = \{1;\ 2;\ \ldots;\ m\}$ можно представить в виде $\{1;\ 2;\ \ldots;\ m\} = \bigcup\limits_{j=1}^{s} F_j$, где

$$F_j = \{ a_j + p_j t |\, 0 \le t \le [(m - a_j)/p_j]\}, \quad 1 \le a_j \le m - p_j, \quad j = \overline{1, s}$$

(каждое из множеств объединения содержит не менее двух чисел).

Действительно, пусть натуральное число x удовлетворяет системе сравнений $x \equiv 1 - a_j \pmod{p_j}$, $j = \overline{1, s}$ (согласно *китайской теореме об остатках* такое x существует). Покажем, что набор $b_1 = x$, $b_2 = x + 1$, $\ldots$, $b_m = x + m - 1$ удовлетворяет условию задачи. Возьмём произвольное i, $1 \le i \le m$. Поскольку $|F_j| \ge 2$ для всех $j = \overline{1, s}$, то существуют такие q и v, $1 \le q \ne i \le m$, $1 \le v \le s$, что числа i и q принадлежат множеству $\{a_v + p_v t |\, 0 \le t \le [(m - a_v)/p_v]\}$. Далее, $b_i = x + i - 1 \equiv x - 1 + a_v \equiv 0 \pmod{p_v}$, $b_q = x + q - 1 \equiv x - 1 + a_v \equiv 0 \pmod{p_v}$. Заметим, что справедливость обратного утверждения очевидна.

Для $m = 17$ имеем $s = 6$. Множество W_{17} представим в виде объединения множеств $F_1 = \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13;\ 15;\ 17\}$ (для $p_1 = 2$), $F_2 = \{1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ 16\}$ (для $p_2 = 3$), $F_3 = \{2;\ 7;\ 12;\ 17\}$ (для $p_3 = 5$), $F_4 = \{1;\ 8;\ 15\}$ (для $p_4 = 7$), $F_5 = \{6;\ 17\}$ (для $p_5 = 11$), $F_6 = \{1;\ 14\}$ (для $p_6 = 13$). Решив приведённую выше систему сравнений, получаем, например, такой набор из 17 последовательных целых чисел: 2184, 2185, ... , 2200.

Для $m \in \{18;\ 19;\ 20;\ 21;\ 22\}$ искомые представления множеств W_m получаются дополнением построенных для $m = 17$ множеств F_j, $1 \le j \le 6$, "очередными" членами арифметических прогрессий, причем для $m \in \{18;\ 19\}$ следует присоединить множество $F_7 = \{1;\ 18\}$ (для $p_7 = 17$), а для $m \in \{20;\ 21;\ 22\}$ — ещё и множество $F_8 = \{1;\ 20\}$ (для $p_8 = 19$).

Для $m = 17$ множество W_{17} можно представить также в виде объединения

$$\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13;\ 15;\ 17\} \cup \{2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\ 17\} \cup \{1;\ 6;\ 11;\ 16\} \cup \\ \cup\ \{3;\ 10;\ 17\} \cup \{1;\ 12\} \cup \{4;\ 17\}.$$

Именно эту конструкцию обобщим для получения нужного результата. Зафиксируем натуральное $i \ge 5$ и выберем натуральное

$$m \in [p_i + p_{i+1} - 1; p_{i+1} + p_{i+2} - 1).$$

Напомним, что для произвольного действительного $x > 1$ интервал $(x; 2x)$ содержит по крайней мере одно простое число (теорема Бертрана-Чебышёва). По "усиленной" теоремой Бертрана-Чебышёва (см., например, [15, с. 356]), для любого $n \ge 29$ выполняется неравенство $\frac{p_{n+1}}{p_n} < \frac{5}{4}$, откуда

$$\frac{p_{n+3}}{p_n} = \frac{p_{n+3}}{p_{n+2}} \cdot \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} \cdot \frac{p_{n+1}}{p_n} < \left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2.$$

А потому для $n \geq 29$ $p_n < p_{n+1} < p_{n+2} < p_{n+3} < 2p_n$, т. е. в интервале $(p_n;\ 2p_n)$ содержится не менее трёх простых чисел. Непосредственной проверкой устанавливаем, что этот факт справедлив для всех $n \geq 5$.

Итак, будем дальше использовать для $i \geq 5$ оценки

$$2p_{i-1} > p_{i+1} > p_i > p_{i-1}, \quad p_i + p_{i-1} > p_{i+2}, \ 2p_i > p_{i+3} > p_{i+2} > p_{i+1} > p_i.$$

Рассмотрим (для удобства — в виде изображенной ниже таблицы) следующие арифметические прогрессии (для каждой из них рассматриваются лишь члены, содержащиеся в промежутке $[1;\ m]$).

Разность	Члены прогрессии				
$p_1 = 2$	$\dots$	$p_i - 2$	p_i	$p_i + 2$	$\dots$
$p_2 = 3$	$\dots$	$p_i - 3$	p_i	$p_i + 3$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p_{i-2}	$\dots$	$p_i - p_{i-2}$	p_i	$p_i + p_{i-2}$	$\dots$
p_{i-1}	$\dots$	$p_i - 1$	$p_i - 1 + p_{i-1}$		
p_i		1	$p_i + 1$	$\dots$	$\dots$
p_{i+1}		$p_i - p_{i-1}$	$p_i - p_{i-1} + p_{i+1}$		
p_{i+2}		$p_i + p_{i-1} - p_{i+2}$	$p_i + p_{i-1}$		
p_{i+3}		$2p_i - p_{i+3}$	$2p_i$		

Числа $p_i - 1, p_i, p_i + 1, p_i - 1 + p_{i-1}$ содержатся в таблице. Возьмём натуральное число $u \leq p_i - 2$. Тогда $p_k | p_i - u$ для некоторого k, $1 \leq k \leq i-1$. Если $1 \leq k \leq i-2$, то, разумеется, число u присутствует в строке с номером k (по левую сторону от p_i). Если $p_{i-1} | p_i - u$, то, учитывая неравенство $2p_{i-1} > p_i > p_{i-1}$, имеем, что $p_i - u = p_{i-1}$, т. е. $u = p_i - p_{i-1}$, и такое число содержится в таблице. Пусть теперь $p_i + 2 \leq u \leq p_i + p_{i-1} - 2$, $2 \leq u - p_i \leq p_{i-1} - 2$. Тогда существует k, $1 \leq k \leq i-2$, для которого $p_k | u - p_i$, и число u находится в строке с номером k (по правую сторону от p_i). Если $m \in [p_i + p_{i-1};\ 2p_i)$ то достаточно рассматривать случай $p_i + p_{i-1} \leq u \leq m \leq 2p_i - 1$, $p_{i-1} \leq u - p_i \leq p_i - 1$. Ситуация, когда $p_k | u - p_i$ для некоторого k, $1 \leq k \leq i-2$, является очевидной, а при условии $p_{i-1} | u - p_i$ легко получить равенство $u = p_i + p_{i-1}$, и задействуется строка с номером $i+2$. Пусть теперь $m \in [2p_i;\ p_{i+1} + p_i - 1)$. Следует рассмотреть случай $2p_i \leq u \leq m \leq p_{i+1} + p_i - 2$. Для $u = 2p_i$ нужна строка с номером $i+3$. Если же $2p_i + 1 \leq u \leq p_{i+1} + p_i - 2$, то $p_i + 1 \leq u - p_i \leq p_{i+1} - 2$. Если $p_k | u - p_i$ для некоторого k, $1 \leq k \leq i-2$, то всё понятно, а при условии $p_{i-1} | u - p_i$ получаем равенство $u = p_i + p_{i-1}$. Предположим, что $p_i | u - p_i$. Тогда $u = tp_i$, $t \geq 2$, $t \in \mathbb{N}$. Число $2p_i$ в таблице содержится, и остаётся заметить, что неравенство $t \geq 3$ выполняться не может, поскольку, согласно теореме Бертрана-Чебишёва, $2p_i > p_{i+1}$. Этим и завершается доказательство.

Задача 2 (*Всесоюзная математическая олимпиада*, 1981 г.). Найти хотя бы одно натуральное число n, для которого среди последовательных чисел $n, n+1, n+2, \dots, n+20$ не будет ни одного, взаимно простого с числом 30030.

Решение. Заметим, что $30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Обозначим $M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Пусть натуральное k удовлетворяет системе сравнений

$$\begin{cases} Mk \equiv 1 \pmod{11}, \\ Mk \equiv -1 \pmod{13}. \end{cases}$$

Тогда число $n = Mk - 10$ удовлетворяет условию задачи.

Задача 3 [24]. Доказать, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, из которых изменением одной (любой) цифры нельзя получить простое число.

Решение. Можно рассмотреть такую систему сравнений:

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{10}, \\ n \equiv -1 \pmod{11}, \\ n \equiv -9 \pmod{3}, \\ n \equiv -7 \pmod{7}, \end{cases}$$

решением которой является $n \equiv -210 \pmod{2310}$.

Задача 4 [24]. Доказать, что для любого натурального n существует такое простое число P, что каждое из чисел $P-1$, $P+1$ и $P+2$ имеет не менее n различных простых делителей.

Решение. Пусть $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ — множество всех простых чисел. По *китайской теореме об остатках*, существует такое натуральное B, что

$$B \equiv 1 \pmod{p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n}, \quad B \equiv -1 \pmod{p_{n+1} p_{n+2} \cdot \ldots \cdot p_{2n}}, \quad B \equiv -2 \pmod{p_{2n+1} p_{2n+2} \cdot \ldots \cdot p_{3n}}.$$

Очевидно, что число $A = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_{3n}$ взаимно просто с B. Согласно классической теореме Дирихле об арифметических прогрессиях [25], для некоторого натурального числа k число $P = Ak + B$ является простым. Понятно, что такое P удовлетворяет условию задачи, поскольку

$$p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \mid p-1, \quad p_{n+1} p_{n+2} \cdot \ldots \cdot p_{2n} \mid p+1, \quad p_{2n+1} p_{2n+2} \cdot \ldots \cdot p_{3n} \mid p+2.$$

Задача 5 (*IMO — Международная математическая олимпиада*, 2004 г.). Назовём натуральное число *полосатым*, если любые две соседние цифры в его десятичной записи имеют разную чётность. Найти все натуральные n, для каждого из которых существует *полосатое* число, кратное n.

Решение. Если $n \,\vdots\, 20$, то последние две цифры десятичной записи числа n чётны, а потому для таких чисел не существует полосатого числа, кратного n.

Докажем, что если n не делится нацело на 20, то существует полосатое число, кратное n.

Если для натурального $u > 1$ $k = \max\{m \in \mathbb{N} \mid a \,\vdots\, u^m\}$, то будем это записывать так: $u^k \| a$.

Лемма А. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует полосатое число с чётным количеством цифр, кратное 2^n.

Доказательство. По индукции построим такую последовательность десятичных цифр $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$a_n \equiv n+1 \pmod{2}, \quad 2^{2n-1} \| \overline{a_{2n-1} \ldots a_1} \ \text{и} \ 2^{2n+1} \| \overline{a_{2n} a_{2n-1} \ldots a_1}$$

для всех натуральных n. Возьмём $a_1 = 2$, $a_2 = 7$. Допустим, что нужная последовательность цифр построена до a_{2n} включительно, и положим $a_{2n+1} = 4$. По предположению индукции $2^{2n+1} \| \overline{a_{2n} a_{2n-1} \ldots a_1}$, а потому, как нетрудно видеть,

$$2^{2n+1} \| \overline{a_{2n+1} a_{2n} \ldots a_1}, \quad 2^{2n+1} \cdot A = \overline{a_{2n+1} a_{2n} \ldots a_1},$$

где A — нечётное натуральное число. Цифра a_{2n+2} должна быть нечётной и удовлетворять условию

$$2^{2n+3} \| \overline{a_{2n+2} a_{2n+1} \ldots a_1}, \quad \overline{a_{2n+2} a_{2n+1} \ldots a_1} = 2^{2n+1} \left(a_{2n+2} \cdot 5^{2n+1} + A \right).$$

Выбираем эту цифру из множества $\{0;\ 1;\ \ldots;\ 7\}$ как решение сравнения $5a_{2n+2} + A \equiv 4 \pmod{8}$.

Лемма Б. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует полосатое число с чётным количеством цифр, кратное $2 \cdot 5^n$.

Доказательство. По индукции построим такую последовательность десятичных цифр $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $b_n \equiv n+1 \pmod{2}$, и $\overline{b_n \ldots b_1} \,\vdots\, 2 \cdot 5^n$ для всех натуральных n. Возьмём $b_1 = 0$, $b_2 = 5$.

Предположим, что цифры $b_1, \ldots, b_n$ уже определены, и пусть $5^m || \overline{b_n...b_1}$, $m \geq n$, $\overline{b_n...b_1} = B \cdot 5^m$. Следующая цифра b_{n+1} должна быть такой, что

$$b_{n+1} \equiv n+2\,(\mathrm{mod} 2) \text{ и } \overline{b_{n+1}b_n...b_1} = b_{n+1}10^n + \overline{b_n...b_1} = 5^n \left(b_{n+1}\cdot 2^n + 5^{m-n}\cdot B\right) \,\vdots\, 5^{n+1}.$$

Затем $b_{n+1} \in \{0;\,1;\,\ldots;\,9\}$ можно выбрать как решение системы сравнений

$$\begin{cases} b_{n+1} \equiv n+2\,(\mathrm{mod}\,2)\,, \\ b_{n+1}\cdot 2^n \equiv -B\,(\mathrm{mod}\,5) \end{cases}$$

(такая система, согласно *китайской теореме об остатках*, имеет решение).

Пусть теперь $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot k$, $(k;\,10) = 1$. Если n не делится без остатка на 20, то, согласно леммам 1 и 2, существует полосатое число M, состоящее из чётного количества цифр (обозначим это количество через $2m$) и кратное $2^\alpha \cdot 5^\beta$. Рассмотрим числа вида $C_j = 1 + 10^{2m} + \ldots + 10^{2m(j-1)}$, $j = \overline{1,\ k+1}$. По принципу Дирихле, некоторые два из них — C_p и C_q, $p < q$, — дают одинаковые остатки по $\mathrm{mod}\,k$, а потому $C_q - C_p = C_{q-p}\cdot 10^{2mp} \,\vdots\, k$. Итак, $C_{q-p} \vdots k$, и, как нетрудно видеть, число $C_{q-p}\cdot M$ является полосатым числом вида $\overline{MM...M}$ и делится нацело на n.

Задача 6 (*Всеукраинская математическая олимпиада*, 2001 г.). О натуральных числах a и n известно, что a^2+1 кратно n. Доказать, что существует такое натуральное число b, что b^2+1 делится нацело на $n\left(n^2+1\right)$.

Решение. Числа n и n^2+1 взаимно простые. Из *китайской теоремы об остатках* следует, что существует такое b, что $b \equiv a \pmod{n}$ и $b \equiv n \pmod{n^2+1}$. Тогда $b^2+1 \equiv a^2+1 \equiv 0 \pmod{n}$ и $b^2+1 \equiv n^2+1 \equiv 0 \pmod{n^2+1}$. Таким образом, b^2+1 делится нацело на n и на n^2+1.

Задача 7 (*Short List IMO*, 2005 г.). Пусть a и b — такие натуральные числа, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $\;b^n+n$ делится нацело на a^n+n. Доказать, что $a = b$.

Решение. Предположим, что $a \neq b$. Заметим, что тогда $b > a$ (для этого возьмем $n = 1$). Пусть $p > b > a$ — простое число. Тогда, по Малой теореме Ферма, $a^{p-1} \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$. По *китайской теоремой об остатках*, существует такое натуральное n, что $n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p-1)$ и $n \equiv -a\,(\mathrm{mod}\,p)$. Таким образом, $n = 1+(p-1)\,t$, $t \in \mathbb{N}$, и имеем, что $a^n = a^{1+(p-1)t} \equiv a\,(p)$. Отсюда следует, что $a^n + n \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$, $p \mid b^n+n$. Поскольку $b^n \equiv b\,(\mathrm{mod}\,p)$, то $b^n+n \equiv b-a\,(\mathrm{mod}\,p)$. Итак, $p|b-a$, что невозможно.

Замечание. Пусть $b > 1$, $a = 1$, $n = p-1$, $p > b$ — произвольное простое число. Тогда $b^n + n = b^{p-1}+p-1 \,\vdots\, p$, т. е. $b^n+n \,\vdots\, a^n+n$, хотя $b \neq a$.

Задача 8 [24]. Пусть a и b — произвольные натуральные числа, $\{an+b|\,n \in \mathbb{N}\}$ — бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия. Доказать, что для любого натурального m в этой прогрессии существует не менее m последовательных членов, каждое из которых — составное число.

Решение. Рассмотрим простые числа $q_1 < q_2 < \ldots < q_m$, не являющиеся делителями числа a. По *китайской теоремой об остатках*, существует натуральное число x, для которого $ax \equiv -b-ai\left(\mathrm{mod}\,q_i^2\right)$, $i = \overline{1,\,m}$. Поэтому для $i = \overline{1,\,m}$ $\;q_i^2 \mid a\,(x+i)+b$. Отсюда получаем, что числа $a\,(x+i)+b$, $i = \overline{1,\,m}$, удовлетворяют условию задачи.

Задача 9 [6]. Доказать, что для любого натурального числа n существует n последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат натурального числа, большего 1.

Решение. Пусть $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2$ — квадраты n различных простых чисел. По *китайской теоремой об остатках*, существует такое натуральное число m, которое при деления на p_1^2, $p_2^2, \ldots, p_n^2$ дает остатки $r_1 = p_1^2-1$, $r_2 = p_2^2-2, \ldots, r_n = p_n^2-n$ соответственно. Поэтому n последовательных натуральных чисел $m+1, m+2, \ldots, m+n$ будут делиться нацело на числа $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2$ соответственно.

Задача 10 [4, 11]. Генерал хочет для проведения парада выстроить солдат в несколько равных квадратных каре, но он не знает, сколько из них находится в госпитале, который может принять до m больных. Доказать, что генералу можно предоставить такое количество солдат, что он, независимо от того, сколько из них попадёт в госпиталь, сможет осуществить своё намерение. (Например, 9 солдат можно выстроить в виде каре 3×3, а если один из них заболеет, — в виде двух квадратов 2×2.)

Решение. Пусть $p_1^2,\ p_2^2,\ \ldots,\ p_{m+1}^2$ — квадраты $m+1$ различных простых чисел. Нужное количество солдат можно найти из системы сравнений $x \equiv i-1 \left(\operatorname{mod} p_i^2\right)$, $i = \overline{1,\ m+1}$.

Задача 11 [30]. Пусть $n \geq 2$. Для набора $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n\}$ из n разных натуральных чисел существует такое натуральное число b, что числа $b+a_1,\ b+a_2,\ \ldots,\ b+a_n$ являются попарно взаимно простыми, **тогда и только тогда**, когда для любого простого p среди остатков от деления всех чисел набора A на p по крайней мере одно из чисел $0,\ 1,\ \ldots,\ p-1$ встречалось не более одного раза. Доказать это утверждение.

Доказательство. Необходимость. Предположим противное: среди остатков от деления чисел набора A на p каждый из возможных остатков $0,\ 1,\ \ldots,\ p-1$ встречается хотя бы дважды. Возьмём произвольное натуральное b, и пусть $b \equiv r \pmod p$, где $r \in \{1;\ 2;\ \ldots,\ p\}$. Тогда для некоторых i и j, $1 \leq i < j \leq n$, $a_i \equiv a_j \equiv p-r \pmod p$. Таким образом, $a_i+b \equiv a_j+b \equiv 0 \pmod p$. Противоречие.

Достаточность. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $\Delta = a_n - a_1$. Рассмотрим все простые числа $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$, не превышающие Δ, и для каждого из них через r_k, $k = \overline{1,\ s}$, обозначим такой из остатков от деления чисел набора A на p_k, который встречается не более одного раза. По *китайской теореме об остатках*, существует такое натуральное b, что $b \equiv p_k - r_k \pmod{p_k}$, $k = \overline{1,\ s}$. Докажем, что числа $a_1+b,\ \ldots,\ a_n+b$ попарно взаимно простые. Если для какого-то m, $1 \leq m \leq s$, существуют такие i и j, $1 \leq i < j \leq n$, что $a_i + b \equiv a_j + b \equiv 0 \pmod{p_m}$, то $a_i + p_m - r_m \equiv a_j + p_m - r_m \equiv 0 \pmod{p_m}$. Отсюда $a_i \equiv a_j \equiv r_m \pmod{p_m}$, что невозможно. Предположим теперь, что для простого $p > \Delta$ существуют такие i и j, $1 \leq i < j \leq n$, что $a_i + b \equiv a_j + b \equiv 0 \pmod p$. Тогда $p \mid a_j - a_i$, что противоречит неравенству $p > \Delta \geq a_j - a_i$.

Замечание. Набор $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n\}$ из n различных попарно взаимно простых натуральных чисел удовлетворяет нужным условиям [20, с. 27]. Возьмём $P = \prod\limits_{1\leq i<j\leq n} |a_i - a_j|$, и тогда

для всех $n \in \mathbb{N}$ $\quad (a_i + nP;\ a_j + nP) = 1$, $1 \leq i < j \leq n$ (если для натурального $\delta > 1$ $\quad a_i + nP \vdots \delta$ и $a_j + nP \vdots \delta$, то $a_i - a_j \vdots \delta$, и поэтому $P \vdots \delta$; отсюда $a_i \vdots \delta$ и $a_j \vdots \delta$, что невозможно).

Задача 12 (*IMO*, 1989 г., см. также [24]). Доказать, что для любого натурального n существует n последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не является степенью натурального числа с показателем степени, большим 1.

Решение. Пусть $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — простые числа. По *китайской теореме об остатках*, существует такое натуральное число m, что $m \equiv p_k - k \left(\operatorname{mod} p_k^2\right)$, $k = \overline{1, n}$. Нетрудно убедиться, что числа $m+M+1,\ m+M+2,\ \ldots,\ m+M+n$, где $M = (p_1p_2 \cdot \ldots \cdot p_n)^2$, удовлетворяют условию задачи, так как для каждого k $\quad m + M + k \equiv 0 \pmod{p_k}$, но $m + M + k \equiv p_k \left(\operatorname{mod} p_k^2\right)$, т. е. $m + M + k \not\equiv 0 \left(\operatorname{mod} p_k^2\right)$.

Лемма 2. Пусть $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$ — натуральные числа, большие 1. Тогда существует такое натуральное число B, что каждое из чисел $Bb_1,\ Bb_2,\ \ldots,\ Bb_m$ является степенью некоторого натурального числа с натуральным показателем, большим 1.

Доказательство. Обозначим через P_i совокупность всех простых делителей числа b_i, $i = \overline{1, m}$. Пусть $\{p_1; p_2; \ldots; p_s\} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} P_i$. Тогда $b_i = p_1^{\alpha_{i1}} \cdot p_2^{\alpha_{i2}} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_{is}}$, $i = \overline{1, m}$ (здесь α_{ij} — целые неотрицательные числа, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, s}$). Возьмём m произвольных простых чисел $q_1 < q_2 < \ldots < q_m$, и для каждого $j = \overline{1, s}$ рассмотрим систему сравнений $x \equiv -\alpha_{ij} \pmod{q_i}$, $i = \overline{1, m}$. По *китайской теореме об остатках*, такая система имеет натуральное решение X_j. Тогда, как легко видеть, число $B = p_1^{X_1} \cdot p_2^{X_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{X_s}$ удовлетворяет условию, поскольку

$$Bb_i = p_1^{X_1+\alpha_{i1}} \cdot p_2^{X_2+\alpha_{i2}} \cdot \ldots \cdot p_s^{X_s+\alpha_{is}}, \quad q_i \mid X_j + \alpha_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Из доказанной леммы очевидным образом следует такой известный факт [24].

Задача 13. Доказать, что существует конечная арифметическая прогрессия произвольной длины, каждый член которой является степенью некоторого натурального числа с натуральным показателем, большим 1.

Рассмотрим еще две олимпиадные задачи, легко решаемые с помощью леммы 2.

Задача 14 (*Short List IMO*, 1992 р.). Пусть $n \geq 2$ — произвольное натуральное число. Доказать, что существует такое множество $M \subset \mathbb{N} \backslash \{1\}$ из n элементов, что каждый элемент множества M и сумма произвольного количества элементов этого множества является степенью некоторого натурального числа с натуральным показателем, большим 1.

Решение. Возьмём произвольные натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, большие 1, и рассмотрим также и всевозможные суммы чисел этой совокупности — всего $m = 2^n - 1$ чисел (среди которых могут быть и равные). Эти числа обозначим как $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Согласно лемме, существует такое натуральное число B, что каждое из чисел $Bb_1, Bb_2, \ldots, Bb_m$ будет степенью некоторого натурального числа с натуральным показателем, большим 1. Множество $M = \{Ba_1; Ba_2; \ldots; Ba_n\}$ удовлетворяет условию задачи.

Задача 15 (*Балканская математическая олимпиада*, 2000 г.). Пусть $n \geq 2$ — произвольное натуральное число. Доказать, что существует такое множество $M \subset \mathbb{N} \backslash \{1\}$ из n элементов, что каждый элемент множества M и среднее арифметическое любых нескольких элементов этого множества является степенью некоторого натурального числа с натуральным показателем, большим 1.

Решение. Пусть $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ — произвольные натуральные числа, большие 1. Возьмем $a_i = n! c_i$, $i = \overline{1, n}$, и применим рассуждение из предыдущей задачи.

Задача 16 (*П. Эрдёш*) [24]. Доказать, что существует бесконечно много нечётных натуральных k, для каждого из которых числа $2^n + k$ являются составными для всех $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Известно, что $2^{32} + 1 = 641 \cdot p$, где $p > 2^{16} + 1$ — простое число. Поскольку $\left(p;\ 2^{32} - 1\right) = 1$, то, по *китайской теоремой об остатках*, существует бесконечно много натуральных чисел $k > p$, для которых одновременно имеют место сравнения

$$k \equiv 1 \pmod 2, \quad k \equiv -1 \pmod p, \quad k \equiv 1 \left(\operatorname{mod} 641 \cdot \left(2^{32} - 1\right)\right).$$

Множество всех таких k обозначим через K.

Докажем сначала, что для всех $k \in K$ каждое из чисел $2^q k + 1$, $q \in \mathbb{N}$, делится нацело по крайней мере на одно из шести простых чисел $2^{2^0}+1$, $2^{2^1}+1$, $2^{2^2}+1$, $2^{2^3}+1$, $2^{2^4}+1$, p. Представим число q в виде $q = 2^m (2t + 1)$, где $m \geq 0$, $t \geq 0$ — целые. Поскольку $k \equiv 1 \left(\operatorname{mod} \left(2^{32} - 1\right)\right)$, то

$$2^q k + 1 \equiv 2^{2^m(2t+1)} + 1 \left(\operatorname{mod} \left(2^{32} - 1\right)\right).$$

Для $m = \overline{0, 4}$ $\quad 2^{2^m} + 1 \mid 2^{32} - 1$ и $2^{2^m} + 1 \mid 2^{2^m(2t+1)} + 1$, а потому из последнего сравнения следует, что $2^{2^m} + 1 \mid 2^q k + 1$. Поскольку $2^q k + 1 > k > p > 2^{2^4} + 1$, то $2^{2^m(2t+1)}k + 1$ для $m = \overline{0, 4}$ — число составное. Теперь возьмём $m \geq 6$. Тогда $q = 2^6 u$, $u \in \mathbb{N}$, и $2^q k + 1 \equiv 2^{2^6 u} \cdot (-1) + 1 \pmod p$. Поскольку $p \left| 2^{2^5} + 1\right.$, то $p \left| 2^{2^6} - 1\right.$, и потому $p \mid 2^q k + 1$, причём $2^q k + 1 > k > p$, и $2^q k + 1$ — составное число.

Докажем теперь, что все $k \in K$ удовлетворяют условию задачи, т. е. $2^n + k$ является составным числом для любых $k \in K$ и $n \in \mathbb{N}$. Учитывая, что $k > p$, достаточно показать, что $2^n + k$ кратно хотя бы одному из шести простых чисел

$$2^{2^0} + 1 < 2^{2^1} + 1 < 2^{2^2} + 1 < 2^{2^3} + 1 < 2^{2^4} + 1 < p. \qquad (*)$$

Пусть $S = p \cdot \prod\limits_{i=0}^{4} \left(2^{2^i} + 1\right)$. По теореме Эйлера, $2^{\varphi(S)} \equiv 1 \pmod S$, а потому, по доказанному выше, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in K$ существует такое число γ из набора $(*)$, что $2^{n(\varphi(S)-1)}k +$

$1 \equiv 0 \pmod{\gamma}$, $2^{n\varphi(S)}k + 2^n \equiv 0 \pmod{\gamma}$. Поскольку $2^{\varphi(S)} \equiv 1 \pmod{S}$, то $2^{\varphi(S)} \equiv 1 \pmod{\gamma}$, $2^{n\varphi(S)} \equiv 1 \pmod{\gamma}$, то $2^n + k \equiv 0 \pmod{\gamma}$, причём $2^n + k > k > \gamma$.

Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $m = m_1 \cdot \ldots \cdot m_s$, причем $m_i > 1$, $i = \overline{1, s}$, $(m_i; m_j) = 1$, $1 \le i < j \le s$. Тогда, очевидно, сравнение $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ эквивалентно системе сравнений $f(x) \equiv 0 \pmod{m_i}$, $i = \overline{1, s}$. Если $x \equiv x_i \pmod{m_i}$ — решение сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{m_i}$, $i = \overline{1, s}$, то, согласно *китайской теореме об остатках*, система линейных сравнений $x \equiv x_i \pmod{m_i}$, $i = \overline{1, s}$, имеет единственное решение (класс вычетов по $\bmod m$), удовлетворяющее сравнению $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$. Если N_i, $i = \overline{1, s}$, — количество решений соответствующих сравнений этой системы, то количество решений сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ равняется $N_1 \cdot \ldots \cdot N_s$.

Задача 17 (*Short List IMO*, 1998 г.). Найти все $n \in \mathbb{N}$, для которых существуют такие натуральные m, что $m^2 + 9$ делится нацело на $2^n - 1$.

Решение. Пусть $2^n - 1 \mid m^2 + 9$ для некоторых натуральных m и n. Докажем, что $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Предположим противное и представим число n в виде $n = 2^k s$, где $s > 1$ — нечётное. Тогда $m^2 \equiv -9 \pmod{2^s - 1}$. Заметим, что $2^s - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ для нечётного s. Вычислим символ Якоби-Лежандра [5, 9]:

$$\left(\frac{-9}{2^s - 1}\right) = \left(\frac{-1}{2^s - 1}\right) \cdot \left(\frac{3^2}{2^s - 1}\right) = \left(\frac{-1}{2^s - 1}\right) \cdot 1 = (-1)^{(2^s - 1 - 1)/2} = (-1)^{2^{s-1} - 1} = -1.$$

Однако, как известно, если для нечётного m сравнение $x^2 \equiv a \pmod{m}$ имеет решения, то символ Якоби $\left(\frac{a}{m}\right)$ равен 1. Напомним, что, в отличие от символа Лежандра для квадратичных сравнений по *простому* нечётному модулю [5, 9], символ Якоби-Лежандра может быть равным 1 и в случае, когда соответствующее сравнение не имеет решений: нетрудно убедиться, что сравнение $x^2 \equiv 2 \pmod{15}$ не имеет решений, хотя, по свойствам символа Якоби-Лежандра,

$$\left(\frac{2}{15}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = (-1)^{(3^2 - 1)/8} \cdot (-1)^{(5^2 - 1)/8} = 1.$$

Заметим, что противоречие можно получить и стандартными рассуждениями с помощью Малой теоремы Ферма. Поскольку $2^s - 1 \equiv -1 \pmod{4}$, то число $2^s - 1$ имеет простой делитель $p \equiv -1 \pmod{4}$. Если $p > 3$, то $(m; p) = 1$, и $1 \overset{\bmod p}{\equiv} m^{p-1} = \left(m^2\right)^{(p-1)/2} \overset{\bmod p}{\equiv} (-9)^{(p-1)/2} = (-1)^{(p-1)/2} \cdot 3^{p-1} = -1 \cdot 3^{p-1} \overset{\bmod p}{\equiv} -1$, что невозможно. Остается учесть то, что для нечётных натуральных s $\quad 2^s \equiv -1 \pmod{3}$.

Возьмём $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $2^n - 1 = \prod\limits_{p=0}^{k-1} \left(2^{2^p} + 1\right)$. Все множители в этом произведении попарно взаимно простые. Действительно, если числа $2^{2^Q} + 1$ и $2^{2^R} + 1$, $Q > R$, кратны простому числу $\delta > 2$, то $2^{2^R}\left(2^{2^Q - 2^R} - 1\right) \vdots \delta$, $2^{2^R\left(2^{Q-R} - 1\right)} - 1 \vdots \delta$, что невозможно, поскольку, по предположению, $2^{2^R} \equiv -1 \pmod{\delta}$, и потому $2^{2^R\left(2^{Q-R} - 1\right)} \equiv -1 \pmod{\delta}$.

Покажем теперь, что найдётся такое натуральное x, что $x^2 + 9 \vdots 2^{2^p} + 1$ для всех $p = \overline{0, k-1}$. По *китайской теореме об остатках*, существует такое $y \in \mathbb{N}$, что $y \equiv 2^{2^{p-1}} \left(\bmod\ 2^{2^p} + 1\right)$, $p = \overline{1, k-1}$. Тогда для $p = \overline{1, k-1}$ $\quad y^2 \equiv 2^{2^p} \left(\bmod\ 2^{2^p} + 1\right)$, $y^2 + 1 \equiv 0 \left(\bmod\ 2^{2^p} + 1\right)$. Отсюда получаем, что $(3y)^2 + 9 \equiv 0 \pmod{2^n - 1}$.

Замечание. Числа вида $F_k = 2^{2^k} + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \ge 0$, называют *числами Ферма*. Легко заметить, что имеет место равенство $F_{k+1} = F_0 \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_k + 2$, из которого следует, в частности, что $(F_i; F_j) = 1$, $i \ne j$.

Задача 18 [31]. Из какого наибольшего количества членов может состоять арифметическая прогрессия натуральных чисел с разностью 12, если известно, что произведение всех её членов является делителем некоторого числа вида $n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$?

Решение. Нетрудно видеть, что такая прогрессия может состоять не более, чем из 6 членов. Действительно, ни один из её членов не может быть кратен 7, поскольку $n^2 \not\equiv -1\,(\mathrm{mod}\,7)$. А потому из 7 последовательных членов прогрессии можно было бы выбрать два с разностью, кратной 7, что невозможно, поскольку такая разность должна была бы иметь вид $12k$, $1 \le k \le 6$. Докажем теперь, что 6-членная прогрессия $5,\ 17,\ 29,\ 41,\ 53,\ 65$ удовлетворяет условию задачи. Для этого покажем, что сравнение

$$x^2 \equiv -1\,(\mathrm{mod}\ 25\cdot 17\cdot 29\cdot 41\cdot 53\cdot 13) \qquad (*)$$

имеет решения. Сравнение $x^2 \equiv -1\,(\mathrm{mod}\,25)$ имеет решения $(7^2+1 \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,25))$. Каждое из простых чисел 13, 17, 29, 41, 53 дает остаток 1 по $\mathrm{mod}\,4$, а потому, как известно [1, 5, 8-10, 25], число -1 является *квадратичным вычетом* по этим модулям. Пусть r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 — решения сравнения $x^2 \equiv -1$ по модулям $m_1 = 25$, $m_2 = 17$, $m_3 = 29$, $m_4 = 41$, $m_5 = 53$, $m_6 = 13$ соответственно. Решение системы сравнений $x \equiv r_i\,(\mathrm{mod}\,m_i)$, $i = \overline{1,6}$, и будет нужным решением сравнения $(*)$.

Замечание. Для сравнения $x^2 \equiv -1\,(\mathrm{mod}\,25)$ решение было легко найти непосредственно, однако целесообразно предложить читателям — как полезное упражнение — самостоятельно доказать методом математической индукции такое несложное утверждение.

Лемма 3. Пусть $p > 2$ — простое число, и $(a;p) = 1$. Тогда из разрешимости сравнения $x^2 \equiv a\,(\mathrm{mod}\,p)$ следует разрешимость сравнения $x^2 \equiv a\left(\mathrm{mod}\,p^k\right)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, т. е. если a — квадратичный вычет по $\mathrm{mod}p$, то все сравнения $x^2 \equiv a\left(\mathrm{mod}\,p^k\right)$, $k \in \mathbb{N}$, имеют по два решения.

Указание. Если $x \equiv \beta\left(\mathrm{mod}\,p^k\right)$ — решение сравнения $x^2 \equiv a\left(\mathrm{mod}\,p^k\right)$, $t \equiv t_0\,(\mathrm{mod}\,p)$ — решение сравнения $2\beta t + \frac{\beta^2-a}{p^k} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$, то $x \equiv \beta + p^k t_0\left(\mathrm{mod}\,p^{k+1}\right)$ — решение сравнения $x^2 \equiv a\left(\mathrm{mod}\,p^{k+1}\right)$.

Задача 19 (*Китайская математическая олимпмада*, 2008 г.). Пусть $n > 1$ — заданное натуральное число, и бесконечное множество $A \subset \mathbb{N}$ удовлетворяет такому условию: для каждого простого числа p, не являющегося делителем n, среди элементов множества A существует бесконечно много чисел, не кратных p. Доказать, что для любого натурального $m > 1$, взаимно простого с n, можно выбрать конечное подмножество множества A, сумма элементов которого кратна n и имеет остаток 1 при делении на m.

Решение. Пусть $m = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа m. Обозначим через A_1 бесконечное подмножество множества A, все элементы которого взаимно просты с p_1. Найдётся бесконечно много элементов множества A_1, имеющих одинаковый остаток (обозначим его a) по mod mn. Очевидно, что $a \not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p_1)$ (если $x - a \,\vdots\, mn$, $a \,\vdots\, p_1$, то $x \,\vdots\, p_1$). Пусть $A_2 = \{x \in A_1|\ x \equiv a\,(\mathrm{mod}\ mn)\}$. По *китайской теореме об остатках*, существует натуральное q, удовлетворяющее условию $q \equiv \widetilde{a}\,(\mathrm{mod}\,p_1^{\alpha_1})$, $q \equiv 0\left(\mathrm{mod}\ mnp_1^{-\alpha_1}\right)$, где $\widetilde{a}$ — такое натуральное число, что $a\widetilde{a} \equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p_1^{\alpha_1})$. Возьмём во множестве A_2 q элементов, совокупность которых обозначим B_1. Тогда, как нетрудно видеть, $\sum\limits_{u\in B_1} u \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p_1^{\alpha_1})$, $\sum\limits_{u\in B_1} u \equiv 0\left(\mathrm{mod}\ mnp_1^{-\alpha_1}\right)$. Аналогичную процедуру реализуем последовательно для $p_2, p_3, \ldots, p_k$, причём очередное множество B_i, $i = \overline{2,k}$, можно выбирать так, чтобы $B_i \subset A\backslash \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} B_j$. Множество $B = \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$, как легко убедиться, удовлетворяет нужным условиям.

Напомним важное теоретико-числовое понятие, использующееся при решении многих задач, в том числе и "олимпиадных".

Пусть $a > 1$ и $m > 1$ — *взаимно простые* натуральные числа. *Показателем числа* a по $\mathrm{mod}\,m$ называется число $P_m(a) = \min\left\{k \in \mathbb{N}\,\middle|\,a^k \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,m)\right\}$ (поскольку $a^{\varphi(m)} \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,m)$, то такой показатель всегда существует).

Понятно, что $P_m(a) \le \varphi(m)$, где φ — функция Эйлера.

Лемма 4. Если $a^n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,m)$, то $P_m(a) \mid n$ (в частности, $P_m(a) \mid \varphi(m)$).

Доказательство. Предположим, что $n = P_m(a)\,t + r$, $0 < r < P_m(a)$. Тогда $a^r \equiv 1 \pmod m$, что невозможно.

Лемма 5. Числа a^1, a^2, ..., $a^{P_m(a)}$ дают попарно различные остатки по $\bmod\, m$.

Доказательство. Если $a^i \equiv a^j \pmod m$, $1 \le i < j \le P_m(a)$, то $a^i\left(a^{j-i} - 1\right) \equiv 0 \pmod m$, и потому $a^{j-i} \equiv 1 \pmod m$, $0 < j - i < P_m(a)$. Получили противоречие.

Если $m = q$ — простое число, то классы вычетов (по $\bmod\, q$) $\overline{a^1}$, $\overline{a^2}$, ..., $\overline{a^{P_q(a)}}$ дают все решения сравнения $x^{P_q(a)} \equiv 1 \pmod q$. Эти классы вычетов удовлетворяют данному сравнению. Остаётся воспользоваться известным фактом (теорема Лагранжа): если q — простое число, и $f(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен степени k с целыми коэффициентами, причём $(a_k; q) = 1$, то сравнение $f(x) \equiv 0 \pmod q$ имеет не более k решений (предлагаем читателям доказать теорему самостоятельно; см., например, [5]). Отметим, что для составных модулей теорема Лагранжа не имеет места: например, сравнение $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod 6$ имеет четыре решения: $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$.

Если $P_m(a) = \varphi(m)$, то число a называется *первообразным корнем* по $\bmod\, m$, или же *первообразным корнем* сравнения $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

Первообразные корни существуют не для всех натуральных $m > 1$. Существование первообразных корней по произвольному простому модулю впервые полностью обосновал Лежандр [10, с. 60]. Формулировка этого факта встречается в работах немецкого математика Ламберта. Попытки доказать данную теорему предпринимал и Леонард Эйлер. Позднее Гаусс предложил несколько доказательств существования первообразных корней по простым модулям.

Теорема 7. Если p — простое число, то сравнение $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ имеет $\varphi(p-1)$ первообразных корней, т. е. существует ровно $\varphi(p-1)$ таких классов вычетов x по $\bmod p$, что $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, но $x^u \not\equiv 1 \pmod p$ для всех натуральных $u < p - 1$.

Для читателей, знакомых с основами теории групп [2, 16, 23], остановимся здесь на чрезвычайно полезном и интересном обсуждении и доказательстве этой теоремы с теоретико-групповой точки зрения.

Для кольца $\mathbb{Z}_m$ всех классов вычетов по $\bmod\ m$ рассматривается так называемая *мультипликативная* (т. е. относительно операции умножения по $\bmod m$) группа $\Re(m)$ классов, взаимно простых с m (для ненулевого класса a обратный элемент (класс) a^{-1} определяется как единственное решение сравнения $ax \equiv 1 \pmod m$). Такая группа состоит, как видим, из $\varphi(m)$ элементов (количество элементов группы называется её *порядком*). Если $m = p$ — простое число, то $\mathbb{Z}_p$, как известно, является полем, и его мультипликативная группа $\Re(p)$ образована всеми ненулевыми классами $\overline{1}_p$, ..., $\overline{p-1}_p$ и часто обозначается символом $\mathbb{Z}_p^*$ (в теории полей мультипликативная группа всех ненулевых элементов поля K обычно обозначается K^*).

Если в конечной группе G (групповую операцию удобно обозначать так же, как и “обычное” умножение; через e часто обозначают *нейтральный* элемент относительно такого “умножения” (т. е. “аналог” единицы), полагается, что $a^0 = e$, и имеют место основные свойства возведения в степень, в том числе — с целым отрицательным показателем; в группе $\mathbb{Z}_p^*$ нейтральным элементом будет класс вычетов $\overline{1}$) есть такой элемент a, что для любого $g \in G$ существует такое целое $m \ge 0$, что $g = a^m$, то принято говорить, что группа G *порождается* своим элементом a. Такие группы называются *циклическими*, а элемент, порождающий циклическую группу, называется *образующим* (кстати, в теории групп рассматриваются также и бесконечные циклические группы). Понятно, что для каждого элемента g в конечной группе G можно определить $\rho_G(g) = \min\{m \in \mathbb{N}\,|g^m = e\}$ — порядок этого элемента в группе.

Нетрудно доказать, что порядок циклической группы совпадает с порядком её образующего элемента. Если циклическая группа G порождается образующим элементом g порядка n ($n = \rho_G(g)$), то $G = \left\{e;\, g^1;\, \ldots;\, g^{n-1}\right\}$.

Предлагаем читателям самостоятельно доказать такие утверждения.

а) Если $\rho_G(g) = n$, то для $m \in \mathbb{N}$ $\quad g^m = e$ тогда и только тогда, когда $n|m$.

б) Если $\rho_G(g) = n$, $m \in \mathbb{N}$, то $(m; n) \cdot \rho_G(g^m) = n$.

в) Если $G = \{e; g^1; \ ...\ ; g^{n-1}\}$ — циклическая группа порядка n, то g^k, $1 \le k \le n-1$, будет её образующим элементом тогда и только тогда, когда $(k; n) = 1$ (так, циклическая группа порядка n имеет $\varphi(n)$ образующих элементов).

г) Любая *подгруппа* циклической группы также будет циклической.

д) Если $G = \{e; g^1; \ ...\ ; g^{n-1}\}$ — циклическая группа порядка n с образующим элементом g, то все её подгруппы исчерпываются подгруппами вида $H_d = \left\{ \left(g^d\right)^j \middle| \ 1 \le j \le \frac{n}{d} \right\}$, где d — произвольный натуральный делитель числа n, причём если d_1 и d_2 — различные делители, то $H_{d_1} \ne H_{d_2}$.

Напомним, что для конечных групп имеет место исключительно важная теорема Лагранжа: порядок любой подгруппы данной группы G является делителем порядка G (доказательство теоремы Лагранжа несложное; см., например, [2]). В частности, из этой теоремы сразу следуют такие факты (докажите их самостоятельно):

а) порядок любого элемента в группе является делителем порядка группы;

б) группа простого порядка является циклической и порождается любым своим элементом, отличным от нейтрального.

В теории чисел часто используется (в том числе — как элемент техники "суммирования по делителям") функция Мёбиуса $\mu : \mathbb{N} \to \{-1; 0; 1\}$, которая определяется так: $\mu(1) = 1$; $\mu(n) = (-1)^s$, если каноническое разложение числа $n > 1$ имеет вид $n = p_1 \cdot ... \cdot p_s$, $p_1 < ... < p_s$ — простые числа; $\mu(n) = 0$ для остальных натуральных n.

В качестве полезного упражнения докажите такие свойства (доказательство можно найти во многих учебниках по теории чисел, в том числе и в [5]):

а) $\sum\limits_{d|n} \mu(d) = 0$ для любого натурального $n > 1$;

б) если для произвольной функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ через $F(n)$ обозначить сумму $\sum\limits_{d|n} f(d)$, то

$$\sum_{d|n} F\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) = f(n)$$

(*правило обращения*).

Итак, вопрос о существовании первообразных корней по модулю m сводится к исследованию цикличности группы $\Re(m)$ (т. е. к вопросу наличия в этой группе элементов порядка $\varphi(m)$).

Докажем, что в мультпликативной группе $\mathbb{Z}_p^*$ существуют элементы порядка $p-1$, причем таких элементов будет $\varphi(p-1)$.

Случай $p = 2$ тривиален. Пусть $p > 2$. Сначала заметим, что при условии $d|(p-1)$ (т. е. $p-1 = d \cdot \delta$, $d \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{N}$) сравнение $x^d \equiv 1 \pmod{p}$ имеет ровно d решений. Действительно, существует такой многочлен $h(x)$ с целыми коэффициентами, что $\deg h(x) = (p-1) - d$ и $x^{p-1} - 1 = \left(x^d\right)^\delta - 1 = \left(x^d - 1\right) h(x)$. Если сравнение $x^d \equiv 1 \pmod{p}$ имеет менее d решений, то количество решений сравнения $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ будет меньше $d + ((p-1) - d) = p - 1$, что невозможно, поскольку последнее сравнение имеет, согласно Малой теореме Ферма, ровно $p-1$ решений.

Используя определение, легко проверить, что d классов вычетов, являющихся решениями сравнения $x^d \equiv 1 \pmod{p}$, образуют группу — подгруппу $\mathbb{Z}_p^*(d)$ порядка d в группе $\mathbb{Z}_p^*$. Обозначим через $\psi(k)$ количество элементов порядка k в группе $\mathbb{Z}_p^*$. Тогда, поскольку порядок каждого элемента в $\mathbb{Z}_p^*(d)$ является делителем числа d, получаем равенство $\sum\limits_{k|d} \psi(k) = d$. Отсюда, по правилу обращения, $\psi(d) = \sum\limits_{k|d} \mu(k) \frac{d}{k}$. Применим правило обращения для тождества Гаусса $n = \sum\limits_{d|n} \varphi(d)$ [5, 9] и получим равенство $\varphi(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$. Таким образом, $\psi(d) = \varphi(d)$ для любого $d|(p-1)$. В частности, $\psi(p-1) = \varphi(p-1) \ge 2$, чем и завершается доказательство теоремы 7.

Замечание. Незначительная модификация такого доказательства позволяет аналогичными рассуждениями получить важное обобщение этой теоремы: мультипликативная группа K^* любого конечного поля K является циклической. Предлагаем читателям сделать это самостоятельно.

Эйлер не владел доказательством цикличности группы $\mathbb{Z}_p^*$, но, основываясь на таком предположении, красиво доказал, что для любого простого $p \equiv 1 \,(\bmod\, 8)$ сравнение $x^2 \equiv 2 \,(\bmod\, p)$ имеет решение. Пусть a — первообразный корень по $\bmod\, p$, тогда $b = a^{(p-1)/8}$ имеет в группе $\mathbb{Z}_p^*$ порядок $\frac{p-1}{(p-1;(p-1)/8)} = 8$. Так, $b^8 - 1 = \left(b^4 - 1\right)\left(b^4 + 1\right) \equiv 0 \,(\bmod\, p)$, и, поскольку $b^4 \not\equiv 1 \,(\bmod\, p)$, получаем в поле $\mathbb{Z}_p$: $b^4 = -1$, $b^2 + b^{-2} = 0$, $\left(b + b^{-1}\right)^2 = b^2 + b^{-2} + 2 = 2$. Таким образом, класс вычетов $\overline{2}$ в поле $\mathbb{Z}_p$ является квадратом, т. е. квадратичным вычетом.

Читатели могут с использованием этой идеи самостоятельно доказать следующий результат (см. [1, с. 92]).

Лемма 6. Квадратичный характер числа 2 по простому модулю p определяется таким соотношением для символа Лежандра: $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\left(p^2-1\right)/8}$.

По [1] читатели могут познакомиться с использующими идею Эйлера доказательствами квадратичного закона взаимности $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}\left(\frac{q}{p}\right)$ (p и q — непарные простые) и различных его обобщений.

Гаусс в работе “Disquisitiones Arithmeticae” получил общий результат, которым описываются все модули, для которых существуют первообразные корни (а затем и все мультипликативные группы $\Re\,(m)$, являющиеся циклическими).

Теорема 8 (Гаусс). Сравнение $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \,(\bmod\, m)$ имеет первообразные корни только для $m = 2$, $m = 4$ и для всех m вида p^α и $2p^\alpha$, где $p > 2$ — простое число, α — произвольное натуральное число (т. е. для других m первообразных корней не существует). Для каждого из таких m существует ровно $\varphi\left(\varphi\left(m\right)\right)$ первообразных корней.

С доказательством этой замечательной теоремы элементарной теории чисел можно познакомиться, например, по книгам [1, 5].

Предлагаем читателям и самостоятельно получить этот результат, доказав такие леммы.

Лемма 7. Показатель нечётного числа a по $\bmod\, 2^\alpha$, $\alpha \geq 3$, не превышает $\frac{1}{2}\varphi\left(2^\alpha\right) = 2^{\alpha-2}$.

Указание. Воспользоваться методом математической индукции.

Лемма 8. Если $m > 4$ не является числом вида p^α, $2p^\alpha$, где p — нечётное простое число, $\alpha \in \mathbb{N}$, то для любого взаимно простого с m числа $a > 1$ имеет место сравнение $a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv 1 \,(\bmod\, m)$ (и это будет означать, в частности, что по $\bmod\, m$ первообразных корней нет, и соответствующая группа $\Re\,(m)$ не является циклической).

Лемма 9. Пусть a— первообразный корень по простому нечетному модулю p. Тогда существуют такие натуральные числа t и u, $u \not\equiv 0 \,(\bmod\, p)$, что $(a + pt)^{p-1} = 1 + pu$.

Лемма 10. Число $a + pt$ из предыдущей леммы является первообразным корнем по $\bmod\, p^\alpha$ для каждого натурального $\alpha \geq 2$.

Указание. Для любого целого $k \geq 0$ число $(a + pt)^{p^k(p-1)} - 1$ делится нацело на p^{k+1}, но не делится на p^{k+2}.

Лемма 11. Пусть a— первообразный корень по $\bmod p^\alpha$, где p — нечётное простое число, $\alpha \in \mathbb{N}$. Тогда то из чисел a или $a + p^\alpha$, которое является нечётным, будет первообразным корнем также и по $\bmod\, 2p^\alpha$.

Задача 20 (*Short List IMO*, 2004 г.). Для натурального $n > 1$ обозначим через P_n произведение всех таких натуральных $x < n$, что $x^2 \equiv 1 \,(\bmod\, n)$. Для каждого $n > 1$ найти остаток от деления числа P_n на n.

Решение. Для $n = 2$ $\quad P_n = 1$. Пусть $X_n = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, x \leq n - 1,\ x^2 \equiv 1 \,(\bmod\, n)\right\}$. Тогда $(x;\ n) = 1$ для каждого $x \in X_n$. Поскольку $\{1;\ n - 1\} \subset X_n$, то будем сначала полагать, что $|X_n| \geq 3$. Возьмём $x_1 \in X_n \setminus \{1\}$, и обозначим $A_1 = \{1;\ x_1\}$. Далее, пусть $x_2 \in X_n \setminus A_1$, $A_2 = A_1 \cup \{x_2;\ x_1x_2\}$.

Здесь и далее произведения рассматриваются по $\bmod n$, т. е. символом x_1x_2 обозначается элемент множества X_n, сравнимый по $\bmod n$ с "обычным" произведением чисел x_1 и x_2 (такой элемент, очевидно, во множестве X_n существует). Множество A_2 содержит 4 элемента и является замкнутым относительно умножения по $\bmod n$. Предположим, что для некоторого $k > 1$ мы построили замкнутое относительно умножения по $\bmod m$ 2^k-элементное множество $A_k \subset X_n$. Если $A_k \neq X_n$, то выберем $x_{k+1} \in X_n \backslash A_k$ и положим $A_{k+1} = A_k \cup \{xx_{k+1} | x \in A_k\}$. Заметим, что $A_k \cap \{xx_{k+1} | x \in A_k\} = \emptyset$, и потому $|A_{k+1}| = 2^{k+1}$. Поскольку множество X_n конечное, то для некоторого натурального m $X_n = A_m$. Поскольку, как нетрудно доказать по индукции, $\prod\limits_{x \in A_k} x \equiv 1 \,(\bmod n)$ для всех $k \geq 2$, то $P_n \equiv 1 \,(\bmod n)$.

Выясним теперь, для каких n $|X_n| \geq 3$. Пусть $n = ab$, где $a > 2$ и $b > 2$ — взаимно простые натуральные числа. По *китайской теореме об остатках*, существуют такие натуральные $x \in [1;\ n-1]$ и $y \in [1;\ n-1]$, что $x \equiv 1 \,(\bmod a)$, $x \equiv -1 \,(\bmod b)$, $y \equiv -1 \,(\bmod a)$, $y \equiv 1 \,(\bmod b)$. Поскольку $x^2 \equiv 1 \,(\bmod n)$, $y^2 \equiv 1 \,(\bmod n)$, то $x \in X_n$ и $y \in X_n$. Таким образом, множество X_n будет содержать не менее трёх элементов (очевидно, что из чисел 1, x и y никакие два не являются сравнимыми по $\bmod n$). Аналогично, если $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N} \backslash \{1;\ 2\}$, то $\left\{1;\ 2^{k-1} - 1;\ 2^{k-1} + 1;\ 2^k - 1\right\} \subseteq X_n$. Для $n = 4$ $|X_n| = 2$. Если $n = \varepsilon p^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{1;\ 2\}$, $p > 2$ — простое число, то из сравнения $x^2 \equiv 1 \,(\bmod n)$ следует, что или $x \equiv 1 \,(\bmod n)$, или $x \equiv -1 \,(\bmod n)$.

Итак, для $n = 2$, $n = 4$, $n = p^k$, $n = 2p^k$, где $k \in \mathbb{N}$, $p > 2$ — простое число, $X_n = \{1;\ n-1\}$ и $P_n = n - 1$. Для остальных натуральных $n > 1$ $P_n = 1$.

Как видим, ответ в данной задаче зависит от того, существуют ли по $\bmod n$ первообразные корни.

Содержание разобранной задачи непосредственно связано с общей теорией n-степенных вычетов — решений двучленных сравнений $x^n \equiv a \,(\bmod m)$, $(a; m) = 1$.

Мы не ставим целью в данной публикации подробно осветить этот раздел теории чисел. Остановимся только на некоторых вопросах. Но тем, кто стремится достичь высоких результатов на математических соревнованиях, рекомендуем изучение теории n-степенных вычетов по систематическим учебникам и сборникам задач [5, 9, 12, 18].

Докажем такой факт.

Теорема 9. Пусть по $\bmod m$ существуют первообразные корни, а натуральные числа a и m взаимно простые. Сравнение $x^n \equiv a \,(\bmod m)$ разрешимо тогда и только тогда, когда $a^{\varphi(m)/d} \equiv 1 \,(\bmod m)$, где $d = (n;\ \varphi(m))$. Если это сравнение имеет решения, то их количество равняется d.

Доказательство. Пусть g — первообразный корень по $\bmod m$, $g^b \equiv a \,(\bmod m)$ (такое натуральное b называется *индексом* числа (класса вычетов) a по основанию g и обозначается $ind_g a$ (теоретико-числовой аналог логарифма); нетрудно убедиться в том, что отображение $a \mapsto ind_g a$ порождает изоморфизм мультипликативной группы $\Re(m)$ кольца $\mathbb{Z}_m$ и аддитивной группы всех классов вычетов по $\bmod \varphi(m)$; с теорией индексов и техникой их использования для исследования степенных вычетов можно познакомиться по учебнику [5]). Если сделать замену $x \equiv g^y \,(\bmod m)$, то получим, что

$$x^n \equiv a \,(\bmod m) \Leftrightarrow g^{ny} \equiv g^b \,(\bmod m) \Leftrightarrow ny \equiv b \,(\bmod \varphi(m)).$$

Последнее сравнение, как известно, имеет решения тогда и только тогда, когда $d|b$, причём решений будет именно d. Если $d|b$, то $a^{\varphi(m)/d} \overset{\bmod m}{\equiv} g^{b\varphi(m)/d} \overset{\bmod p}{\equiv} 1$. Если же $a^{\varphi(m)/d} \equiv 1 \,(\bmod m)$, то $g^{b\varphi(m)/d} \equiv 1 \,(\bmod m)$, а потому $b\varphi(m)/d$ кратно $\varphi(m)$, т. е. $d|b$.

Из этой теоремы следует, в частности, что если по $\bmod m$, $m > 2$, существуют первообразные корни, то сравнение $x^2 \equiv 1 \,(\bmod m)$ имеет только два решения (классы вычетов $\overline{1}$ и $\overline{m-1}$ по $\bmod m$). Действительно, для $m > 2$ $\varphi(m)$ — чётное число, а потому $d = (2; \varphi(m)) = 2$. Это также следует из леммы 3 и правила подсчёта количества решений сравнения $f(x) \equiv 0 \,(\bmod m)$, где $m = m_1 \cdot \ldots \cdot m_s$, $m_i > 1$, $i = \overline{1,s}$, $(m_i; m_j) = 1$, $1 \leq i < j \leq s$.

Для $m = 2^k$ результат имеет другой вид.

Для $k = 1$ и нечётного a сравнение $x^2 \equiv a \left(\bmod 2^k\right)$ имеет одно решение, для $k = 2$ и $a \equiv 1 \,(\bmod 4)$ сравнение $x^2 \equiv a \left(\bmod 2^k\right)$ имеет два решения.

Задача 21. Доказать, что для нечётного a сравнение $x^2 \equiv a \left(\bmod 2^k\right)$, $k \geq 3$, имеет решения тогда и только тогда, когда $a \equiv 1 \,(\bmod 8)$, причём решений будет ровно четыре.

Решение. Необходимость условия $a \equiv 1 \,(\bmod 8)$ очевидна. Пусть выполняется условие $a \equiv 1 \,(\bmod 8)$. Сравнение $x^2 \equiv a \left(\bmod 2^3\right)$ имеет четыре решения: $\pm\overline{1}$, $\pm\overline{3}$ (все нечётные целые x ему удовлетворяют). Все нечётные x можно представить в виде $x = \pm\left(1 + 2^2 u\right)$, где u "пробегает" всё множество $\mathbb{Z}$. Среди них легко выделить все такие x, для которых $x^2 \equiv a \left(\bmod 2^4\right)$. Такими x будут все $x = \pm\left(\alpha + 2^3 v\right)$, $v \in \mathrm{Z}$, где $\alpha = 1 + 4 \cdot \frac{a-1}{8}$. Продолжая эти рассуждения, получим, что существует такое целое число γ, что множество всех целых x, для которых $x^2 \equiv a \left(\bmod 2^k\right)$, имеет вид

$$\left\{\pm\left(\gamma + 2^{k-1}t\right) \,\Big|\, t \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\pm\left(\gamma + 2^k s\right) \,\Big|\, s \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pm\left(\gamma + 2^{k-1} + 2^k s\right) \,\Big|\, s \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Т. е. классы $\pm\overline{\gamma}$, $\pm\overline{(\gamma + 2^{k-1})}$ по $\bmod 2^k$ дают все решения сравнения $x^2 \equiv a \left(\bmod 2^k\right)$.

Замечание. Обращаем внимание читателей на интересную возможность вывести для произвольного простого p теорию сравнений вида $x^2 \equiv a \left(\bmod p^k\right)$, $(a; p) = 1$, используя представление чисел a и x в системе счисления с основанием p [9, с. 81].

Теперь совсем несложно определить количество $\lambda\,(a; m)$ решений сравнения $x^2 \equiv a \,(\bmod m)$, $m > 1$, $(a; m) = 1$.

Будем считать, что число a является квадратичным вычетом по любому нечётному простому модулю p, являющемуся делителем числа m (это — необходимое условие существования решений). Обозначим через $s \geq 0$ количество различных простых нечётных делителей числа m, и пусть $\eta = \max\{k \geq 0 \mid m \,\vdots\, 2^k\}$. Тогда

а) для $\eta \in \{0; 1\}$ $\quad \lambda\,(a; m) = 2^s$;

б) для $\eta = 2$ и $a \equiv 1 \,(\bmod 4)$ $\quad \lambda\,(a; m) = 2^{s+1}$ (для других a решений нет);

в) для $\eta \geq 3$ и $a \equiv 1 \,(\bmod 8)$ $\quad \lambda\,(a; m) = 2^{s+2}$ (для других a решений нет).

Отсюда сразу получаем утверждение задачи 20 (если по $\bmod m$ не существует первообразных корней, то совокупность всех решений сравнения $x^2 \equiv 1 \,(\bmod m)$ разбивается на $\frac{1}{2}\lambda\,(1; m)$ пар классов вычетов, в каждой из которых произведение сравнимо с -1 по $\bmod m$).

Задача 22 (*Санкт-Петербургская математическая олимпиада*, 1990 г.). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — целые числа. Дан многочлен $f\,(x)$ с целыми коэффициентами, причём известно, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ $\quad f\,(n)$ делится нацело хотя бы на одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Доказать, что среди этих чисел можно выбрать такое, что $f\,(n)$ будет делиться на него нацело для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Предположим противное: для любого i, $1 \leq i \leq m$, существует такое $x_i \in \mathbb{Z}$, что $f\,(x_i) \,\not\vdots\, a_i$. Рассмотрим канонические разложения чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Для каждого i, $1 \leq i \leq m$, в разложении числа a_i выделим тот из множителей — обозначим его $p_i^{\alpha_i}$ — на который не делится нацело $f\,(x_i)$. Если для некоторых индексов s и t, $1 \leq s < t \leq m$, окажется, что $p_s = p_t$, то из чисел $p_s^{\alpha_s}$, $p_t^{\alpha_t}$ оставим наибольшее. Пусть остались числа $q_1, \ldots, q_r$, $r \leq m$. Заметим, что $(q_i; q_j) = 1$, $i \neq j$. Поскольку $f\,(x_i) \,\not\vdots\, q_i$, $i = \overline{1, r}$, то для любого $k \in \mathrm{Z}$ $f\,(x_i + kq_i) \,\not\vdots\, q_i$. По *китайской теореме об остатках* существует такое целое число u, что $u \equiv x_i \,(\bmod q_i)$, $i = \overline{1, r}$. Таким образом, $f\,(u) \,\not\vdots\, q_i$, $i = \overline{1, r}$, а потому $f\,(u) \,\not\vdots\, a_i$, $i = \overline{1, r}$.

Задача 23 (*Отборочная олимпиада*, Румыния, 2001 г.). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, и $f\,(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен степени $m \geq 2$ с целыми коэффициентами, причём известно, что $(a_1;\ n) = 1$, и коэффициенты $a_2, a_3, \ldots, a_m$ кратны всем простым делителям числа n. Доказать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое натуральное число c, что $f\,(c)$ делится нацело на n^k.

Решение. Сначала рассмотрим случай, когда $n = p$ — простое число. Для $k = 1$ достаточно заметить, что сравнение $a_1 x + a_0 \equiv 0 \,(\bmod p)$ имеет решение. Предположим, что мы нашли такое

x, что $f(x) \,\vdots\, p^k$, но $f(x) \,\overline{\vdots}\, p^{k+1}$. Имеем: $f\left(x+tp^k\right) = f(x) + mp^{k+1} + ta_1p^k$. Поскольку $f(x) = \ell p^k$, $(\ell; p) = 1$, то выберем t, для которого $a_1t + \ell \equiv 0\,(\mathrm{mod} p)$, и тогда, очевидно, $f\left(x+tp^k\right) \,\vdots\, p^{k+1}$.

Пусть теперь $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа n. По доказанному выше, для каждого натурального i, $1 \le i \le s$, существует такое x_i, что $f(x_i) \,\vdots\, p_i^{\alpha_i k}$. В качестве нужного c можно взять натуральное решение (а оно существует согласно *китайской теореме об остатках*) системы сравнений $x \equiv x_i \left(\mathrm{mod}\, p_i^{\alpha_i k}\right)$, $i = \overline{1,s}$.

Задача 24 (*Отборочная олимпиада*, Иран, 2004 г.). Пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — произвольные многочлены с целыми коэффициентами, отличные от нуль-многочлена. Доказать, что существует такой **приводимый** над $\mathbb{Z}$ многочлен $g(x)$ с целыми коэффициентами, что каждый из многочленов $f_i(x) + g(x)$, $i = \overline{1,n}$, **неприводим** над $\mathbb{Z}$.

Решение. Пусть $m = \max\limits_{1\le i\le n} \deg f_i(x)$. Представим данные многочлены в виде $f_i(x) = a_{im}x^m + \ldots + a_{i1} + a_{i0}$, $i = \overline{1,n}$. Возьмём целое k, не являющееся корнем ни одного из этих многочленов, и выберем такие простые числа $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, что $f_i(k) \,\overline{\vdots}\, p_i$, $i = \overline{1,n}$. Для каждого j, $1 \le j \le m-1$, согласно *китайской теореме об остатках*, существует такое целое b_j, что $b_j \equiv -a_{sj} \left(\mathrm{mod}\, p_s^2\right)$, $s = \overline{1,n}$. Возьмём целое b_m, удовлетворяющее системе сравнений $b_m \equiv p_s - a_{sm} \left(\mathrm{mod}\, p_s^2\right)$, $s = \overline{1,n}$.

Пусть $b_0 = -\sum\limits_{j=1}^{m} k^j b_j$, $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$. Тогда $f_i(x) + g(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} (b_j + a_{ij})\, x^m$. Поскольку $g(k) = 0$, то многочлен $g(x)$ приводим над $\mathbb{Z}$. Заметим, что $b_j + a_{ij} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\, p_i)$ для $1 \le j \le m$, $b_m + a_{im} \not\equiv 0 \left(\mathrm{mod} p_i^2\right)$. Далее,

$$b_0 + a_{i0} = a_{i0} - \sum_{j=1}^{m} k^j b_j \overset{\mathrm{mod}\, p_i}{\equiv} a_{i0} + ka_{i1} + \ldots + k^m a_{im} = f_i(k),$$

а потому $b_0 + a_{i0} \not\equiv 0\,(\mathrm{mod} p_i)$. Согласно признаку Эйзенштейна [17, с. 234], [20, с. 37], для любого $i = \overline{1,n}$ многочлен $f_i(x) + g(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

Задача 25 (*Болгарская математическая олимпиада*, 2003 г.). Множество $C \subset \mathbb{N}$ будем называть *красивым*, если для любого целого k во множестве C существуют такие элементы a и b, $a \ne b$, что $(a+k; b+k) > 1$. Доказать, что если сумма всех элементов красивого множества C равна простому числу $q > 2$, то во множестве C найдётся такое число c, что множество $C \setminus \{c\}$ также является *красивым*.

Решение. Рассмотрим множество W всех простых чисел p, для которых существуют такие $a \in C$ и $b \in C$, $a \ne b$, что $a \equiv b\,(\mathrm{mod}\, p)$. Через C_p будем обозначать совокупность всех остатков, образованных элементами множества C от деления на p.

Пусть $W = \{p_1; p_2; \ldots; p_n\}$. Предположим, что для каждого i, $1 \le i \le n$, существует такой остаток $\alpha_i \in C_{p_i}$, что сравнение $x \equiv \alpha_i\,(\mathrm{mod}\, p_i)$ имеет ровно одно решение во множестве C. По *китайской теореме об остатках*, существует целое k такое, что $k \equiv -\alpha_i\,(\mathrm{mod}\, p_i)$, $i = \overline{1,n}$. Возьмём такое $p_j \in W$, что для некоторых различных $a \in C$ и $b \in C$ $p_j \mid a+k$ и $p_j \mid b+k$. Но тогда $a \overset{\mathrm{mod}\, p_j}{\equiv} b \overset{\mathrm{mod}\, p_j}{\equiv} \alpha_j$, что невозможно.

Таким образом, существует такое простое $p \in W$, что каждое целое $\alpha \in [0; p-1]$ встречается среди остатков чисел множества C по $\mathrm{mod}\, p$ хотя бы дважды. Если все такие остатки встречаются ровно два раза, то $q \overset{\mathrm{mod}\, p}{\equiv} 2\,(0 + 1 + \ldots + p - 1) = p\,(p-1)$, что невозможно, поскольку число q простое. Итак, существует остаток, появляющийся по крайней мере три раза. Одно из чисел (обозначим его c), дающих этот остаток, можно удалить из множества C. Действительно, для любого $k \in \mathbb{Z}$ можно взять числа $a \in C \setminus \{c\}$, $b \in C \setminus \{c\}$ такие, что $a \ne b$ и $a \overset{\mathrm{mod}\, p}{\equiv} b \overset{\mathrm{mod}\, p}{\equiv} -k$.

Как хорошо известно [17], кольцо $\mathbb{R}[x]$ многочленов с действительными коэффициентами “наследует” немало важнейших свойств кольца целых чисел $\mathbb{Z}$: элементарные свойства делимости, однозначность разложения на “простые” множители, свойства наибольшего общего делителя, наименьшего общего кратного, существование алгоритма Евклида и т. п.

Интересно остановиться на задаче нахождения такого многочлена $L_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg L_n(x) \leq n$, что $L_n(x_i) = r_i$, $i = \overline{0,n}$ ($r_0 < r_1 < \ldots < r_n$ — произвольные действительные числа). Несложно доказать, что решение этой задачи, если оно существует, — единственно. Впрочем, один многочлен $L_n(x)$ с нужным свойством на самом деле существует:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} r_j \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

(*интерполяционный многочлен Лагранжа*).

Поскольку, по теореме Безу, r_i — остаток от деления многочлена $L_n(x)$ на двучлен $x - x_i$, то такой факт является простым аналогом *китайской теоремы об остатках* в кольце $\mathbb{R}[x]$.

Но имеет место и более общий факт, который можно считать *китайской теоремой об остатках для многочленов.*

Теорема 10. Пусть $m_1(x), \ldots, m_n(x)$ — попарно взаимно простые многочлены. Тогда для любых многочленов $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ существует единственный многочлен $p(x)$ такой, что $\deg p(x) < \sum\limits_{i=1}^{n} \deg m_i(x)$ и

$$p(x) \equiv a_i(x) \,(\operatorname{mod} m_i(x)), \quad i = \overline{1,n}.$$

Докажите эту теорему самостоятельно, воспользовавшись методом математической индукции.

Ряд интересных задач, посвященных интерполяционному многочлену Лагранжа и *китайской теореме об остатках для многочленов*, читатели могут найти в [4, 14].

Китайская теорема об остатках применяется в математической криптологии — разделе математики, изучающем методы хранения и передача секретной информации.

Предположим, что необходимо организовать доступ к конфиденциальной информации в компьютере для n лиц так, чтобы они могли получить такой доступ только собравшись все вместе. Выберем n достаточно больших попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Например, можно взять числа Ферма: $m_i = 2^{2^{u_i}} + 1$, $i = \overline{1,n}$, где $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ — произвольные натуральные числа (как отмечалось в решении задачи 17, два различных числа Ферма являются взаимно простыми). Пусть i-е лицо в качестве своего ключа доступа выбирает произвольное натуральное число $c_i \in [1; m_i - 1]$. Тогда, собравшись вместе, они могут создать (с помощью компьютера) пароль $x_0 \in \left[1; \prod\limits_{i=1}^{n} m_i - 1\right]$ — как единственное на этом отрезке решение системы линейных сравнений $x \equiv c_i \,(\operatorname{mod} m_i)$, $i = \overline{1,n}$. В дальнейшем этот пароль будет сгенерирован для доступа к секретной информации, если каждое лицо введёт в компьютер свой ключ. Применение описанного метода на практике связано с проблемами эффективных по быстродействию алгоритмов умножения и деления с остатком многозначных чисел (компьютерные методы “длинной” арифметики), реализацией алгоритма Евклида, усовершенствованием алгоритмов решения линейных диофантовых уравнений и т. п. [11].

В заключение хотим обратить внимание преподавателей и школьников, которые будут использовать материалы статьи для подготовки к олимпиадам и турнирам, к конкурсам Малой академии наук, что некоторые из разобранных здесь задач могут быть решены и без использования китайской теоремы об остатках. А потому можно посоветовать читателям попытаться найти другие подходы к решению этих задач, и это будет способствовать существенному обогащению теоретического и технического арсенала участников математических соревнований высшего уровня, углублению их знаний в области элементарной теории чисел.

Литература

[1] Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987. — 416 с.

[2] Александров П. С. Введение в теорию групп. Библиотечка "Квант". Вып. 7. — М.: Наука, 1980. — 144 с.

[3] Алексеев В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. — М.: Наука, 1976. — 208 с.

[4] Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач. — М.: МЦНМО, 2002. — 264 с.

[5] Бухштаб А. А. Теория чисел. — М.: Просвещение, 1966. — 384 с.

[6] Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л., Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1986. — 176 с.

[7] Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. — М.: Наука, 1988. — 288 с.

[8] Вейль А. Теорія чисел для початківців. — К.: Вища школа, 1987. — 47 с.

[9] Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981. — 176 с.

[10] Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. — М.: Наука, 1965. — 176 с.

[11] Гашков С. Б., Чубариков В. Н. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. — М.: Высшая школа, 2000. — 320 с.

[12] Грибанов В. У., Титов П. И. Сборник упражнений по теории чисел. — М.: Просвещение, 1964. — 143 с.

[13] Егоров А. А. Деление с остатком и сравнения по модулю// Квант. — 1991. — №6. — С. 36-39, 49.

[14] Зарубежные математические олимпиады. Под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987. — 416 с.

[15] Избранные задачи из журнала "American Mathematical Monthly". Под ред. В. М. Алексеева. — М.: Мир, 1977. — 597 с.

[16] Калужнин Л. А., Сущанский В. И. Преобразования и перестановки. — М.: Наука, 1985. — 160 с.

[17] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Основы алгебры. — М.: Наука, 1994. — 320 с.

[18] Кудреватов Г. А. Сборник задач по теории чисел. — М.: Просвещение, 1970. — 128 с.

[19] Лейфура В. М., Мітельман І. М. Розв'язуємо разом. Задачі з цілими числами. Комбінаторика клітчастої дошки. — Харків: Основа, 2003. — 144 с.

[20] Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методиїх розв'язування. — Львів: Євросвіт, 1999. — 128 с.

[21] Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 1991-2000 pp. — К.: Техніка, 2003. — 541 с.

[22] Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 2001-2006 рр. — Львів: Каменяр, 2008. — 348 с.

[23] Ляпин Е. С., Айзенштат А. Я., Лесохин М. М. Упражнения по теории групп. — М.: Наука, 1967. — 264 с.

[24] Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. — М.: Просвещение, 1968. — 160 с.

[25] Трост Э. Простые числа. — М.: ГИФМЛ, 1959. — 136 с.

[26] Флейшман Д. Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова// Квант. — 1997. — №3 — с. 39-40, 52.

[27] Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады: 1961-1993 гг. — СПб.: Политехника, 1994. — 309 с.

[28] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. — М.: Наука, 1977. — 384 с.

[29] Ясінський В. А. Теорія лишків та застосування до розв'язування олімпіадних задач// Математика в школі. — 2009. — №№1-2. — С. 35-40.

[30] Задачник "Кванта"// Квант. — 1987. — №3. — С. 24.

[31] Задачник "Кванта"// Квант. — 1999. — №6. — С. 17-18.

Лейфура Валентин Николаевич (1947-2011),
Черноморский государственный университет
имени Петра Могилы, профессор,
кандидат физико-математических наук,
заслуженный учитель Украины.

Мительман Игорь Михайлович,
Ришельевский лицей при Одесском национальном
университете имени И. И. Мечникова, доцент,
кандидат физико-математических наук,
заслуженный учитель Украины.

Ясинский Вячеслав Андреевич,
Винницкий государственный педагогический
университет имени М. М. Коцюбинского, доцент,
заслуженный учитель Украины.

Фрактальная размерность визуального образа математической матрицы

Каштанов Н. В., Ляхов А. Ф.

В работе приводятся результаты исследования визуального образа числовой матрицы. Показано, что фрактальная размерность изображения матрицы наряду с такими характеристиками как определитель и число обусловленности позволяют делать заключения о структуре и качественных свойствах матрицы.

Развитие современных информационных технологий позволяет создавать визуальные образы исследуемых объектов самой разной природы, осуществлять обработку этих образов и получать новую информацию, как об объекте, так и об инструментах, с помощью которых производилось исследование.

В данной работе приводятся результаты исследования визуального образа числовой матрицы. Введение образа числовой матрицы позволяет ввести новую числовую характеристику — фрактальную размерность, которая наряду с такими характеристиками, как определитель матрицы и число обусловленности[1], позволяет делать заключения о качественных свойствах матрицы и решении соответствующих систем.

Постановка задачи

При изучении систем линейных алгебраических уравнений большой размерности качественный анализ матрицы в виде большой числовой таблицы практически невозможен, поэтому возникает потребность в визуализации матрицы. Для этого используется графический метод: каждому из элементов матрицы системы ставится в соответствие ячейка, прямоугольник или пиксель определенного цвета. Градация цвета зависит от разброса значений элементов матрицы. Поскольку размеры пикселя малы, то таким способом на экране можно отобразить матрицу большой размерности.

Визуальное представление матрицы позволяет сформулировать ряд новых задач:

1. Определить фрактальную размерность графического изображения матрицы

2. Определить, как изменяется фрактальная размерность матрицы при её преобразованиях.

В настоящее время при анализе и построении графических изображений широко используются фракталы и их различные виды [1–4].

Фрактал (от латинского fractus — дробленый, сломанный, разбитый) — термин, означающий геометрическую фигуру, обладающую свойством самоподобия, т. е. составленную из нескольких

[1]Число обусловленности матрицы A, $\mathrm{cond}(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ определяет, как погрешность входных данных влияет на решение системы $Ax = f$. Например, если $\Delta A \cdot \Delta x \approx 0$, то относительная погрешность решения связана с относительными погрешностями правых частей и относительной погрешностью элементов матрицы соотношением

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \mathrm{cond}(A)\left(\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right).$$

частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком. В более широком смысле под фракталами понимают множества точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность (в смысле Минковского или Хаусдорфа).

На практике, как правило, используется приближённая оценка фрактальной размерности множества.

На плоскости линейный размер множества точек и его площадь связаны. В качестве линейного размера множества возьмем его периметр. Предположим, что площадь и периметр связаны соотношением

$$S = P^D,$$

где S и P — площадь и периметр[2] множества, эти величины определяются из геометрии множеств, D — величина, являющаяся приближённой оценкой фрактальной размерности, которую в дальнейшем будем называть фрактальной характеристикой множества. Выразим D в явном виде:

$$D = \frac{\ln S}{\ln P}. \tag{1}$$

Определение фрактальной характеристики матрицы с помощью программы ImageQ

Для определения фрактальной характеристики матрицы и её исследования в среде Microsoft Visual Studio 2005 на языке программирования C++ была написана программа ImageQ . Алгоритм программы и описание интерфейса приводятся в приложении.

Программа позволяет сгенерировать квадратные числовые матрицы размерности, кратной степени 2 от (2×2) до (256×256) и построить их визуальный образ. Для упрощения исследования визуальный образ матрицы строился в двух цветах. Положительные элементы матрицы изображаются чёрным цветом, отрицательные элементы — белым. На рис. 1 приведен скриншот программы. На рисунке показана сгенерированная матрица (8×8) и её визуальный образ, вычислены суммарная площадь черных пикселей, периметр, фрактальная размерность образа и число обусловленности матрицы.

Изменение фрактальной размерности при линейных преобразованиях матрицы

Определим диапазон изменения фрактальных характеристик сгенерированных матриц.

Площадь изображения определяется количеством положительных элементов матрицы N, т. е. количеством чёрных пикселей. Площадь каждого пикселя $S_p = 1$, а периметр $P_p = 4$. В этом случае площадь изображения $S = N$.

Периметр изображения будет лежать в следующих пределах. Максимальная длина границ изображения будет иметь место при условии, что каждый пиксель расположен отдельно: $\max P = 4N = 4S$.

Минимальная длина границ будет иметь место при наиболее плотном расположении чёрных квадратов (рис. 2), т. е. это будет прямоугольник со сторонами $\left[\sqrt{S}\right]$, $\left[\frac{S}{[\sqrt{S}]}\right]$ и присоединенные к ним элементы $S - \left[\sqrt{S}\right] \cdot \left[\frac{S}{[\sqrt{S}]}\right] < \left[\sqrt{S}\right]$, которые добавляют к периметру две единицы.

Минимальный периметр

$$\min P = 2\left[\sqrt{S}\right] + 2\left[\frac{S}{\left[\sqrt{S}\right]}\right] + 2 - 2\delta\left(S \bmod \left[\sqrt{S}\right]\right).$$

[2]Под периметром множества понимается длина его границы.

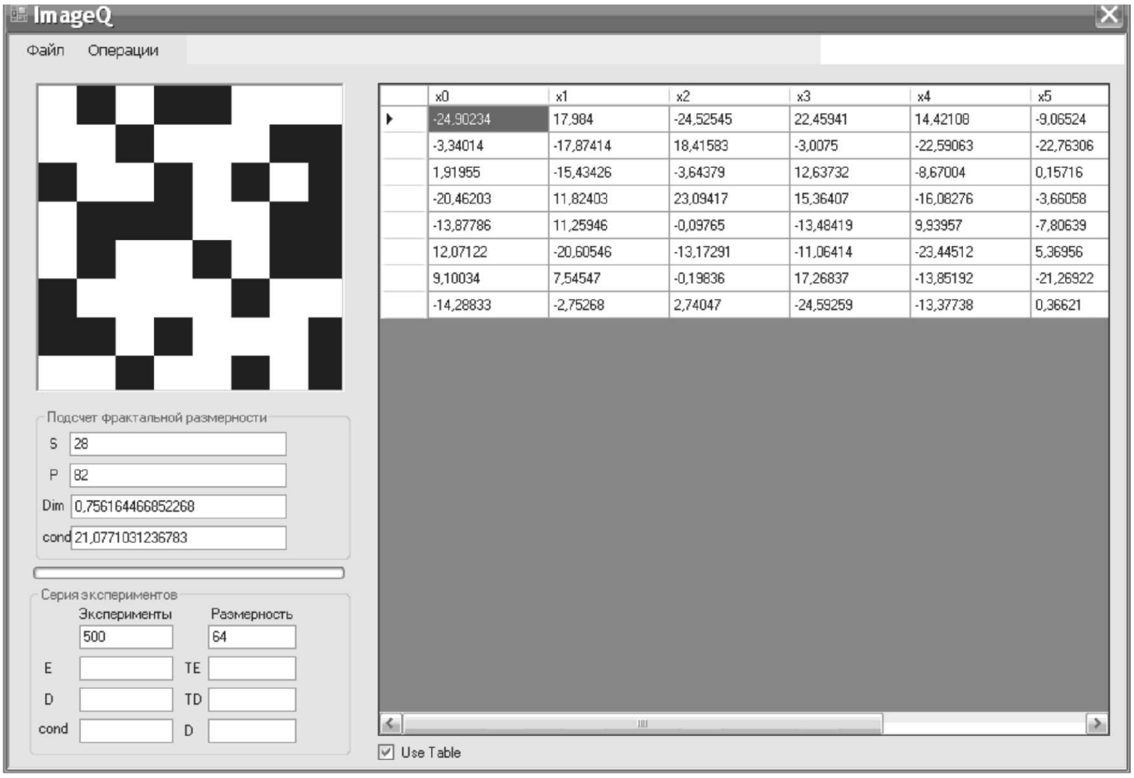

Рис 1.

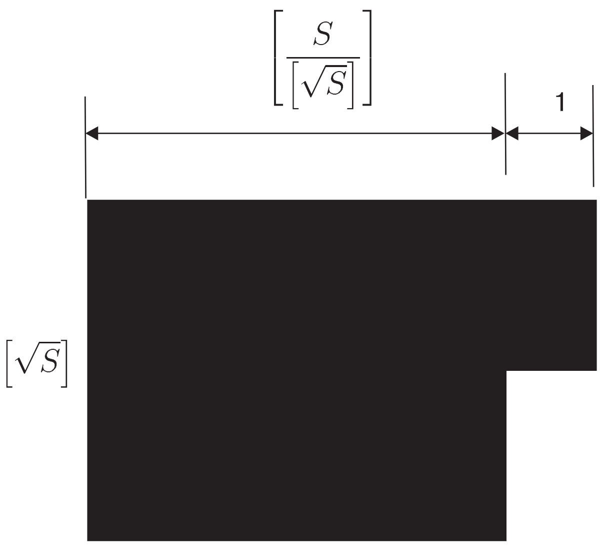

Рис 2. Фигура минимального периметра

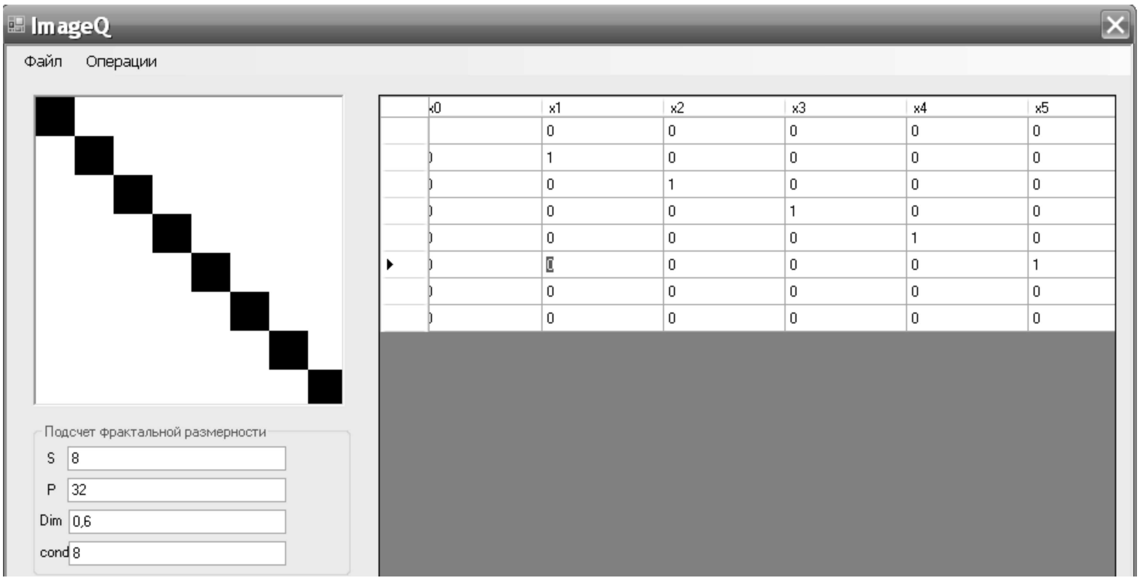

Рис 3.

Следовательно, фрактальная характеристика лежит в диапазоне

$$\frac{\ln S}{\ln(\max P)} \leq D \leq \frac{\ln S}{\ln(\min P)}. \tag{2}$$

Приведём пример некоторых фрактальных характеристик для матриц часто встречающегося вида.

Единичная матрица размерности (8×8): её графический образ показан на рис.3

$$S = 8, \qquad P = 32, \qquad \dim = 0{,}6, \qquad \mathrm{cond} = 8.$$

На рисунке 4 показан визуальный образ трёхдиагональной матрицы (8×8) и её характеристики. $S = 22, P = 32, \dim = 0{,}89189632, \mathrm{cond} = NaN$ (определитель матрицы равен нулю, т. е. число обусловленности не существует)

На рисунке 5 показан визуальный образ случайно сгенерированной матрицы (8×8) и её характеристики. $S = 22, P = 74, \dim = 0{,}71816181, \mathrm{cond} = NaN$.

Проведённые многочисленные эксперименты показывают, что для матриц с большим разбросом положительных и отрицательных элементов по матрице фрактальная характеристика матриц размерности (8×8) $\dim \approx 0{,}72$. Для матриц имеющих некоторую структуру, выражающуюся в заполнении внутренних миноров матрицы однородными элементами, фрактальная характеристика матрицы значительно больше.

Для сильно разряженных матриц приводимый анализ наиболее нагляден, так как ненулевые элементы матрицы распределены по всей матрице, то фрактальная характеристика будет минимальной. Любое увеличение этой характеристики для таких матриц говорит о неоднородности их структуры.

Заметим, что в приведённой последовательности примеров матриц единичная матрица имеет меньшее число элементов по сравнению с другими матрицами, и она может быть отнесена к сильно разряженным матрицам.

При решении систем линейных уравнений и выполнении различных исследований, связанных с преобразованием матриц, наиболее часто используются линейные преобразования. При этих преобразованиях либо столбцы, либо строки матрицы умножаются на число, переставляются, складываются, вычитаются. Известно, что при этих преобразованиях определитель матрицы и число обусловленности изменяются.

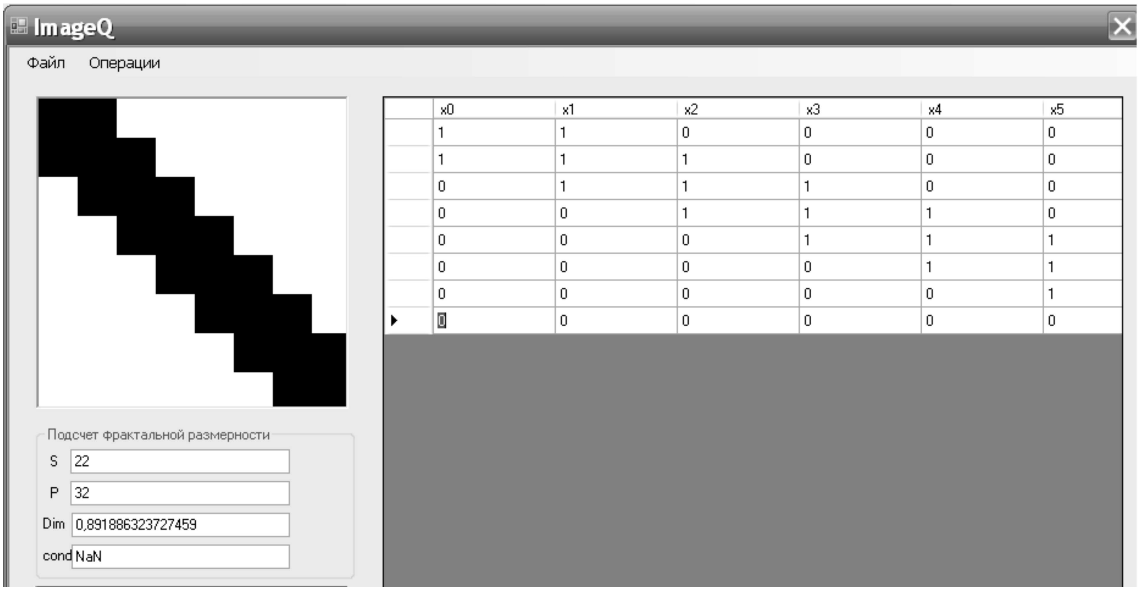
ImageQ
Файл
Операции
x0 x1 x2 x3 x4 x5
1 1 0 0 0 0
1 1 1 0 0 0
0 1 1 1 0 0
0 0 1 1 1 0
0 0 0 1 1 1
0 0 0 0 1 1
0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 0 0
Подсчет фрактальной размерности
S 22
P 32
Dim 0,891886323727459
cond NaN

Рис 4.

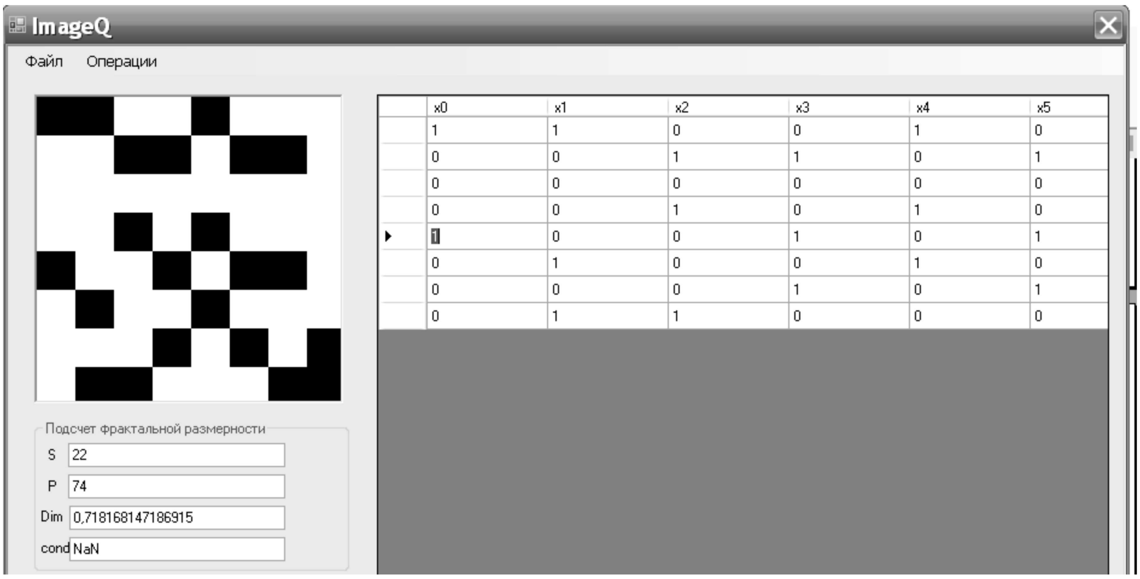
ImageQ
Файл
Операции
x0 x1 x2 x3 x4 x5
1 1 0 0 1 0
0 0 1 1 0 1
0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 1 0
1 0 0 1 0 1
0 1 0 0 1 0
0 0 0 1 0 1
0 1 1 0 0 0
Подсчет фрактальной размерности
S 22
P 74
Dim 0,718168147186915
cond NaN

Рис 5.

Рис 7.

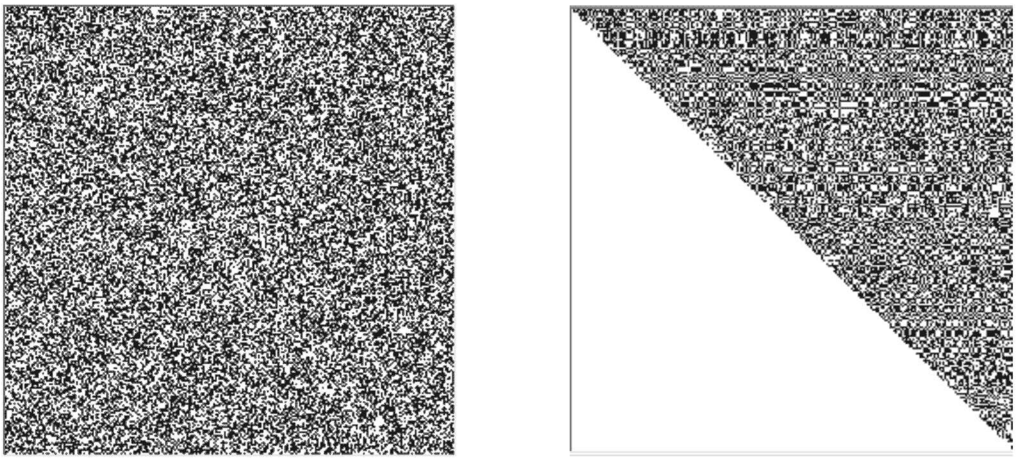

Рис 8.

Фрактальная характеристика матрицы также изменяется при линейных преобразованиях матрицы. Действительно, в этом случае изменяются численные соотношения между элементами матрицы, а при создании визуального образа матрицы происходит округлении этих различий, и получаемые образы будут качественно отличаться.

Программа ImageQ позволяет сгенерировать матрицу, получить её образ и соответствующие характеристики, а затем получить образ матрицы, приведённой к треугольному виду. На рисунке 7 приведены визуальный образ матрицы размерности 64x64 и образ матрицы после её приведения к треугольному виду. При этом значение фрактальной характеристики изменяется с 0,915 до 0,898.

На рисунке 8 показана матрица размерности 256×256. Её фрактальная характеристика до преобразования $\dim = 0{,}93712$, после преобразований $\dim = 0{,}93336$.

Число обусловленности матрицы и характеристика изображения

Программа ImageQ позволяет осуществлять многократное повторение численного эксперимента по генерации матрицы и вычислению ее характеристики. Поскольку в этом случае матрица генерируется случайным образом, то и соответствующее ей изображение, а значит и его характеристика, случайны, и при многократном повторении опыта можно говорить о математическом ожидании и дисперсии случайной величины — характеристики изображения. Эти характеристики также определяются программой.

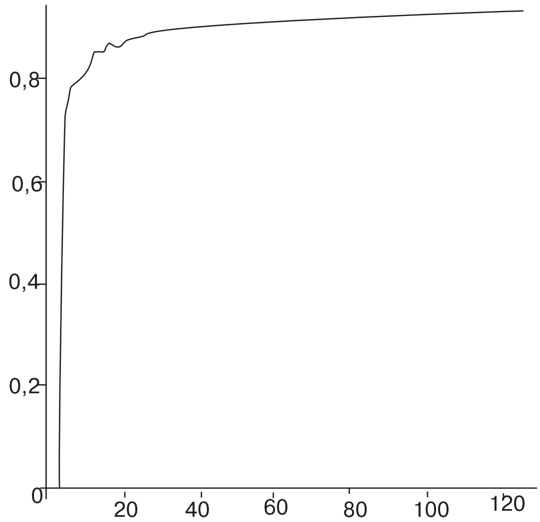

Рис 9.

Изменение фрактальной характеристики случайно сгенерированной матрицы с ростом её размерности отражено на рис. 9.

Численные эксперименты по генерации матриц различного размера и подсчет их характеристики показывают, что с ростом размера матрицы существенно растет её число обусловленности. При этом характеристика соответствующего изображения приближается к 0,93. Для матриц небольшого размера с малым числом обусловленности характеристика составляет 0 – 0,7. Результаты экспериментов приведены ниже.

Рост числа обусловленности и фрактальной размерности с ростом размера матриц

Размер	Математическое ожидание числа обусловленности	Математическое ожидание фрактальной характеристики
2	2,29	0-0,528
4	37	0,6
8	149	0,845
16	69	0,859
32	723	0,89
64	991	0,912
128	3380	0,928
256	16000	0,9375

Заключение

Проведённые исследования показывают, что современные информационные технологии позволяют осуществлять визуализацию числовых матриц и исследование полученных образов. Фрактальная размерность изображения наряду с такими характеристиками, как определитель матрицы и число обусловленности, позволяют делать заключения о структуре и качественных свойствах матрицы и решении соответствующих систем.

Литература

[1] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. — М.: Наука 1973. — 576 с.

[2] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2003. — 352 с.

[3] Тарасевич Ю. Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы: Учебное пособие / М.: Едиториал УРСС, 2002. — 112 с.

[4] Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 160 с.

Приложение

Описание алгоритма работы программы

Программа написана в среде Microsoft Visual Studio 2005 на языке программирования C++. Программа состоит из двух базовых частей — класс «Матрица» и класс «Форма».

Первый обеспечивает удобство работы с числовыми матрицами, хранит их в памяти виде таблиц и позволяет методами класса вычислять характеристики матрицы, а также проводить такие операции, как бинаризация.

Второй предназначен для визуального отображения интерфейса пользователя и представляет собой объект Windows::Forms. Имеет в своем составе меню управления и элементы для визуализации экспериментов.

Элемент PictureBox позволяет отображать на форме изображения различного размера и формата. При загрузке изображения с жесткого диска компьютера происходит построение массива бит в формате RGB, который используется для бинаризации исходного изображения. Для этого высчитывается среднее арифметическое каждой из компонент цвета для каждого пикселя и сравнивается с некоторым пороговым значением. В зависимости от результата сравнения происходит замена значений RGB компонент на $\{0, 0, 0\}$, что соответствует черному, либо на $\{255, 255, 255\}$, что соответствует белому цвету. Одновременно с этим происходит заполнение элементов матрицы значениями $+1$ или -1 в зависимости от цвета пикселя. Пиксель с координатами x, y соответствует x-столбцу и y-строке матрицы.

При запуске алгоритма подсчета характеристики изображения сначала подсчитывается число положительных элементов матрицы — это число равно площади множества на изображении, поскольку черные пиксели обозначены в матрице $+1$. Далее происходит перебор всех элементов матрицы и для каждого элемента, равного $+1$, подсчитывается количество граничных с ним элементов, равных -1. Это соответствует количеству переходов с черного пикселя на белый в изображении, т. е. периметру множества. Дальнейший подсчет производится по формуле (3).

В случае запуска серии экспериментов происходит многократное повторение действий, описанных выше, и результат каждой итерации запоминается. Впоследствии по записанным результатам вычисляется экспериментальное математическое ожидание характеристики и ее дисперсия. Процесс выполнения серии экспериментов отображается при помощи ProgressBar.

Интерфейс программы ImageQ

Управление программой осуществляется при помощи основного меню формы, рис. 10. Для открытия изображения или загрузки матрицы необходимо выбрать пункт меню Файл → «открыть» или «загрузить». В случае если выбранное в проводнике изображение не удовлетворяет поставленным требованиям (размер 256 на 256), то программа выдаст сообщение о некорректности входных данных. При удачном открытии изображения, оно будет отображено на форме. Для его бинаризации и подсчета характеристики следует в меню выбрать пункт Операции→Бинаризация и подсчет. Результаты работы программы будут выведены в соответствующие поля, а изображение будет преобразовано в черно-белое.

Для генерации матриц необходимо выбрать пункт Операции→Сгенерировать. При этом генерируются матрицы размерности кратной степени двойки.

Для вывода характеристик сгенерированной матрицы и её бинаризированного изображения необходимо выбрать пункт «Бинаризация и подсчет». Поставив галку в окно Use Table, на соответствующем поле получим численные значения сгенерированной матрицы. Следует заметить, что эти значения можно поэлементно менять.

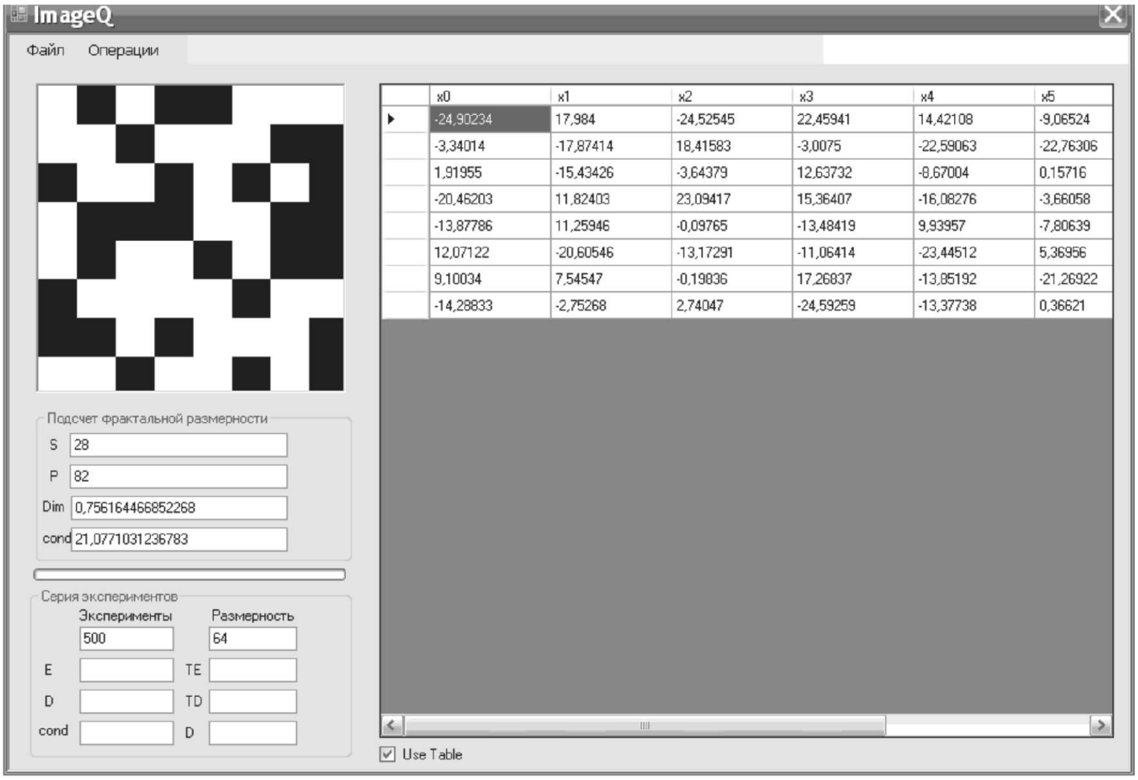

Рис 10.

Для запуска серии экспериментов необходимо ввести в поле «Число экспериментов в серии» количество желаемых экспериментов, а затем выбрать пункт меню Операции→Серия экспериментов. Процесс выполнения серии будет сопровождаться перерисовкой ProgressBar. После завершении серии вычислений математическое ожидание характеристики изображения, его дисперсия, а так же математическое ожидание числа обусловленности и его дисперсия будут выведены в соответствующие поля.

Для завершения работы программы следует выбрать пункт меню Файл→Выход.

Желающие получить программу обращайтесь по электронному адресу

Email: ALF19545@rambler.ru

Каштанов Николай Владимирович,
инженер-программист,
г. Нижний новгород.

Email: kashnick@inbox.ru

Ляхов Александр Федорович,
доцент кафедры теоретической механики
механико-математического факультета
Нижегородского государственного университета
им. Н. И. Лобачевского, канд. физ.-мат. наук.

Email: ALF19545@rambler.ru

К определению экспоненты и выводу формулы Эйлера и основных предельных соотношений

С. В. Шведенко

В статье введено доступное студентам первого курса (не опирающееся на теорию степенных рядов) определение экспоненты комплексного числа и из него выведены все важнейшие свойства экспоненты, включая формулу Эйлера, а также первый и второй замечательные пределы.

В бытность студентом первого курса МГУ автор этих строк оказался свидетелем того, как академик И. К. Кикоин (читавший лекции по физике) резко отреагировал на незнание первокурсниками *формулы Эйлера* $e^{it}=\cos t+i\sin t$. Явно удивленный и возмущенный невежеством аудитории, он пообещал: *“Я скажу “математикам”, чтобы они вам ее вывели”*.

Были ли переданы эти слова “математикам”, неизвестно, но эффекта на читавшийся нам курс анализа они не произвели. Автор же этих строк сказанное запомнил, и когда сам стал “математиком”, решил, что мнение выдающегося физика весомее мнения всех не согласных с ним методистов от математики вместе взятых, и его следует учесть. Трудность состояла “всего лишь” в том, что сделать это надо было, оперируя только теми понятиями и фактами анализа, которые изучаются в первом семестре, что исключает использование степенных рядов.

Решение поставленной задачи, как это нередко бывает, позволило решить еще более важную: дать внятное и реализуемое в лекционном курсе определение (и обоснование свойств) *степени* положительного числа с *любым действительным показателем*, без чего освоение анализа проходит на фоне неспособности членораздельно объяснить, что такое $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (например, при $x=\pi$) и почему $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+y}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^y$.

Отправным пунктом служит следующее утверждение, доказательство которого хорошо известно[1], а посему нет необходимости здесь его воспроизводить.

Последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ *и* $\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right\}$ *имеют общий предел, называемый*[2] *числом* e.

Определение экспоненты комплексного числа

Для любого комплексного числа z, *последовательность* $\{z_n\}$, *где* $z_n=1+\frac{z}{1!}+\dots+\frac{z^n}{n!}$, $n=0,1,2,\ \dots$, *сходится к некоему комплексному числу, которое называют* <u>*экспонентой*</u> *числа* z *и обозначают* $\exp z$:

$$\boxed{\exp z\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{1!}+\dots+\frac{z^n}{n!}\right)}.$$

В частности, $\exp 0=1$, $\exp 1=e$, а значение $\exp i$ графически представлено на рис. 1.

<u>*Доказательство*</u>. Достаточно доказать, что для произвольно взятого (но *фиксированного*) *комплексного числа* z последовательность *комплексных чисел* $\{z_n\}=\left\{1+\frac{z}{1!}+\dots+\frac{z^n}{n!}\right\}$ является *фундаментальной*, т. е. для нее *истинно* утверждение

[1] См., например, [**1**] n° **36**–**37**.

[2] Вслед за швейцарским (и одновременно российским) математиком Леонардом Эйлером (Leonhard Euler, 1707–1783), вычислившим его приближенное значение 2,71828 18284 59045 23536 028 (см. [**2**], § 122).

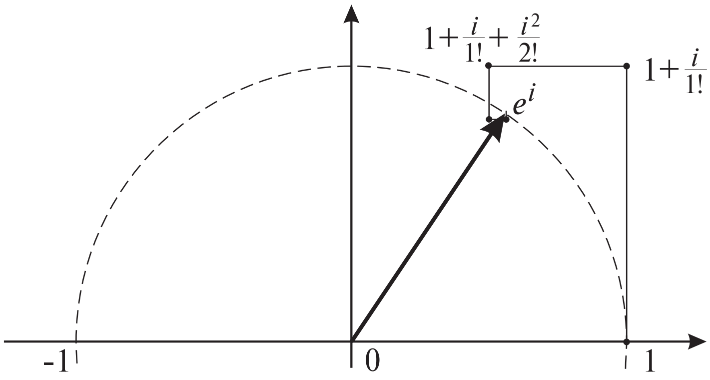

Рис.1

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0 \forall n\ \forall k\ (n>n_0 \Rightarrow |z_n - z_{n+k}| < \varepsilon);$$

в этом случае *фундаментальными*, а следовательно (согласно критерию Коши) *сходящимися* оказываются обе последовательности *действительных* чисел $\{x_n\}=\{\operatorname{Re} z_n\}$ и $\{y_n\}=\{\operatorname{Im} z_n\}$, а вместе с ними *сходящейся* оказывается и последовательность $\{z_n\}=\{x_n+iy_n\}$.

Пусть ε — любое *положительное* число. Так как обе последовательности $\left\{\frac{|z|^n}{n!}\right\}$ и $\left\{\frac{|z|}{n+1}\right\}$ являются *бесконечно малыми*, существует такое натуральное число n_0, что при $n>n_0$ выполняются неравенства $\frac{|z|^n}{n!}<\varepsilon$ и $\frac{|z|}{n+1}<\frac{1}{2}$, с учетом которых для $n>n_0$ и $k=1,2,\ldots$ выполняются соотношения

$$|z_n - z_{n+k}| = \left|\tfrac{z^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\tfrac{z^{n+k}}{(n+k)!}\right| \leqslant \tfrac{|z|^n}{n!}\left(\tfrac{|z|}{n+1}+\cdots+\tfrac{|z|^k}{(n+1)\cdots(n+k)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{|z|^n}{n!}\left(\tfrac{|z|}{n+1}+\cdots+\tfrac{|z|^k}{(n+1)^k}\right)\leqslant \tfrac{|z|^n}{n!}\,\frac{\frac{|z|}{n+1}}{1-\frac{|z|}{n+1}}<\varepsilon.$$

Основное тождество для экспоненты

Для любых комплексных чисел z,ζ (как действительных, так и мнимых) выполняется соотношение $\boxed{\exp(z+\zeta)=\exp z\exp\zeta}$ (*основное тождество для экспоненты*).

Доказательство. С целью указания зависимости суммы $1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}$ от числа z эту сумму лучше обозначить $s_n(z)$. Для произвольно взятых комплексных чисел z и ζ и любого натурального числа n будут тогда выполняться соотношения

$$s_n(z)\,s_n(\zeta)=\left(1+\tfrac{z}{1!}+\tfrac{z^2}{2!}+\cdots+\tfrac{z^n}{n!}\right)\left(1+\tfrac{\zeta}{1!}+\tfrac{\zeta^2}{2!}+\cdots+\tfrac{\zeta^n}{n!}\right)=$$

$$=1+\left(\tfrac{z}{1!}+\tfrac{\zeta}{1!}\right)+\cdots+\left(\tfrac{z^n}{n!}+\tfrac{z^{n-1}\zeta}{(n-1)!1!}+\cdots+\tfrac{z\zeta^{n-1}}{1!(n-1)!}+\tfrac{\zeta^n}{n!}\right)+$$

$$+\left(\tfrac{z^n\zeta}{n!1!}+\tfrac{z^{n-1}\zeta^2}{(n-1)!2!}+\cdots+\tfrac{z^2\zeta^{n-1}}{2!(n-1)!}+\tfrac{z\zeta^n}{1!n!}\right)+\cdots+\tfrac{z^n\zeta^n}{n!n!}=$$

$$=1+\tfrac{z+\zeta}{1!}+\cdots+\tfrac{z^n+C_n^1z^{n-1}\zeta+\cdots+C_n^{n-1}z\zeta^{n-1}+\zeta^n}{n!}+$$

$$+\tfrac{C_{n+1}^1z^n\zeta+C_{n+1}^2z^{n-1}\zeta^2+\cdots+C_{n+1}^nz\zeta^n}{(n+1)!}+\cdots+\tfrac{C_{2n}^nz^n\zeta^n}{(2n)!}=$$

$$=1+\tfrac{z+\zeta}{1!}+\cdots+\tfrac{(z+\zeta)^n}{n!}+\tfrac{\text{неполное выражение для }(z+\zeta)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\tfrac{\text{неполное выражение для }(z+\zeta)^{2n}}{(2n)!},$$

из которых можно заключить, что

$$|s_n(z)\,s_n(\zeta)-s_n(z+\zeta)|=\left|\tfrac{\text{неполное выражение для }(z+\zeta)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\tfrac{\text{неполное выражение для }(z+\zeta)^{2n}}{(2n)!}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\tfrac{(|z|+|\zeta|)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\tfrac{(|z|+|\zeta|)^{2n}}{(2n)!}=s_{2n}(|z|+|\zeta|)-s_n(|z|+|\zeta|).$$

Но в силу определения *экспоненты* последовательности $\{s_n(z)\}$, $\{s_n(\zeta)\}$ и $\{s_n(z+\zeta)\}$ *сходятся* соответственно к *числам* $\exp z$, $\exp\zeta$ и $\exp(z+\zeta)$, а (обе) последовательности $\{s_n(|z|+|\zeta|)\}$ и $\{s_{2n}(|z|+|\zeta|)\}$ — к *числу* $\exp(|z|+|\zeta|)$. На основании этого можно заключить:

$$|\exp z\exp\zeta-\exp(z+\zeta)|=\lim_{n\to+\infty}\bigl|s_n(z)\,s_n(\zeta)-s_n(z+\zeta)\bigr|\leqslant\lim_{n\to+\infty}\bigl|s_{2n}(|z|+|\zeta|)-s_n(|z|+|\zeta|)\bigr|=0.$$

Определение любой (действительной или мнимой) степени числа e

Применение *основного тождества для экспоненты* позволяет сделать вывод:

$$\exp 2=\exp(1+1)=\exp 1\exp 1=ee=e^2$$

и вообще для любого *натурального* числа n

$$\exp n=\exp(\overbrace{1+\cdots+1}^{n})=\overbrace{\exp 1\cdots\exp 1}^{n}=\overbrace{e\cdots e}^{n}=e^n;$$

кроме того, так как $1=\exp 0=\exp(n+(-n))=\exp n\exp(-n)$,

$$\exp(-n)=e^{-n},$$

а так как $e^m=\exp m=\exp\left(\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}\right)=\left(\exp\frac{m}{n}\right)^n$,

$$\exp r=e^r$$

для любого *рационального* числа $r=\frac{m}{n}$.

На основе *совпадения* значений $\exp z$ и e^z для *рациональных* чисел z полагают вообще для *любого* числа z (*действительного* или *мнимого*)

$$\boxed{e^z\overset{\mathrm{def}}{=}\exp z\overset{\mathrm{def}}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\right)},$$

получая определение *степени* числа e с *любым показателем* вместе с привычными свойствами

$$\boxed{e^{z+\zeta}=e^ze^\zeta,\quad e^ze^{-z}=1,\quad e^{z-\zeta}=\frac{e^z}{e^\zeta}},$$

из которых, в частности, следует, что $e^z\neq 0$ при любом (как действительном, так и мнимом) значении z.

Основное предельное соотношение для экспоненты

Вне зависимости от того, является переменная z действительной или мнимой, выполняется предельное соотношение $\boxed{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\exp z-1}{z}=1}$, *или в эквивалентной записи* $\boxed{\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1}$.

<u>Доказательство</u>. Из определяющего равенства $\exp z=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\right)$, если в нем ограничиться значениями z с $0<|z|<1$, вытекают соотношения

$$\left|\frac{\exp z-1}{z}-1\right|=\left|z\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots+\frac{z^{n-2}}{n!}\right)\right|\leqslant|z|\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2!}+\frac{|z|}{3!}+\cdots+\frac{|z|^{n-2}}{n!}\right)\leqslant$$
$$\leqslant|z|\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=|z|,$$

в силу которых для любого положительного числа ε неравенство $\left|\frac{\exp z-1}{z}-1\right|<\varepsilon$ выполняется при всех z, для которых $0<|z|<\min\{1,\varepsilon\}$.

Применение *основного предельного соотношения* и *основного тождества для экспоненты* позволяют прийти к соотношениям

$$\lim_{z\to z_0}\exp z=\lim_{z\to z_0}\left(\exp z_0+\frac{\exp z-\exp z_0}{z-z_0}(z-z_0)\right)=\exp z_0+\lim_{z\to z_0}\exp z_0\frac{\exp(z-z_0)-1}{z-z_0}(z-z_0)=\exp z_0,$$

показывающим, что *экспоненциальная функция*[3] является *непрерывной* в любой точке[4].

Экспонента на мнимой оси и формула Эйлера

Если t — *действительное* число, то $\boxed{\overline{e^{it}}=e^{-it}}$ и $\boxed{|e^{it}|=1}$.

<u>*Доказательство*</u>. Следствиями определения значения e^{it} и свойств операции *комплексного сопряжения* являются равенства

$$\overline{e^{it}}=\overline{\exp(it)}=\overline{\lim_{n\to+\infty}\Bigl(1+\frac{it}{1!}+\frac{(it)^2}{2!}+\dots+\frac{(it)^n}{n!}\Bigr)}=\lim_{n\to+\infty}\overline{\Bigl(1+\frac{it}{1!}+\frac{(it)^2}{2!}+\dots+\frac{(it)^n}{n!}\Bigr)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\Bigl(\overline{1}+\overline{\frac{it}{1!}}+\overline{\frac{(it)^2}{2!}}+\dots+\overline{\frac{(it)^n}{n!}}\Bigr)=\lim_{n\to+\infty}\Bigl(1+\frac{-it}{1!}+\frac{(-it)^2}{2!}+\dots+\frac{(-it)^n}{n!}\Bigr)=e^{-it},$$

из которых следует: $|e^{it}|^2=e^{it}\overline{e^{it}}=e^{it}e^{-it}=e^0=1$.

Из доказанного утверждения следует, что для любого *действительного* числа t число e^{it} изображается *точкой* плоскости $\mathbb{C}$, лежащей на *окружности* радиуса 1 с центром в начале координат. Вопрос о том, какой конкретно *точкой* этой *окружности* изображается число e^{it}, разрешается следующим утверждением.

Если t — *действительное* число, *то* $\boxed{\arg(e^{it})=t \text{ (с точностью до слагаемого, кратного } 2\pi)}$.

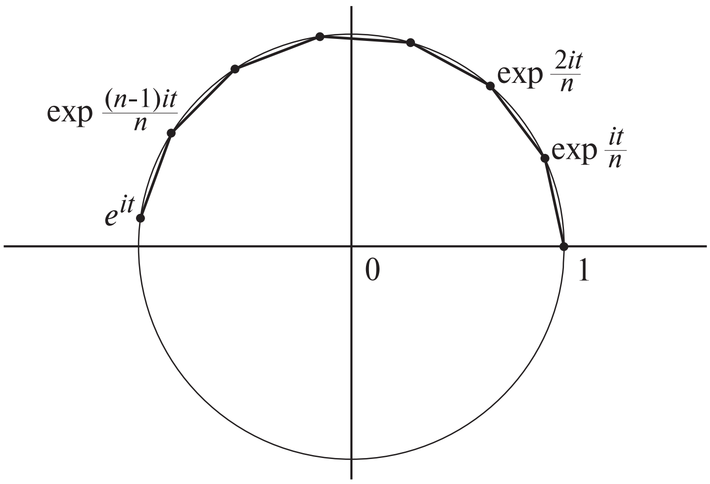

Рис. 2

<u>*Доказательство*</u>. Если t — *действительное* число, то при любом выборе натурального числа n числа

$$1,\ \exp\frac{it}{n},\ \exp\frac{2it}{n},\ \dots,\ \exp\frac{(n-1)it}{n},\ \exp\frac{nit}{n}=e^{it}$$

каждое последующее из которых есть результат умножения предыдущего на $\exp\frac{it}{n}$, что соответствует сложению *аргументов* этих чисел с *одним и тем же* (пока еще неизвестным) числом $\arg\exp\frac{it}{n}$, изображаются точками единичной окружности, служащими вершинами *правильной* n-звенной *ломаной*, вписанной в *единичную окружность* (рис. 2). Так как длина одного (первого) звена этой ломаной равна $|\exp\frac{it}{n}-1|$, длину l_n всей ломаной можно записать в виде

$$l_n=n\,|\exp\tfrac{it}{n}-1|=|t|\,\frac{|\exp\frac{it}{n}-1|}{|\frac{it}{n}|}=|t|\cdot\left|\frac{\exp\frac{it}{n}-1}{\frac{it}{n}}\right|,$$

[3] Как *действительной*, так и *комплексной переменной*.
[4] Соответственно *действительной оси* или *комплексной плоскости*.

после чего переход к пределу при $n \to +\infty$ с использованием основного предельного соотношения для экспоненты дает: $\lim l_n = |t|$. Но *предел* (при $n \to +\infty$) последовательности $\{l_n\}$ *длин* правильных n-звенных *ломаных*, вписанных в единичную окружность и имеющих общие концевые точки 1 и e^{it}, есть *длина дуги* единичной окружности между указанными точками (возможно, с добавлением целого кратного *длины окружности*[5], т. е. $2\pi k$). Опять пользуясь тем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\exp\frac{it}{n}-1}{\frac{it}{n}} = 1$, можно заключить: при всех достаточно больших n вектор $\exp\frac{it}{n} - 1$ (направляющий для первого звена *ломаной*) образует с вектором $\frac{it}{n}$ *острый* угол, вследствие чего при $t > 0$ направление отсчета длины дуги от точки 1 к точке $\exp(it) = e^{it}$ является *положительным* ("против хода часовой стрелки"), а при $t < 0$ — *отрицательным* (в противоположном направлении). Окончательно: *аргумент* числа e^{it}, измеряемый[6] *длиной дуги* единичной окружности между направлениями (из начала координат) на точки 1 и e^{it}, равен[6] t: $\arg e^{it} = t \ (+2\pi k)$.

С учетом соотношений $|e^{it}| = 1$, $\arg e^{it} = t \ (+2\pi k)$ переход к *полярной записи* числа e^{it} приводит к равенству

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t},$$

называемому <u>*формулой Эйлера*</u>. Складывая и вычитая это равенство с другим его экземпляром, записанным в виде $e^{-it} = \cos t - i \sin t$, можно прийти к равенствам[7]

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}}\ .$$

В комбинации со вторым из них из *основное предельное соотношение для экспоненты* немедленно приводит к <u>*основному предельному соотношению для синуса*</u>[8] $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ix}-1+1-e^{-ix}}{2ix} = \frac{1}{2}\Big(\lim_{t\to 0}\frac{e^{ix}-1}{ix} + \lim_{x\to 0}\frac{e^{-ix}-1}{-ix}\Big) = 1.$$

Экспонента на действительной оси и логарифм

Рассматриваемая на *действительной оси*, функция $y = e^x$ (или $y = \exp x$) помимо уже отмечавшихся свойств экспоненты: $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ (*основное тождество*), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ (*основное предельное соотношение*) $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$ (*непрерывность* в любой точке), обладает еще следующим:

> *Функция $y = e^x$ возрастает всей на действительной оси и имеет множеством значений промежуток* $(0, +\infty)$.

<u>*Доказательство*</u>. По определению $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\Big)$, поэтому для *положительных* значений x выполняются (при любом натуральном k) неравенства $e^x > 1 + \frac{x^k}{k!} > 1$, в силу которых (с учетом равенства $e^{-x}e^x = 1$) можно утверждать, что

а) функция $y = e^x$ на всей действительной оси принимает лишь *положительные* значения;

б) если $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$, то $e^{x_2} = e^{x_2-x_1+x_1} = e^{x_2-x_1}e^{x_1} > e^{x_1}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{(-x)\to+\infty}\frac{1}{e^{-x}} = 0$, так что (с учетом теоремы о промежуточных значениях) *множеством значений* функции $y = e^x$ является промежуток $(0, +\infty)$.

---

[5] Ломаные, соединяя точки 1 и e^{it}, могут сколько-то раз обойти вокруг центра окружности.

[6] С точностью до слагаемого, кратного 2π.

[7] Первоначально названную его именем *формулу* Эйлер получил именно в виде этих равенств. О том, как он вывел их (из *формулы Муавра*), можно прочитать в §§ 132–138 его знаменитой монографии [**2**].

[8] Или, как предпочитают говорить чувственные люди, *"первому замечательному пределу"*. Логическая небезупречность его классического вывода (например, в [**1**], n° **54**) обсуждается в заметке автора [**3**].

Замечание 1. Каким бы ни было натуральное число k, из определения экспоненты следует, что для *положительных* значений x выполняется неравенство $e^x > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, а в силу него и предельное соотношение $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$.

Замечание 2. Наглядным проявлением свойства *непрерывности* экспоненциальной функции является *перестановочность* символов *предела* и *экспоненты*: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \exp x = \exp \lim\limits_{x\to x_0} x}$ — всякий раз, когда переменная x (будь она *независимой* или же *функцией* какой-то другой переменной) имеет своим пределом какое-либо значение x_0. Предельные же соотношения $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ показывают, что если распространить определение экспоненты (действительной переменной) на *расширенную* числовую ось, полагая $\exp(+\infty) \overset{\text{def}}{=} +\infty$, $\exp(-\infty) \overset{\text{def}}{=} 0$, то *перестановочность* символов *предела* и *экспоненты* распространяется и на случаи, когда $x_0 = \pm\infty$.

С применением *теоремы об обратной функции к непрерывной строго монотонной* доказанное утверждение приводит к следующему.

Функция $y = e^x$, рассматриваемая на действительной оси, имеет обратную функцию, определенную на промежутке $(0, +\infty)$ и являющуюся на нем непрерывной и возрастающей. Эту функцию называют логарифмической (логарифмом[9]) и обозначают $x = \ln y$ (или $x = \log y$); таким образом[10]:

$$\boxed{\ln(\exp x) = x \text{ для всех } x \in \mathbb{R},\ \exp(\ln y) = y \text{ для всех } y > 0}\ .$$

Оперируя *основным тождеством для экспоненты*, можно *вывести* привычные свойства *логарифма*:

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b,\quad \ln\frac{1}{b} = -\ln b,\ \ \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b}.$$

Для функции $y = \ln x$ выполняются предельные соотношения а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, б) $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$, т. е. истинны утверждения, выражаемые формулами:

$$\text{а) } \forall c>0\ \exists d>0\ \forall x\ \big(x > d \Rightarrow \ln x > c\big), \quad \text{б) } \forall c>0\ \exists \delta>0\ \forall x\ \big(0<x<\delta \Rightarrow \ln x < -c\big).$$

Для *доказательства* достаточно в этих *формулах* взять $d = e^c$, $\delta = e^{-c}$ и применить *возрастание* функции $y = \ln x$.

Из *основного предельного соотношения для экспоненты* вытекает

Основное предельное соотношение для логарифма: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$.

Доказательство. Можно воспользоваться определением предела функции в точке "через последовательности". Пусть $\{x_n\}$ — *любая* последовательность *отличных от нуля* действительных чисел, *сходящаяся к нулю*. Тогда (в силу *непрерывности* и *возрастания* логарифмической функции на промежутке $(0, +\infty)$) последовательность $\{y_n\} = \big\{\ln(1+x_n)\big\}$ *сходится к* значению $\ln 1 = 0$, причем все числа $y_n = \ln(1+x_n)$ *отличны от нуля*. В силу *основного предельного соотношения для экспоненты* последовательность $\left\{\frac{\exp y_n - 1}{y_n}\right\}$ будет *сходиться к единице*, а так как $\frac{\exp y_n - 1}{y_n} = \frac{\exp(\ln(1+x_n)) - 1}{\ln(1+x_n)} = \frac{x_n}{\ln(1+x_n)}$, то *сходиться к единице* будет и последовательность $\left\{\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}\right\}$.

[9] *Логарифмы* и само это слово (греч. λόγος ἀριθμός — *число отношения*) ввел в обиход шотладский барон Не́пер (Neper или Napier, John, Laird of Merchiston, 1550–1617) в изданном в 1614 г. "Описании удивительных таблиц логарифмов" ("Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio"). *Логарифмом* числа x Непер называл то, что в современной записи есть $10^7 \ln(10^7 x^{-1})$.

[10] В подобных равенствах запись $\exp x$ удобнее, чем e^x.

Определение степени положительного числа с любым действительным показателем

Для любого *положительного* числа a и любого *действительного* числа b полагают *по определению*[11]

$$\boxed{a^b = \exp(b\ln a)}.$$

Первое, что надлежит сделать, — проверить *согласованность* данного определения *степени* с традиционным, если *показатель* есть *рациональное* число.

Если $b = n$ (*натуральное* число), то

$$a^b = \exp(b\ln a) = \exp(n\ln a) = \exp(\overbrace{\ln a + \cdots + \ln a}^{n}) = \overbrace{\exp(\ln a)\cdots\exp(\ln a)}^{n} = \overbrace{a\cdots a}^{n}.$$

Если $b = -n$ (*целое отрицательное* число), то $a^b = \exp(b\ln a) = \exp(-n\ln a) = \frac{1}{\exp(n\ln a)} = \frac{1}{\underbrace{a\cdots a}_{n}}$.

Если $b = 0$, то $a^b = \exp(b\ln a) = \exp 0 = 1$.

Если же $b = \frac{m}{n}$ (*рациональное* число), то $(a^b)^n = \exp\big(n\ln(\exp(b\ln a)\big) = \exp\big(n(b\ln a)\big) = \exp\big(m\ln a\big) = a^m$, т. е. число $a^b = \exp\big(\frac{m}{n}\ln a\big)$ удовлетворяет уравнению $x^n = a^m$ и поэтому совпадает с числом $\sqrt[n]{a^m}$.

Проведенная проверка показывает что, к примеру, число 2^3 можно *эквивалентно* понимать и как $2\cdot 2\cdot 2$, и как $\exp(3\ln 2)$, а число $2^{\frac{1}{3}}$ — и как $\sqrt[3]{2}$, и как $\exp(\frac{1}{3}\ln 2)$; число же $2^{\sqrt{3}}$ следует понимать исключительно как $\exp(\sqrt{3}\ln 2)$.

Данное определение *степени* вместе с *основным тождеством для экспоненты* $\exp x_1 \exp x_2 = \exp(x_1 + x_2)$ позволяет просто и аккуратно вывести привычные *свойства степени*:

$\boxed{a^{b+c} = a^b a^c, \quad (a^b)^c = a^{bc} \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}}$ *для любого положительного числа* a *и любых действительных чисел* b, c.

<u>*Доказательство*</u>.

$a^{b+c} = \exp\big((b+c)\ln a\big) = \exp(b\ln a)\exp(c\ln a) = a^b a^c$;

$(a^b)^c = \exp\big(c\ln(\exp(b\ln a))\big) = \exp(cb\ln a) = a^{bc}$;

$a^{-b} = \exp(-b\ln a) = \frac{1}{\exp(b\ln a)} = \frac{1}{a^b}$.

Основные предельные соотношения для степенной и показательной функций и “второй замечательный предел”

$\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^\alpha - 1}{x} = \alpha}$, *или* (*в другой записи*[12]) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha}$ для любого действительного числа α.

<u>*Доказательство*</u>. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(\alpha\ln(1+x)) - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(\alpha\ln(1+x)) - 1}{\alpha\ln(1+x)}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = \alpha$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$ *для любого положительного числа* a, $a \neq 1$.

<u>*Доказательство*</u>. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(x\ln a) - 1}{x}\frac{\ln a}{\ln a} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(x\ln a) - 1}{x\ln a}\ln a = \ln a$.

---

[11] Другие известные определения (см., например, [**1**], n° **19**) слишком трудоемки и скучны, чтобы пытаться воспроизводить их в лекционном курсе, не пряча трудности за ширму лукавых словосочетаний “легко видеть” и “нетрудно показать”.

[12] С переходом от переменной x к переменной $1 + x$.

|| $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$, ***или в эквивалентной записи*** $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\exp 1=e.$

Традиционное доказательство последнего предельного соотношения[13] (см., например, [**1**], n° 54) в практике лекционных курсов проходит при, мягко говоря, недостаточно внятном определении величины $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ для иррациональных значений x, и потому не является полновесным. Что же касается эпитета "замечательный", то в рамках предложенного здесь изложения его прежде всего заслуживают *основное предельное соотношение для экспоненты* $\boxed{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\exp z-1}{z}=1}$ и *основное тождество для экспоненты* $\boxed{\exp(z+\zeta)=\exp z\exp\zeta}$.

Литература

[**1**] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. М.: Наука, 1966.

[**2**] Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. М.: Физматлит, 1961.

[**3**] Шведенко С.В. Две заметки по математическому анализу. "Математическое образование", 2011, № 3-4 (59-60), с. 34-37.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

[13] Или, как еще говорят, *"второго замечательного предела"*.

Проблемы развития мышления при работе пользователя в современных информационных системах

Федосеев А. И.

Часть 2: Рефлексивный выход из системы

В первой части статьи мы рассмотрели историю развития информационных технологий и выделили основные проблемы развития мышления учащихся при работе за компьютером. Мы отметили, что одновременно с упрощением пользовательского интерфейса современных информационных систем, уменьшился их потенциал для развития мышления учащихся.

Во второй части статьи мы предлагаем вашему вниманию описание диагностики, проведенной среди учащихся, учителей и даже ИТ-профессионалов. Результаты диагностики показали достоверность выдвинутой гипотезы, а также необходимость рефлексивного выхода из системы как условия дальнейшего развития мышления учащихся.

1. Постановка гипотезы

В первой части статьи мы показали, как процессы развития информационных технологий и связанные с ними процессы изменений в социуме, в системе образования и в мышлении пользователей породили ситуацию тотальной формализации работы за компьютером. Современные процедурные информационные системы и соответствующий способ работы пользователя обладают низким потенциалом развития мышления учащихся, это прежде всего выражается в:

- ограниченности действий по шаблону, согласно выученным формальным процедурам;
- блокировании получения новых знаний при условии, что пользователь принципиально не понимает внутреннего устройства системы и, следовательно, не совершает по отношению к ней содержательных действий;
- деструктивный характер сбоя в работе, который приводит скорее к отказу от использования системы, чем к рефлексии и изменению собственного способа работы.

Первым шагом к пониманию недостатков таких систем и соответствующих действий пользователя может стать осознание им того факта, что он находится внутри системы и подчиняется ее правилам[1]. Преодоление этой ситуации возможно через рефлексивный выход за рамки системы. Второй шаг — собственно развитие мышления — может осуществляться за счет понимания пользователем ограничений системы и переконструирования ее для решения своих задач.

Мы рассмотрим простейшую процедурную информационную систему, которая тем не менее позволяет зафиксировать ключевые особенности работы пользователя. Эта система может быть разработана и реализована не только в виде компьютерной программы, но и в материальном исполнении. В качестве исходной задачи была взята систематизация заданного набора книг, одна из классических задач по работе с информацией.

[1] Ситуация работы в формальной системе и необходимости осознания ее рамок для решения исходной задачи рассматривалась ранее Д. Р. Хофштадтером на другом — математическом — материале в задаче о «Головоломке MU» (Хофштадтер, 2001).

На рис. 1 представлена схема процедурной системы, как она была спроектирована программистом и доступна пользователю. На схеме разделены слой мышления и слой действий пользователя информационной системы. Как мы уже отмечали ранее, сама процедурная система существует не только в виде материального обеспечения или набора доступных пользователю процедур, но и в сознании пользователей.

Рис. 1. Схема связи мышления и деятельности пользователя при работе в процедурной системе

Создавая такую систему, программист заложил в ее основание определенные информационные модели, как может быть организована информация: в виде модели дерева или таблицы. Но для пользователя был организован только лишь набор конкретных процедур, таких как «поместить книгу в ящик» или «расположить ящики на полке в нужном порядке» — исходная информационная модель оказалась скрыта от пользователя, даже не предполагалось, что она понадобится пользователю. Пользователь работает только со слоем знакового замещения, совершая только формальные действия: располагает в нужном порядке знаки-книги, помещает их внутрь знаков-ящиков и т. п. Такой способ работы пользователя приводит к *знаковой натурализации* (Устиловская, 2008), что выражается в отсутствии при работе с системой опоры на понимание принципов ее работы и содержание тех процедур, которые предоставлены пользователю, и, напротив, в опоре на опыт работы с соответствующими объектами в реальности. Характерный пример: работая со знаками-ящиками и знаками-книгами, пользователю даже не придет в голову возможность размещения одной книги в нескольких ящиках, ведь это невозможно в случае реальных ящиков и книг. Тогда как в случае работы с информационными объектами этот шаг был бы абсолютно легальным и, может быть, даже более эффективным.

Рассмотренная задача систематизации является лишь материалом, на котором можно продемонстрировать особенность работы пользователя в формальной системе. Находясь в рамках системы и работая только по предложенным правилам, пользователь не сможет выйти не только к базовым информационным моделям, но и к более общим принципам и способам классификации, основам систематизации. А значит, поставленная задача может быть решена только ограниченным способом, который гарантируется устройством системы.

Действия пользователя в системе могут развиваться по одному из следующих сценариев (рис. 2). Когда пользователь действует в системе (рис. 2 а) он может не замечать ее структуры и ограничений. Столкнувшись с какой-то трудностью или непониманием, пользователь может просто выйти из системы (рис. 2 в), отказаться от ее использования, прервать свою деятельность. Мы все регулярно видим примеры такого поведения пользователей любых технических систем, сталкивающихся с непредвиденными трудностями, которые не в состоянии устранить. Возможен и другой вариант: пользователь может выйти в рефлексивную позицию по отношению к собственной работе в системе (рис. 2 б) — сопоставить способ собственной работы (каким процедурам он следовал) и тот сбой, который произошел в его работе. Однако, в этом случае пользователь не сможет выйти из системы, попытки изменить способ своей работы будут сводиться к перебору возможных вариантов действия, выбору среди доступных процедур.

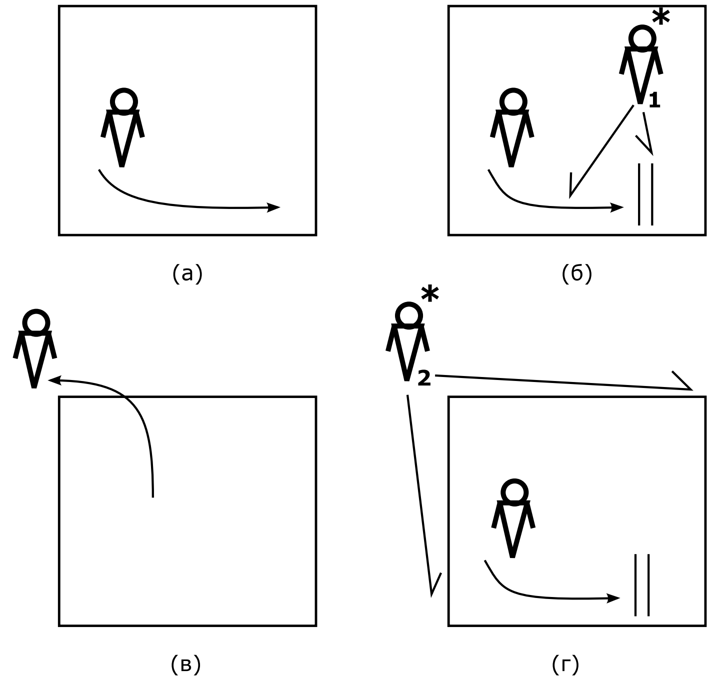

Рис. 2. Схема возможных вариантов развития действия пользователя в системе

Рефлексивный выход из системы (рис. 2 г) подразумевает одновременное удержание двух позиций: пользователя, который решает исходную задачу в данной ему системе и сталкивается с определенными трудностями, и рефлексивную позицию вне системы, благодаря которой можно увидеть ограничения не только в способе своей работы, но и в устройстве самой системы — понять невозможность решения задачи в заданных условиях. Различая рефлексию способа своей работы (позиция 1 на схеме) и рефлексивный выход из системы (позиция 2) мы отмечаем принципиальные ограничения первой и необходимость выхода ко второй рефлексии для дальнейшего развития мышления учащихся.

Таким образом, рефлексивный выход можно будет считать конструктивным только если пользователь, выйдя за рамки системы, или начнет использовать ее по-другому, или что-то изменит в ее структуре, или выберет другое средство для решения своей задачи. В этом случае компьютер может превратиться в средство развития мышления, рефлексии, освоения способов моделирования, проектирования и конструирования, а также служить инструментом для решения широкого класса задач.

Для того, чтобы получить экспериментальное подтверждение данной гипотезы, а также выявить особенности рефлексивного выхода из системы, в рамках психологического исследования нами была проведена следующая диагностика.

2. Описание проведенной диагностики

Целью диагностики было воссоздание условий и механизмов работы пользователя в системе, а также преодоления пользователем этих рамок в ходе решения поставленной задачи. Участнику диагностики задача ставилась таким образом, что, решая ее, он оказывался в рамках жесткой системы, без преодоления которой в конечном счете нельзя было получить решение. Материалом для диагностики стала информационная система систематизации книг, кратко описанная в предыдущем разделе. Так, диагностика проводилась с существующей информационной системой, реализованной не в виде компьютерных программ, но с некоторым ее материальным подобием, с определенной знаковой системой, работающей по заданным правилам. Участникам диагностики выдавалась задача, точная формулировка которой представлена далее. В ее условие были «зашиты» определенные способы классификации, а участники диагностики могли двигаться в предложенном русле и, столкнувшись с непреодолимыми трудностями в какой-то момент, все же попытаться выйти за рамки системы.

Данная диагностика является первым шагом в уточнении гипотезы. Сразу отметим, что исследование нельзя считать статистически обоснованным — слишком мала выборка участников. Тем не менее, диагностика позволила получить экспериментальное подтверждение выдвинутой гипотезы, выделить интересные способы выхода пользователями за рамки системы, а также наметить направления для будущего более масштабного исследования. Интерпретация полученных результатов будет представлена ниже.

Задание было устроено следующим образом: участникам предлагался набор из 50 или 100 книг[2]. Нужно было систематизировать книги так, чтобы поиск и добавление новой книги производились как можно быстрее. Каждая книга задавалась автором и названием — все на русском языке. Для того, чтобы «захватить» участника определенной системой и встроенным в нее способом работы, предлагался следующий механизм для практической классификации: книги выдавались не в виде списка, а как набор из небольших карточек (каждая с напечатанным названием книги и автором), а также набор пустых конвертов, которые могли вкладываться в друг друга, и, конечно, в них могли вкладываться книги. Конвертам можно было давать названия, подписывая их карандашом. Разрешалось использовать любое количество конвертов любого размера. Участникам не запрещалось использовать какие-то листы и тетради для записей, но, как показала диагностика, далеко не все воспользовались этой возможностью.

Рис. 3. Раздаточные материалы для диагностики

Диагностика производилась в три такта. На каждый такт отводилось по 15–20 мин. На первом такте участники пытались систематизировать книги по заданным условиям с использованием предложенного раздаточного материала (см. рис. 3). Задание для первого такта формулировалось следующим образом:

Даны 50 (100) книг с авторами и названиями. Нужно расположить книги в каком-то порядке так, чтобы нужную книгу можно было найти быстрее всего, а добавление еще одной книги не было бы слишком долгим. Книги хранятся в ящиках. Каждому ящику нужно дать название. Ящики могут находиться в других ящиках. Число ящиков не ограничено.

По завершении первого такта, когда все книги оказывались как-то распределены в ящиках, выдавалось задание на второй такт:

Проведите следующие измерения с упорядоченными ящиками/книгами. Посчитайте число операций, которые требуются на поиск книг и на добавление новых книг. Число операций считается следующим образом:

- найти ящик с нужным названием, перебрав доступные ящики в любом порядке (с начала или с конца) $= N$ операций, где N — это число просмотренных ящиков;

[2] Для целей диагностики подходит любой список популярных книг с указанием автора и названия. Мы использовали список из «ста лучших книг», выбранных голосованием в интернете на сайте http://www.100bestbooks.ru

- открыть ящик и получить доступ к его содержимому = 1 операция;
- найти книгу с нужным названием/пометкой, перебрав доступную стопку книг в ящике в любом порядке (с начала или с конца) = N операций, где N — это число просмотренных книг
- выбрать книгу из стопки книг случайным образом = 1 операция;
- добавить книгу в начало или в конец в открытом ящике = 1 операция;
- добавить книгу в стопку на определенное место = столько операций, сколько требуется для поиска нужного места +1 операция;
- взять новый ящик (он считается уже открытым) и поместить его на определенное место = *столько операций, сколько требуется для поиска нужного места* +1 *операция.*

Для поиска и добавления книг участникам выдавались отдельные названия книг и имена авторов, которые нужно найти, а также новые книги, которые нужно добавить. Эти авторы и названия книг частично присутствовали в изначальном наборе книг, а частично не были представлены среди выданных книг. Также интересно было предложить добавить книгу с названием и автором на английском языке или книгу с несколькими авторами одновременно.

Полученные участниками версии сопоставлялись между собой по количеству затраченных операций и по другим признакам (об этом мы будем говорить подробнее дальше, когда будем анализировать результаты диагностики). После второго такта мы также просили изобразить примененный способ систематизации книг в виде схемы.

На третьем такте диагностики предлагалось усовершенствовать систему, а фактически последовательно перебирать варианты, работая с построенной системой:

Известно, что можно расположить книги и ящики таким образом, что найти любую книгу (или убедиться в ее отсутствии), можно будет не более чем за 9 операций[3]*, а добавить еще одну книгу в этом случае можно будет не более чем за 8 операций. Попробуйте найти такое расположение.*

Особенность этого задания состоит в том, что получить требуемые значения для числа операций невозможно, если оставаться строго в рамках предложенной системы древовидной классификации. Таким образом мы достигали сбоя в деятельности, который подталкивал участников диагностики к осмыслению ограничений собственного способа работы.

Участниками диагностики были выбраны как дети, так и взрослые, причем специально с различным уровнем знаний и способностей в области информационных технологий. Диагностика проводилась в двух режимах:

- индивидуально, при работе непосредственно с книгами и конвертами, а также с последующим анализом действий участника, совместным обсуждением результатов, непосредственным выделением его способа работы — всего 11 участников, среди которых были ученики 9-го и 10-го класса, учителя общеобразовательной школы (как по математике и информатике, так и по другим предметам), кандидаты психологических и физико-математических наук, один профессионал в области информационных технологий;
- с классом в рамках урока по метапредмету «Задача» (8 класс школы № 1314 г. Москвы). В этом случае задание давалось без карточек и конвертов, только список книг на отдельном листе. Поэтому ученики сразу работали с моделями, рисовали схемы. Здесь работа строилась в традиционном для метапредметов заходе: ученики делились на группы, выдвигали версии, сравнивали и обсуждали их у доски.

[3]Число операций 9 для поиска и 8 для добавления относятся к начальному условию с 50 книгами. Если изначально было выдано 100 книг, то эти числа будут 10 и 9 соответственно. Числа эти можно получить, если поставить в соответствие каждому названию книги и автору уникальное число — с помощью простейшей хэш-функции — и построить на базе этих чисел бинарное дерево, удобное для поиска и вставки.

В итоге были получены интересные и разнообразные результаты, которые мы рассмотрим в следующем порядке.

Среди результатов диагностики можно выделить **модели, которые демонстрировали участники** — то, каким образом участники строили свою систематизацию книг. Первый и самый распространенный способ (рис. 4 а) — выбирались некоторые формальные критерии для классификации (по первой букве автора или названия книги и т. п.). В данном случае правильнее было говорить о некотором упорядочивании. Достаточно быстро участники диагностики понимали, что работать с одним большим списком не эффективно с точки зрения перебора и начинали группировать буквы, выстраивая дерево.

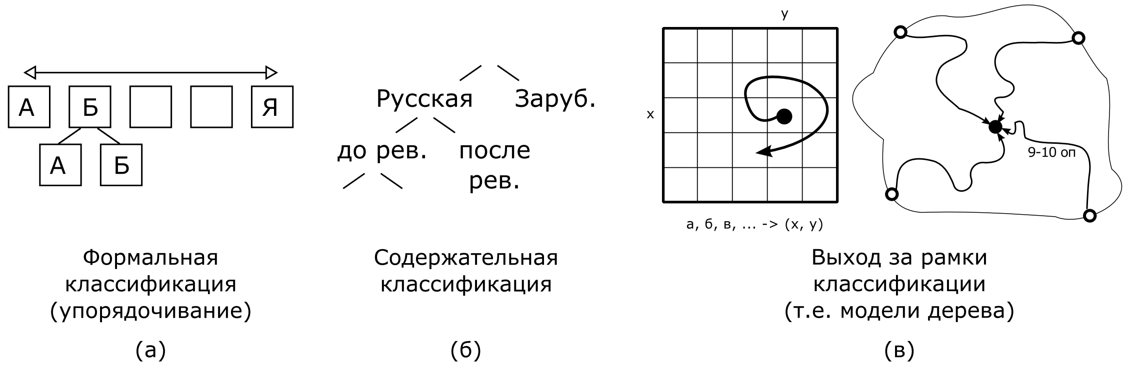

Рис. 4. Промежуточные результаты диагностики: схемы, которые предложили участники

Другой способ классификации был содержательным (рис. 4 б): каждую из книг классифицировали (по названию и автору) — что это за произведение, к какому жанру относится, каково время создания произведения, что это за художественное направление и т. д. Важно, что работа с такими сложными классификациями потребовала совсем другого, содержательного отношения к предложенным книгам. Многие участники натолкнулись на то, что построить такую классификацию, опираясь только на собственные знания, сложно или практически невозможно. Показательно, что одна группа восьмиклассников построила огромное дерево, включающую классификацию по странам, годам, жанрам и т. п., но не смогла сработать с такой классификацией, когда дело дошло до непосредственного расположения выданных книг. На этих примерах участникам диагностики очень хорошо была видна разница между формальной и содержательной классификацией. Формальную классификацию можно поручить машине, тогда как для содержательной классификации и ее последующего использования требуется набор знаний[4].

Выход на содержательную классификацию — яркий пример столкновения пользователя с ограничениями системы. В изначальном условии задачи такой способ не запрещался, но и никаким образом не поощрялся: исходные данные включают в себя только название произведения и имя автора, а значит все признаки для классификации пользователи должны были вводить самостоятельно. Система подталкивала пользователя уходить от содержательной классификации в пользу формальной, хотя она была бы менее эффективной с точки зрения числа операций.

Различие между формальной и содержательной классификацией проявилась еще в одном интересном наблюдении. Большинство участников диагностики, которые распознали исходную задачу как задачу по информатике, предложили одну из вариаций формальной классификации, а те участники, которые отнесли задачу к литературе, предложили содержательную классификацию. Этот пример демонстрирует то, на какой тип работы настраивает существующий учебный предмет «Информатика», что в этом предмете, как и в математике, часто используется формальная мыслительная работа, работа скорее со знаками, чем с содержанием.

[4]Предложенную задачу можно было бы использовать и для для передачи ученикам способов классификации, тогда следующее задание можно сделать открытым: дать несколько задач информационного характера — на хранение и поиск специфических данных, обработку определенной информации и т. п. — и предложить самостоятельно построить эффективную систему для работы с такой информацией.

К третьей группе результатов по способу классификации (рис. 4 в) можно отнести все предложения, которые не укладывались в изначально заложенную модель дерева. Эти варианты почти ни у кого не получились сразу, а только после некоторых тактов работы. Здесь объединены все варианты, которые позволяли совершенно по-другому выстроить способ работы — не простым перебором и не углублением дерева. Например, предложение помещать одну книгу одновременно в несколько ящиков совершенно невозможно представить в формате раскладывания книг по ящикам, но такая модель ссылок позволяет превратить дерево в сеть и сделать поиск намного более эффективным. Другой пример — введение системы координат для каждого из названий или авторов и получение двумерного или даже пространственного упорядочивания. Характерно, что любой из этих примеров потребовал от автора выхода из предложенной системы правил и ограничений.

Второй блок результатов диагностики — то, **как участники организовывали свою работу**. Самый распространенный способ чаще всего проявился при работе с материальными книгами и конвертами — это метод проб и ошибок, а именно: построение классификации, проверка эффективности, повторная классификация и т.п. Эти участники сразу начинали раскладывать книги по ящикам, даже не пытаясь предварительно выстроить какую-то схему. Далее они постепенно начинали выходить к результатам (а) и (б), описанным выше. Интересно, что в этом случае различие двух режимов проведения диагностики — индивидуально и в классе — позволило увидеть такую особенность работы человека в системе, как **«захват» человека материалом**. Большинство из тех, кто выполнял задание индивидуально (с книгами и конвертами), последовали описанному способу работы «проб и ошибок», и только трое попытались предварительно построить модель на бумаге. Тогда как при запуске диагностики в классе, где участники сразу начинали работать с моделями, уже на первом такте диагностики появилось несколько версий, выходящих за рамки предложенной системы.

Второй способ работы состоял в том, что участники брали какой-то известный им образец классификации и реализовывали его на данном материале. Те, кто много работал с библиотеками, сразу начинали восстанавливать библиотечный каталог. Есть и более характерный пример: профессиональный программист сразу начал вводить классическую модель организации реляционных баз данных, хотя этот способ абсолютно не был применим в задаче с ящиками и книгами. Вместо предложенной системы, он начал работать в другой — хорошо ему известной, понятной и актуальной для его текущей повседневной работы.

Наконец, третий способ, которым воспользовалось меньшинство участников, состоял в том, что они пытались сперва на бумаге или в мышлении построить схему расположения книг, а затем верифицировать ее и править одновременно с подсчетом числа операций. Эти участники зачастую даже не успевали разложить бумажные книги по ящикам — все то время, когда другие участники раскладывали книги, они уже работали с моделями. Характерно, что большая часть результатов из группы (в), описанной выше, были предложены при таком способе работы.

Наконец, третий блок результатов диагностики касается того, **как участники осуществили рефлексию своего способа деятельности** и **рефлексивный выход из системы** (см. рис 5). Можно выделить несколько принципиально разных способов организации рефлексии, все они представлены в таблице 1.

Первым и принципиальным шагом, заложенным в структуру диагностики, был сбой в ходе решения задачи: предложенные участниками диагностики схемы расположения книг и ящиков давали слишком большое число операций, что не позволяло получить решение с требуемой эффективностью. Участникам диагностики предлагалось объективировать способ своей работы, основываясь на выбранной схеме расположения книг. В ходе обсуждения схемы они выходили в **рефлексивную позицию по отношению к способу своей работы** (позиция 1 на рис. 5). Аналогичную схему рефлексии способа мы можем наблюдать при задачной форме организации учебного процесса (Половкова, 2000). Однако, такая рефлексия не позволяет пользователю увидеть ограничения системы и, тем более, выйти из нее.

Таблица 1: Способы выхода в рефлексивную позицию, проявившиеся в ходе диагностики

Название рефлексивной позиции	**Условия осуществления рефлексии**	**Что объективировалось в ходе рефлексии**	**Результат рефлексии**
1. Рефлексия способа работы	Сбой в работе, поставленная задача не могла быть решена текущим способом или решается неэффективно	Способ поиска и добавления новых книг в виде схемы расположения книг	Усовершенствование схемы расположения книг и способа своей работы
2. Выход к моделям, заложенным в основании системы	Невозможность решить задачу, работая только лишь формально, со знаковым замещением информационных моделей. Необходимость перехода от формальных к содержательным действиям	Структура книг и ящиков и схема способа работы с этой структурой, обеспечивающие выход на идеализации дерева, списка, сети и др.	Переход к содержательным действиям с моделями, понимание ограничений предлагаемых моделей и соответствующих содержательных действий, выход из системы через построение новых моделей
3. Выход на построение новой системы	Невозможность решить исходную задачу в рамках имеющейся системы. Дополнительное задание на построение новой системы без ограничений данной	Функциональность заданной и вновь разработанной системы	Понимание принципов и моделей, заложенных в исходную систему, и связанных с этим ограничений
4. Выделение ограничений системы	Выделение и фиксация ограничений исходной системы	Ограничения исходной системы	Понимание ограничений системы и способов работы в ней, построение новой системе на базе старой

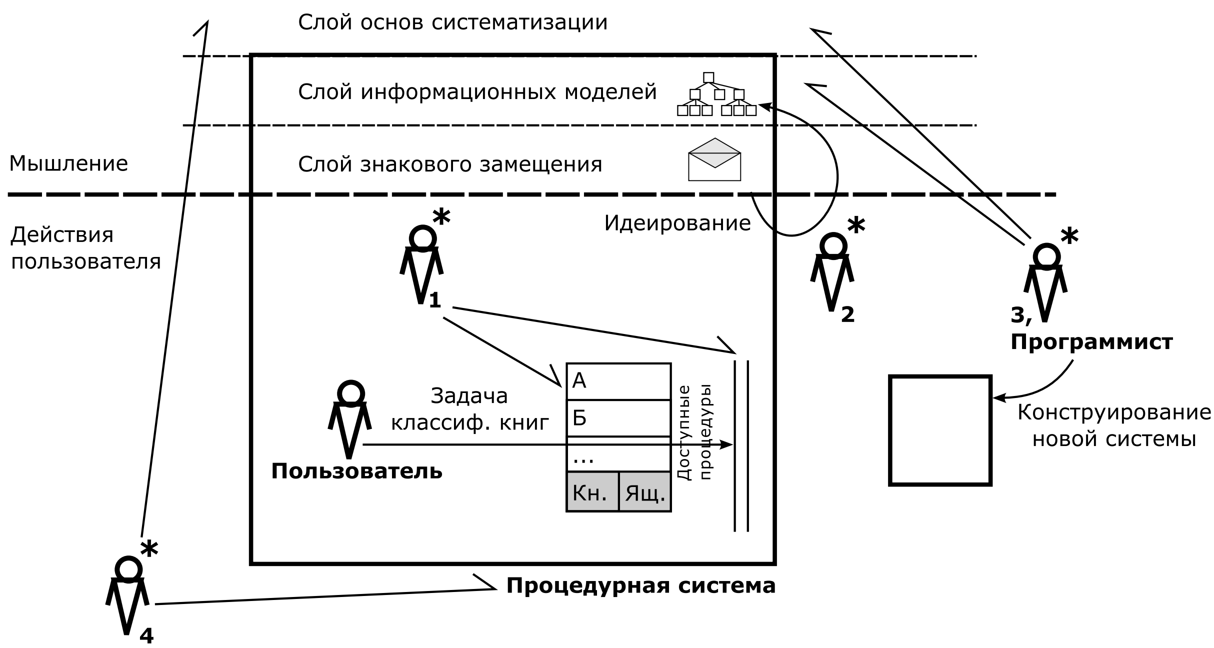

Рис. 5. Схема рефлексивных позиций пользователя относительно системы

Если описанный вариант рефлексии был характерен как для индивидуального выполнения диагностики, так и для группового, то все описанные далее способы рефлексии проявили себя только в ходе групповой работы и групповой организации рефлексии. Это отражает то, что в процессе обучения особую роль играет коммуникационный аспект рефлексии — выделение и обсуждение версий, различение и т. д. (Громыко Ю. В., 2000).

Второй способ организации рефлексии состоит **в преодолении знаковой натурализации** и выходе к базовым информационным моделям, заложенным в систему (позиция 2 на рис. 5). Мы уже отмечали выше, как по-другому строилась работа в классе при отсутствии материальной составляющей диагностики. Как только участники переходили к построению схем и обсуждению их с другими участниками диагностики, они получали возможность переходить к обсуждению соответствующих информационных моделей — дерева и списка. Переход от слоя знакового замещения к слою моделей, за которыми стоит определенное деятельностное содержание, осуществлялся благодаря процессу идеирования: за структурой из ящиков и книг, через способ структуризации книг, выделялись элементы дерева и других математических моделей. Этот переход удалось осуществить и за счет переноса моделей на другой материал — одна ученица предложила классификацию растений, а разработанный способ применила к книгам. Работа с моделями позволила участникам не только увидеть ограничения работы с заданными моделями и процедурами, но и получить принципиально новые модели, которые не закладывалась в исходную систему. Например, некоторые участники диагностики ушли от модели дерева к модели сети, у них одна книга могла находиться одновременно в нескольких ящиках. Другие предложили перейти от линейного упорядочивания к пространственному, когда каждой книге специальным образом ставились в соответствие пространственные координаты, и поиск производился в таком структурированном дву- или трехмерном пространстве.

Третий возможный способ рефлексивного выхода был только намечен в рамках проведенной диагностики (позиция 3 на рис. 5). Этот способ подразумевает **переход к проектированию и конструированию новой системы**. В чем-то эту позицию можно сопоставить с рассмотренной ранее позицией программиста. Такую работу можно организовать с помощью дополнительного задания: предложить разработать для заданного списка книг любой способ упорядочивания их и последующего поиска — без ящиков и подсчета операций, потому что в том числе они и задают определенные ограничения. Это задание дает открытую систему, которую предстоит разработать, ученики в этом случае смогут использовать любые новые способы поиска и расположения, в том числе изобретать новые. Ведь если брать реальные классификационные системы, например, расположение книг в библиотеках, можно увидеть, что там обычно используются одновременно несколько поисковых систем с разными критериями, которые накладываются на физическое расположение книг. Создав собственную систему, участники диагностики могут легко обнаружить ограничения и недостатки исходной.

Наконец, четвертый способ, в некоторой степени включающий в себя два предыдущих, характеризовался **пониманием ограничений исходной системы и собственного способа работы в ней**. Если сознательно выделить все ограничения, которые были наложены на решение задачи, можно получить достаточно большой список: это и жесткие ограничения, «зашитые» в условие задачи: небольшой список доступных процедур (например, возможности хранения книг в ящиках), особенности материала (в русском языке 33 буквы), ограничения содержательной классификации, о которых мы говорили выше; это и те ограничения, которые привнесли сами участники диагностики, — например, многие из них говорили, что книги могу быть только на русском языке (только такие книги были даны в начальном наборе), и не знали что делать, когда им давалась книга на английском языке. Можно выделить и более сложные ограничения, на которые ученики выходили, начиная работать с моделями. Например, ограничения исходно заложенной информационной модели — дерева, — которое, с точки зрения минимизации числа операций, ограниченно как в ширину, так и в глубину; с какого-то момента дальнейший рост дерева становится неэффективным.

Выделяемые ограничения фиксировались, участники выделяли природу этих ограничений, проверяли, можно ли было отказаться от части ограничений, не вступая в противоречие с исходной задачей. Таким образом, участники пробовали самостоятельно перестроить систему, отказываясь от некоторых ограничений. Это позволило им выйти на самый базовый слой общих принципов классификации и систематизации, и увидеть, что их предыдущая работа в системе не могла привести к решению задачи.

Подводя итоги полученным результатам, можно отметить, что данная диагностика, проведенная даже в таком упрощенном варианте, на материале задачи классификации, хорошо показывает самим ее участникам ограничения процедурных систем и необходимость выхода из системы для решения сложных задач. В следующем разделе мы вернемся к поставленной гипотезе и с теоретической точки зрения рассмотрим рефлексивный выход из системы и развитие мышления пользователей.

3. Рефлексивный выход из системы и развитие мышления пользователя

Рефлексия является важнейшей составляющей мыслительной работы. Мы рассматриваем процесс рефлексии как базовое средство «освобождения» пользователя от ограничений процедурных информационных систем. Следующим за этим этапом может стать понимание пользователем границ системы и переконструирование ее для решения собственной задачи — и в этом случае можно говорить о развитии мышления.

В данной работе мы использовали понимание процесса рефлексии, которое принадлежит Н. Г. Алексееву (Алексеев, 1982). Согласно ему, рефлексия — это особенная организованность, особенная творческая работа личности, которая характеризуется следующими четырьмя критериями:

- произвольная остановка деятельности, которая наступает, когда в деятельности что-то не срабатывает;
- фиксация действия — ограничение выполненного и остановленного действия, выделение его временных и других рамок;
- объективация действия — действие становится объектом рассмотрения, оно описывается словами или в схеме, к нему может выстраиваться отношение;
- отчуждение собственного действия, необходимое для того, чтобы беспристрастно рассмотреть совершенное и объективированное действие.

Можно выделить, как эти этапы реализовались в проведенной диагностике. Остановка деятельности была «зашита» в замысел диагностики — как в виде задания-ловушки, так и по самому формату проведения диагностики (после второго такта необходимо было остановиться и построить схему разработанной системы). Фиксация и объективация действий производилась не со всеми участниками диагностики, но с большинством участников — они объективировали свой способ работы в схемах. Во втором варианте диагностики — с классом — такая работа вообще была встроена в сценарий занятия (изображение схемы своей работы на доске, построение отношений к схемам других групп и т. п.). Последний критерий рефлексии был характерен только для тех участников диагностики, которые не просто продемонстрировали схемы свой работы, но и предложили варианты по ее усовершенствованию.

Диагностика показала принципиальное различие между двумя типами рефлексии — **рефлексии пользователем способа работы** и **рефлексивный выход из системы** (рис. 2 — *б* и *г*). Описанные в предыдущем разделе типы рефлексии (позиции 2–4) позволяют пользователю перейти от следования процедурам к мыслительной работе, пониманию ограничений и конструированию новой системы, что является необходимым для дальнейшего развития мышления учащихся.

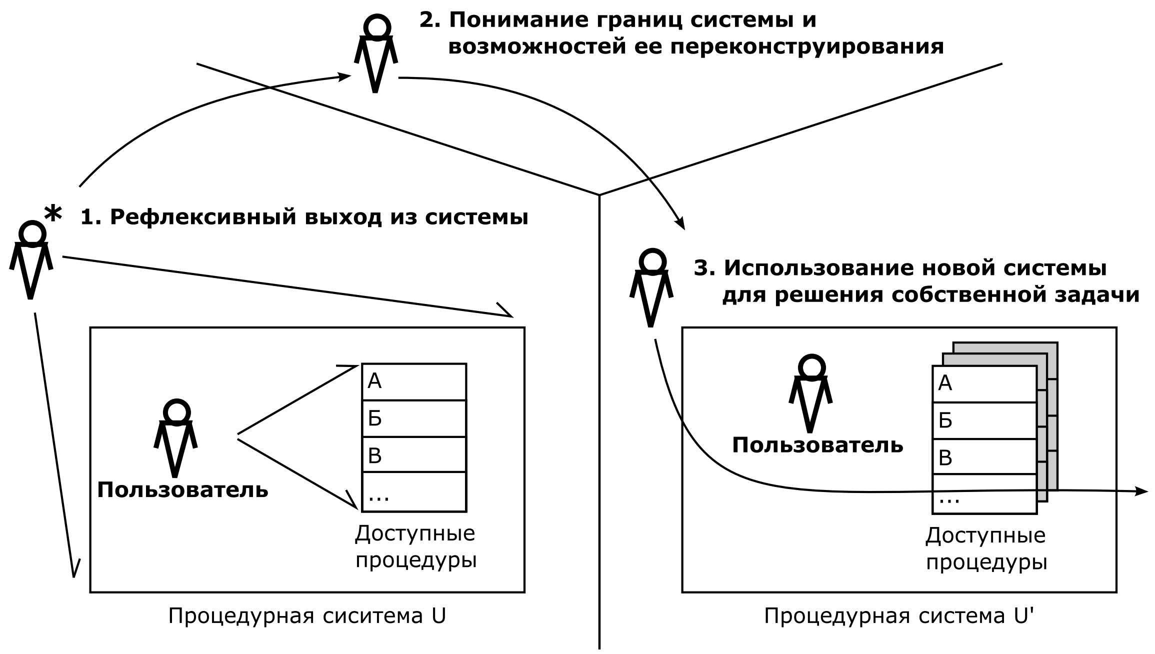

Рис. 6. Схема этапов выхода за рамки процедурных систем

Сейчас, когда процедурные информационные системы для массового потребителя окончательно вытеснили любые другие типы систем, очень важно включить в практику обучения работы за компьютером и в использование таких систем следующие этапы (рис. 6):

- рефлексивный выход и осмысление не только собственных действий в системе, но и системы в целом;
- понимание ограничений применяемой системы и возможностей ее переконструирования для избавления от этих ограничений;
- использование переконструированной или новой системы для решения собственной задачи.

Этапы 2 и 3 непосредственно связаны с развитием мышления пользователей, так как требуют определенных мыслительных действий: обнаружение границ системы (что она в принципе позволяет и не позволяет сделать), конструирование новой системы на базе старой исходя из требуемых условий.

В педагогической практике такая последовательность может быть реализована в виде отдельного учебного модуля (Федосеев, 2011) или в виде полноценного учебного курса. К примеру, реализация такого подхода использовалась нами при создании учебного курса «Введение в информационное пространство» (Федосеев, 2010), совмещающем в себе как предметное содержание, связанное с гуманитарной спецификой информатики, так и мыследеятельностное содержание.

4. Направления для дальнейшего исследования

Дальнейшее исследование психологических аспектов работы пользователя в формальной системе и необходимости рефлексивного выхода из системы как условия для развития мышления учащихся позволит начать работу над проектированием школьного курса информатики на принципиально новом уровне. Здесь мы отметим несколько ближайших шагов, которые послужат развитию этого направления.

Прежде всего необходимо реализовать более масштабную версию проведенного исследования: для того, чтобы количественно подтвердить полученные результаты, а также высветить ряд вопросов, которые могут проявиться при расширении контингента диагностики. Материалом для будущей диагностики станет небольшая модель процедурной информационной системы, которая позволит провести диагностику в удаленном режиме.

Второй момент, который требует дальнейшей разработки — это вопрос генезиса пользователя информационной системы. Вместе с огромным числом задач, решаемых с помощью компьютеров, существует также и множество типов пользователей. Постановка эксперимента на проектирование определенного типа пользователя, исходя из решаемых им задач, позволит с совершенно другой стороны, из позиции архитектора, взглянуть на ограничения процедурных систем.

Третий вопрос, недостаточно раскрытый в работе, — особенность знаковых пространств в процедурных и других информационных системах. Требуется разработать язык описания знаковых пространств и принципов работы с ними, который позволит описать интерфейс информационных систем и облегчить понимание ограничений системы пользователем.

Результаты исследования должны лечь в основу разработки нового курса школьной информатики. Здесь мыследеятельностные технологии позволят перейти от узкого и чисто предметного содержания информатики к деятельностному содержанию, развитию мышления учащихся. Необходимо разработать такой курс, который помимо передачи предусмотренных образовательными стандартами ИТ-компетентностей, позволял бы учащимся достигать личностных и метапредметных результатов обучения, работать с идеализациями и строить новое знание, ставить и решать личные задачи с помощью компьютера, понимать знаковые системы и актуальные проблемы информационного общества.

Литература

[1] Алексеев Н. Г. *Рефлексия.* Доклад на летней психологической школе факультета психологии МГУ (1982 г.) // Seminarium Hortus Humanitatis. Альманах № 10. — Рига, 2007.

[2] Громыко Ю. В. *Мыследеятельностная педагогика.* — Минск, 2000.

[3] Давыдов В. В. *Виды обобщения в обучении (логико-психологические проблемы построения учебных предметов).* — М.: Педагогика. — 1972.

[4] Половкова М. В. *Психолого-педагогические условия освоения задачной формы организации образовательного процесса в средней школе*: диссертация на соискание ученой степени кандидата психологических наук. — М.: Ин-т пед. инноваций РАО. — М.: 2000.

[5] Устиловская А. А. *Психологические механизмы преодоления знаковой натурализации идеального содержания геометрических понятий*: диссертация на соискание ученой степени кандидата психологических наук. — М: Психол. ин-т РАО. — 2008.

[6] Федосеев А. И. *Математическое моделирование в решении задач* // Устиловская А. А. Метапредмет «Задача»: Учебное пособие для педагогов. — М.: НИИ ИСРОО, Пушкинский институт, 2011.

[7] Федосеев А. И. *Мыследеятельностная работа на материале информатики. Разработка учебного курса «Введение в информационное пространство»* // Инновационное пространство в системе образования города Москвы. Мыследеятельностная педагогика: принципы построения и опыт работы. — М.: Центр «Школьная книга», 2010.

[8] Хофштадтер, Д. *Гедель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда* — Самара: Бахрах-М, 2001.

[9] Щедровицкий Г. П. *Исходные представления и категориальные средства теории деятельности* // Щедровицкий Г. П. Избранные труды. — М.: Школа Культурной Политики. — 1995.

[10] Щедровицкий Г. П. *Опыт логического анализа рассуждений («Аристарх Самосский»)* // Щедровицкий Г. П. Философия. Наука. Методология. — М.: Школа Культурной Политики. — 1997.

Федосеев Алексей Игоревич,
научный сотрудник НИИ Инновационных
стратегий развития общего образования,
сотрудник Центра интерактивных образовательных
технологий МГУ им. М. В. Ломоносова.

Email: aleksey@fedoseev.net

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал “Математическое образование”.

Журнал в электронном виде размещается формате PDF в архиве по указанной ссылке.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2013 год (включая стоимость пересылки) – 80 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2013 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 70 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >