ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год семнадцатый

№ 3 (67)

июль - сентябрь 2013 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 3 (67), 2013 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2013 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.09.2013 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (67), июль – сентябрь 2013 г.

Содержание

50 лет СУНЦ МГУ

От редакции

В этом году исполняется 50 лет со дня основания специализированной школы при МГУ — СУНЦ МГУ.

Полное название школы: Государственное образовательное учреждение Специализированный учебно-научный центр – факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, школа имени А. Н. Колмогорова.

СУНЦ МГУ образован в 1988 году на базе школы, которая до этого года носила название "Специализированная школа-интернат № 18 физико-математического профиля при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова" или, кратко, ФМШ-18.

Четыре специализированные школы-интерната физико-математического профиля, расположенные в Москве, Киеве, Новосибирске и Ленинграде были основаны в 1963 году Постановлением Совета Министров СССР. Каждая из них была прикреплена к государственному университету соответствующего города.

Более точно, постановление Совета Министров страны "Об организации специализированных школ-интернатов физико-математического и химико-биологического профиля" датировано 23 августа 1963 года.

Однако соответствующие ему "Положение о специализированной школе-интернате при государственном университете" и "Правила приема в школу-интернат" были утверждены приказом министра высшего и среднего специального образования лишь 22 июня 1964 года. Справедливости ради нужно отметить, что при Новосибирском университете такой интернат был открыт еще до выхода правительственного постановления — в 1962 году (здесь решимость и настойчивость проявил академик М. А. Лаврентьев).

В ФМШ-18 занятия начались осенью 1963 года (нам неизвестна точная дата начала занятий), т.е. после выхода Постановления, но до появления Положения и Правил приема. По сложившейся традиции День рождения ФМШ отмечается в первую субботу декабря, и в текущем году это — 50-летний юбилей.

Школа имеет богатую историю, которая тесно переплетается с биографиями многих выдающихся ученых, в той или иной степени имевших отношение к ФМШ. Прежде всего это академик Андрей Николаевич Колмогоров — "отец-основатель" школы, сейчас она по праву носит его имя. Он читал в ФМШ-18 курсы лекций по различным разделам математики до конца 1970-х годов. Интернат задумывался, прежде всего, как школа научного творчества для молодежи, куда на конкурсной основе принимались школьники со всего Советского союза. Говоря о школе научного творчества, имеются в виду не только профилирующие дисциплины. Так, выступая на одном из заседаний педагогического совета, А. Н. Колмогоров специально выделял эту учительскую задачу: "Существенно, что здесь в интернате, школьники приходят в соприкосновение с творческой мыслью. Это наш запрос, но по всем предметам!.. Метод работы — имитация научного исследования, шаг за шагом находить, вычислять нечто..., а не давать готовенькое..."

В журнальной публикации нет возможности дать сколь-либо подробный очерк истории школы и ее достижений. Отошлем читателей к достаточно информативным сайтам internat.msu.ru (официальный сайт СУНЦ) и pms.ru

Мы приведем список материалов, связанных с ФМШ и опубликованных в нашем журнале, см. следующий раздел.

Также публикуется большая статья В. В. Вавилова о математическом практикуме в ФМШ — особом предмете в цикле математических дисциплин.

Публикации в журнале “Математическое образование”, связанные с ФМШ

В рубрике **“Учебное пособие в журнале”**:

Земляков А.Н. Тезисы по алгебре: Предисловие. Содержание. Тезисы по алгебре, I четверть. – 2000. – № 4(15). – С.7-40.

Земляков А.Н. Тезисы по алгебре. Часть II. Поля, многочлены, уравнения. – 2001. – № 1(16). – С.8-37.

Земляков А.Н. Тезисы по алгебре. Часть II. Поля, многочлены, уравнения (окончание). – 2001. – № 2(17). – С.2-23.

Земляков А.Н. Тезисы по геометрии: Геометрия под микроскопом (предисловие). Аксиоматический подход к геометрии (тезисы). – 2001. – № 3(18). – С.4-21.

Земляков А.Н. Методическое пособие по алгебре. – 2002. – № 1(20). – С.9-35.

Земляков А.Н. Методическое пособие по алгебре (окончание). – 2002. – № 2(21). – С.2-27.

Земляков А.Н. Алгебра*. Часть I. Числа и решетки. – 2003. – № 4(27). – С.48-66.

Земляков А.Н. Алгебра*. Окончание. – 2004. – № 1(28). – С.58-77.

Земляков А.Н. Элективный курс “Математический анализ реальности”. Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов. Глава 1. – 2004. – № 4(31). – С.19-55.

Земляков А.Н. Элективный курс “Математический анализ реальности”. Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов. Глава 2. - 2005. – № 1(32). – С.9-65.

(Полностью это учебное пособие вышло отдельным изданием в издательстве МЦНМО в 2013 году: Земляков А.Н. Математический анализ реальности. Дифференциальные уравнения для школьников. – М.: Издательство МЦНМО, 2013. – 359с.)

Вавилов В.В., Устинов А.В. Задачи на клетчатой бумаге. – 2006. – № 4(39). – С.47-67.

Вавилов В.В., Устинов А.В. Задачи на клетчатой бумаге (окончание). 2007. – № 2(42). – С.33-57.

В рубрике **“Содержание образования”**

Земляков А.Н. Элективный курс “Математический анализ реальности”. Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов. Методический и методологический комментарий. – 2004. – номер 2(29). – С.55-86.

Земляков А.Н. Элективный курс “Математический анализ реальности”. Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов. Методический и методологический комментарий. Часть 3. - 2004. - №3(30). - С.17-72.

(Методический и методологический комментарий к элективному курсу не вошел в указанное издание и опубликован только в нашем журнале.)

Памяти Александра Николаевича Землякова

Копылов В.Н. О Саше Землякове. – 2005. – № 1(32). – С.2-6.

Имайкин В.М. Несколько слов об Учителе. – 2005. – № 1(32). – С.7-8.

В рубрике **“Лидер специализированного физико-математического образования”**

Вавилов В.В. Математических и специальных наук школа. – 2005. – № 3(34). – С.58-82.

Вавилов В.В. Математическая биобиблиография школы. – 2005. – № 4(35). – С.29-64.

Задачный калейдоскоп. – 2005. – № 4(35). – С.65-76.

Вавилов В.В. О научных исследованиях учащихся школы им. А. Н. Колмогорова. – 2006. – № 2(37). – С.52-62.

Вавилов В.В., Колоскова М.Е. Уроки в цветущем саду. – 2006. – № 2(37). – С.63-69.

Вавилов В.В., Часовских А.А. Школьные Колмогоровские чтения. – 2006. – № 2(37). – С.70-73.

Материалы конференции, посвященной 105-летию академика С.М.Никольского

Алексеев Д.В., Виноградов О.П. Варианты вступительного экзамена по математике в СУНЦ МГУ (школа им. А. Н. Колмогорова) в 2010 году. – 2010. – № 2(54). – С.12-13.

В рубрике **"Учащимся и учителям средней школы"**

Нурлигареев Х.Д. Равноугольные многоугольники на правильных паркетах. – 2011. – № 2(58). – С.39-63.

Долгирев П. О касании коник и прямых. – 2011. – № 3-4(59-60). – С.15-23.

Нурлигареев Х.Д. О многолистных правильных паркетах. – 2012. – № 1(61). – С.23-29.

Математический практикум: вчера и сегодня

В. В. Вавилов

Одним из “фирменных знаков” школы им. А. Н. Колмогорова СУНЦ МГУ (ранее ФМШ интернат №18 при МГУ) является *математический практикум*. Об истории возникновения практикума, традициях преподавания, типах заданий и современном состоянии рассказывает один из старейших преподавателей интерната (с 15 марта 1968 года по настоящее время) Валерий Васильевич Вавилов.

Особое место в системе организации учебного процесса в школе им. А. Н. Колмогорова СУНЦ МГУ имени М. В. Ломоносова занимают практикумы (по математике, физике, информатике, химии, биологии); это заметно отличает нашу школу от других. При этом, говоря о математических экспериментах (практикуме), речь идет не только о тех вопросах постановки математического образования, где сливаются математика и информатика, но просто о чертежах, расчетах, графиках, схемах, конструировании моделей, составлении таблиц, решении задач и т. д. Кроме того, здесь преследуются и другие цели; в частности, привить вкус к конкретной, реальной математике, проиллюстрировать наиболее тонкие теоретические разделы курса, показать силу только что освоенных методов при решении практических задач. Задания практикума состоят из одной или нескольких ступеней: от очень конкретной до исследовательской. Начальная часть обязательна для всех учащихся, исследование — только для желающих; *некоторые задания содержат также темы творческого характера для проведения самостоятельных исследований.* Все задания практикума строго индивидуализированы и сдаются учащимися персонально.

Довольно значительный промежуток времени в учебном плане школы был отдельный предмет (1969–1988), которой так и назывался «Математический практикум»; при этом был предусмотрен один лекционный час (лекции, постановки заданий) и два часа на консультации и прием заданий. В разгар кавалерийской и непродуманной так называемой «гуманитаризации и деформирования» школьного образования произошел «передел собственности» и вместо 12 часов в неделю на математику в сетке часов осталось только девять. Это было большой и трудно исправляемой сейчас ошибкой — в специализированной школе при МГУ столь высокого уровня, с хорошо организованными и согласованными курсами по математике и естественным дисциплинам, фактически самим (школа могла не следовать в полном объеме этой реорганизации Министерства, так как подчиняется МГУ) пойти по сомнительному пути. Конечно, это нужно исправить и так, чтобы «фирменный галстук» школы ее выпускники хранили всю свою жизнь. Уменьшение часов на математику немедленно сказалось на математическом практикуме, который сейчас проводится только эпизодически и далеко не всеми преподавателями. Попутно отметим, что программы по информатике содержат, конечно, некоторую составляющую «вычислительного практикума», но соответствующие задания служат там несколько другим целям.

Эта статья пишется в канун 50-летия образования школы-интерната № 18 при МГУ, которая в 1988 году вошла в состав организованного Специализированного учебно-научного центра МГУ, и уже с другим официальным названием — «Школа имени А. Н. Колмогорова». В настоящее время возможности учебного плана СУНЦ МГУ позволяют реанимировать такую дисциплину как «Математический практикум» и в этом направлении прилагаются сейчас немалые усилия как отдельных членов Ученого совета СУНЦ МГУ, так и преподавателей кафедры математики.

Это А. Н. Колмогоров, со всей настойчивостью, реализовал сначала в университете, а затем и в школе, такое нововведение в нашей стране. Он сам сначала и руководил этими практикумами, придумывал новые постановки задач. Именно эта конкретная вычислительная и графическая работа при выполнении заданий практикума в школе, не на словах, а на деле показывает силу математических методов исследований в нашей жизни и в научных исследованиях, осуществляет прикладную направленность математического образования в школе. Общие установки при создании практикума в школе А. Н. Колмогоров описывал так (см. [6]): «Часы математического практикума, проводящегося, в идеале, одновременно для всего потока, используются частично для унификации требований к различным классам письменных контрольных работ, состоящих из серии задач обычного школьного типа. Но в основном эти часы отводятся для выполнения работ большого объема, требующих больших вычислений и чертежного оформления. Например, фактически осуществляется программа оценки числа Пи, после изучения в классе движения по циклоиде исследуются графически более сложные случаи сложения движений, находятся и изображаются графически решения системы дифференциальных уравнений последовательного радиоактивного распада... В проведении практикума участвуют преподаватели, работающие в классах, но отдельная небольшая группа преподавателей его организует и готовит для него материал».

Рис. 1. А. Н. Колмогоров и автор статьи около 40 лет тому назад

Тематика заданий математического практикума (в ретроспективе) была довольно разнообразной. Приведем здесь примеры тех заданий, которые в разные годы выполняли учащиеся: Построение треугольника. Приближенное вычисление корней уравнений. Графические методы решений уравнений и систем. Две задачи линейного программирования. Итерации. Метод секущих и касательных Ньютона. Номограммы. Графостатика. Численное дифференцирование и интегрирование. Дискретные гармонические функции. Непрерывные дроби. Задачи на клетчатой бумаге. Магические квадраты. Конечные поля, геометрии и латинские квадраты. Неприводимые многочлены. Графики дробно-квадратичных рациональных функций. Фигуры Лиссажу. Кривые Уатта. Циклоиды. Розы и розетки. Годографы. Эволюты циклоидальных кривых. Пучок кривых второго порядка. Измерения на местности. Модели многогранников. Сечения многогранников. Две проекции. Группы самосовмещений плоских фигур и многогранников. Орнаменты и паркеты. Круговые преобразования плоскости. Теоремы Паскаля и Дезарга и построение при помощи линейки. Инверсия и построения при помощи циркуля. Навигация. Расчет лунных затмений. Конечные аффинные и проективные плоскости и пространства. Интерполяция и сплайны. Квадратурные формулы. Космические поезда. Диаграммы касательных. Прыгающий мячик. Изоклины. Радиоактивный распад. Фазовые портреты. Теория часов. Две экологические модели. Полет диска в сопротивляющейся среде. Динамическое программирование. Тригонометрические многочлены и ряды Фурье. Профили собственных колебаний натянутой нити с бусинками. Доска Гальтона. Модель размножения и гибели. Случайные блуждания. Датчики случайных чисел. Криптография и расшифровка текстов. Дробно-линейные преобразования. Расположение комплексных корней многочлена, зависящего от параметра. Фракталы. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Линии равного модуля и аргумента. Области однолистности многочленов.

Несмотря на то, что задания практикумов строго индивидуализированы, мы ни в коем случае не препятствуем взаимным консультациям в «домашней стадии» выполнения работы. Результаты выполнения работ обсуждаются в классе. Это тем более оправданно, т. к. в результате работы учащихся часто появляется полное исследование, полный каталог, полная классификация и т. д. В качестве примеров отметим, что в процессе работы была создана коллекция картонных моделей всех полуправильных многогранников (которая сейчас погибла безвозвратно), решены *все* задачи на построение треугольника циркулем и линейкой по некоторым заданным параметрам (выбирая их из двадцати возможных и, как правило, по три) и доказана невозможность таких построений в отдельных случаях, описаны все тринадцать возможных типов кривых Уатта (а впоследствии и доказано, что других нет), построены 17 различных типов графиков дробно-квадратичных рациональных функций и создан полный каталог их диаграмм касательных (и потом доказано, что других не бывает), построены все одиннадцать различных мозаик на плоскости (с полным обоснованием, что это полный перечень), для многочленов пятой степени описаны все возможные качественные картинки их областей однолистности, в определенной модели описаны все возможные траектории полета «летающей тарелочки» и т. д. и т. п.

В школе большинство материалов о практикумах сохранились и ждут своей публикации. Составителями заданий математического практикума в разные годы являлись преподаватели школы разных поколений: А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, В. М. Алексеев, Н. М. Бовт, В. В. Вавилов, Г. Г. Григорьев, В. Н. Дубровский, И. Г. Журбенко, А. К. Звонкин, А. Н. Земляков, Б. М. Ивлев, М. В. Козлов, А. С. Мищенко, В. Ф. Пахомов, А. Б. Сосинский, Т. Н. Трушанина, Е. М. Чепурин и другие. Тематика и методика составления заданий математического практикума неоднократно обсуждались с разными преподавателями на механико-математическом факультете МГУ и более того, даже на двух заседаниях Ученого совета факультета. Перед этими обсуждениями на Совете, вопросы, связанные с деятельностью ФМШ при МГУ и, в частности, с преподаванием в ней математики, обсуждались на заседаниях парткома факультета и даже на факультетских открытых партийных собраниях. Практикумом в школе активно интересовался академик Павел Сергеевич Александров, который даже подарил школе коллекцию моделей различных поверхностей, изготовленных по его специальному заказу в Германии в двадцатых годах прошлого столетия, и располагалась эта коллекция на факультетских этажах и в помещении кафедры общей топологии, руководителем которой он являлся. Отметим, что сейчас из той коллекции в школе сохранился только большой действующий макет логарифмической линейки, а все остальные модели поверхностей, многогранников, шарнирных механизмов и пр. безвозвратно потеряны. Мне вспоминается также беседа на даче А. Н. Колмогорова и П. С. Александрова в Комаровке, когда там присутствовали оба хозяина дачи и В. М. Алексеев. Там впервые обсуждалась идея практикума по модели «Хищник – Жертва» (хотя я туда был приглашен, главным образом, по другим делам школы — в связи с предстоящим массовым туристическим походом «Звездочка» и по другим плановым учебно-воспитательным делам в школе). Борис Владимирович Гнеденко в многократных с ним беседах всегда подчеркивал огромную ценность математического практикума в школе при МГУ, определяя его как одну из первых ступеней знакомства с профессией математика и воспитания у школьников интереса к изучению математики. Помнится, как Б. В. Гнеденко с большим воодушевлением рассказывал о таблицах непотопляемости судов, которые А. Н. Крылов составлял при помощи простых, но значительных по объему, вычислений и рекомендовал использовать его методику вычислений для одного из заданий математического практикума (обсуждались с ним также и возможные эксперименты «в ванне» с моделями кораблей); эта идея в школе не была реализована. Кроме того, Б. В. Гнеденко предлагал всячески пропагандировать идеи заданий математических практикумов в научно-методической периодике и даже советовал мне быстрее «подготовить под его кураторством» педагогическую диссертацию; этому также не суждено было произойти.

Самые первые задания математического практикума в 1963–65 годах выдавались ученикам школы на уроках черчения, где школьники строили различного рода кривые на плоскости. Но в 1965-м году такого предмета в учебном плане школы не стало и его заменил предмет «Математический практикум», в рамках которого в этом же году было предложено первое задание математического практикума, которое было посвящено одной комбинаторной задаче.

1. Практикум № 1

Задание. Сколькими способами можно отобразить множество из m элементов на множество из n элементов?

Сейчас такое задание МП у наших школьников может вызвать только улыбку, так как комбинаторная составляющая обязательного алгебраического курса в школе содержит такие задачи в качестве упражнений. Однако нужно иметь в виду, что это задание выдавалось в 1965-68 годах, когда основная масса учащихся практически не встречалась с комбинаторными задачами и понятием функции как отображения. Кроме того, давая такое задание, предполагалось подведение его итогов с доказательствами общей формулы и некоторых других. А также то, что дальнейшая группа комбинаторных задач на обязательных занятиях будет посвящена изучению отображений конечных множеств, изучению симметричных, рефлексивных и транзитивных отношений на конечных множествах и т. д.

Любопытно, что при получении задания каждому ученику выдавался листок с формулировкой задания. Один из таких листков сохранился: «Альберт, Бобби и Смит хотят познакомиться (каждый) с одной из девушек: Дианой и Елен. При этом после состоявшегося знакомства оказалось, что с каждой из девушек кто-то познакомился. Каким количеством способов они могут познакомиться? Другими словами, сколько существует отображений множества из трех элементов на множество из двух элементов?».

Так что начался математический практикум в школе — интернате № 18 физико-математического профиля при МГУ им. М. В. Ломоносова с Альберта, Бобби, Смита, двух девушек Дианы, Елен и их желания познакомиться.

2. Построение треугольников

Инициатором этого задания практикума был А. М. Абрамов, которого всячески поддерживали А. А. Шершевский, В. А. Гусев, а затем они, вместе с другими преподавателями, реализовывали его на практике.

Задание для учеников 10-х классов состояло в том, чтобы по трем заданным отрезкам построить треугольник при помощи циркуля и линейки. В качестве данных отрезков для построений треугольника выбирались по три из следующих: стороны, медианы, высоты, биссектрисы, радиусы вписанной, описанной, вневписанных окружностей.

Курс геометрии в школе устроен так, что в десятых классах проходит повторительный курс планиметрии. И такое задание практикума, с одной стороны, имело ярко выраженный повторительный характер, а, с другой стороны, содержало в себе необходимость доказывать, что некоторые из предложенных задач неразрешимы или анализировать причины неоднозначности решения. Некоторые из задач сложны и тогда они объединялись с некоторыми более простыми задачами, которые выдавались сразу нескольким школьникам. В результате работы (усилиями четырех классов) была получена соответствующая «таблица разрешимости». Эта коллективная работа учащихся, объединенная общей целью, крайне важна и положительно влияет на творческую атмосферу в классе и в школе. К сожалению, в своих архивах я такой таблицы не обнаружил, но с новыми поколениями школьников, быть может, мы её восстановим.

Продолжение этой тематики в школе имени А. Н. Колмогорова нашло свое отражение в творческих работах учеников, подготовивших интересные доклады для участия в школьных конференциях. В частности, некоторые из них (А. Паунов, В. Петкиева, И. Барышев и др.)

занимались построениями треугольника по некоторым заданным замечательным точкам треугольника (H и O, I и O, N и O, и др.). Впервые такие задачи рассматривал Л. Эйлер в работе 1767 года, которая называлась «Легкое решение очень трудной геометрической задачи». А. В. Устинов (выпускник школы имени А. Н. Колмогорова) совсем недавно, в частности, показал неразрешимость задачи о восстановлении треугольника по основаниям биссектрис (см. его статью в журнале "Потенциал", № 10, 2013 г.). Исследования школьников в этих направлениях продолжаются и до настоящего времени, о чем в декабре 2012 года на одной из геометрических конференций в Тольятти рассказал А. П. Евдокименко — преподаватель и выпускник школы имени А. Н. Колмогорова.

3. Графическое решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней

Задание, которое предлагал А. Н. Колмогоров для учеников на второй неделе их обучения в школе, называлось «*Графическое решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней*» и оно состояло из двух частей. Первая часть задания содержится на представленной ниже фотокопии рукописи А.Н. Колмогорова (см. рис. 2), а вторую часть мы просто перепечатали с этой же рукописи.

Вторая часть задания была такова (другая идея, новые картинки):

«Графическое исследование системы

$$x^2 = y^2, \tag{1}$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{2}$$

и решение кубических уравнений». Предполагается, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

1. Сколько решений может иметь система (1)-(2)? Привести примеры на все возможные здесь случаи.

2. Предполагая, что $x > 0$, положим

$$x = \frac{1}{z^2}. \tag{3}$$

Исключить из уравнений (1)-(3) неизвестные x и y.

3. Воспользоваться результатом п.2 и указать графический метод решения кубических уравнений вида

$$z^3 + pz + q = 0, \tag{4}$$

который позволяет находить корни этого уравнения одним приложением линейки к точкам с отметками p и q и считыванием отметок z, на которые ложится линейка.

4. Указать способ сведения общего уравнения третьей степени

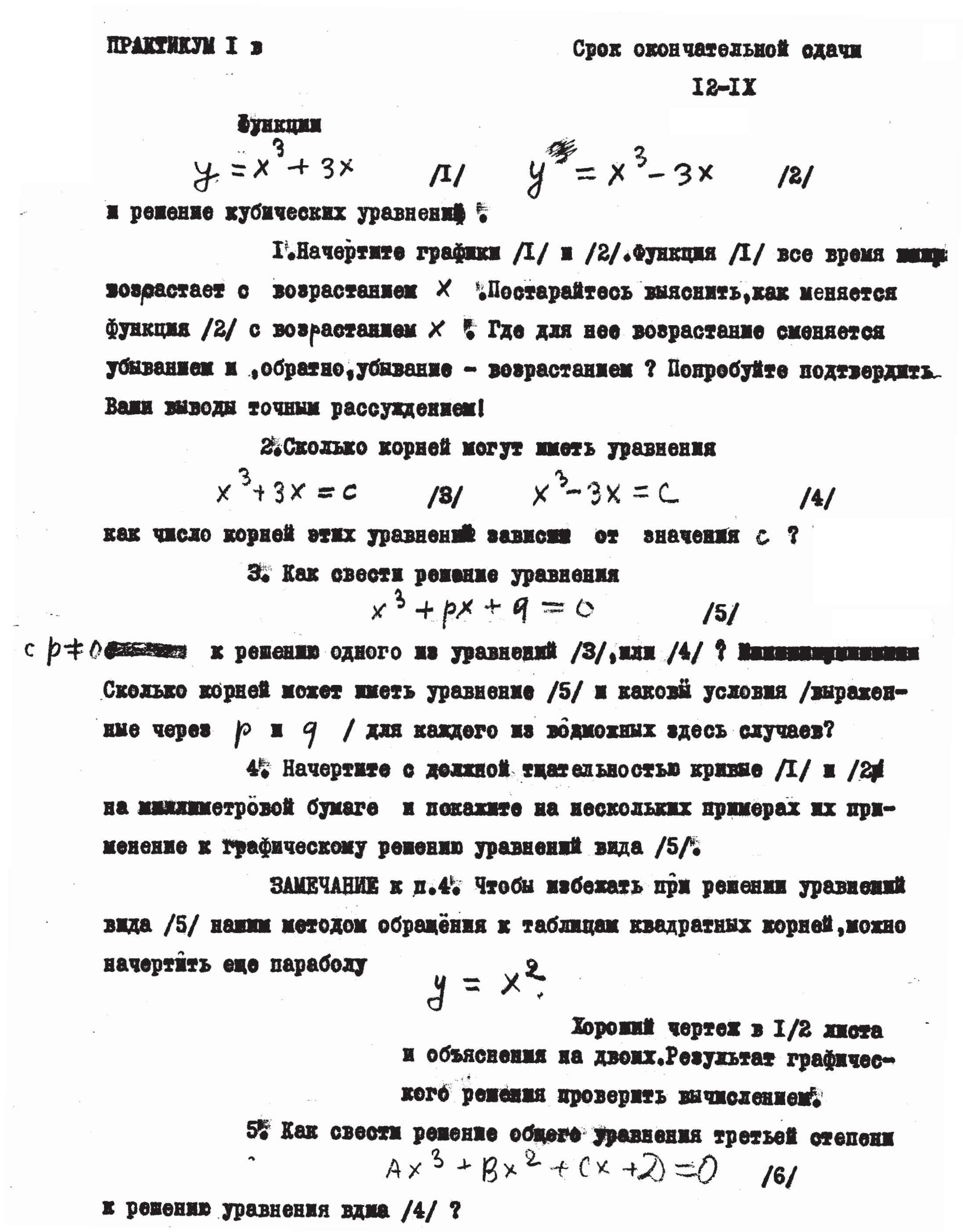
$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \tag{5}$$

к уравнению вида (4).

5. Начертить с должной тщательностью кривую (1) на миллиметровой бумаге, позаботившись о том, чтобы чертеж позволял без лишних затруднений находить все корни $z, |z| \geq 1$ уравнения (4) при $|p| \geq 1, |q| \geq 1$.

6. Дать несколько примеров решения уравнений вида (4) и (5) с численной проверкой результата графического решения.

«Один хороший чертеж в 1/2 листа с объяснениями на двоих»



ПРАКТИКУМ I в

Срок окончательной сдачи 12-IX

Функции

$y = x^3 + 3x$ /I/ $y = x^3 - 3x$ /2/

и решение кубических уравнений.

1. Начертите графики /I/ и /2/. Функция /I/ все время возрастает с возрастанием x. Постарайтесь выяснить, как меняется функция /2/ с возрастанием x. Где для нее возрастание сменяется убыванием и, обратно, убывание – возрастанием? Попробуйте подтвердить Ваши выводы точным рассуждением!

2. Сколько корней могут иметь уравнения

$x^3+3x=c$ /3/ $x^3-3x=c$ /4/

как число корней этих уравнений зависит от значения c?

3. Как свести решение уравнения

$x^3+px+q=0$ /5/

с $p\neq0$ к решению одного из уравнений /3/, или /4/? Сколько корней может иметь уравнение /5/ и каковы условия /выраженные через p и q/ для каждого из возможных здесь случаев?

4. Начертите с должной тщательностью кривые /I/ и /2/ на миллиметровой бумаге и покажите на нескольких примерах их применение к графическому решению уравнений вида /5/.

ЗАМЕЧАНИЕ к п.4. Чтобы избежать при решении уравнений вида /5/ нашим методом обращения к таблицам квадратных корней, можно начертить еще параболу $y = x^2$.

Хороший чертеж в 1/2 листа и объяснения на двоих. Результат графического решения проверить вычислением.

5. Как свести решение общего уравнения третьей степени

$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ /6/

к решению уравнения вида /4/?

Рис. 2. Рукопись А.Н. Колмогорова

4. Графическое решение уравнений

Тема «*Графическое решение уравнений*» неоднократно появлялась в заданиях практикумов и в самых разнообразных постановках. Одним из продолжений практикума А. Н. Колмогорова были *задания на построение сетчатых номограмм и номограмм из выравненных точек*; подробности см. в [4], [15].

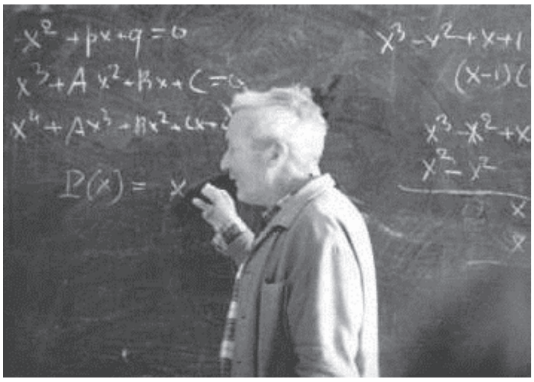


Рис. 3. Лекция А.Н. Колмогорова

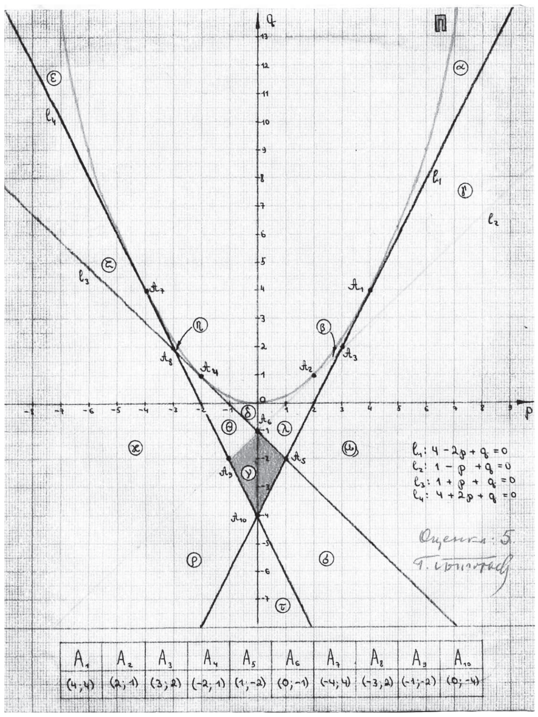


Рис. 4. Работа ученика

Например, в 2012 году в 11-х классах предлагалось задание (которое использовалось и раньше) *«Геометрия квадратного трехчлена»*, суть которого такова.

Рассмотрим семейство квадратных уравнений ($x^2+px+q=0$), где p и q — действительные числа. На плоскости коэффициентов ($\pi = Opq$) — назовем ее *фазовой* — поставим в соответствие квадратному трёхчлену x^2+px+q точку с координатами $(p;q)$. Полученное соответствие между квадратными трёхчленами (уравнениями) и точками фазовой плоскости π взаимно однозначно. Для данного числа a прямая $a^2+pa+q=0$ на плоскости π касается (при любом a) так называемой *дискриминантной* параболы с уравнением $q=\frac{1}{4}p^2$; точка $(p;q)$, расположенная на этой (*корневой*) прямой, соответствует уравнению, для которого число a является его корнем (более того, на этой прямой лежат все точки с этим свойством). Само задание состояло в том, чтобы при заданных числах a, b, c, d:

а) Найти множество всех таких точек $(p;q)\in\pi$, для которых уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два действительных корня x_1 и x_2, причем $a<x_1<d, c<x_2<d$.

б) Составить таблицу, при помощи которой по положению точки $(p;q)$ на плоскости π можно ответить на вопрос о том, сколько корней уравнения $x^2+px+q=0$ попадает в интервалы (a,b) и (c,d) (для тех же a,b,c,d).

На представленной выше фотографии показана работа ученика с выполненным заданием.

5. Мензульная съемка

Задание. При помощи планшета (горизонтальная доска с прикрепленным листом бумаги) и визирной линейки (два гвоздика на длинной линейке), не производя никаких измерений реальных расстояний и углов, снять план местности в некотором условном масштабе.

Провести оценки точности в определении положений некоторых точек на изготовленном плане местности.

Эта работа непосредственно примыкает к изучению преобразований гомотетии (подобия) в девятых классах массовой средней школы и большинству школьников представляется неожиданной и интригующей. Отметим, что практически все учебные пособия для массовой школы содержат задачи на измерение недоступного расстояния между доступными точками, измерение расстояния до недоступной точки, измерение расстояния между двумя недоступными точками и другие варианты этих задач, имеющих важное значение в реализации принципа обучения о совершенствовании прикладной направленности учебных математических курсов. Это задание у нас в школе было особенно популярным в тот период, когда в нее поступали учащиеся на трехгодичное обучение (сейчас в школе имени А. Н. Колмогорова имеется физико-математический поток при двухгодичном или одногодичном обучении).

Теоретические основы работы нашим школьникам хорошо известны и поэтому важным элементом здесь является именно реальная задача на конкретной местности. В качестве реальных работ предлагались следующие: измерить расстояние от школы до видимого шпиля здания МГУ, снять план местности, где проходит общешкольная туристическая звездочка (Тучково, Дорохово в Подмосковье), снять план местности окрестностей, где проходила летняя школа для части поступающих в нашу школу (Рубское озеро, 50 км от г. Иваново). В этой летней школе на Рубском озере из ФМШ при МГУ принимали участие А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко и О. С. Смирнова, которые в книге [4] со всеми подробностями рассказали, в частности, и о практических работах по геодезии (ими руководил И. Г. Журбенко), и о заданиях по номографии.

Практикумы такого вида всегда вызывают интерес у школьников. Комментируя выполнение одного из аналогичных заданий в 1971 году в стенах школы, А. Б. Сосинский в брошюре [44] свои впечатления описал так: «... Вспоминаю холодный солнечный осенний день, группу ребят вокруг штатива с планшетом; где-то около интерната вдали виднеется шпиль университета, идет горячий спор о том, как лучше расположить базисный отрезок, куда наводить мензур. Мы тогда измеряли расстояние от интерната до университета. Сейчас невольно думается, не произошел ли тогда квантовомеханический эффект: в результате измерения не сократилось ли расстояние до университета?»

Расстояние от школы имени А. Н. Колмогорова до МГУ имени М. В. Ломоносова не так давно учащиеся 10-х классов измеряли (с точностью до километра) «при помощи десятиметровой рулетки». В статье [39] описан этот последний урок по геометрии в текущем учебном году, который проходил в солнечный, тихий день в школьном саду.

6. Число Пи

Во времена активной деятельности А. Н. Колмогорова в школе задание формулировалось так: Найти приближенное значение числа π с точностью 10^{-2}, проводя методом границ оценки на каждом шагу вычислений (более точную формулировку см. ниже).

Это задание практикума находилось среди тех, на которых учащиеся знакомились с техникой приближенных вычислений (абсолютная и относительная погрешности, верная цифра, правила для планирования приближенных вычислений с заданной точностью; см. [6]). Это задание также подкрепляло тему «Действительные числа», и являлось пропедевтическим средством для получения в будущем правил для вычисления производных в курсе математического анализа.

От учащихся требовалось получить три верных знака после запятой для числа Пи, используя периметры правильных вписанных и описанных многоугольников (обозначим их через p_n, q_n соответственно) и формулы удвоения для их вычислений. При этом составлялись таблицы приближенных значений этих периметров с обоснованными оценками точности всех вычислений. При сдаче практикума учащийся должен проявить умения уверенно работать с приближенными величинами. Основная здесь трудность состоит в том, что приходится находить квадратные корни с точностью, превышающей точность четырехзначных математических таблиц, которые только и использовались в то время в школе. Позднее, когда появились калькуляторы, вычислительная сторона дела упростилась; помню с каким энтузиазмом на первых появившихся промышленных экземплярах калькуляторов Б. М. Ивлев и В. В. Рождественский соревновались в вычислении нужных периметров (см. [17], [50]). Сейчас это задание практикума не используется, но его основные части вошли в курсы информатики (работа с погрешностями) и математического анализа (скорость сходимости алгоритма).

Чтобы «оживить» этот числовой практикум (а школьники, в основной своей массе, не любят долгих арифметических вычислений, да еще и с известным ответом), учащимся предлагалось уточнить расположение числа на интервале (p_n, q_n) с концами в уже вычисленных значениях периметров. Если память мне не изменяет, то это дополнение предложил и активно пропагандировал А. А. Шершевский. Другими словами, нужно было численно проверить соотношение Христиана Гюйгенса (см. [17])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = 2,$$

которое порождает соответствующую приближенную формулу

$$r_n = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n \approx \pi, \quad n \to \infty,$$

и позволяет, например, получить известные неравенства Архимеда, используя только правильные шестиугольники и 12-угольники (а не 96-угольники, как у Архимеда) — это всегда производит очень сильное впечатление. Соответствующие числовые результаты позволяли также сравнить эффективности приближенных формул Архимеда и Гюйгенса. *Сейчас такого практикума в школе нет*, но в обязательном курсе геометрии на лекциях доказывается неравенство Гюйгенса, означающее, что число π при любом $n \geq 3$ находится в первой трети интервала (p_n, q_n). В курсе математического анализа (иногда на лекциях, чаще — на упражнениях) затем показывается, что имеют место соотношения

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\pi - p_n) = C_1, \quad \lim_{n\to\infty} n^4(r_n - \pi) = C_2,$$

где $5 < C_1 < 6, 28 < C_2 < 29$, которые уже точно отвечают на вопросы о скоростях сходимости. Сопровождался этот практикум иногда красивыми рисунками, когда на клетчатой бумаге при помощи 10 цветов (закрепленного за каждой цифрой), закрашиваются в определенной последовательности квадратики, отвечающие знакам бесконечной десятичной дроби для числа π; на обложке журнала «Квант» (№ 2, 1977) аналогичная картинка показана на паркете из правильных шестиугольников, эскиз которой был выполнен одним из учащихся школы имени А. Н. Колмогорова.

Сохранился полный текст, который сопровождал задание этого практикума в 1971 году и раздавался в классах. Приведем его здесь полностью:

«Каждый ученик получает номер, равный остатку от деления на 12 его номера в классном журнале. Номера 1-6 и 7-12 объединяются в «Шестерки» — бригады. Каждая бригада сдает письменный отчет.

Отчет должен содержать описание рассказанного на лекции метода и, в частности вывод формулы

$$a_{2n} = R\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{a_n^2}{R^2}}} \quad \text{и оценки} \quad \left|\pi - n\frac{a_n}{2}\right| < \frac{20}{n^2}\left(\frac{15}{n^2}\right),$$

удобочитаемые промежуточные вычисления и объяснение, почему ответ, полученный в результате приближенного вычисления, все-таки дает строгую оценку числа π:

$$n\frac{\overline{a_n}}{2} < \pi < n\frac{\overline{b_n}}{2}.$$

Ученики с номерами k вычисляют p_n:

k	1	2	3	4	5	6
n	6	12	24	48	96	192

k	7	8	9	10	11	12
n	8	16	32	64	128	256

Тот, кто не попал ни в одну бригаду, может объединиться с номерами 7–12 и вычислять p_{512}.
СРОК СДАЧИ ПРАКТИКУМА — 7 ОКТЯБРЯ».

7. Графостатика

Этот практикум нацелен на ознакомление учащихся с алгеброй и геометрией скользящих векторов, без которых невозможно обойтись в построении физических курсов; т. е. он проводится также в целях установления связей между физикой (статикой и механикой) и геометрией. Отметим, что в обязательной программе курса по геометрии соответствующего раздела нет. Эта тема сначала была апробирована с учащимися двух летних школ в г. Пущино на Оке в 1980 и 1981 годах, организованных для желающих поступить в нашу школу.

Задание. а) Заменить данную систему скользящих векторов в пространстве на эквивалентную ей систему, состоящую из наименьшего числа скользящих векторов.

б) Построить веревочный многоугольник и найти равнодействующую данной системы скользящих векторов, расположенных в одной плоскости (т. е. определить направление и точку приложения).

в) При помощи диаграммы Максвела–Кремоны графически определить реакции опор данной фермы и усилия в ее стержнях.

Отметим, что каждый учащийся получает для расчетов свою ферму и свои наборы векторов.

Установочная лекция по этому заданию всегда начиналась с цитирования известной басни И. А. Крылова «Лебедь, Щука и Рак»:

Когда в товарищах согласья нет,
На лад их дело не пойдёт,
И выйдет из него не дело, только мука.
Однажды Лебедь, Рак да Щука
Везти с поклажей воз взялись,
И вместе трое все в него впряглись;
Из кожи лезут вон, а возу все нет ходу!
Поклажа бы для них казалась и легка:
Да Лебедь рвется в облака,
Рак пятится назад, а Щука тянет в воду.
Кто виноват из них, кто прав, — судить не нам;
Да только воз и ныне там.

После такого литературного экскурса и рассказов на конкретных примерах о теории веревочного многоугольника голландского инженера С. Стевина и ее развитии в трудах французского ученого П. Вариньона, о расчетах мостов и сводов, которые проводили в России французские инженеры и ученые Габриэль Ламе и Бенуа Клапейрон, о применении этой теории в трудах швейцарского профессора П. Кульмана для расчетов опорных реакций и изгибающих моментов балок и ферм, о вкладе итальянского математика А. Кремоны в графостатику собственно и рассказывать из теории (довольно простой) для выполнения этого любопытного и важного задания нечего.

В 1985 году в журнале «Квант» (см. [52]) была опубликована прекрасная статья «Геометрия скользящих векторов» бывших преподавателей школы Ю. П. Соловьева и А. Б. Сосинского, в которой, в частности, изложены материалы одной из наших летних школ Пущино-80 и описанного выше задания практикума. Ясно, что при обсуждении итогов практикума доказывалась правота Крылова — воз будет вращаться (при разумном выборе сил) вокруг некоторой точки и не сдвинется с места.

8. Кривые второго порядка

Эта тема фигурировала в различных заданиях математических практикумов. Так, например, два месяца назад ученики двух 11-х классов выполняли задание, в котором требовалось построить (по точкам) *центральные проекции окружности* (нарисованной на одной из граней «прозрачного» куба), меняя положения центра проекции.

Зачастую это задание включалось в качестве одного из пунктов (другого) практикума *«Две проекции»*, где дополнительно требовалось построить центральные проекции одного из 11 плоских правильных паркетов и фигуры, составленной из кубиков.

Второй вариант задания школьникам выдавался, когда они знакомились с основами аналитической геометрии (но уже после реализации в программе обучения методов решения линейных систем, или после выполнения практикума *«Метод Гаусса решения линейных систем»*). Само задание выглядело так: На плоскости заданы своими координатами четыре точки.Точка плоскости красится одним и тем же цветом, если через нее и четыре заданных точки проходит один тип кривых второго порядка. Тем самым, вся плоскость может быть раскрашена в четыре цвета, каждый из которых отвечает паре прямых, эллипсам, параболам и гиперболам. Получающаяся здесь *«цветная картинка»* получила естественное название — *пучок кривых второго порядка.* Анализ геометрической ситуации проходит на основе вычислительных процедур и теоремы о классификации кривых второго порядка.

При выполнении использовалось общее уравнение нужных кривых, проходящих через заданные точки, которое зависит уже только от одного свободного параметра. В дополнение к «картинке» требовалось указать и области изменения параметра для каждого из типов кривых второго порядка. Рисунок, опубликованный в одном из номеров журнала «Квант» [14] и помещенный в эту статью, выполнен на основе работы одного из учеников ФМШ.

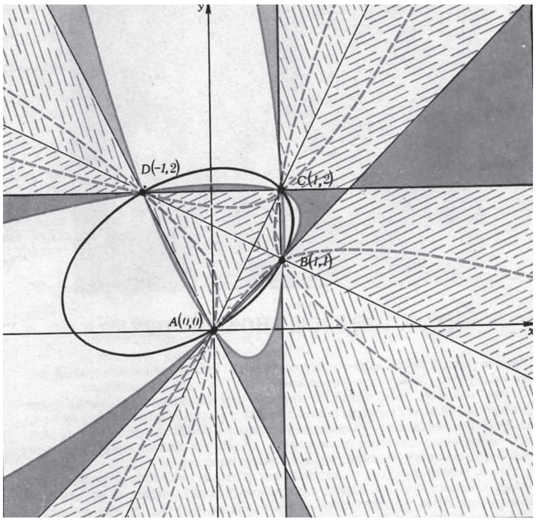


Рис. 5. Пучок кривых 2-го порядка

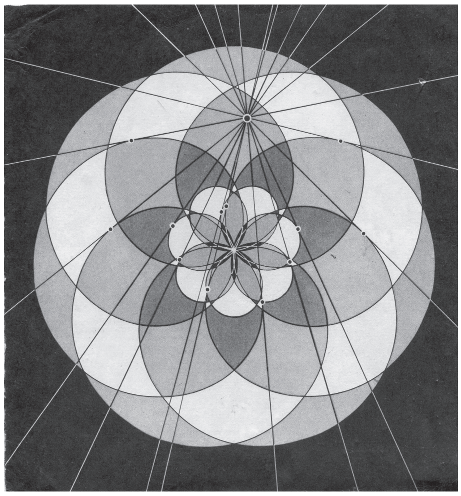


Рис. 6. Диаграмма касательных

Чаще такое задание выдается при изучении темы «Проективная плоскость» и уже после знакомства с теоремой Паскаля «о мистическом шестиугольнике» и следствия из нее, что кривая второго порядка определяется пятью своими точками единственным образом. При выполнении задания этого типа учащиеся учатся уже при помощи только одной линейки строить достаточно много точек кривой второго порядка (по четырем данным и одной выбранной точке), определяя тип кривой «визуально».

Вариативная часть этого практикума (для желающих учеников) состояла, как правило, из построения пучков кривых второго порядка, когда требовалось, например, его построить, по *заданным трем точкам и одной заданной прямой, которой все искомые кривые касаются.* При этом уже требовались умения строить такие кривые, ознакомившись с приемами построения касательных к кривым второго порядка, которые использовали П. Ферма, Р. Декарт и И. Ньютон. Конечно, все это рассказывалось ученикам преподавателями, которые занимались постановкой данного задания практикума.

9. Диаграмма касательных

Диаграмма касательных к заданной кривой на плоскости строится по следующему правилу: точки плоскости (с построенной на ней кривой) закрашиваются одним цветом, если из них можно провести одинаковое число касательных к кривой.

Задание. Для заданной функции $y = f(x)$ построить диаграмму касательных ее графика.

Для выполнения этого практикума предлагались графики дробно-квадратичных функций. Построение таких графиков, с использованием только элементарного (но полного) исследования, является предметом *отдельного практикума*; при этом выяснялось, что существует всего 15 различных типов таких графиков. В итоге работы класса по теме «Диаграмма касательных», тем самым, получается *полный атлас диаграмм касательных* для указанного семейства рациональных функций.

Это задание по времени предшествует изучению темы «Производная и касательная», а по методике выполнения основано на разбиении заданной кривой на выпуклые участки с дальнейшим наложением друг на друга соответствующих «картинок» для её выпуклых участков. Кроме того, этот практикум примыкает к практикумам *«Эволюты и эвольвенты»* и *«Годографы»*, когда такие практикумы предлагаются одним и тем же учащимся.

В качестве продолжения этого задания (заинтересовавшиеся) учащиеся строили диаграммы касательных для кривых, заданных в полярных координатах. Например, для кривой $r = 1 + 2\cos\left(\frac{7}{8}\right)\varphi$ понадобилось 12 цветов (см. обложку журнала «Квант», № 5, 1978). Кроме того, предлагалось построить эвольвенты и эволюты для некоторых кривых (практикум *«Круговые циклоиды»*).

10. Метод касательных Ньютона

Задание 1. Вычислить с точностью до 10^{-2} величину $\sqrt{1+a}$ и найти относительную погрешность полученного результата.

Задание 2. Вычислить с точностью до 10^{-2} положительный корень уравнения $x^2 - ax - 1 = 0$.

Задание 3. Найти области сходимости (аттракторы) для каждого из корней уравнения

$$x^2 - a^2x = 0.$$

Для этого используйте четыре цвета, помечая точку одним цветом, если при таком выборе начального значения метод Ньютона сходится к одному и тому же корню или расходится.

На трех вспомогательных листах разместите результаты с промежуточными вычислениями, а на основных листах — итоги вычислений и необходимые чертежи.

При выдаче этих заданий на лекции (или на упражнениях) рассказывается метод касательных Ньютона на примере приближенного вычисления квадратных корней с оценками скорости его сходимости (А. Н. Земляков, например, любил вычислять $\sqrt{17}$); при этом широко используются графические соображения и интерпретации. Разбираются вопросы принципиального характера о сходимости; здесь возникают примеры функций, для которых метод Ньютона расходится при любом выборе начального приближения (отличного от единственного нуля); рассматривалась, например, функция $f(x) = 1 + \frac{\ln 2}{\pi}\sin\left(2\pi\frac{\ln x}{\ln 2}\right)$, для которой при выборе начального приближения $x_0 = 1$ (и при всех $x_0 = 2^k$ при целых k) метод Ньютона сходится к точке $x = 0$, не принадлежащей области определения функции, и т. п. После таких рассмотрений, задание 3 тогда является естественным и с интересом выполняется. При комментариях по итогам выполнения этого задания практикума желательно пояснить одну и известную, и важную теорему украинского математика А. Н. Шарковского, что мы иногда и делаем: например, для уравнения $x^2 - 3x + 3 = 0$ показывается, что для любого натурального p существует начальное приближение $x = x_0$, для которого *итерационная последовательность Ньютона (орбита) имеет период длины p* (отметим попутно, что само доказательство этого утверждения мы проводим «от конца»). Исследование всего множества уравнений третьей степени (и других степеней), для которого последнее утверждение о периодичности орбит остается в силе, — тема самостоятельных исследований для учащихся.

В качестве творческих заданий для учащихся мы предлагаем также изучение областей сходимости (аттракторов) для корней уравнений третьей степени в комплексной области — это требует умения обращаться с компьютером на уровне пользователя и приводит к известным красивым картинкам, связанным с фрактальными множествами и их структурой. Демонстрации полученных отдельными школьниками подобных исследований всегда с интересом и любопытством воспринимаются всеми учащимися. Заметим, что отыскание областей сходимости для корней уравнения третьей степени (поиск аттракторов) не является простым упражнением, так как все вычисления проводятся приближенно и даже небольшие погрешности в вычислениях могут приводить к «странным картинкам». Конечно, выход в комплексную плоскость возможен только тогда, когда ученики уже в какой-то мере изучили тему «Комплексные числа». Мы начинали выполнять эти задания в те времена, когда компьютеры только появились, принтеры были «точечными» и соответствующими программами мы не располагали. Наиболее яркими подвижниками изготовлениями «фрактальных картинок» в те времена были автор настоящих строк, А. В. Назаренко и В. В. Рождественский; предложенные ими методики и готовые «картинки» мы использовали несколько лет.

В задании 1 встречалось и выражение вида $\sqrt{100+n}-\sqrt{100-n}$, а для заданий 2 и 3 выбирались уравнения более общего вида: например,

$$x^3-5x^2+6x+3=0, \quad x^4+2x^3+3x^2-18=0.$$

Отметим также, что часто одни и те же уравнения используются в различных практикумах, где требуется приближенно найти корни. Делается это намеренно, чтобы провести сравнения изучаемых методов и оценить преимущества одного метода перед другими.

Учащимся при выдаче задания (а иногда, при разборе итогов его выполнения) рассказывается о том, как появился метод секущих и касательных. Если коротко, то основная идея Ньютона (которую он сообщил письмом Лейбницу в 1976 году) состояла в том, что приближенно корень алгебраического уравнения $f(x)=0$ можно найти с помощью поправок, отыскиваемых из линейных уравнений. Если уже известно некоторое приближение x_0 к корню x, то следует положить $x=x_0+p$, где p — некоторая поправка. Для ее нахождения используется уравнение $f_1(p)=f(x_0+p)=0$ и приближенное значение поправки p_0 ищется его линеаризацией. Затем полагается $p=p_0+q$; приближение q_0 ищется из уравнения $f_2(q)=f_1(p_0+q)=0$ и полагается, что $p=p_0+q_0$. Получается цепочка уравнений $f_1(p)=0, f_2(q)=0, f_2(r)=0$ и затем все повторяется до тех пор, пока не достигается нужной точности. Сам Ньютон рассмотрел уравнение $x^2-2x-5=0$ (и мы, конечно, его также включаем в задания с указанием на этот факт) и получил к приближению $x_0=2$ три поправки: $x=2+p_0+q_0+r_0$, где $p_0=0{,}1$, $q_0=-0{,}0054$, $r_0=-0{,}00004853$. Тем самым, получается значение $x=2{,}09455147$ с восемью верными знаками.

Соотечественник Ньютона и его последователь Дж. Рафсон в 1690 году произвел модификацию этого метода. Он находил последовательные приближения $x_1, x_2, x_3, \ldots$, по одной и той же формуле и не пользовался уравнениями $f_2=0, f_3=0, \ldots$. Первая поправка получается у него после линеаризации уравнения

$$f(x)=f(x_0+p)=f(x_0)+f'(x_0)p+\frac{f''(x_0)}{2!}p^2+\cdots$$

в виде $p=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Тогда приближенное значение корня $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Затем образуется уравнение $f_1(x_1+q)=0$, из которого

$$q_0=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \qquad x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продолжая процесс, можно тогда использовать рекуррентную формулу

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

В таком виде метод Ньютона изложен Эйлером в «Основаниях дифференциального исчисления» в 1755 году и именно в таком виде этим методом и пользуются сейчас, называя его методом касательных Ньютона.

11. Кривые Уатта

Шарнирный механизм, о котором ниже идет речь, был предложен выдающимся английским изобретателем Джеймсом Уаттом в 1774 году, когда он работал механиком университета в Глазго и решал такую чисто практическую задачу по совершенствованию паровых двигателей: *как связать поршень с точкой махового колеса, чтобы вращение колеса сообщало поршню прямолинейное движение?*

Пусть $O_1A_1A_2O_2$ — трехзвенный шарнирный механизм, который состоит из трех прямолинейных стержней O_1A_1, A_1A_2, A_2O_2 $(O_1O_2 = 2l, O_1A_1 = O_2A_2 = R, A_1A_2 = 2d)$; при этом, точки O_1 и O_2 закреплены, но все три указанные выше стержня могут вращаться вокруг точек O_1, A_1, A_2, O_2, т. е. во всех этих точках стержни соединены шарнирами (механизм Уатта).

Тщательно изучив движение середины M стержня A_1A_2, Д. Уатт, чисто эмпирически, определил параметры шарнирного механизма l, R, d, для которого кривая, которую описывает точка M, имеет «продолжительные» участки, незначительно отклоняющиеся от прямой линии.

Задание. Даны параметры плоского механизма Уатта: l, R, d.

1. При помощи циркуля и линейки построить по точкам кривые Уатта, описываемые серединой M стержня A_1A_2.

2. Определить длину L наибольшего участка каждой из построенных кривых, отличающегося от отрезка прямой менее чем на 5%; найти параметры l_0, r_0, a_0 механизма, которые давали бы подобный участок длины $L_0 = 0{,}3$ м.

Данное задание раздается учащимся сразу, как только они приступают к изучению темы «Функции и графики», т. е. когда рассматриваются различные способы задания функций. При построении кривых Уатта используются две равные окружности с центрами O_1, O_2 и радиусом R: если точка A_1 расположена на первой окружности и для нее найдется точка A_2 второй окружности и такая, что $A_1A_2 = 2d$, то точку M легко построить. На рис. 7 и 8 приведены работа одного из учеников и материалы для учащихся по этому заданию математического практикума.

В качестве творческих заданий учащимся предлагалось: 1) найти уравнение кривой Уатта в декартовой и поляной системах координат; 2) доказать, что существует всего 12 различных типов таких кривых (l — масштабный параметр), включая и вырожденные случаи и отразить итоги такой классификации в системе ORd. Кроме того, предлагалось изучить кривые, которые описывает точка M, не являющаяся серединой отрезка A_1A_2; другим направлением являлось изучение кривых Уатта, но не в симметричном случае, $O_1A_1 \neq O_2A_2$. Для очень активных учащихся предлагалось рассмотреть инверсоры Поселье, Гарта и дельтоид Кемпе, вплоть до общей теоремы о том, что для любой алгебраической кривой можно построить шарнирный механизм, состоящий из стержней, одна точка которого будет описывать данную кривую; эта теория важна в приложениях («луноход», роботы, станки и т. д.). Отметим, что ученик 11 класса К. Джигарджян разработал программу, позволяющую по любому набору фигурирующих в задаче параметров увидеть на экране монитора ПК соответствующую им кривую Уатта.

У этой темы богатая история и рассказ об этом вызывает естественный интерес у школьников. Шарнирными механизмами много и плодотворно занимался замечательный русский ученый Пафнутий Львович Чебышев, который в связи с этими исследованиями разработал новый раздел теории функций — теорию наилучших приближений. Он собственноручно изготовил множество самых разнообразных шарнирных механизмов (соответствующие модели и фотографии показываются учащимся; см. [33], [12], [47], [48]): пресс, стопоходящую машину, гребную лодку и т. д.

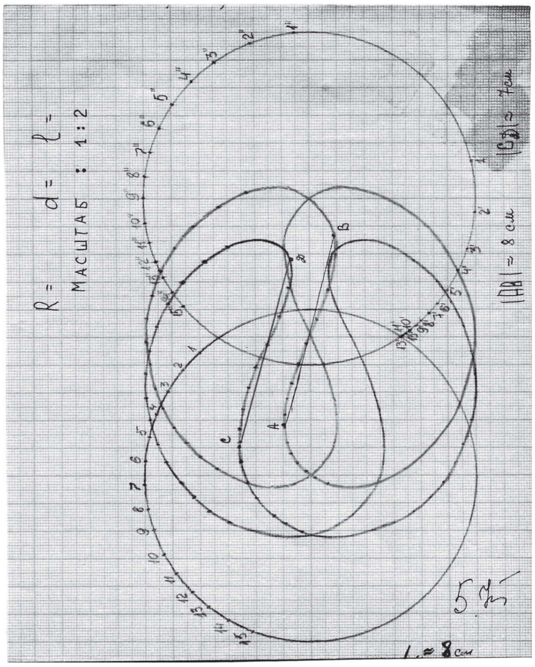
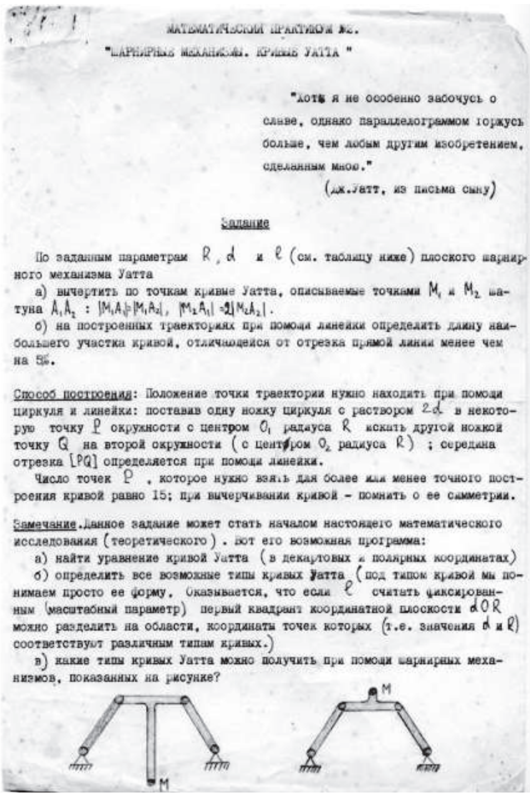


Рис. 7.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ №2.

"ШАРНИРНЫЕ МЕХАНИЗМЫ. КРИВЫЕ УАТТА"

"Хотя я не особенно забочусь о славе, однако параллелограммом горжусь больше, чем любым другим изобретением, сделанным мною."

(Дж.Уатт, из письма сыну)

Задание

По заданным параметрам R, d и ℓ (см. таблицу ниже) плоского шарнирного механизма Уатта

а) вычертить по точкам кривые Уатта, описываемые точками M_1 и M_2 шатуна A_1A_2 : $|M_1A_1|=|M_1A_2|$, $|M_2A_1|=2|M_2A_2|$.

б) на построенных траекториях при помощи линейки определить длину наибольшего участка кривой, отличающейся от отрезка прямой линии менее чем на 5%.

Способ построения: Положение точки траектории нужно находить при помощи циркуля и линейки: поставив одну ножку циркуля с раствором $2d$ в некоторую точку P окружности с центром O_1 радиуса R искать другой ножкой точку Q на второй окружности (с центром O_2 радиуса R) ; середина отрезка $[PQ]$ определяется при помощи линейки.

Число точек P, которое нужно взять для более или менее точного построения кривой равно 15; при вычерчивании кривой – помнить о ее симметрии.

Замечание. Данное задание может стать началом настоящего математического исследования (теоретического) . Вот его возможная программа:

а) найти уравнение кривой Уатта (в декартовых и полярных координатах)

б) определить все возможные типы кривых Уатта (под типом кривой мы понимаем просто ее форму. Оказывается, что если ℓ считать фиксированным (масштабный параметр) первый квадрант координатной плоскости dOR можно разделить на области, координаты точек которых (т.е. значения d и R) соответствуют различным типам кривых.)

в) какие типы кривых Уатта можно получить при помощи шарнирных механизмов, показанных на рисунке?

Рис. 8.

12. Годографы

Задание. Дана вектор-функция

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r(t)} = at\overrightarrow{e} + R^{t+\alpha}(\overrightarrow{e}) + A\mathrm{R}^{\omega t+\beta}(\overrightarrow{e}),$$

где значения параметров $a, \alpha, A, \omega, \beta$ заданы; $\overrightarrow{e}$ — единичный вектор, R^{φ} — поворот на угол φ вокруг начала координат.

а) Вычислить производные $\overrightarrow{r}'(t)$, $\overrightarrow{r}''(t)$ и провести аналитическое исследование вектор-функций $\overrightarrow{r}(t)$, $\overrightarrow{r}'(t)$, $\overrightarrow{r}''(t)$;

б) Построить годографы вектор-функции $\overrightarrow{r}(t)$, годографы скорости $\overrightarrow{r}'(t)$ и ускорения $\overrightarrow{r}''(t)$; около точек годографа отметить отвечающие им значения t.

Все указанные годографы расположить на двух-трех листах миллиметровой бумаги. Аналитическое исследование и вспомогательные чертежи дать на дополнительных листах. Масштаб следует выбрать так, чтобы все три годографа имели примерно одинаковые размеры.

Отметим, что аналитическое исследование включает определение радиусов обводов годографов, исследование вектор-функции на периодичность и отыскание периода, отыскание осей симметрии, выяснение свойств поворотной и переносной симметрий годографов, отыскание их особых точек. Вычерчиваются годографы по точкам, берут 15–20 точек на периоде поворотной или переносной симметрии. Конечно, сейчас допустимо и использование всякого рода математического обеспечения для ПК при вычерчивании нужных кривых; однако, следует иметь в виду, что задание раздается ученикам 10-х классов, которые еще не умеют как следует пользоваться компьютером, а во-вторых, само задание предполагает и теоретико-практическую часть.

Подчеркнем, что это задание математического практикума включает в себя еще один (другой) практикум, который называется *«Круговые циклоиды»*. Поэтому, как правило, оба эти практикума для одного потока обучающихся не используются. А если, по каким-либо причинам, все же выдавалось задание о круговых циклоидах и есть необходимость в изучении производных векторных функций, то в этом практикуме мы рассматриваем только трансляционно-инвариантные годографы («развернутые циклоиды»: $a \neq 0$).

Более сложные задания исходного практикума состоят в построении годографов (и их производных):

А) так называемых *«циклоид Лагранжа»*

$$\overrightarrow{r}(t) = \mathrm{R}^t(\overrightarrow{e}) + a\mathrm{R}^{\omega_1 t}(\overrightarrow{e}) + b\mathrm{R}^{\omega_2 t}(\overrightarrow{e});$$

Б) *«Разворачивающихся циклоид»*

$$\overrightarrow{r}(t) = (at^2 + bt + c)\overrightarrow{e} + \mathrm{R}^t(\overrightarrow{e}).$$

С циклоидами Лагранжа приходится сталкиваться в астрономии — при изучении одновременного движения трех тел, например, Земли, Луны и спутника Луны.

Классификация кривых вида (А) и (Б) практически не разработана; исследование этих вектор-функций и их годографов — темы творческих заданий для желающих учащихся.

Еще одно замечание. Практикум *«Круговые циклоиды»* содержит в своем задании еще одну часть, посвященную *построению эволют и эвольвент* циклоидальных кривых и, тем самым, служит иллюстрацией соответствующей теоремы Ньютона об этих кривых. Кроме того, в магазинах детских игрушек имеется недорогой набор круглых дисков с дырочками, который позволяет очень быстро вычерчивать различные кривые (эпициклоиды, гипоциклоиды, эпитрохоиды, гипотрохоиды); таких двух-трех наборов достаточно, чтобы организовать выполнение заданий учащимися.

Для желающих, в качестве заданий творческого характера, предлагалось изучение различного рода *рулет*. Кривая (траектория), описываемая точкой M, жестко связанной с фигурой F_2, катящаяся без проскальзывания по другой, неподвижной фигуре F_1, называется *рулетой*. Предлагалось исследовать рулеты в следующих случаях:

а) F_1 и F_2 — правильный многоугольник и отрезок (или наоборот);

б) F_1 и F_2 — правильные многоугольники (с одинаковым или различным числом сторон и возможно с разными длинами);

в) F_1 и F_2 — окружность и правильный многоугольник (или отрезок).

Во всех приведенных ситуациях существует много самых разнообразных вариантов. Интерес представляют замкнутые рулеты, типы которых в математической литературе в этих ситуациях не описаны.

13. Линейное программирование

Предлагаемые задания ученикам десятых (иногда и одиннадцатых) классов были довольно традиционны и все они, так или иначе, сводились в двумерном случае (были и «трехмерные задания» для желающих) к нахождению $\max(c_1x_1 + c_2x_2)$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ a_1x_1 + b_1x_2 \leq d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 \leq d_2. \end{cases}$$

Задачи линейного программирования, подобные этой, сейчас прочно вошли в практику преподавания математики в массовой школе; по крайней мере, они почти всегда встречаются при работе математических кружков и на факультативных занятиях там, где они проводятся. В практику нашей работы они вошли с первых дней открытия ФМШ при МГУ; некоторые из постановок первых заданий практикума принадлежали В. Ф. Пахомову, Г. Г. Григорьеву, и др. Интересно, что заслуженный учитель Г. Г. Григорьев защитил в *конце пятидесятых годов* прошлого столетия (когда экономисты относились к этим методам довольно прохладно) педагогическую диссертацию по этой тематике, основываясь на своем опыте работы в одной из сельских школ Смоленской области.

Выполнение этого задания основано на геометрии линейных неравенств и на свойствах выпуклых множеств. При отчете по этой задаче от учащегося требовалось умение доказывать необходимое и достаточное условие максимума. Сама схема вычислений для нахождения максимума основана на переборе (при помощи указанного условия) всех вершин соответствующего задаче выпуклого многоугольника на плоскости Ox_1x_2.

Другим вариантом задания этого практикума иногда был практикум с названием *«Линейное программирование: симплекс-метод»*, в котором отрабатывался более экономный способ в трехмерном случае (поиск градиента) нахождения вершины, где достигается экстремум. Ясно, что применение в расчетах симплекс-метода требует меньше трудозатрат и позволяет увеличить число переменных, приблизив постановки задач ближе к их практической значимости.

Задачи линейного программирования получили большое применение в экономике и в производстве и привели к интересным математическим исследованиям по теории экстремальных задач. Что касается конкретных фабул для постановки практических задач линейного программирования, то выбирались самые разнообразные: упаковка рюкзаков, составление лекарств, использование производственных мощностей и др. Этот практикум неразрывно связан с другими, например, с чисто алгебраическим и вычислительным практикумом *«Решение линейных систем уравнений»*. Отметим, что в последнее время при изучении на классных занятиях применений принципа включения-исключения в геометрии и при анализе широко известной задачи «о пяти заплатках» и её обобщений мы стараемся дойти до точных неравенств, для доказательства которых используются методы теории линейного программирования.

В 2009 году исполнилось семьдесят лет после публикации небольшой книги выдающегося ученого XX века Канторовича Леонида Витальевича (1912–1986), которая называлась «Математические методы организации и планирования производства». Хотя эта книжка и была издана совсем малым тиражом издательством Ленинградского государственного университета, ее появление знаменовало открытие нового направления в науке, которое получило название линейного программирования.

В 1937 году к уже известному тогда ученому-математику Л. В. Канторовичу обратились за консультацией работники Фанерного треста с вопросом о наиболее выгодном распределении материала между имеющимися станками. С этой «задачи по раскрою фанеры» все и началось. На 14-й странице указанной книги имеется пример 2, где ее автор пишет: «Как раз первый вопрос, с которого я начал работу, предложенный центральной лабораторией Фанерного треста, относился именно к этой задаче — максимальному выпуску продукции данного ассортимента. Нами был решен конкретный пример. Работа эта была сдана лаборатории. Там был такой случай: имеется восемь лущильных станков и пять различных номенклатур материала. Производительность каждого станка по каждой номенклатуре материала дана в таблице (*мы ее здесь опускаем*). Требовалось установить распределение, обеспечивающее максимальную выработку при условии, что материал 1-й номенклатуры составляет 10%, 2-й — 12%, 3-й — 28%, 4-й — 36%, 5-й — 14%». И далее: «В смысле получения эффекта обстоятельства здесь были сравнительно неблагоприятные в том отношении, что условия работы на всех станках были примерно одинаковые; все же получилось увеличение выпуска продукции по сравнению с наглядным решением (если на каждом станке выдержать соотношения по ассортименту) в размере 5%. В других случаях, где большая вариация производительности по видам материалов, такое решение может дать и больший эффект. Но даже увеличение на 5%, достигаемое без всяких затрат, имеет практическое значение». В указанной книге (приложение А) имеется полное численное решение задачи Фанерного треста; эта задача и аналогичные ей могут стать основой для *новых заданий в школе имени А. Н. Колмогорова* — см. [40].

Л. В. Канторович считал А. Н. Колмогорова одним из своих учителей. Научные контакты у Канторовича с Колмогоровым возникли в связи с работами по теории множеств. А. Н. Колмогоров предоставил молодому ученому свои неопубликованные рукописи по этой теме, написанные в 1920-м году (они появились в печати только в 1987 году, в год смерти А. Н. Колмогорова), пригласил сделать доклад на втором Всесоюзном съезде математиков, всячески его поддерживал в трудные и жестокие для Л. В. времена. А. Н. Колмогоров очень высоко оценивал математические работы Л. В. Канторовича и считал его одним из ведущих и ярких математиков.

Книга Канторовича Л.В., о которой идет речь, была встречена экономистами в штыки и была объявлена ошибочной, а автору было предписано прекратить исследования по экономике. Это было серьезное, по тем временам, предупреждение власть имущих «псевдоученых и чиновников», и активные исследования были приостановлены. Однако и в этот сложнейший для жизни ученого период появились и другие работы с экономическим содержанием. Несмотря на существующие нападки, в 1958-м году Л. В. Канторовича избирают, тем не менее, членом-корреспондентом АН СССР по экономическому отделению; академиком (уже по отделению математики) он был избран в 1964-м году.

В 1975 году сразу два советских ученых были удостоены Нобелевской премии: по экономике Л. В. Канторович (совместно с американским ученым Т. Купмансом) и Премии Мира — А. Д. Сахаров. Власти не пустили А. Д. Сахарова в Швецию на церемонию вручения премии, а на Канторовича Л.В. оказывали всяческое давление, чтобы он подписал коллективное письмо академиков с осуждением Нобелевского комитета мира. Однако, один из немногих академиков, кто это письмо не подписал, был Л. В. Канторович.

14. Криптография

Это задание практикума предлагает расшифровать текст, написанный на «другой клавиатуре» пишущей машинки или компьютера.

Учащийся при этом получает отрывок художественного произведения (не из школьной программы, но интересного автора), зашифрованного при помощи некоторого *шифра замены букв этого текста.* Желающие получали тексты, написанные на иностранном языке; отметим, что такое задание, например, на английском языке, только стимулировало изучение языка и выполнялось с энтузиазмом. Объем текста составляет одну страницу. Инициатором такого практикума был А. К. Звонкин, который дома сам «шифровал» тексты и предлагал их затем для расшифровки.

В качестве иллюстрации (трудно удержаться!) приведем здесь шифровку из известного рассказа Эдгара По «Золотой жук», написанную на английском языке и ее расшифровку, а также её перевод на русский язык (взято из книги: Эдгар А. По, Полное собрание рассказов. — М.: Наука, 1970.):

53##+305))6*;4826)4#·)4#);806*;48+8??60))85;:]8*;:#*8+83(88)5*+;
46(;88*96*?;8)*#(;485);5*+2:*#(;4956*2(5*=4)8??8*;
40692285););)6+8)4##;1(#9;48081;8:8#1;48+85;4)
485+52806*81(#9;48;(88;(#?34;48)4#;161;:188;#?;

Дешифрованный текст: A good glass in the Bishop's hostel in the Devil's seat — twenty-one degrees and thirteen minutes — northeast and by north — main branch seventh limb east side — shoot from the left eye of the death's-head — a bee-line from the tree through the shot fifty feet out.

Перевод этого текста на русский язык: «Хорошее стекло в трактире епископа на четвертом стуле двадцать один градус и тридцать минут северо-восток главный сук седьмая ветвь восточная сторона стреляй из левого глаза мертвой головы прямая от дерева через выстрел на пятьдесят футов».

При постановке этого задания и при анализе результатов его выполнения не всегда находилось достаточно времени, чтобы обсудить и уделить должное внимание основным и простым идеям современных подходов к филологическим, в том числе лингвистическим и литературоведческим исследованиям. Однако с такими важными понятиями, как «Частотный словарь языка», «Частотный словарь автора», законы Лотке и Ципфа (и юмористические интерпретации этих законов), школьники всегда были ознакомлены. И, естественно, мы всегда стараемся хотя бы упомянуть (и объяснить их смысл) работы А. Н. Колмогорова по изучению основ классической метрики стихов широко известных авторов.

На учебные занятия в этот период (когда они были) часто приносился томик И. Ильфа и Е. Петрова с их знаменитым «наблюдением»: «Словарь Вильямса Шекспира по подсчетам исследователей составляет 12000 слов. Словарь негра из людоедского племени «Мумбо-Юмбо» составляет 300 слов... Эллочка Щукина легко и свободно обходилась тридцатью... Мадумазель Собак слыла культурной девушкой: в ее словаре было около ста восьмидесяти слов. При этом ей было известно одно такое слово, которое Эллочке даже не могло присниться...».

В качестве любопытных и важных исторических примеров кодировки сообщений присутствовали азбука Морзе (на русском и английском языках), пляшущие человечки А. К. Дойля, шифр Цезаря, решетка Кардано, русская тайная «цифирная азбука Петра Великого» и т. д. (См. любопытную книгу: David Kahn, Codebreakers. The story of secret writing. — New-York: Macmillan, 1967; сейчас появилось много интересных работ на русском языке: например, Ященко В.В. Основные понятия криптографии. — Журнал «Математическое просвещение», Третья серия, вып. 2, 1998; М.: МЦНМО, 1998).

15. Латинские квадраты

Задание. а) Построить полные наборы ортогональных латинских квадратов порядков 3, 4, 5 и 7.

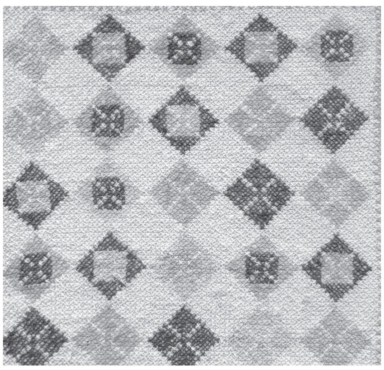
б) Изготовить цветную аппликацию для греко-латинского квадрата пятого порядка.

в) Построить шесть пучков параллельных прямых аффинной плоскости на двадцати пяти точках.

Латинским квадратом порядка n называется квадратная таблица, которая содержит в каждой строке перестановку элементов $1, 2, \ldots, n$ и эти перестановки выбраны так, что ни один столбец не содержит повторяющихся элементов. Латинские квадраты (a_{ij}) и (b_{ij}) называются ортогональными, если все пары $(a_{ij}; b_{ij})$ различны $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Пример двух ортогональных латинских квадратов порядка 3 можно увидеть из такой таблицы (сама эта таблица называется греко-латинским или эйлеровым квадратом порядка 3)

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) \\ (2,3) & (3,1) & (1,2) \\ (3,2) & (1,3) & (2,1) \end{bmatrix}.$$

Это задание практикума было организовано в поддержку курса лекций по геометрии, которые читал А. Н. Колмогоров. Этот аксиоматический курс начинался с аксиоматики аффинной и проективной плоскостей, а на занятиях рассматривались задачи, связанные с конечными плоскостями.



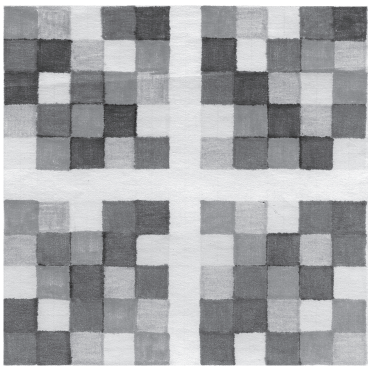


Рис. 9. Практикум «Латинские квадраты»

Для тех порядков латинских квадратов, которые предложены в практикуме, особых сложностей нет и, в принципе, даже в случае $n = 7$ при известном числе таких квадратов, можно перебором выполнить п. а) задания (и такие учащиеся были). Однако мы стремились к тому, чтобы на установочных занятиях (или после выполнения заданий) были обсуждены и доказаны теоремы о том, что

– Число попарно ортогональных латинских квадратов порядка $n \geq 3$ не превосходит $n-1$.

– Если $n = p^{\alpha}$, где p — простое и α — натуральные числа, то существует полный набор из $n-1$ ортогональных латинских квадратов порядка n.

– Каждое полное семейство попарно ортогональных квадратов порядка n порождает аффинную плоскость порядка n.

Другими словами, мы стремились к тому, чтобы учащиеся понимали связи между конечными полями Галуа и конечными аффинными плоскостями и методикой их установления. Сами доказательства были довольно традиционны в этих вопросах и с ними можно познакомиться в прекрасной книге Эмиля Артина «Геометрическая алгебра» (М.: Наука, 1969). Для поля Галуа из четырех элементов таблицы сложения и умножения школьникам сообщались, для других конечных полей простого порядка p элементы полей Галуа выбирались в виде полной системы вычетов по модулю p. Здесь уместно сказать, что на лекциях и на занятиях по алгебре традиционно всегда рассматривается арифметика остатков, конечные поля, кольца и, конечно, время выдачи такого практикума выбирается тогда, когда школьники или уже знакомы с необходимым минимумом теоретического материала, или, наоборот, совсем незнакомы — тогда мы преследуем пропедевтические цели.

Интерес к этому практикуму у школьников велик и однажды группа школьниц, отказавшись от изготовления бумажной аппликации, сделала ее в форме изящной вышивки мелким крестом (которая у автора статьи бережно хранится).

16. Навигация

Мало кто отдает себе отчет в том и знает, что сферическая геометрия создавалась практически одновременно с евклидовой геометрией (Менелай — I в., Птолемей — II в., Эратосфен — III в.); современный вид сферическая геометрия приобрела после работ Эйлера. В настоящее время сферическая геометрия особенно широко применяется в астрономии, навигации и картографии, в геодезии и в компьютерной графике. Отметим также, что изучение астрономии в школе сейчас ограничивается только самыми первоначальными сведениями.

Приведем одно задание (значительное по объему вычислений), выполняемое учениками в то время, когда только появлялись калькуляторы и, как правило, все вычисления проводились вручную и при помощи таблиц.

Задание. Пункты A и B земной поверхности заданы своими географическими координатами.

а) Найти кратчайшее расстояние между пунктами A и B вдоль земной поверхности. Радиус Земли считать равным 6371 км.

б) Определить начальный курс корабля при движении по ортодромии (в переводе — прямой бег) из A в B.

в) Вычислить координаты 10 точек локсодромии (в переводе — «косой бег»), соединяющей пункты A и B.

Иногда в обязательную часть задания добавлялись вопросы теоретического характера (об уравнениях рассматриваемых кривых) с той целью, чтобы добиться от учащихся понимания нужных доказательств. Кроме того, один раз от школьников требовалось на самостоятельно изготовленном фрагменте прямоугольной сетки Меркатора построить графики ортодромии и локсодромии.

Географические координаты пункта P земной поверхности — это ее широта и долгота. Широтой пункта P называется величина угла φ, образованного радиусом OP (O — центр Земли) с плоскостью экватора, причем к северу от экватора широта считается положительной, а к югу — отрицательной, т. е. $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$. Долгота λ пункта P — это величина двугранного угла между плоскостями NOP и NOH, где N — Северный полюс Земли, а H — точка, отвечающая гринвичской обсерватории; при этом к востоку от гринвичского меридиана долгота считается положительной, к западу — отрицательной и $-180^\circ \le \lambda \le 180^\circ$. Итак $(\varphi; \lambda)$ — географические координаты пункта P.

Учебное время проведения такого практикума всегда выбирается тогда, когда учащиеся на занятиях по стереометрии уже познакомились с началами сферической геометрии и тригонометрии.

Задания практикума, конечно, варьировались в разные годы. Так, например, в 1972 году задание практикума выглядело следующим образом:

Задание. а) Самолет летит из точки A ($0^\circ 0'$ с.ш.; $0^\circ 0'$ в.д.) в точку B (φ° с.ш.; 90° в.д.). Штурман ведет самолет на постоянной высоте по кратчайшему пути из A в B, т. е. по ортодромии. Вычислить курс самолета α (угол с меридианом) и приближенно построить его график как функции от собственной широты и собственной долготы. Численные значения задать не менее чем в десяти точках. Получить общую формулу зависимости курса от собственной широты.

б) Пусть φ_n — широта точки, $\beta(t)$ — высота стояния солнца над плоскостью экватора в зависимости от времени года t ($t = 0, \beta = 0$ — точка весеннего равноденствия), $\gamma = 23^\circ 27'$ — угол наклона плоскости экватора Земли к плоскости эклиптики Солнца; $x(t)$ — долгота дня в точке с широтой φ_n.

- Найти функцию $f(t; \gamma, \varphi_n) = x(t)/2\pi$, составить таблицу ее значений и построить график в зависимости от t; при этом, на оси Ot нанести два масштаба — в радианах и в календарных числах года.

- Найти функцию $\beta(\gamma, t)$, составить таблицу ее значений и построить график. Вдоль оси Ot отметить два масштаба — в радианах и в календарных числах года.

В 2013 году в двух классах использовался вариант задания практикума, предложенного В. Н. Дубровским. Приведем здесь часть текста по этому заданию (мы убрали из него только введение, рисунок М. Эшера и таблицу с распределением вариантов), который раздается учащимся, а само задание состоит из двух частей.

Астрономия, или День и ночь

Задание А1. Найти продолжительность L светового дня в пункте A из вашего варианта на заданную дату d и построить график зависимости L от d.

Задание А2. Построить график изменения высоты h Солнца над плоскостью горизонта (угла между направлением на Солнце и плоскостью горизонта) в пункте A в течение одних суток в зависимости от времени суток на заданную дату D.

Указания. Считать, что Земля — шар и вращается вокруг Солнца по круговой орбите с периодом 365 суток и вокруг своей оси NS с периодом 1 сутки (см. рисунок 10). Ось NS свое направление не меняет. Угол между плоскостью экватора и плоскостью эклиптики (т. е. плоскостью орбиты Земли) равен $\gamma = 23^\circ 27'$. Смещением Земли по орбите в течение суток пренебречь.

Для расчетов удобно задавать положение Земли на орбите углом поворота t, отсчитываемым от точки весеннего равноденствия ($t = 0$), а затем пересчитать t в единицы времени (сутки). Широта отсчитывается от экватора на север и принимает значения от -90° до 90°. Для вычисления L используйте $\angle MPK$, а для нахождения h — угол между лучом OA и направлением на Солнце (на рисунке не показан).

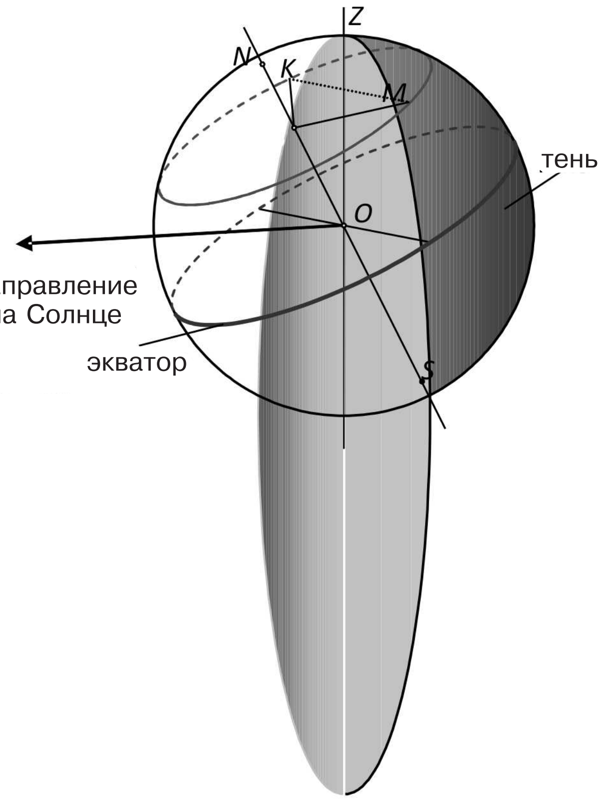


Рис. 10.

Навигация, или Летят перелетные птицы

Требуется рассчитать курс самолета, который должен прилететь из города A в Москву (город B) для двух разных траекторий — ортодромии (кратчайшего пути) и локсодромии (кривой постоянного *путевого угла* α, т. е. пересекающей все меридианы под углом α), и найти разницу между длинами этих двух траекторий.

Задание Н1. Найти зависимость путевого угла α от а) собственной широты ϕ; б) собственной долготы λ самолета и построить график этой зависимости при полете из A в B по ортодромии.

Задание Н2. Найти путевой угол α кратчайшей локсодромии, соединяющей A и B.

Задание Н3. Найти разность расстояний, пролетаемых самолетом в 1-м и 2-м случаях.

Ученики с четными номерами в прилагаемом списке выполняют задания А1, Н1 б), Н2 и Н3, ученики с нечетными номерами — А2, Н1 а), Н2 и Н3. Город A — столица территории (страны, штата и т. д.), указанного в списке напротив вашей фамилии (*мы здесь соответствующую таблицу не приводим*). Широту и долготу пунктов A и B найдите самостоятельно. В задании А2 за дату D возьмите свой день рождения».

17. Многогранники

Задание. Используя фотографию (чертеж, рисунок, готовую модель и пр.) полуправильного или правильного многогранника M:

а) Начертить развертку многогранника, содержащую все ребра и вершины многогранника.

б) Изобразить диаграмму Шлегеля (граф центральной проекции) данного многогранника.

в) Изготовить из плотной бумаги модель многогранника M, указав на диаграмме Шлегеля порядок склеивания граней.

г) Раскрасить грани модели (и многоугольные области на диаграмме Шлегеля) в четыре цвета так, чтобы грани, имеющие общее ребро, были окрашены разным цветом.

д) Описать группу G_M вращений многогранника M: найти число ее элементов N_M; указать все типы осей поворотов (на рисунке многогранника и его модели), порядок осей и число осей каждого порядка.

Развертка, раскрашенная диаграмма и рисунок многогранника с указанными осями поворотов изображается на основном листе в достаточно большом масштабе. Там же приводится таблица осей поворотов. Модель многогранника, в цветном исполнении, изготавливается одна на двух учащихся (там, где это целесообразно).

Диаграмму Шлегеля удобно рисовать, имея перед собой уже изготовленную модель. Учащимся рекомендуется (для изучения группы вращений) сначала понять, как данный полуправильный многогранник связан с каким-либо правильным многогранником (на уровне подсказки — название многогранника). Нужные раскраски проводятся методом «проб и ошибок». Модель многогранника изготавливается по развертке или последовательно склеивается из граней. Методики и технологии склейки многогранников описаны подробно в книге: М. Веннинджер, Модели многогранников. – М.: Мир, 1974; дважды мы использовали «математический конструктор», предложенный Ю. В. Матиясевичем в журнале «Квант», № 1 (1978), но этот способ у нас не прижился.

Рис. 11. Математическая елка

Рис. 12. Прием выполненных заданий матпрактикума

Такое задание практикума в полном объеме выдавалось, как правило, двум-трем учащимся. При этом, мы предлагали (в обязательной части) только платоновы и архимедовы тела: куб, тетраэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр, 4-угольная антипризма, усеченный октаэдр, усеченный куб, кубооктаэдр, ромбокубооктаэдр, псевдоромбокубооктаэдр Ашкинузе, усеченный кубооктаэдр, усеченный икосаэдр, усеченный додекаэдр, икосододекаэдр, ромбоикосододекаэдр, усеченный икосододекаэдр, курносый куб, курносый додекаэдр.

В качестве творческих (или дополнительных) заданий предлагалось перечислить все тела Пуансо и изготовить их модели. Многие из учащихся выражают желание построить модели более сложных многогранников (одно время в школе была достаточно полная коллекция моделей многогранников из книги М. Веннинджера и некоторые другие. Жаль, что она со временем погибла). Сама тема (и изготовление моделей) доставляют преподавателю много возможностей для интересных исторических экскурсов и обладает емким материалом для развития пространственного воображения учащихся, не говоря уж о знакомстве с началами достаточно трудной теории многогранников.

Исторически этому практикуму предшествовали такие три задания первых лет существования школы-интерната при МГУ (они выполнялись подряд и имели порядковые номера 8, 9 и 10):

а) Найти двугранные углы полуправильного многогранника (точный ответ и приближенный ответ в градусах). Описать построение его проекции на плоскость. Описать группу вращений данного многогранника.

б) Построить модель данного многогранника в произвольном масштабе.

в) Построить проекцию данного правильного многогранника на горизонтальную и вертикальную плоскости. Повернуть многогранник относительно «вертикальной оси» на 17° и спроектировать его на те же самые плоскости. Повернуть многогранник на 21° относительно горизонтальной оси и спроектировать его на те же самые плоскости. Натуральная величина ребра многогранника должна составлять 4 см.

Учащимся выдавался (и вывешивался для всеобщего обозрения) образец выполнения третьего из этих заданий на примере додекаэдра, который готовил от руки А. Б. Сосинский. В последние годы в школе имени А. Н. Колмогорова мы ограничиваемся только изготовлением раскрашенных моделей правильных и полуправильных многогранников.

18. Сечения многогранников

Это задание практикума никогда не исчезало из наших программ по геометрии и проводится ежегодно в 11-х классах. Суть этого задания всегда состоит в том, чтобы на изображении данного многогранника (куба или многогранника, составленного из кубиков и пр.) построить сечение плоскостью, заданной тремя «плохо расположенными» точками на поверхности многогранника или тесно с ним связанных).

Например, в 2012 году мы использовали для заданий практикума эмблему школы имени А. Н. Колмогорова, составленной из трех кубиков, так как школа готовится к празднованию своего 50-летнего юбилея со дня рождения.

Как правило, это задание имеет продолжение в других заданиях, которые могут проходить и совсем независимо. Наиболее емкое по объему работы было задание, которое называлось **«Две проекции»,** которое состояло в следующем:

Задание. а) Задана одна из одиннадцати возможных плоских мозаик (правильный паркет на плоскости). Построить ее параллельную и центральную проекции на другую плоскость, задав проекцию одного из правильных многоугольников. Полный каталог мозаик см. в [41], а также в [44], где можно не только заимствовать готовые их фрагменты, но и «экспериментально» доказать теорему о возможном числе таких мозаик.

б) Построить при помощи заданной параллельной и центральной проекций плоское изображение какой-либо фигуры, составленной из кубиков (и самостоятельно придуманной).

в) Построить центральную проекцию окружности на плоскость для трех различных случаев взаимного расположения центра проекции, соответствующих эллипсу, параболе и гиперболе. Для построения выбрать на окружности не менее 16 точек.

В каждом из заданий на основном листе оформляется итоговый результат работы с ясно выделенными элементами (с использованием различных цветов), определяющими (задающими) полноту изображения. На вспомогательных листах приводятся все (или многие) дополнительные и необходимые построения.

Первые два пункта задания нацелены на то, чтобы закрепить основные свойства параллельной, центральной проекций, понятие изображения фигуры и содержания теорем Польке-Шварца о проекциях треугольника и тетраэдра.

Под *изображением* фигуры, расположенной в пространстве, на плоскости понимается ее параллельная или центральная проекция на эту плоскость (с точностью до подобия). В связи с этим различают два основных метода изображений фигур: *метод параллельных проекций и метод центральных проекций* (хотя есть и другие методы: Федорова, Монжа…).

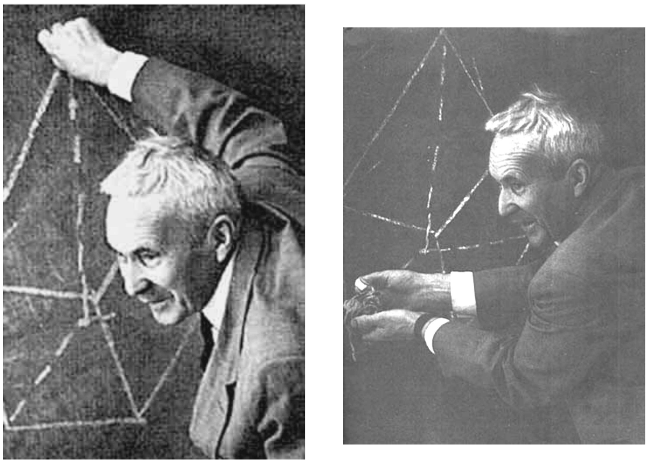


Рис. 13. А. Н. Колмогоров на лекции в школе

Несколько раз вводную лекцию по заданию практикума, связанную с изображением фигур на плоскости, читал А. Н. Колмогоров (широко известна фотография, которая имеется в школе, когда он как-бы держит за вершину многогранник; снимок сделан в ФМШ примерно в 1970 году — рис. 13, слева). На своей лекции, в частности, он обсуждал со школьниками следующую задачу: Семь точек общего положения на плоскости являются образами семи вершин каркасного «кубоида» (усеченная четырехугольная пирамида) после некоторого центрального проектирования. Как при помощи только одной линейки построить точку, куда проектируется восьмая вершина «кубоида»? Эту задачу мы не забываем и всегда используем в рамках основных геометрических курсов.

Третий пункт задания знакомит учащихся с кривыми второго порядка как проекции окружности (или линии пересечения конуса и плоскости). Методика изготовления чертежей состоит в том, что поворачивая плоскость, в которой нарисована проектируемая окружность, до совпадения с плоскостью изображения (поворот осуществляется вокруг линии пересечения плоскостей), мы получаем задачу на построение, которая уже только при помощи одной линейки позволяет построить сколько угодно точек соответствующей кривой второго порядка.

19. Орнаменты

Неограниченно протяженная плоская фигура Ф называется *орнаментом*, если выполнены следующие три условия:

– существуют перемещения плоскости, отображающие Ф на себя — эти перемещения образуют группу G_Φ симметрий орнамента Ф;

– среди перемещений $f \in G_\Phi$ существуют неколлинеарные параллельные переносы (векторы);

– среди всех ненулевых векторов (параллельных переносов) в G_Φ существует вектор наименьшей длины.

Задание. На плоскости задана фигура F и несколько перемещений $f_1, f_2, \ldots$ (симметрий, поворотов или параллельных переносов).

а) Построить орнамент из фигур, равных (конгруэнтных) фигуре F, с группой симметрий, порожденной перемещениями $f_1, f_2, \ldots$.

б) Указать все оси симметрий и все центры поворотов построенного орнамента.

Орнамент должен занимать весь основной лист. Оси симметрии выделить цветным пунктиром, центры поворотов разных порядков обозначить по-разному.

В качестве фигуры Ф в обязательной части практикума учащимся предлагаются разного типа треугольники; однако мы только приветствуем и другой выбор (для красоты) этой фигуры, но с требованием того, чтобы группа симметрий была той же самой.

Это задание, в том или ином виде, реализуется и сейчас практически ежегодно, и именно в тот момент, когда на основных занятиях изучаются движения плоскости — параллельные переносы, повороты, симметрии, скользящие симметрии и их композиции.

При постановке этого практикума и подведении итогов по его выполнению обсуждаются самые разнообразные вопросы. Такие, например, что плоские орнаменты могут иметь центры поворотов только порядков $n = 2, 3, 4$ и 6 (этим объясняется, что снежинок 5-угольной или 7-угольной формы не существует, — об этом уже знал Кеплер). Далее проводится поиск всех различных плоских орнаментов; при этом, это или просто практический поиск всех семнадцати таких орнаментов, или же полное доказательство того, что их ровно 17. (Здесь многое зависит от уровня подготовки школьников и наличия учебного времени). Об этом более подробно см. [45].

20. Геометрия круга

Основной целью этого задания является изучение свойств преобразования инверсии на плоскости и знакомство учащихся с задачами на построение при помощи только одного циркуля.

Задание. а) Даны две точки A и B. При помощи одного циркуля разделите данный отрезок $[AB]$ на k равных частей (увеличьте данный отрезок в k раз).

б) Произведите инверсию фигуры (самостоятельно придуманной), граница которой состоит из m дуг окружностей и n отрезков, относительно некоторой окружности (также самостоятельно выбранной).

в) Постройте часть (четыре-пять шагов) модулярной фигуры в круге (калейдоскопа), порожденную прямоугольным круговым треугольником с вершиной в начале координат и углом π/n при этой вершине; $n \geq 3$ — натуральное число.

На лекциях (или на семинарских занятиях) изучаются круговое свойство инверсии, свойство конформности и др., а также классическая задача о делении данного отрезка пополам только при помощи циркуля. Отметим, что, при подготовке вариантов заданий для учащихся нужно помнить о том, что для замощения всего круга (построения калейдоскопа), исходя из данного треугольника с углами $\pi/2, \pi/m, \pi/n$ нужно выполнение условия $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{2}$. Подробности можно найти в книге Г. С. М. Кокстера «Введение в геометрию» (М.: Наука, 1966).

Основой конструкции модулярной фигуры может служить следующий процесс. Рассмотрим некоторый круговой треугольник $\triangle$ (его сторонами служат дуги окружностей, ортогональных основной данной окружности). Построим три новых треугольника, получающихся из треугольника Δ при симметрии (инверсии) относительно его сторон $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (они являются образами треугольника $\triangle$ после трёх соответствующих преобразований инверсии). Треугольник, симметричный с треугольником $\triangle$ относительно любой его стороны, будет по-прежнему иметь те же углы. Затем каждый из трёх вновь полученных треугольников симметрично отобразим относительно тех двух его сторон, которые не являются сторонами треугольника $\triangle$; получим шесть треугольников «второго поколения» и т. д. (пример такой фигуры можно увидеть на обложке третьего номера журнала «Квант» за 1976 год).

Этот практикум носит также и пропедевтический характер — подготавливает учащихся к изучению темы *«Дробно-линейные отображения в комплексной области»*. По итогам его выполнения школьники с полным пониманием уже воспринимают модель Пуанкаре плоскости Лобачевского, с любопытством узнают о «тайнах» в некоторых рисунках М. К. Эшера, изучают свойства стереографической проекции и т. д.

В заключение предлагалось несколько задач исследовательского характера (которые, в частности, мною рассматривались в рамках специального курса «Дополнительные главы геометрии» уже после того, когда школьниками данный практикум был выполнен и сдан):

– При каких величинах углов исходного треугольника (уже не обязательно прямоугольного) можно симметриями относительно его сторон «замостить» без наложений полный круг?

– Какие круговые многоугольные области годятся для того, чтобы получилось указанное в предыдущей задаче замощение?

– Изучить возможность заполнения всей плоскости Лобачевского в круговой модели Пуанкаре (другими словами, найти все возможные калейдоскопы), начиная с треугольника с углами $\pi/k, \pi/m, \pi/n$. Примером может служить треугольник с вершиной в начале координат с указанными углами при $k = 2, m = 4, n = 6$.

21. Радиоактивный распад

Задание. В результате радиоактивного распада атомы материнского вещества X превращаются в атомы вещества Y, а атомы вещества Y в свою очередь превращаются в атомы вещества Z. Количества атомов этих веществ, не распавшихся к моменту времени t, обозначим соответственно через $x(t), y(t), z(t)$. Тогда эти количества связаны следующими уравнениями ($k_i = \frac{\ln 2}{T_i}$ — периоды полураспада веществ X, Y и Z соответственно):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y, \\ \frac{dz}{dt} = k_2 y - k_3 z. \end{cases}$$

При начальных условиях $x(0) = a, y(0) = 0, z(0) = 0$ найти функции $x(t), y(t), z(t)$ и на одном листе миллиметровой бумаги построить их графики.

Определить t_0, при котором $y(t)$ максимально; выразить t_0 через T_1 и T_2.

Впервые такое задание математического практикума появилось в декабре 1969 года для учащихся девятых классов (ныне десятых) в поддержку вводного курса математического анализа, который читал А. Н. Колмогоров. Школьники проучились в стенах школы всего три месяца. Само задание ориентировано больше на интуитивные представления об экспоненте и числе Непера, о понятии дифференциального уравнения и его решении. При выполнении этого задания школьники знакомились с понятием и графиком показательных функций, которых они раньше не изучали. Графики строились по точкам с использованием готовых *логарифмических таблиц*. Отметим, что самостоятельное *построение небольших фрагментов логарифмических таблиц* было предметом отдельного практикума. Число e вводилось в разные годы по-разному. Например, как основание показательной функции, у которой в нуле производная равна единице (в этом случае экспонента вводилась как одно из решений уравнения $x'(t) = x(t)$; именно такой подход затем был реализован в ряде пробных школьных учебников для массовой школы). Кроме того, в наших курсах иногда сначала вводился натуральный логарифм как площадь под гиперболой (тоже с акцентом на интуицию), а затем уже возникала экспонента.

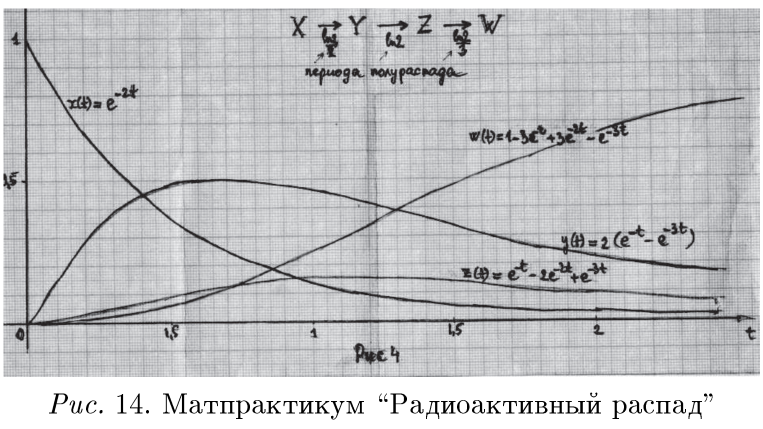


Рис. 14. Матпрактикум “Радиоактивный распад”

22. Изоклины

Курс математического анализа в физико-математических потоках традиционно включает в себя изучение простейших дифференциальных уравнений. Речь здесь идет больше не о теоретических вопросах, а фактически о применении производных и интегралов при решении задач по физике, химии и биологии (т. е. об интегрировании простейших дифференциальных уравнений). Задания практикума, в основном, посвящены качественным и численным методам анализа множества решений таких уравнений.

Задание. а) Методом графического интегрирования с шагом 0,1 построить интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = f(x)$.

б) Для дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$ построить:

– поле направлений

$$F(x, y) = C, \quad C = 0;\ 1/2;\ 1;\ 3/2;\ 2;\ \ldots;$$

– семейство траекторий данного поля направлений (семейство интегральных кривых).

Говорят, что в плоской области задано *поле направлений*, если через каждую точку этой области проходит отрезок, для которого эта точка является серединой. *Траекторией этого поля направлений* (или *интегральной кривой* поля направлений) называется кривая, расположенная в области, и которая в каждой точке касается отрезка поля направлений, для которого эта точка является серединой.

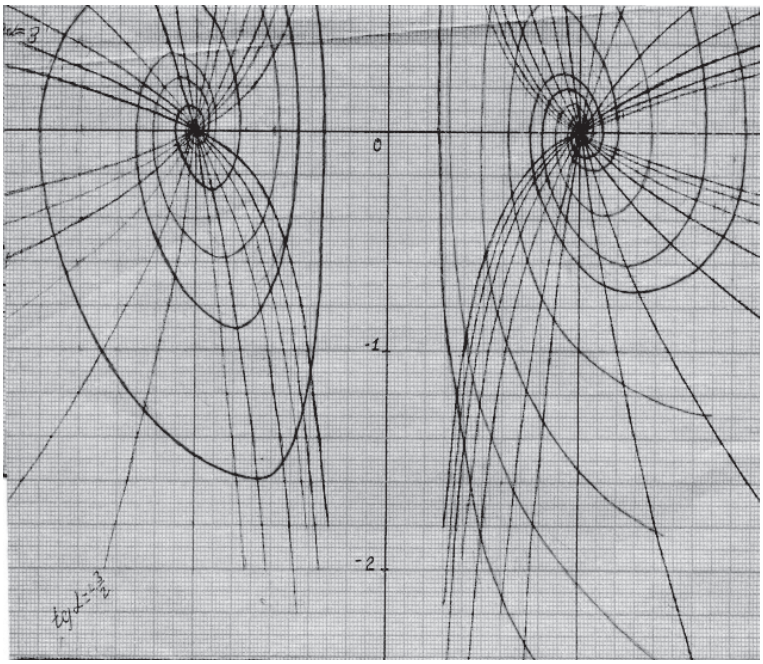


Рис. 15. Матпрактикум "Интегральные кривые"

В этом задании мы ограничиваемся, как правило, дробно-линейными функциями $F(x, y)$, хотя желающим предлагаем и более сложные поля направлений (например, квадратично-рациональные функции). При объяснении теоретического материала по этому заданию сделан упор на графическое и численное интегрирование. Классификация особых точек для дифференциального уравнения с дробно-линейной частью сообщается (и графически иллюстрируется) учащимся без доказательства, но с нужным количеством примеров.

Для творческой работы мы предлагали построить интегральные кривые для более сложных дифференциальных уравнений, но с ясными физическими и механическими постановками задач. Так, например, рассматривалась система дифференциальных уравнений $\dot{x} = y, \dot{y} =$

$x^2 + y^2 - \lambda(y+1)$, для которой требовалось изучить фазовые портреты этой системы при различных значениях параметра λ и найти те его значения, которые отвечают бифуркациям (т. е. качественным изменениям рассматриваемой картины в фазовой плоскости).

В черновиках по этой теме сохранились наметки заданий (примыкающие к рассматриваемому практикуму) о вращениях плоских векторных полей с проверкой теоремы Пуанкаре об индексах особых точек и теоремы Пуанкаре–Бендиксона о точках покоя, но реализованы эти идеи в виде реального практикума для школьников не были.

23. Модель «Хищник–Жертва»

Задание. Для экологической модели Лотки–Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -k_1 x - l_1 xy, \\ \dot{y}(t) = -k_2 y - l_2 xy, \end{cases}$$

при заданных коэффициентах и самостоятельно выбранных различных начальных условиях $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, используя различные цвета построить траектории движения точки $M = (x(t), y(t))$.

Этот практикум, естественно, должен находиться в рамках изучения темы «Дифференциальные уравнения» и реализован он был всего только один раз. История его появления в 1972 году такова. Автор настоящих строк познакомился с этой классической моделью «хищник–жертва» и ее обобщениями во время визита на дачу А. Н. Колмогорова и П. С. Александрова в Комаровке (мой визит был связан с организацией общешкольного туристического похода «Звездочка» и другими воспитательными делами). Там присутствовал и профессор В. М. Алексеев по своим научным делам (обсуждались задачи небесной механики) и во время общего разговора о математических делах в ФМШ и возникла идея об организации такого задания практикума для учащихся (кто именно был инициатором, я не помню). В. М. Алексеев, по приглашению А. Н. Колмогорова, в первые годы существования ФМШ при МГУ читал там лекции по математическому анализу и много разнообразных «вечерних» лекций для желающих школьников (цепные дроби, основная теорема алгебры, дифференциальные уравнения и пр.), а его жена — Татьяна Алексеевна — вела уроки черчения, которые часто были посвящены вычерчиванию разного рода кривых, что было в русле реализации общих идей математического практикума. Несколько раз «экологическая» тема обсуждалась уже в стенах интерната среди преподавателей математики. Тогда-то и было принято решение о создании практикума на «экологическую» тему (терминология в разговорах была различна: караси-щуки, овцы-волки, овцы–волки–охотники и т. д.), с приглашением для чтения лекций по этой теме В. М. Алексеева. Для реализации этой идеи Алексееву В.М. пришлось прочитать в вечерние часы две двухчасовые лекции на эту тему, которые проходили в актовом зале школы при самой широкой аудитории — присутствовали не только те, для которых это нужно было, чтобы выполнить задание практикума, а все желающие. На этих лекциях было рассказано и о работе А. Н. Колмогорова, в которой в рамках модели Лотки–Вольтерра допускалась еще и конкурентная борьба хищников за жертву. Автор статьи присутствовал на этих лекциях и довольно подробно их записал, подготовил конкретные задания, а затем в течение месяца реализовывал выполнение и прием самого математического практикума.

Для построения требуемых кривых учащимся рекомендовалась методика, заимствованная из знаменитой книги В. Вольтерра «Математическая теория борьбы за существование» (М.: Наука, 1976), которая затем использовалась и во время выдачи рекомендаций для выполнения других заданий практикумов. При сдаче этого задания от учащихся требовалось умение «экспериментально доказать» замкнутость траекторий и закон периодического цикла (закон сохранения средних не обсуждался). В практикуме «Изоклины» мы также используем систему уравнений Лотки–Вольтерра, но уже в плане приближенного построения траекторий (интегральных кривых) по заданному полю направлений и только в творческой части заданий практикума для желающих школьников. Кроме того, в нашей школе невозможно обойтись без научного вклада А. Н. Колмогорова в этой области и поэтому, в частности, учащимся в качестве творческих заданий предлагалось на конкретных примерах проверить некоторые результаты качественного характера для систем Колмогорова–Вольтерра (когда числовые коэффициенты в системе Лотки–Вольтерра заменяются функциями с заданными свойствами) о характере особых точек и их количестве, о предельных циклах и пр.

Когда А. Н. Колмогоров создавал практикум на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, он предложил дать студентам задание, близкое к описываемому выше. В. И. Арнольд, один из учеников А. Н. Колмогорова, так описывает этот студенческий практикум и его результаты: «Пример приложения экспериментов к теоретическим исследованиям принадлежит А. Н. Колмогорову. Чтобы оценить число предельных циклов квадратичных векторных полей на плоскости, он раздал несколько сотен таких полей (со случайно выбранными коэффициентами многочленов второй степени) нескольким сотням студентов механико-математического факультета МГУ в качестве математического практикума. Каждый студент должен был найти число предельных циклов своего поля.

Результат этого эксперимента был совершенно неожиданным: ни у одного поля не оказалось ни одного предельного цикла! ... До сих пор нет никакой теории, описывающей разницу между «обычными» и «исключительными» случаями ... Я предполагаю, что придать точный математический смысл описанным выше экспериментальным фактам было бы полезным и для теоретической математики, и для приложений».

В 1925 году А. Лотка выпускает книгу «Элементы физической биологии», в которой он, отталкиваясь от моделей химической кинетики, приходит к такой же системе дифференциальных уравнений, как и В. Вольтерра (и раньше его). Поэтому рассказы о работе Лотки, о задачах химической кинетики и реакции Белоусова-Жаботинского сопровождали этот практикум и создавали определенную атмосферу поиска; так, например, по этой «химической теме» Майоров Роман в 1995 году не только повторил в стенах школы эту реакцию, но и показал, что в соответствующей ей математической модели, имеется колебательное решение с особой точкой типа «устойчивый фокус». Катя Осаковская в 2008 году проводила исследования о возможном числе предельных циклов для динамических систем, «близких к системе Колмогорова-Вольтерра». Полученные ими результаты были достаточно высоко оценены на научных школьных конференциях в г.г. Черновцы и Сарове.

В разработанной концепции преподавания математики в школе имени А. Н. Колмогорова, утвержденной в 2012 году ученым советом СУНЦ МГУ имени М. В. Ломоносова, специально выделенную часть занимают вопросы, связанные с восстановлением отельного предмета «Математический практикум» в основной сетке часов учебного плана школы. Все возможности для этого имеются (и основания надеяться на успех) и связаны они, во-первых, с тем, что сохранились не только материалы подавляющего большинства заданий практикумов, проводимых ранее в школе за все годы её существования, а также с тем, что из педагогической деятельности отдельных преподавателей школы практикум никогда и никуда не исчезал — только он проводился по инициативе преподавателей-энтузиастов в рамках часов, отведенных на другие математические дисциплины. Так, в 2010–12 годах в двухгодичном физико-математическом потоке проводились:

- Лабораторные работы и практикумы: Оригами, Равносоставленность многоугольников, Применения формулы Пика, Задача Аполлония, Геометрия круга, Орнаменты, Сечения многогранников, Модели правильных и полуправильных многогранников, Дробно-линейные преобразования, Астрономия и навигация, Фазовые портреты.

- Коллоквиумы: Основные математические принципы в геометрии, Преобразования плоскости, Дополнительные главы планиметрии, Геометрия тетраэдра.

Литература

[1] Колмогоров А.Н., Наука и профессия. Составитель Г.А. Гальперин. - М.: Наука, 1988.

[2] Колмогоров А.Н. О работе вузов со школами // Математика в школе. - 1985. - №2.

[3] Колмогоров А.Н., Вавилов В.В, Тропин И.Т. Физико-математическая школа при МГУ. - М.: Знание, 1981. (Новое в жизни, науке, технике. Серия: Математика и кибернетика. - № 5).

[4] Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Пухова Г.В., Смирнова О.С., Смирнов С.В. Летняя школа на Рубском озере. Из опыта работы летней физико-математической школы. - М.: Просвещение, 1971.

[5] Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. (Библиотечка «Квант». - Вып. 23).

[6] Колмогоров А.Н., Гусев В.А., Сосинский А.Б., Шершевский А.А. Курс математики для физико-математических школ. - М.: Изд-во МГУ, 1971.

[7] Вавилов В.В. Школа математического творчества. - М.: РОХОС, 2004.

[8] Вавилов В.В., Земляков А.Н. Из опыта работы летней физико-математической школы при МГУ // Математика в школе. - 1978. - №4.

[9] Вавилов В.В., Земляков А.Н. Учебные задания по математике. Практические работы №№ 1-2. - М.: Ротапринт НИИ СИМО АПН СССР, 1977.

[10] Вавилов В.В., Земляков А.Н. Учебные задания по математике. Практические работы №№ 3-6. - М.: Ротапринт НИИ СИМО АПН СССР, 1977.

[11] Вавилов В.В., Земляков А.Н. Учебные задания по математике. Практические работы №№ 7-10. - М.: Ротапринт НИИ СИМО АПН СССР, 1978.

[12] Вавилов В.В. Шарнирные механизмы. Кривые Уатта // Квант. - 1997. - №1.

[13] Вавилов В.В. Геометрия круга // Квант. 1977. - №6.

[14] Вавилов В.В., Мельников И.И. Касательная // Квант. - 1978. - №5.

[15] Вавилов В.В. Сетчатые номограммы // Квант. - 1978. - №9.

[16] Вавилов В.В. Сечения многогранников // Квант. - 1978. - №10.

[17] Вавилов В.В. Об одной формуле Христиана Гюйгенса // Квантю - 1992. - №6.

[18] Вавилов В.В., Мельников И.И., Панкратьев Е.В., Рождественский В.В. Математический тренинг. - М.: Издательский отдел УНЦ ДО МГУ, 1997.

[19] Вавилов В.В., Колоскова М.Е. Уроки в цветущем саду // Учебно-методическая газета «Математика. 1 сентября». - 2006. - №20; // Математическое образование. - 2006. - № 2(37).

[20] Вавилов В.В., Школа имени А. Н. Колмогорова Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. // Сборник статей ко дню рождения А. Н. Колмогорова. - М.: НТЦ «Университетский», 2003.

[21] Вавилов В.В. Университетская школа // Школа будущего. - 2008. - №5.

[22] Вавилов В.В. Математический практикум в школе им. А. Н. Колмогорова МГУ им. М. В. Ломоносова // Сборник трудов конференции «Вторые научные Колмогоровские чтения». - Ярославль, ЯрПГУ им. К. Д. Ушинского, 2004.

[23] Вавилов В.В. Школа математического творчества // Математика в школе. - 2005. - № 2.

[24] Вавилов В.В., Часовских А.А. О стандарте математического образования в школе им. А. Н. Колмогорова // Современные проблемы преподавания математики и информатики. Материалы Международной научной конференции, посвященной 100-летию академика С. М. Никольского. - М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005.

[25] Вавилов В.В. Научные основы школьного курса математики // Современные проблемы преподавания математики и информатики. Материалы Международной научной конференции, посвященной 100-летию академика С. М. Никольского. - М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005.

[26] Вавилов В.В. Математические коллоквиумы в школе // Труды третьих Колмогоровских чтений. - Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2005.

[27] Вавилов В.В. Математическая биобиблиография школы имени А. Н. Колмогорова // Математическое образование. - 2005. - № 4(35).

[28] Вавилов В.В. О научных исследованиях учащихся школы имени А. Н. Колмогорова // Математическое образование. - 2006. - № 2(37).

[29] Вавилов В.В., Красников П.М. Математические коллоквиумы. Часть I. - М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, 2006.

[30] Вавилов В.В., Красников П.М. Математические коллоквиумы. Часть II. - М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, 2006.

[31] Вавилов В.В., Математический практикум // Учебно-методическая газета Математика. 1 сентября». - 2007. - № 3.

[32] Вавилов В.В., Андрианова Ю.А. Окружность, парабола, ломаная и алгебраические уравнения // Учебно-методическая газета «Математика. 1 сентября». - 2007. - № 7.

[33] Вавилов В.В. Параллелограмм и кривые Уатта // Потенциал. - 2007. - № 7.

[34] Вавилов В.В. Математический практикум как основа стратегии профильного обучения математике в школе // DE JEUX A LA CREATIVITE. Methodos d'education active. - France, Editions de JIPTO, 2007.

[35] Вавилов В.В. Колмогоровские летние школы // Учебно-методическая газета «Математика. 1 сентября». - 2007. - № 15.

[36] Вавилов В.В. А. Н. Колмогоров и летние школы // Ярославский педагогический сборник. - 2008. - №3.

[37] Вавилов В.В. Арифметика электрических цепей // Потенциал. - 2009. - №2.

[38] Вавилов В.В. Многоликий алгоритм Евклида (Летняя олимпиадная школа). - М.: СУНЦ МГУ, Школа им. А. Н. Колмогорова, 2009.

[39] Вавилов В.В., Колоскова М.Е. Основные математические принципы и методы. - М.: СУНЦ МГУ, 2009.

[40] Вавилов В.В. Задача Фанерного треста и рождение математической экономики // Потенциал. - 2009. - №10.

[41] Вавилов В.В. Мозаики на плоскости // Потенциал. - 2012. - № 5.

[42] Вавилов В.В. Разрезание и складывание многоугольников // Потенциал. - 2012. - № 7.

[43] Вавилов В.В. Математический практикум в школе имени А. Н. Колмогорова // Геометрия и геометрическое образование: Сборник трудов Международной научной конференции «Геометрическое образование в современной высшей и средней школе» (к 70-летию В. А. Гусева), 22-25 ноября 2012 // под. общ. ред. Р.А. Утеевой. - Тольятти, Изд-во ТГУ, 2012. - 412 с.

[44] Дубровский В.Н., Башмаков М.И., Вавилов В.В., Высоцкий И.Р., Земляков А.Н., Калиниченко В.В., Ландо С.К., Наумов А., Пантуев А.В., Первин Ю.А., Поздняков С.Н., Прохоров А.В., Сиротин А.Н., Храповицкий И.С., Чехлова А.В., Шабат Г.Б., Шестаков П.С. Образовательный комплекс «Математика 5-11. Практикум». - М.: ЗАО «1С», АНО «Учебно-издательский центр «Интерактивная линия», Учреждение «Институт новых технологий», 2004.

[45] Земляков А.Н. Орнаменты // Квант. - 1977. - №3.

[46] Краткие сведения для поступающих в физико-математическую школу — интернат при МГУ. - М.: Издательство МГУ, 1971.

[47] Механизмы П. Л. Чебышева. http://tcheb.ru

[48] Математические этюды. Электронный ресурс. http://etudes.ru

[49] 1С: Математический конструктор. - М.: ООО «1С-Паблишинг», 2007.

[50] Рождественский В.В. Умеете ли считать? // Квант. - 1984. - №4.

[51] Рождественский В.В., Хлебутин С.Н. Программирование на микрокалькуляторе: ветвление в цикл. // Квант. - 1986. - №3.

[52] Соловьев Ю.П., Сосинский А.Б. Геометрия скользящих векторов // Квант. - 1985. - №8.

Вавилов Валерий Васильевич,
Зам. директора по научной работе
СУНЦ МГУ имени М.В. Ломоносова,
доцент кафедры математики
школы имени А. Н. Колмогорова,
заслуженный преподаватель,
Лауреат Ломоносовской премии
Московского университета.

E-mail: vvavilov1@yandex.ru

Регресс неизбежный и необратимый?

Евгений Знак

Автор указывает ряд существенных признаков отставания математического образования студентов вузов от требований современности и намечает ряд направлений, следуя которым, можно пытаться преодолеть это отставание.

1. Преподавателю всегда имеет смысл начинать с себя. Узнать и почувствовать, что такое математика сегодня. Завтра она уже будет другой, завтра её будет ещё больше и завтра тоже желательно узнать и почувствовать. И послезавтра тоже. Подчиняясь планам и программам, тем не менее, напоминать самому себе постоянно, что изложенное в книгах Фихтенгольца, Никольского, Пискунова, Кудрявцева и т.д. — это математика семнадцатого и восемнадцатого столетий (и чуточку девятнадцатого), отредактированная в рамках ментальности девятнадцатого века, а нынче — уже двадцать первый. Чем дальше, тем полезнее сомневаться в адекватности классических жонглирований символами по Минорскому и Демидовичу — в адекватности современной математике и современному математическому образованию. Ведь даже с позиций XVII – XIX веков картина сомнительная. Например, истинный персонаж, главный действующий персонаж теории дифференциальных уравнений — это траектория решения, геометрия траекторий — вот главное, но провозившиеся с "иксами и игреками" студенты об этом так никогда и не узнают. Или, скажем, дифференциальное исчисление возникло как инструмент постижения красоты алгебраических линий и поверхностей, как ключ к тайнам дифференциальной геометрии и механики. Но не как символическая игра в "штрихование" элементарных функций. "Штрихование" архаического класса элементарных функций — это на самом деле узко алгебраическая игрушка — переработка по заданным правилам одного набора символов из заданного запаса в другой набор символов из того же запаса (ещё Лиувилль и Чебышев практически завершили тему).

В плане разъяснения, осмысления и усвоения подходящий рисунок лучше формульной выкладки; удачный и качественный рисунок намного лучше формульной выкладки; "живая картинка" — мультфильм (математический) — несравненно лучше формульной выкладки, ну а если он ещё и в 3D, то, сами понимаете...

2. Несмотря ни на что, сегодня пока ещё рано говорить о компьютерной революции в математическом образовании. И поэтому преувеличивать роль компьютеризации не стоит. Даже не смотря на "эксель", "маткад" и прочее. Это только предвестники революции.

Подвижная пространственная картинка трёхмерных объектов в системе координат — это прекрасно, но это пока только самое начало компьютерной революции. Революцию увидят внуки нынешних студентов. А пока посмотрите на ЕГЭ или на тестирование из города Йошкар-Ола: как жонглировали символами со времён Виета, так и жонглируем по сей день, — только уже не на бумаге, а на экране. К тому же, к настоящей содержательной математике такое манипулирование часто не имеет отношения. Нет, революция — это когда манипулирование символами будет существенно потеснено манипулированием специальными "картинками". Не привычными изображениями вроде иллюстраций в книгах, а специальными динамично меняющимися изображениями со смысловой нагрузкой, эквивалентной формульным выкладкам.

А пока разумно предположить, что и сенсорные "интерактивные доски" — тоже лишь предвестники компьютерной революции в математическом образовании, но ещё не сама революция.

3. Адекватность и внутренняя свобода (честность перед самим собой). Преподаватель, повинуясь министерствам, департаментам, отделам, приказам и так далее, может из года в год упрямо и хладнокровно читать лекции по рядам и преобразованиям Фурье или по кратным и поверхностным интегралам потокам учащихся, в которых половина присутствующих путается и ошибается при арифметических действиях с отрицательными и дробными числами, а другая половина так и не смогла понять, что же такое косинус и синус (полагая, что это такие трёхбуквенные сочетания). И преподаватель может, конечно, говорить самому себе, что виноваты школы, которые плохо учат, что поколения пошли какие-то "дебильные", что времена плохие. А он, мол, обязан в обмен на зарплату строго и в точности выполнять договора, приказы, программы. Но только вряд ли такая его деятельность является по большому счёту здравой, адекватной, добросовестной и оптимальной.

Уж лучше научить десятерых "несчастных троечников" арифметическим действиям и на всю оставшуюся жизнь объяснить им доходчиво и убедительно, что же такое косинус и синус, чем прочитать сотне "несчастных троечников" дюжину лекций про группы гомологий трёхмерных многообразий и спектральную теорию самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве.

Всё вышесказанное родилось как итоговые размышления после более чем двадцати лет работы автора на кафедрах математики нескольких технических и инженерно-экономических вузов города. И, разумеется, к таким редким оазисам как ИТМО (СПб), МФТИ, МВТУ и некоторым другим не относится. А с другой стороны, между прочим, в последние годы приходят плохие вести с совсем уж неожиданной стороны — опытные преподаватели педагогических вузов сетуют на неудовлетворительное качество поступающих к ним абитуриентов и открыто признают недостаточную компетентность своих выпускников.

Знак Евгений Иосифович,
доцент кафедры математики
Михайловской Артиллерийской Академии (СПб).

E-mail: evgematem@mail.ru

И снова о гипотезах Штейнгарца

Д. С. Григорьев, А. Г. Мякишев

В настоящей заметке содержатся некоторые замечания и уточнения к статье Л. А. Штейнгарца «Гипотезы о медианах, высотах, биссектрисах и... эллипсах», опубликованной в журнале «Математическое Образование» № 2 (62), 2012.

К Гипотезе 1 (только медианы)

«Три медианы произвольного треугольника разбивают его на 6 треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры всех этих шести окружностей лежат на некотором эллипсе» [1].

Комментарий: Мы изготовили соответствующие чертежи, пользуясь динамическими геометрическими программами *The Geometer's Sketchpad* (в России также известной как *Живая Геометрия*) и *GeoGebra*.

Увы, *Гипотеза* 1 не подтвердилась, см. рисунки 1, 2, 3.

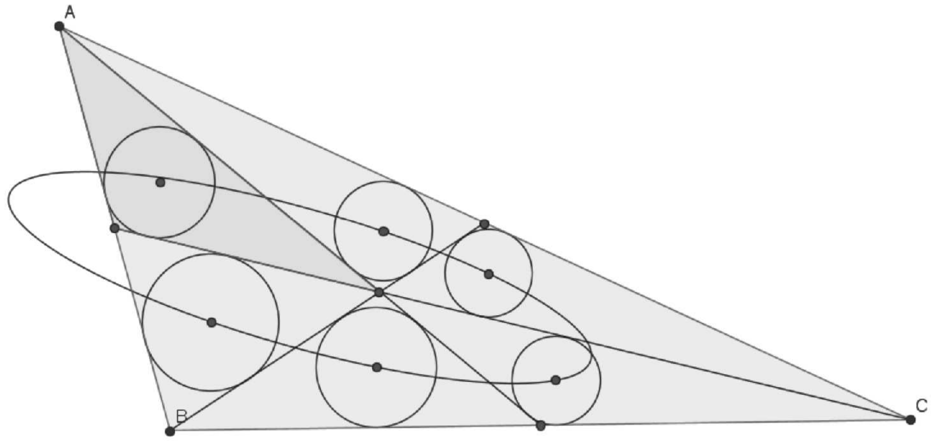


Рис. 1.

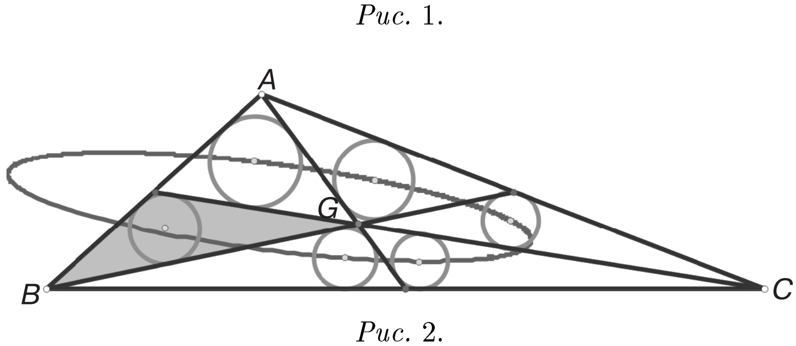


Рис. 2.

[1]И здесь, и далее все заковыченные формулировки *Гипотез* и *Определений* — дословные цитаты из статьи Л. А. Штейнгарца.

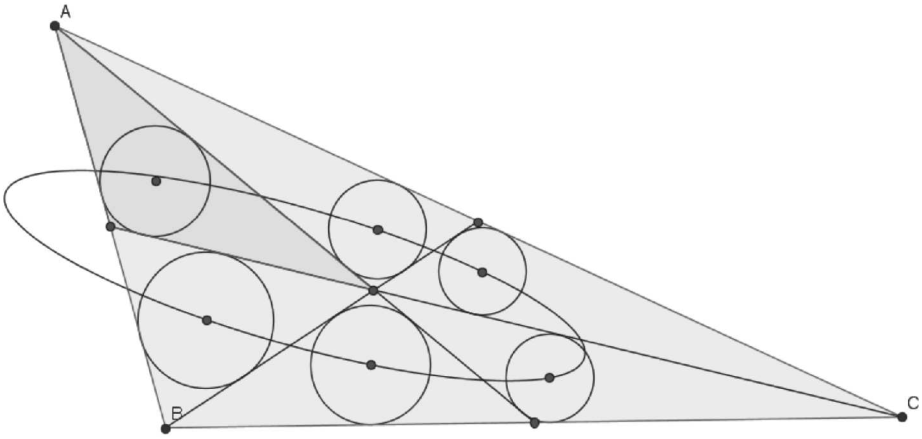


Рис. 3.

Тут, правда, возникает естественный вопрос: насколько «строго» можно считать гипотезу опровергнутой, если для этого приходится ссылаться на некоторые рисунки, полученные при помощи компьютера?

И вообще, следует ли считатать доказательством какого-либо математического утверждения — доказательство, в процессе которого отдельные звенья счетно-вычислительного характера «ковались» компьютером и не поддаются «ручной» человеческой проверке?

Насколько известно, впервые подобный прецедент случился в 1976 г., когда Кеннет Аппель и Вольфганг Хейкен из Иллинойского Университета объявили о решении знаменитой *Проблемы Четырех Красок*[2].

Однако полученный ими утвердительный ответ существенно опирался на компьютерные вычисления, запредельно превосходящие счетные способности любого гуманоида, будь он даже самым расчудесным из всех *чудо-вычислителей на всем белом свете.*

Поскольку разные компьютеры в разных странах уверенно продублировали все эти выкладки, в конце концов *Математическое Сообщество* признало справедливым результат Аппеля, Хейкена и… *Железного Друга.* Но, как говорится, *осадок-то остался* — и потому некоторые математики до сих пор не теряют надежды отыскать «чисто человеческое» доказательство.

Во всяком случае, уличить во лжи как *The Geometer's Sketchpad*, так и *GeoGebra* — никому еще не удалось.

К Гипотезе 2 (только высоты)

«Три высоты произвольного остроугольного треугольника разбивают его на 6 треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры всех этих шести окружностей лежат на некотором эллипсе».

Комментарий: Дословно повторяет предыдущий — и эта *Гипотеза* также оказалась несостоятельной.

Заметим, что при этом в остроугольном треугольнике может получиться не только эллипс, проходящий всего лишь через 5 из 6 рассматриваемых точек (см. рисунки 4 и 5), но также гипербола или парабола (см. рисунки 6 и 7).

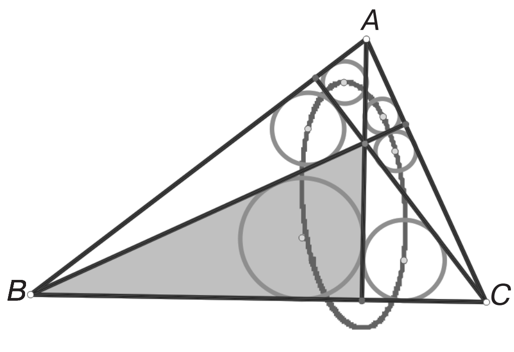


Рис. 4.

[2] Любую ли карту на плоскости (сфере) можно раскрасить в четыре цвета таким образом, чтобы смежные страны имели разные цвета? (Предполагается, что каждая страна представляет собою *односвязную область* — т. е. любые два пункта на ее территории можно соединить непрерывным путем. При этом граница соседних стран является *линией*, а не просто точкой.)

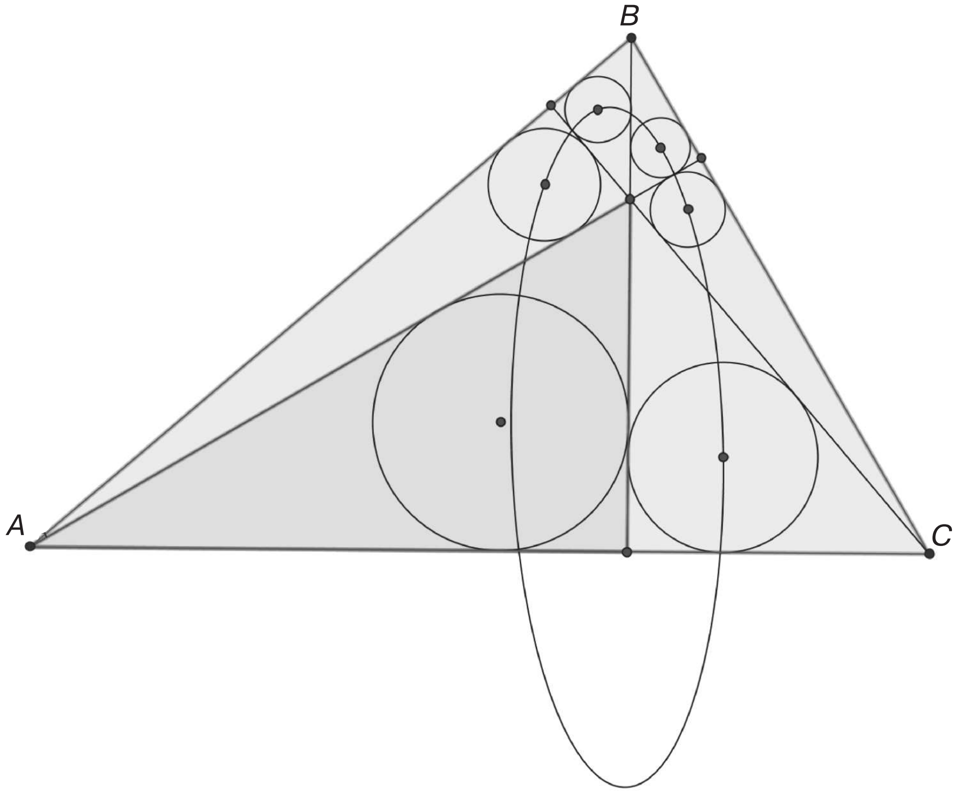


Рис. 5.

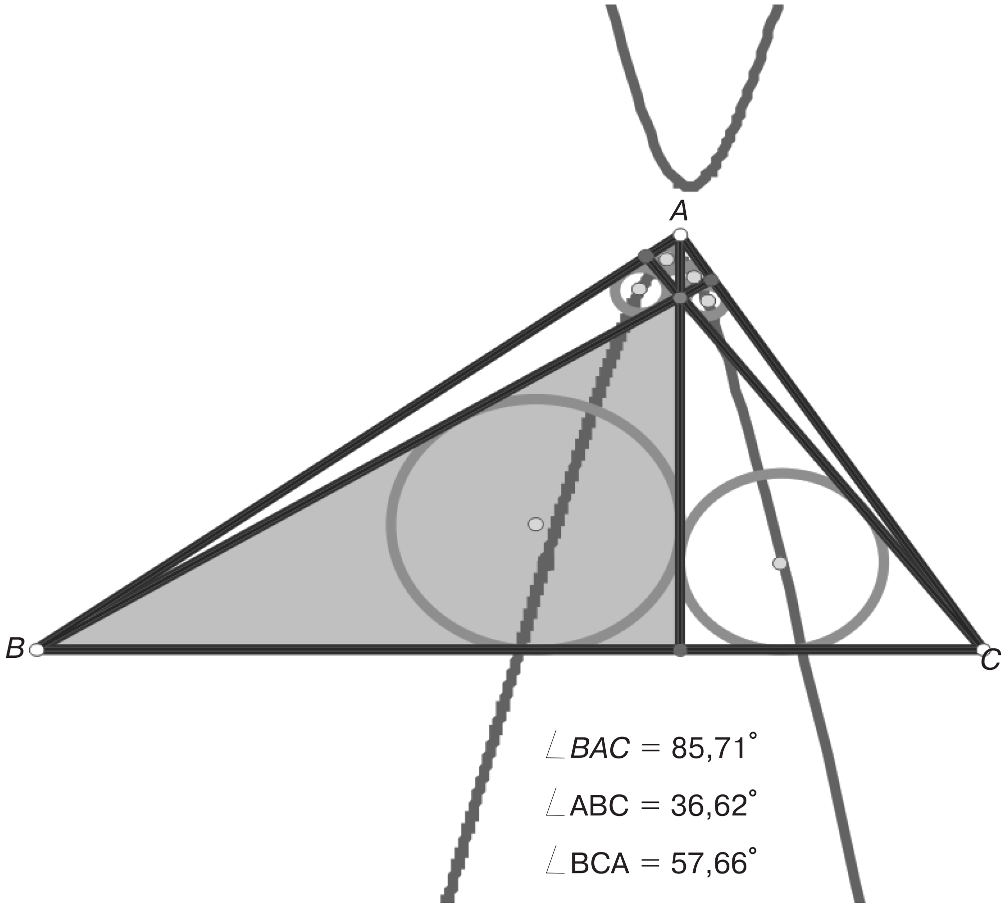


Рис. 6.

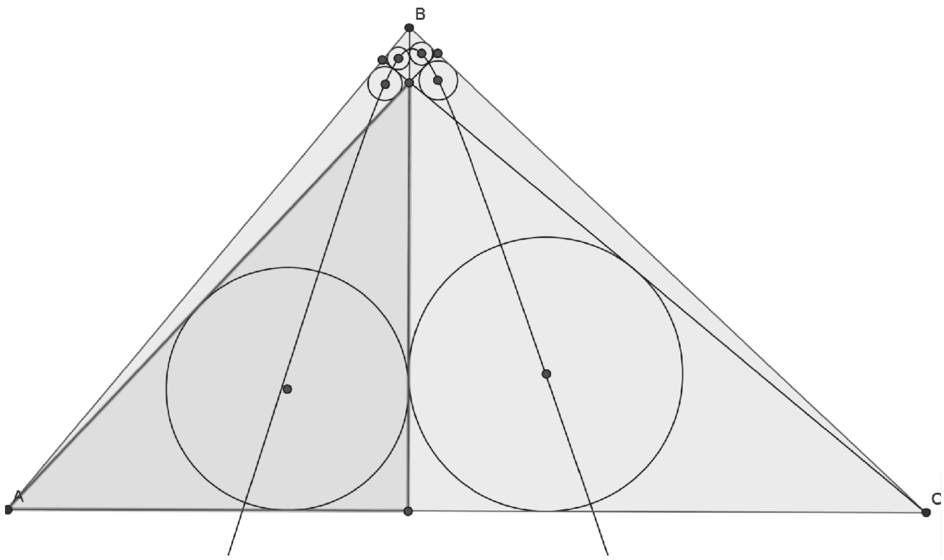


Рис. 7.

К Гипотезе 3 (только биссектрисы)

«Три биссектрисы произвольного треугольника разбивают его на 6 треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры всех этих шести окружностей лежат на некотором эллипсе», рис. 8.

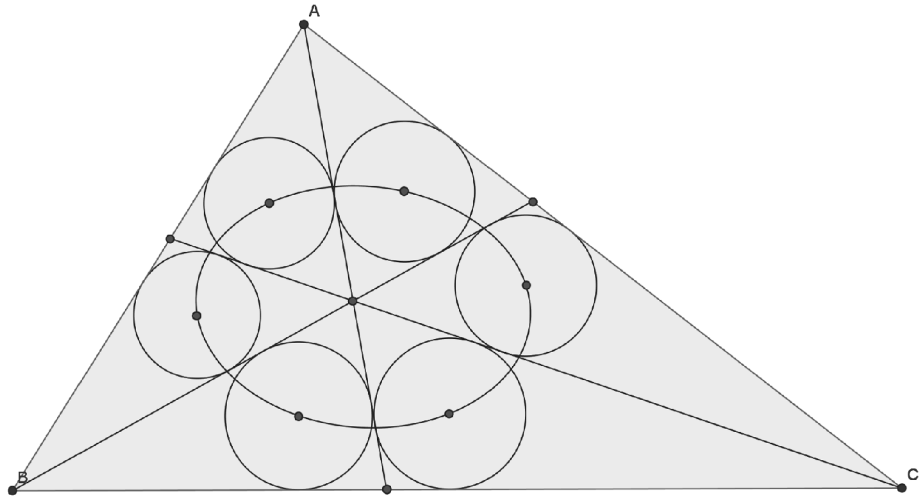


Рис. 8.

Комментарий: А эта гипотеза — верна, и нам даже удалось доказать, что рассматриваемые центры вписанных окружностей принадлежат одной конике, посредством *обратной теоремы Паскаля*[3], рис. 9. Правда, доказательство наше — чисто счетное и основано на использовании барицентрических координат, все необходимые сведенья о которых читатель сможет почерпнуть в [2], [5], [7], [11].

Приведем далее само доказательство, опуская промежуточные выкладки (их читатель при желании без труда сумеет восстановить самостоятельно) и останавливаясь лишь на ключевых моментах.

Прежде всего, нам понадобится *формула преобразования координат при переходе от одного треугольника к другому.* Вот ее описание.

[3] *Если точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны* (т. е. идущие через две) *некоторого шестивершинника лежат на одной прямой, то его вершины лежат на одной конике.* См. [1],[3],[11]

Пусть нам известны барицентрические координаты некоторой точки P относительно треугольника $A'B'C'$: $P_{A'B'C'} = x' : y' : z'$.

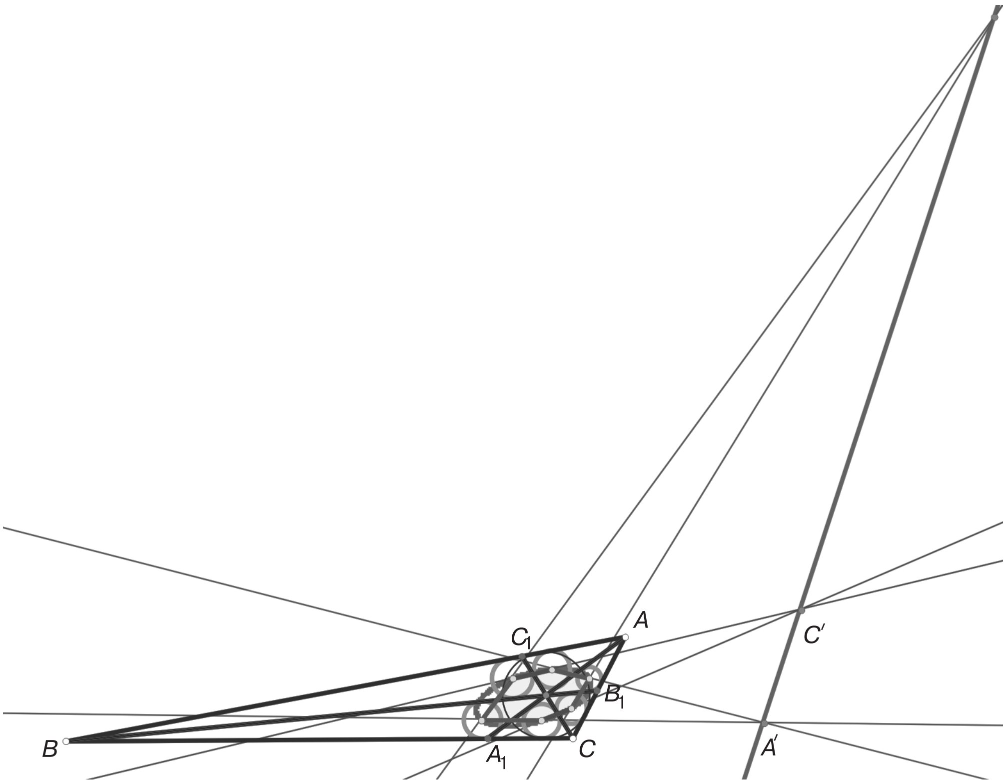


Рис. 9.

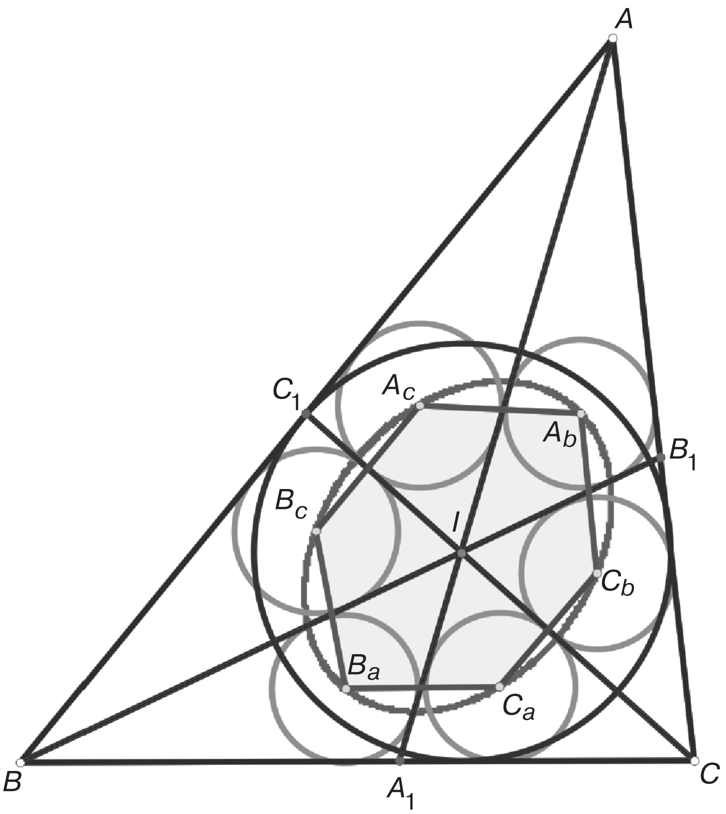


Рис. 10.

И пусть нам также известны *абсолютные* (или *нормированные*)[4] барицентрические координаты вершин «нового» треугольника $A'B'C'$ относительно исходного треугольника ABC:

$$\begin{aligned}
&A'_{ABC} = a_x : a_y : a_z, && a_x + a_y + a_z = 1.\\
&B'_{ABC} = b_x : b_y : b_z, && b_x + b_y + b_z = 1.\\
&C'_{ABC} = c_x : c_y : c_z, && c_x + c_y + c_z = 1.
\end{aligned}$$

Тогда барицентрические координаты точки P относительно исходного треугольника ABC имеют вид[5]: $P_{ABC} = a_x \cdot x' + b_x \cdot y' + c_x \cdot z' : a_y \cdot x' + b_y \cdot y' + c_y \cdot z' : a_z \cdot x' + b_z \cdot y' + c_z \cdot z'$.

Введем обозначения, как показано на рисунке 10. И найдем координаты, например, инцентра B_a треугольника BIA_1.

Как известно, координаты инцентра пропорциональны синусам соответствующих углов треугольника:

$$I_{ABC} = \sin A : \sin B : \sin C.$$

Углы же треугольника BIA_1 легко выразить через углы исходного:

$$\angle IBA_1 = \frac{B}{2}; \angle IA_1B = \pi - B - \frac{A}{2} = \pi - \frac{B}{2} - \left(\frac{A+B}{2}\right) = \pi - \frac{B}{2} - \left(\frac{\pi - C}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{B-C}{2};$$
$$\angle BIA_1 = \pi - \frac{B}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B-C}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

Поэтому

$$B_{a\,BA_1I} = \sin\frac{B}{2} : \cos\frac{B-C}{2} : \cos\frac{C}{2}.$$

Подсчитаем далее нормированные координаты вершин «нового» треугольника относительно исходного:

$$\begin{aligned}
&B_{ABC} = 0 : 1 : 0;\\
&A_{1\,ABC} = 0 : \frac{\sin B}{\sin B + \sin C} : \frac{\sin C}{\sin B + \sin C}.\\
&I_{ABC} = \frac{\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} : \frac{\sin B}{\sin A + \sin B + \sin C} : \frac{\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}.
\end{aligned}$$

И, повозившись какое-то время с тригонометрией и по достоинству воздав ей должное, по формулам перехода в конце концов получим, что:

$$B_{a_{ABC}} = \sin A : \sin B \cdot \left(2\cos\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B}{2} + 1\right) : \sin C \cdot \left(2\cos\frac{B}{2} + 1\right).$$

(В частности, мы пользовались тем, что если $A + B + C = \pi$, то $\sin B + \sin C = 2\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B-C}{2}$ и $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$. Первое равенство очевидно, а второе — одно из классических тригонометрических соотношений в треугольнике, на которые столь щедра *тригонометрия треугольника*, см. [4]. Впрочем, если только знать о его *существовании*(!), то вывести — уже дело довольно нехитрое.)

[4]Т.е. сумма координат точки должна равняться *единице*. Для этого достаточно найти любую тройку барицентрических координат этой точки (которые, в силу *однородности*, определены с точностью до произвольного ненулевого множителя), а затем каждую координату разделить на сумму всех трех.

[5]Читателю, знакомому с основами линейной алгебры и аналитической геометрии, конечно, понятно, что речь идет о преобразовании координат вектора при переходе от нового базиса к старому: для этого нужно транспонировать матрицу перехода и умножить ее на «новый» вектор: $(x : y : z) = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Координаты остальных инцентров получаются из найденных соответствующими циклическими сдвигами и перестановками:

$$C_a = \sin A : \sin B \cdot \left(2\cos\frac{C}{2}+1\right) : \sin C \cdot \left(2\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{C}{2}+1\right).$$
$$C_b = \sin A \cdot \left(2\cos\frac{C}{2}+1\right) : \sin B : \sin C \cdot \left(2\cos\frac{B}{2}+2\cos\frac{C}{2}+1\right).$$
$$A_b = \sin A \cdot \left(2\cos\frac{B}{2}+2\cos\frac{A}{2}+1\right) : \sin B : \sin C \cdot \left(2\cos\frac{A}{2}+1\right).$$
$$A_c = \sin A \cdot \left(2\cos\frac{C}{2}+2\cos\frac{A}{2}+1\right) : \sin B \cdot \left(2\cos\frac{A}{2}+1\right) : \sin C.$$
$$B_c = \sin A \cdot \left(2\cos\frac{B}{2}+1\right) : \sin B \cdot \left(2\cos\frac{C}{2}+2\cos\frac{B}{2}+1\right) : \sin C.$$

Теперь найдем координаты точки $A' = (B_aC_a) \cap (A_bA_c)$

Нам понадобятся уравнения прямой по двум точкам и координаты точки пересечения двух прямых, а также условие *коллинеарности*[6] *трех точек*

$$T_1 = p_1 : q_1 : r_1. \qquad T_2 = p_2 : q_2 : r_2.$$

$$l = (T_1T_2) : \begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (q_1\cdot r_2 - r_1\cdot q_2)\,x + (p_2\cdot r_1 - r_2\cdot p_1)\,y + (p_1\cdot q_2 - q_1\cdot p_2)\,z = 0.$$

$$l_1 : p_1x + q_1y + r_1z = 0. \qquad l_2 : p_2x + q_2y + r_2z = 0.$$

$$T = l_1 \cap l_2 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = (q_1\cdot r_2 - r_1\cdot q_2) : (p_2\cdot r_1 - r_2\cdot p_1) : (p_1\cdot q_2 - q_1\cdot p_2)\,.^7$$

$$T_1 = p_1 : q_1 : r_1, \qquad T_2 = p_2 : q_2 : r_2, \qquad .T_3 = p_3 : q_3 : r_3$$

$$T_1, T_2, T_3 \in l \Leftrightarrow \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Теперь мы полностью готовы сосчитать координаты A'. Для удобства введем обозначения:

$$\cos\frac{A}{2} = p, \ \ \cos\frac{B}{2} = q, \ \ \cos\frac{C}{2} = r.$$

Тогда

$$(B_aC_a) = -\frac{2p\cdot(p+q+r+1)}{\sin A} : \frac{p+r-q}{\sin B} : \frac{p+q-r}{\sin C}$$
$$(A_bA_c) = -\frac{2p\cdot(p+1)}{\sin A} : \frac{2p\cdot(p+r)+p+r-q}{\sin B} : \frac{2p\,(p+q)+p+q-r}{\sin C}$$

[6] То есть, принадлежности их одной прямой

[7] Одинаковые выражения для уравнения прямой по двум точкам и точки пересечения двух прямых отражают великий Принцип Двойственности Проективной Геометрии (в которой, если коротко, пучки параллельных прямых пересекаются в так называемых бесконечно удаленных точках, а бесконечно удаленные точки заметают так называемую бесконечно удаленную прямую — см. [1], [3], [5], [11]): если в какой-то теореме Проективной Геометрии в ее условии всюду поменять местами фразы «прямая проходит через две точки» и «две прямые пересекаются в одной точке»— опять получится верное утверждение.

$$A' = (B_aC_a) \cap (A_bA_c) = \text{ (после сокращения на общий множитель } \frac{2p}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \text{) } =$$
$$= (r-q)\cdot \sin A : (q - r + 2p\cdot(1+p+q))\cdot \sin B : (q - r - 2p\cdot(1+p+r))\cdot \sin C.$$

И, действуя совершенно аналогично (соответствующими циклическими перестановками):

$$\begin{aligned} B' &= (C_bA_b) \cap (B_cB_a) = \\ &= (r - p - 2q\,(1+q+p))\cdot \sin A : (p-r)\cdot \sin B : (r - p + 2q\cdot(1+q+r))\cdot \sin C. \\ C' &= (A_cB_c) \cap (C_aC_b) = \\ &= (p - q + 2r\cdot(1+r+p))\cdot \sin A : (p - q - 2r\cdot(1+r+q))\cdot \sin B : (q-p)\cdot \sin C. \end{aligned}$$

Наконец, чтобы установить коллинеарность точек пересечения, остается показать, что соответствующий определитель обращается в нуль:

$$A', B', C' \in l \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \times$$
$$\times \begin{vmatrix} r-q & q - r + 2p\cdot(1+p+q) & q - r - 2p\cdot(1+p+r) \\ r - p - 2q\cdot(1+q+p) & p-r & r - p + 2q\cdot(1+q+r) \\ p - q + 2r\cdot(1+r+p) & p - q - 2r\cdot(1+r+q) & q-p \end{vmatrix} = 0$$

Наверное, убедится в этом можно, доказав линейную зависимость строк (или столбцов)[8].

Мы, однако, поступим просто[9]. А именно, разложим определитель по первой строке, максимально упрощая каждое из трех слагаемых[10]. Каждое из них, как выясняется, приводится соответственно к выражениям:

$$\begin{aligned} &2\,(1+q+r)\cdot(q+r-p+2qr)\cdot\left(r^2-q^2\right); \\ &2\,(1+q+r)\cdot(q+r-p+2qr)\cdot(p+r)\cdot(q-r+2p\cdot(1+p+q)); \\ &2\,(1+q+r)\cdot(q+r-p+2qr)\cdot(p+q)\cdot(q-r-2p\cdot(1+p+r)); \end{aligned}$$

Теперь остается только вынести общий множитель и убедится в справедливости равенства

$$q^2 - r^2 = (p+r)\cdot(q - r + 2p\cdot(1+p+q)) + (p+q)\cdot(q - r - 2p\cdot(1+p+r)),$$

что уже совсем несложно.

Вообще этот определитель[11] обладает многими интересными особенностями.

В частности, сумма всех его элементов равна *нулю* (поскольку суммы по строкам равны $(q-r)\,(1+2p)\,;(r-p)\,(1+2q)\,;(p-q)\,(1+2r)$ соответственно).

Интересно также было бы попробовать сконструировать аналогичный определитель бо́льших размерностей и понять, какая геометрия прячется в нем.

Конечно, приведенное выше доказательство у подлинного ценителя Геометрии ничего, кроме чувства негодования (а то и отвращения) вызывать не может, ввиду своей исключительной алгебраичности. Что делать — у нас пока по-другому не получилось[12].

---

[8]т. е. если рассматривать их как координаты векторов, то требуется найти линейную комбинацию, обращающуюся в нулевой вектор

[9]Как говорится, тупо — но не совсем; совсем — это было бы раскрытие определителя «в лоб», составляя всевозможные произведения элементов, стоящих в разных строках и столбцах, взятые по три с нужным знаком, определяемым четностью соответствующей перестановки. Что, впрочем, также привело бы к успеху — если запастись терпением и выдержкой.

[10]Разложение определителя по i-ой строке:$\det(a_{ij}) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Delta_{ij}$, где Δ_{ij}- определитель $(n-1)$-го порядка матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

[11]Его стоит назвать *определителем Жукова–Штейнгарца.* Насколько нам известно, все свои «конические» изобретения Л. А. Штейнгарц посвятил памяти выдающегося педагога и популяризатора математики А. В. Жукова, безвременно ушедшего от нас в прошлом году.

[12]*За отсутствием гербовой пишем на простой!*

Надеемся, что кому-нибудь из читателей посчастливится найти чисто геометрическое обоснование *коконичности* инцентров.

Кроме того, мы не сумели показать, что рассматриваемая коника всегда является эллипсом.

Казалось бы, чего проще: зная координаты пяти точек коники и, действуя затем по известным лекалам, реши возникающую линейную систему 5×5 и выпиши условие на вид коники[13].

Но это только «казалось бы». Дело в том, что выражения здесь получаются прямо-таки *ужасающе* громоздкими и отталкивающими, и определить вид коники по ним абсолютно невозможно[14].

А ведь должно же существовать некое геометрическое объяснение «эллипсовости»!

Вероятно, как-то должна быть использована *выпуклость* шестиугольника с вершинами в инцентрах[15].

Хорошо бы было, скажем, отыскать *аффинное* преобразование, переводящее нашу конику в заведомый эллипс, а лучше — в окружность[16].

К Гипотезе 4 (медианы и биссектрисы)

«В произвольном треугольнике проведены все медианы и все биссектрисы. Тогда основания этих медиан и биссектрис лежат на некотором эллипсе».

Комментарий: Существование этой коники вытекает из одного следствия *теоремы Карно.*

Теорема Карно. Пусть $A_1, A_2 \in (BC)\,; B_1, B_2 \in (CA)\,; C_1, C_2 \in (AB)$. Тогда эти шесть точек лежат на одной конике, если и только если выполнено *условие Карно*:

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right) = 1$$

(см. [1], [11]).

Следствие. Если шесть точек, расположенных на сторонах (или их продолжениях) некоторого треугольника, можно разбить на две тройки, каждая из которых является основаниями *конкурентных*[17] *чевиан*[18], то существует коника, содержащая эти шесть точек, рис. 11.

Для доказательства дважды применим *обратную теорему Чевы* (см. [2], [5], [7], [8], [11]), а затем — теорему Карно:

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right) =$$
$$= \left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right) =$$
$$= 1 \cdot 1 = 1.$$

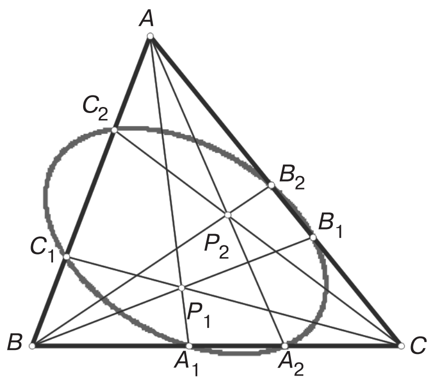


Рис. 11.

Теперь покажем, что рассматриваемая коника является эллипсом. Для этого сначала выведем ее уравнение[19].

[13] см. далее *Комментарий* к *Гипотезе* 4

[14] Не помогли и имеющиеся в нашем распоряжении вычислительные программы (довольно мощные), типа *Mathematica for Students* или *Math Lab*. Даже они оказались бессильны.

[15] Но одной выпуклости недостаточно — см. далее *Комментарий* к *Гипотезе* 6.

[16] Аффинные преобразования характеризуются как преобразования плоскости, переводящие прямые в прямые. Можно показать, что они сохраняют параллельность прямых и отображают коники друг на друга, не меняя их вид. Любой треугольник подходящим аффинным преобразованием может быть переведен в правильный и т.д. Подробнее о них см. [1],[3],[7].

[17] То есть, пересекающихся в одной точке.

[18] Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками на *прямых*, содержащих противолежащие стороны.

[19] В отличие от предыдущей конструкции, здесь это легко, поскольку точки, через которые коника проходят, лежат на сторонах треугольника, и соответствующая линейная система содержит много нулевых коэффициентов.

Известно, что в барицентрических координатах уравнение коники имеет вид[20]:

$$ux^2 + vy^2 + \omega z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.$$

(см. [11]). В нашем случае, очевидно, пять точек, задающих конику, имеют следующие координаты:

$$A_0 = 0:1:1; \quad A_1 = 0:b:c; \quad B_0 = 1:0:1; \quad B_1 = a:0:c; \quad C_0 = 1:1:0;$$

План действий далее следующий:

- Положим $f = 1$(в силу однородности уравнения коники так можно поступить).
- Подставим в уравнение коники первые две координаты. Получим линейную систему с двумя неизвестными, откуда найдем v и w. Подставляя следующие две, опять получаем линейную систему с двумя неизвестными, из которой определяем u и g.
- Наконец, подставив координаты пятой точки, найдем h — после чего умножим все координаты на какой-нибудь хороший общий множитель, чтобы придать им достойный симметрический вид.

В данном конкретном случае приходим к следующему:

$$u = 2bc; \quad v = 2ca; \quad w = 2ab; \quad f = -a(b+c); \quad g = -b(c+a); \quad h = -c(a+b).$$

Коэффициенты коники, что называется, радуют глаз и греют душу.

Определить вид коники поможет

Теорема об определении вида коники и координат ее центра по уравнению (см. [11]). Пусть уравнение коники задано: $ux^2 + vy^2 + \omega z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$.

Введем следующие обозначения: $U = vw - f^2, V = wu - g^2, W = uv - h^2, F = gh - uf, G = hf - vg, H = fg - wh$. Тогда *вид коники* зависит от знака выражения $\Phi = U + V + W + 2(F + G + H)$:

Если $\Phi > 0$, то коника является эллипсом, если $\Phi = 0$ — параболой[21], а если $\Phi < 0$[22] — гиперболой.

Центр коники имеет координаты $(U + G + H : V + F + H : W + F + G)$.

Дальнейшие выкладки продолжают радовать и греть:

$$\begin{aligned} U &= -a^2(b-c)^2; & V &= -b^2(c-a)^2; \\ W &= -c^2(a-b)^2; & F &= bc\left(a^2 + bc + 3a(b+c)\right); \\ G &= ca\left(b^2 + ca + 3b(c+a)\right); & H &= ab\left(c^2 + ab + 3c(a+b)\right). \end{aligned}$$

И тогда $\Phi = 16abc(a+b+c) > 0$, т. е. наша коника всегда является эллипсом.

Заодно отыщем и координаты центра. Они приводятся к виду

$$4abc(2a+b+c) : 4abc(a+2b+c) : 4abc(a+b+2c) = (2a+b+c) : (a+2b+c) : (a+b+2c).$$

Эта точка наличествует в фундаментальной энциклопедии профессора Кимберлинга ETC[23] (см. [9]), ее порядковый номер там — 1125, рис. 12.

[20] И является *однородным* как относительно коэффициентов, так и относительно переменных, т. е. не меняется (переходит в равносильное), если все коэффициенты (или все переменные) умножить одновременно на любой постоянный ненулевой множитель.

[21] Или парой параллельных (а то и совпадающих) прямых — «вырожденной» параболой. Эти прямые симметричны относительно любой точки, лежащей на прямой, им параллельной и содержащей середины всех отрезков с концами на этих прямых.

[22] Или парой пересекающихся прямых — «вырожденной» гиперболой.

[23] на данный момент включающей уже около *5,5 тысяч* (!) точек

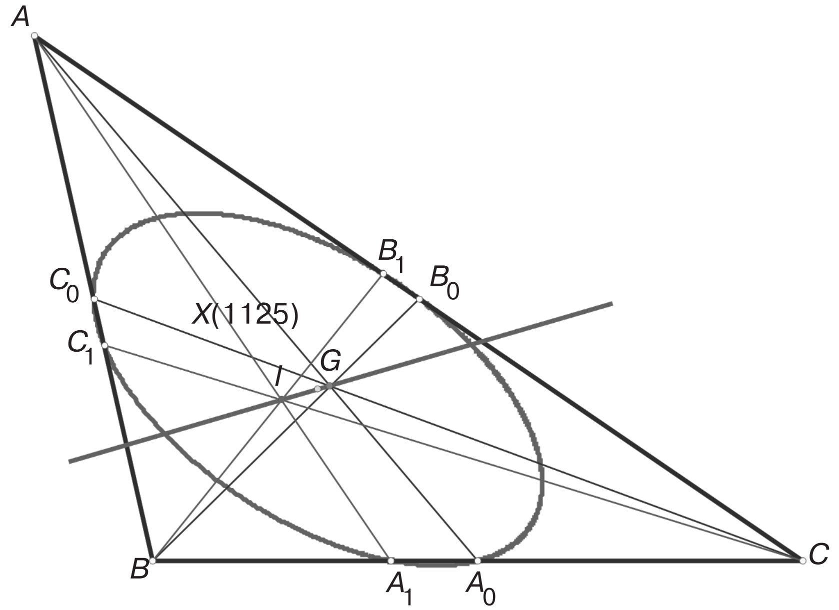


Рис. 12. X(1125)= $(2a+b+c; a+2b+c; a+b+2c)$; IX(1125)=0,66617см, GX(1125)=0,22206см; IX(1125)/GX(1125)=3,00000; Центр масс системы $(2a+b+c)$A, $(a+2b+c)$B, $(a+b+2c)$C – X(1125) – лежит на прямой GI – прямой Нагеля

Приятно также убедиться и в том, что $X\,(1125)$ делит отрезок, соединяющий центроид G инцентр I[24] в отношении $1:3$ внутренним образом: $\frac{GX}{IX}=\frac{1}{3}$.[25]

Итак, $X = 2a+b+c : a+2b+c : a+b+2c$, т. е. X является центром масс системы материальных точек $(2a+b+c)A : (a+2b+c)B : (a+b+2c)C$.

Эту систему можно разбить на две подсистемы: $(a+b+c)\,A, (a+b+c)\,B, (a+b+c)\,C$ (с центром масс в G и суммарной массой $3\,(a+b+c)$) и aA, bB, cC (с центром в I и суммарной массой $a+b+c$). Из правил группировки и рычага тогда получим, что $X \in [GI]$(т.к. суммарные массы одного знака — в данном случае «+», то деление отрезка GI точкой X осуществляется *внутренним* образом) и $3\,(a+b+c)\cdot GM = (a+b+c)\cdot IX \Leftrightarrow \frac{GX}{IX}=\frac{1}{3}$.

Нет, что ни говори, но и в алгебраических выкладках порою присутствует свое *скромное обаяние*!

К Гипотезе 5 (высоты и биссектрисы)

«В произвольном остроугольном треугольнике проведены все высоты и все биссектрисы. Тогда основания этих высот и биссектрис лежат на некотором эллипсе».

Комментарий: Существование этой коники также является *Следствием теоремы Карно*, рис. 13, 14.

При сильном желании читатель может попытаться вывести ее уравнение самостоятельно, а затем попробовать определить ее вид[26] и найти центр J — надо только неукоснительно следовать инструкциям, указанным в *Комментарии к Гипотезе* 4[27].

Поскольку центр этой коники отсутствует в ETC[28] — на долю читателя, таким образом,

[24]Прямая GI называется *прямой Нагеля* (см.[1],[2],[5],[7],[8],[11]). Пожалуй, после *прямой Эйлера* (см. [1],[2],[5],[7],[8],[11]), это самая известная в Геометрии прямая.

[25]все необходимое для понимания последующего рассуждения имеется в [2], [5], [11]

[26]Компьютер подсказывает, что в остроугольном случае, и правда, всегда получается эллипс. А в тупоугольном — все, что только заблагорассудится.

[27]Но надо быть готовым к тому, что коэффициенты и координаты окажутся довольно противными. Не столь, конечно, безобразными и *крокодильскими*, как в случае *инцентрического эллипса* (см. *Комментарии к Гипотезе* 3) — но все же.

[28]Равно как и (разумеется!) центр инцентрического эллипса. О поистине *волшебном искусстве* выявлять наличие или отсутствие точки в ETC по одному лишь верно сделанному рисунку (не выписывая даже координат и тем более, значит, не сравнивая их скрупулезно с имеющимися $\approx 5{,}500$) — см. [6], §12

выпадает счастливая возможность (и почетное право!) пополнить впечатляющую коллекцию Кимберлинга новой точкой[29]!

В случае успеха ее можно бы вполне окрестить точкой *Штейнгарца — имярек.*

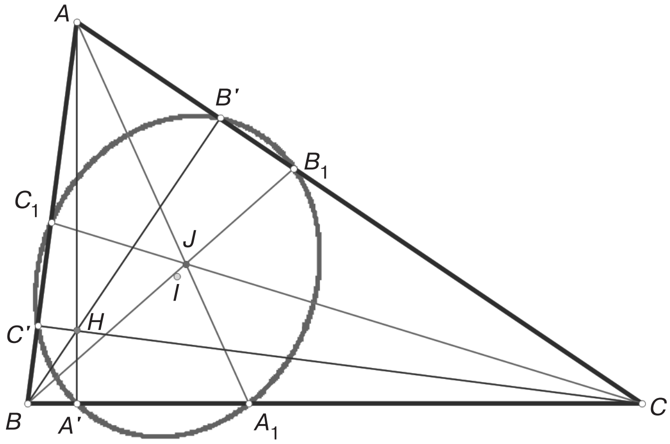


Рис. 13.

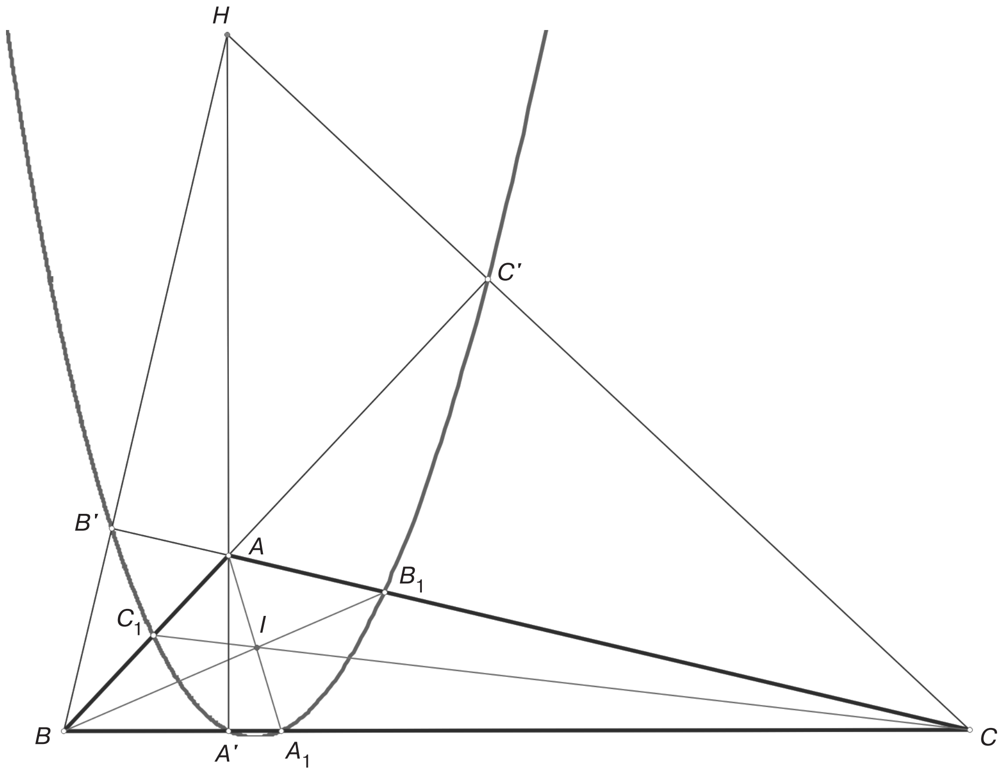


Рис. 14.

Дополнение. Л. А. Штейнгарц продолжил развитие данной тематике в своей статье «*Орбиты Жукова и теорема Морлея*», опубликованной в журнале «Математика в школе», № 6, 2012.

В частности, там была выдвинута еще одна *Гипотеза.*

---

[29]Другое дело, что такой метод получения новых центров (и коник) — наверное, не из самых лучших.

Во-первых, ввиду его незамысловатости и незатейливости (достаточно выбрать любые две точки из известных — и дело в шляпе).

Во-вторых, далеко не всегда центры так построенных коник будут иметь приличные (а даже и более-менее *сносные* координаты и обладать какими-либо интересными свойствами (т. е. совсем не так, как это получилось давеча, в *Гипотезе* 4) — помимо своей *центральности.* Нужно ли умножать сущности без нужды, причем зачастую сущности монструозные?

Гипотеза 6

«Пусть дан произвольный треугольник, в котором проведены три чевианы (напомним, что это три отрезка, соединяющие вершину треугольника с некоторой точкой на противоположной стороне и проходящие через одну общую точку[30]). Эти чевианы разбивают данный треугольник на шесть треугольников. Опишем около каждого из полученных треугольников окружность. Тогда центры этих окружностей лежат на некотором эллипсе», рис. 15.

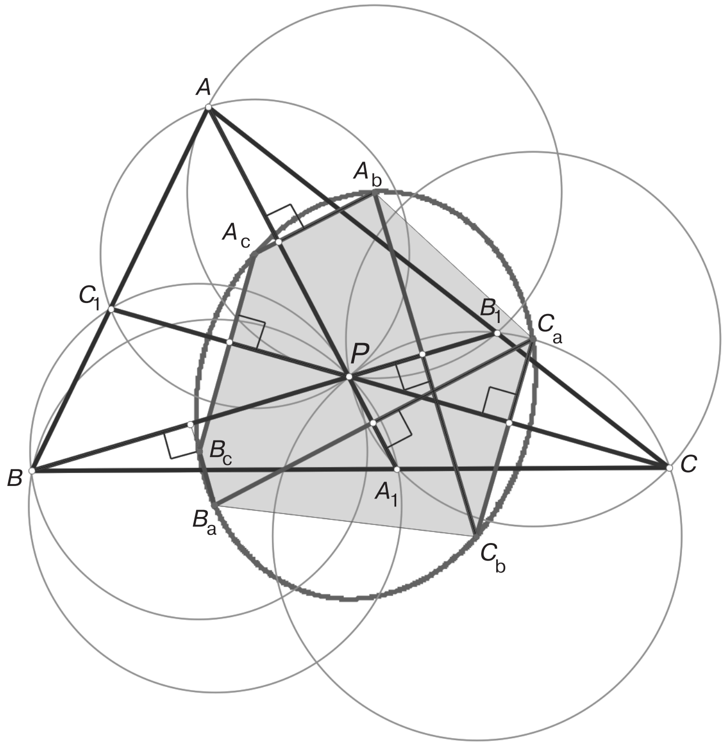


Рис. 15.

Обсудим также и ее.

Комментарий: То, что все шесть центров описанных окружностей лежат на одной конике (даже если точка пересечения чевиан — *внешняя*), следует (как и в *Гипотезе* 3) из *обратной теоремы Паскаля.*

Ведь противоположные стороны шестиугольника[31] $B_aC_aC_bA_bA_cB_c$ *параллельны* (как пары перпендикуляров к соответствующим чевианам — потому что центр описанной около треугольника окружности лежит на серединном *перпендикуляре* к сторонам треугольника) — т. е., *с проективной точки зрения*, точки пересечения прямых, их содержащих, лежат на *бесконечно удаленной прямой.* См. [1], [3], [5], [7], [11]) .

Согласно компьютеру, для внутренних точек пересечения чевиан порожденная ими коника всегда принимает форму эллипса. Для внешних же точек возможны как эллипс, так и гипербола, и парабола.

Попробуем разобраться, почему для внутренних точек получается непременно эллипс.

При этом руководствоваться будем исключительно *геометрическими* (наконец-то!) соображениями.

---

[30] По поводу этого определения см. сноску 18, в которой приведено несколько другое определение, более распространенное.

[31] Точнее сказать, *шестевершинника* — ибо звенья указанной далее шестизвенной замкнутой ломаной *самопересекаются.* Но теорема Паскаля и обратная ей «работают» и здесь.

На рисунке же серым цветом выделена внутренность т.н. *выпуклой оболочки* множества, образованного центрами описанных окружностей. (В некотором смысле, «наименьшее» выпуклое множество, содержащее данные точки.)

Для начала докажем, что коника, описанная около *выпуклого шестиугольника-параллелограмма*[32], есть *эллипс*.

Очевидно, что, в силу выпуклости, такой шестиугольник всегда можно «вписать» (см. рисунок) в треугольник.

Понятно также, что центр описанной около шестиугольника коники (по-прежнему благополучно себе существующей по обратной теореме Паскаля) лежит на пересечении отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

Этот факт вытекает из теоремы о том, что *середины пучка параллельных хорд коники лежат на прямой, проходящей через ее центр*[33] (см. [1], [7], [11]).

Следовательно, центр нашей коники находится внутри шестиугольника и является *конечной* (обычной) точкой плоскости. Поэтому коника не может быть параболой (центр которой — бесконечно удален). Не может она быть и параболой вырожденной, т. е. парой параллельных прямых — хотя центром такого «вырожденца» и можно считать любую (конечную и бесконечную!) точку на «серединной» параллели[34], но, ясное дело, вершины выпуклого шестиугольника не могут разместиться на каких-либо *двух* прямых.

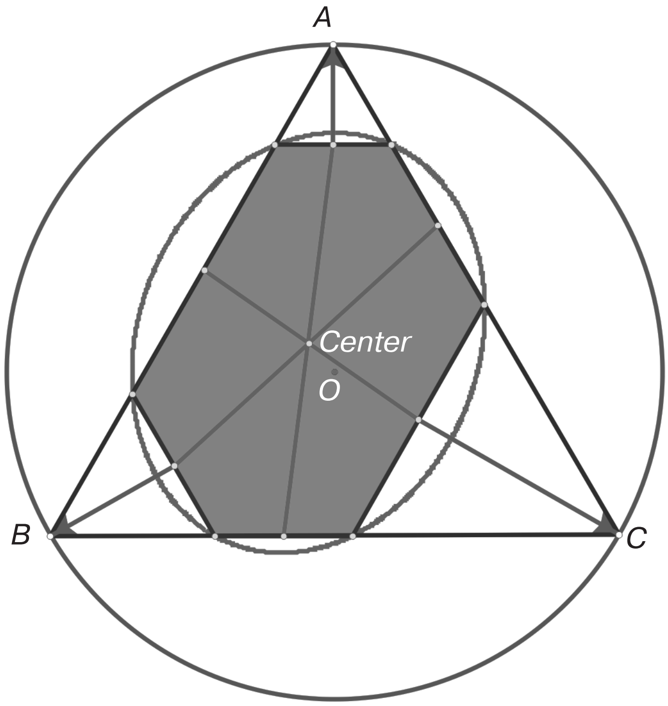


Рис. 16.

Стало быть, описанная коника представляет собой либо эллипс, либо гиперболу.

Будем теперь сдвигать, параллельно соответствующим сторонам треугольника, соответствующие стороны шестиугольника — к вершинам треугольника.

Из соображений непрерывности следует, что при таких деформациях *коника не может изменить свой вид* — ведь для этого она должна пережить *«параболическую катастрофу»* , т. е. в какой-то момент обернуться параболой (возможно, вырожденной).

А это-то и невозможно, так как центр по-прежнему конечен (в любой момент деформации) и двух прямых по-прежнему маловато, чтобы разместить на них все вершины.

В предельном случае, когда деформируемые отрезки стянутся в точки, совпадающие с вершинами треугольника, мы получаем описанную около треугольника окружность — частный случай эллипса.

Значит, описанная около изначального шестиугольника коника также представляла собою эллипс.

Вернемся теперь к исходной конструкции этого раздела.

Поскольку для любой *внутренней* точки, порождающей конику, соответствующие вершины могут быть соединены замкнутой ломанной без самопересечений, ограничивающей *выпуклый* шестиугольник[35] (он-то и затушеван на рисунке 16 — параллельные отрезки будут его диа-

[32]Шестиугольником-параллелограммом как раз и называют шестиугольник, у которого противоположные стороны параллельны.

[33]И прямая эта (или отрезок) называется *сопряженным диаметром* коники. В случае параболы ее центром следует считать бесконечно удаленную точку ее оси. Тогда хордой параболы, проходящей через ее центр, будет являться луч, параллельный оси.

[34]— см. примечание 21

[35]На самом деле, довольно деликатный момент. Факт, вроде бы, очевидный — но строго обосновать его мы не умеем.

гоналями), то, рассуждая как только что, приходим к аналогичному выводу — при движении порождающей точки по *внутренности* треугольника вид описанной коники изменится не может!

А «параболическая катастрофа» как раз и происходит при «*нарушении границы*».

На следующих двух картинках (рис. 17, 18) показано, как это происходит: при приближении к стороне треугольника эллипс стремится вытянуться в две параллели, а затем обращается в гиперболу. Остается только указать какое-нибудь положение внутренней точки, про которую достоверно было бы известно, что коника, описанная около порожденного ею шестиугольника, является эллипсом.

И такая точка есть!

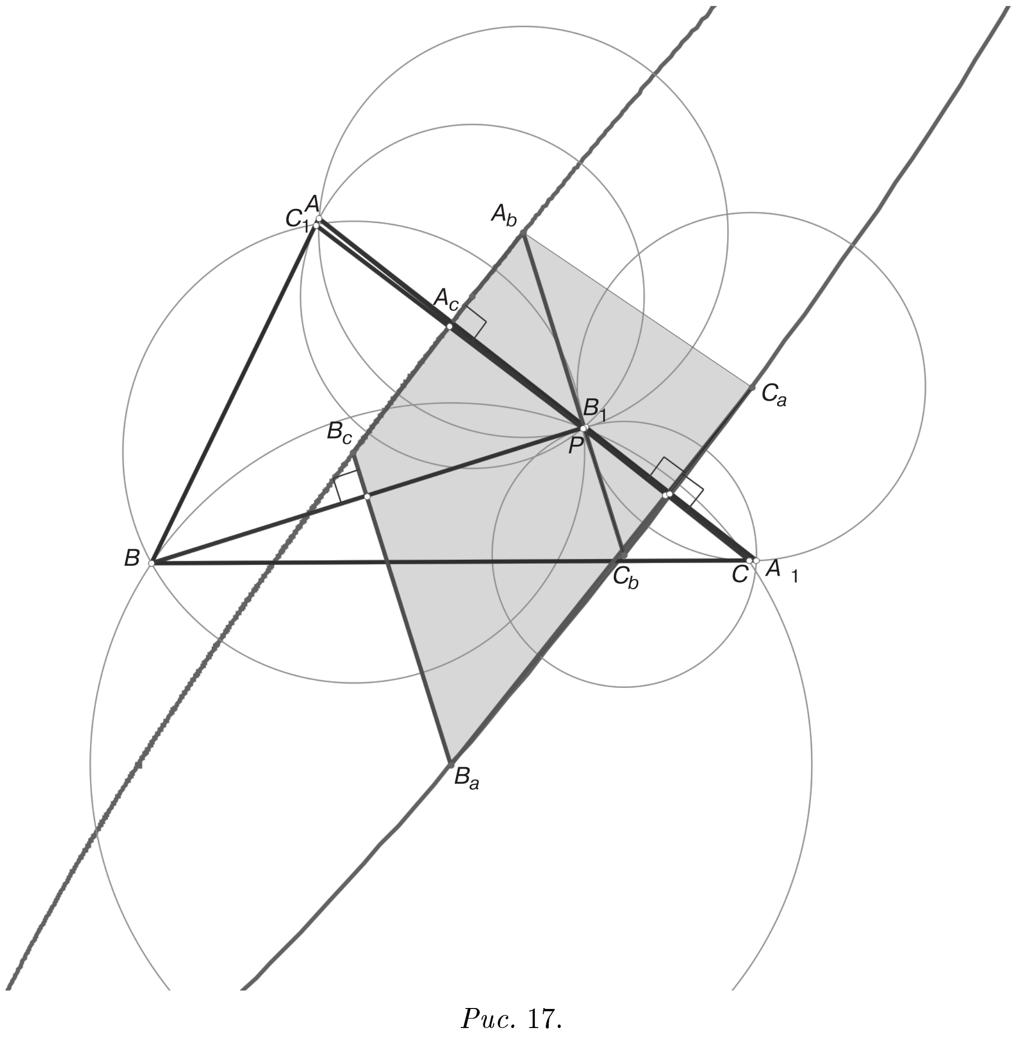


Рис. 17.

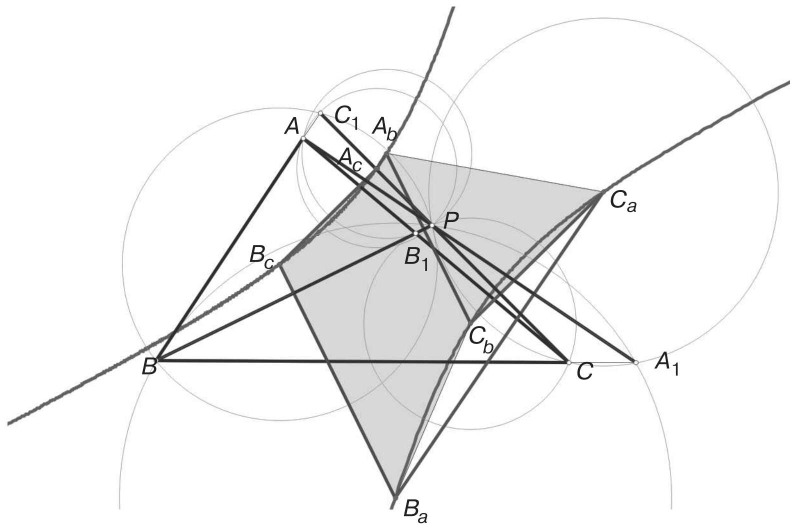


Рис. 18.

Оказывается, если мы выберем точку пересечения медиан (центроид) G, то порожденная ею коника будет не просто эллипсом, но даже окружностью!

Называется она, рис. 19, *окружностью Ламуна* (в честь голландского математика, в 2002 году ее открывшего), а доказательство этого утверждения (не уступающего по красоте самым выдающимся классическим достижениям) прочитать можно, например, здесь: [10], [7].

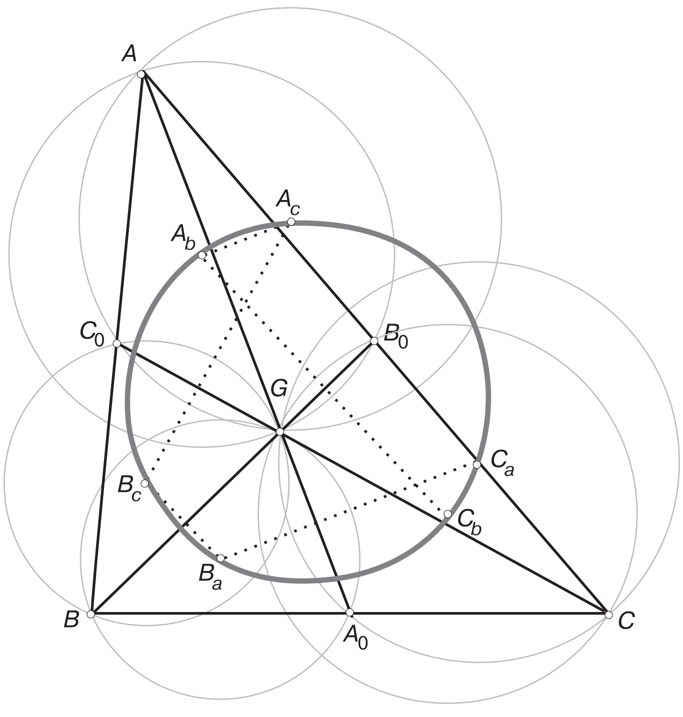


Рис. 19.

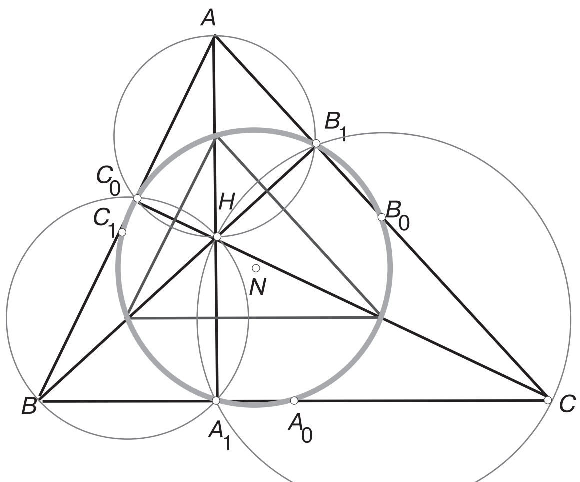


Рис. 20.

В статье [10] доказано также, что есть и еще одна точка, для которой порожденная ею коника вырождается в окружность — а именно, *ортоцентр* (точка пересечения высот) треугольника H (и больше точек с такими свойствами не существует).

В этом случае шестиугольник вырождается в треугольник (поскольку соответствующие пары вершин «слипаются» в середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами.

А коника вырождается в знаменитейшую *окружность Эйлера*, или *окружность девяти точек* — ведь на ней и правда лежат середины сторон, основания высот, а также середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, рис. 20[36].

Впрочем, доказывать с помощью ортоцентра эллиптичность коники можно только для остроугольного треугольника, поскольку в тупоугольном случае ортоцентр располагается вне треугольника.

Литература

1. Акопян А., Заславский А. Геометрические свойства кривых второго порядка. - М.: МЦНМО, 2011.

2. Балк М., Болтянский В. Геометрия масс. - М.: Наука, 1987.

3. Заславский А. Геометрические преобразования. - М.: МЦНМО, 2004.

4. Малышев И. Тригонометрические формулы в треугольнике и их обобщения // Фрактал: электронный журнал. - 2013. - №1. URL:
http://schoolpress.ru/products/rubria/index.php?ID=46934/

5. Мякишев А. Элементы геометрии треугольника. - М.: МЦНМО, 2009.

6. Мякишев А. Конфигурация равенства // Математическое образование. - 2008. - №2(46). - С. 29-44.
http://www.geometry.ru/persons/myakishev/text.htm

7. Прасолов В. Задачи по планиметрии. - М.: МЦНМО, 2007.

8. Шарыгин И. Геометрия. Планиметрия : задачник 9-11. - М.: Дрофа, 2001.

9. Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers. URL:
http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

10. Myakishev A., Woo P. On the Circumcenters of Cevasix Configurations // Forum Geometricorum. - 2003, №3.
http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200305index.html

11. Yiu P. Introduction to the Geometry of the Triangle. URL:
http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf

Григорьев Дмитрий Сергеевич,
учащийся 11 класса Лицея № 1303, г. Москва.

E-mail: d.grigoriev@yahoo.com

Мякишев Алексей Геннадьевич,
Московский Химический Лицей (школа № 1303).

E-mail: myakishev62@mail.ru

Статья поступила в редакцию 13 февраля 2013 г.

[36] Об этих и многих других свойствах окружности Эйлера см. [1], [7], [8], [11].

Вопросы математики и математического образования на XIII съезде русских естествоиспытателей и врачей в Тифлисе в 1913 г.

Р. З. Гушель

Заметка посвящена 100-летию XIII съезда русских естествоиспытателей и врачей, на котором впервые в практике таких съездов была организована секция педагогических вопросов, в частности, вопросов преподавания математики.

Летом 2013 г. исполняется 100 лет со времени проведения в Тифлисе XIII съезда русских естествоиспытателей и врачей.

Первый подобный съезд прошел в декабре 1867 – январе 1868 г. в С.-Петербурге. Инициатива проведения этого съезда исходила от министра народного просвещения графа Д. А. Толстого, который в мае 1867 г. вошел в Комитет министров "с ходатайством об испрошении Высочайшего Его Императорского Величества соизволения о дозволении министру народного просвещения учредить периодические съезды русских естествоиспытателей..." [1, с.460]. Среди отделений (секций), которые предполагалось организовать, была секция астрономии и математики.

За последовавшие после Первого съезда полвека прошло еще двенадцать съездов. Из них первые пять назывались съездами естествоиспытателей. В названии VI съезда в Санкт-Петербурге в 1879 г. впервые появилось слово "врачи".

Тринадцатый съезд, оказавшийся последним, как раз и состоялся в Тифлисе в 1913 г. Труды этого съезда были опубликованы там же в 1916 г. в шести томах. Следующий съезд, который должен был состояться в Харькове, был запланирован на 1916 год. Но начавшаяся в 1914 году война, а затем события 1917 года не способствовали проведению подобных мероприятий. Впоследствии в СССР стали проводиться отдельные съезды ученых, работавших в разных отраслях науки. Так, в 1927 г. в Москве прошел Первый всероссийский математический съезд, а в 1930 г. в Харькове — Первый всесоюзный математический съезд.

Вернемся, однако, к событиям столетней давности.

Дореволюционные съезды проходили обычно в университетских городах. XIII съезд в этом отношении был исключением. Особенностью этого съезда было также и то, что на нем впервые была организована секция педагогических вопросов. При подготовке ряда предыдущих съездов, в том числе, и XII съезда в Москве, открывшегося 28 декабря 1909г., вопрос о необходимости педагогической секции поднимался, но разрешение на создание такой секции впервые последовало лишь в 1913г.

Съезд был очень многолюдным. На него записалось более 3500 человек. Заседания проходили с 16 по 24 июня. Председателем съезда был избран известный отечественный химик профессор И. А. Каблуков.

Ниже представлен краткий обзор деятельности математической секции XIII съезда. На некоторых материалах секции педагогических вопросов, относящихся к преподаванию математики, остановимся более подробно.

Первым докладом на секции математики стал доклад Н. Е. ЖУКОВСКОГО (1847-1921) "О применении скороходной нории для подъема нефти из глубоких скважин" [2, с.75]. Однако

С. Н. Киро, перечисляя в работе [3] доклады по математике, сделанные на всех съездах русских естествоиспытателей, этот доклад не приводит, относя его, вероятно, к механике, хотя подсекция механики относилась тогда к математической секции.

Замечательный отечественный историк математики В. В. БОБЫНИН (1849-1919) сделал на секции три доклада. 18 июня его сообщение было посвящено древнеиндусской математике и отношению к ней древней Греции. В этом докладе автор отметил, “что большая часть открытий в геометрии, приписываемых Пифагору, должна быть отнесена на счет индусов, от которых она Пифагором была лишь перенесена в Грецию” [2, с.76].

19 июня он выступил еще раз. Новый доклад был посвящен математическим знаниям народов Кавказа. В частности, ученый отметил существование в этом регионе в средние века 20-ричной системы счисления.

Третье выступление В. В. Бобынина, состоявшееся 21 июня, было посвящено распространению “клинообразных письмен и их постепенной модификации благодаря скорописи” [там же].

Из других докладов математической секции Д. М. Синцов в статье, опубликованной в Вестнике опытной физики и элементарной математики [2], называет доклад Я. В. Успенского (1883-1947) из С.-Петербурга “О некоторых теоремах, вытекающих из теории эллиптических функций”, два доклада харьковского математика М. Н. Лагутинского (1871-1915): 1) “Об алгебраическом интегрировании дифференциальных уравнений”, 2) “К теории исключения”, а также доклад П. С. Флорова (ст. Урюпинская) “Элементарнее решение задачи Бюффона по теории вероятностей” и доклад А. А. Волкова (Москва) “Об аксиомах и определениях в математике”. Сам Д. М. Синцов дважды выступал на заседаниях математической секции. (Полный список докладов по математике и вопросам ее преподавания приведен, как уже отмечалось, в [3].)

Перейдем к секции педагогических вопросов. Она была разбита на два отдела: физико-математический и естественно-исторический, хотя некоторые заседания отделов были соединенными.

19 июня в соединенном заседании секции педагогических вопросов состоялся доклад Д. М. СИНЦОВА “Университет и средняя школа”. В тот же день был зачитан доклад, присланный П. А. НЕКРАСОВЫМ, который сам не смог приехать на съезд. Тема его сообщения “Промежуточная лицейская ступень между средней и высшей школами”.

Назовем еще несколько докладов этой секции:

- Липкин Я.А. Некоторые теоремы стереометрии.
- Воскресенский М.П. Желательные и возможные изложения курса анализа и аналитической геометрии в средней школе.
- Флоров П.С. Теория вероятностей как учебный предмет в средней школе.
- Песоцкий М.П. Лабораторный метод в преподавании математики.

Остановимся подробнее на названных выше докладах Д. М. Синцова и П. А. Некрасова.

Дмитрий Матвеевич Синцов (1867-1946), автор большой статьи о съезде [2], и трижды на нем выступавший, в 1890 г. окончил физико-математический факультет Казанского университета и преподавал в нем с 1894 по 1899г. С 1903г. и до конца жизни он — профессор Харьковского университета, один из наиболее активных членов и президент Харьковского математического общества. Будучи видным отечественным геометром, Д. М. Синцов многие годы занимался также и проблемами среднего математического образования.

Свое выступление в секции педагогических вопросов Дмитрий Матвеевич посвятил связи между высшей и средней школой. Начал он с истории вопроса.

На основании университетского устава 1804г. гимназия непосредственно подчинялась университету своего учебного округа. Однако, уже в следующем университетском уставе 1835г. эта подчиненность была ликвидирована, и гимназия перешла в подчинение к попечителю учебного округа. В университетах проходили лишь "испытания кандидатов на учительские места в гимназиях и уездных училищах округа, если они не снабжены надлежащими для того аттестатами и свидетельствами" [4, с.194-195]. Через полвека, по университетскому уставу 1884г., эти испытания были переданы специальной государственной комиссии. Таким образом, преемственная связь между средней и высшей школой фактически оборвалась. А между тем, университеты получали студентов из числа окончивших гимназии. С другой стороны, именно выпускники университетов приходили в среднюю школу в качестве преподавателей научных предметов и древних языков.

Вот что сказал по этому поводу Д. М. Синцов:

"Мы, профессора, недовольны приходящими к нам слушателями. Не говоря о встречающихся более или менее часто недостатках общего образования, неумения ясно и отчетливо излагать свои мысли устно и письменно, в особенности слабого знания иностранных языков, специально относительно математической подготовки, в особенности часто неразвитие способности геометрических представлений, — способности представления пространственных форм (и неумения чертить), стремление пользоваться готовыми формулами, неумение быстро и отчетливо производить логарифмические вычисления... наконец, неумение слушать лекции и заниматься самостоятельно по книге, ведущее к тому, что наши аудитории быстро пустеют.

С другой стороны, окончившие университет и ставшие преподавателями шлют нам укоры, что того, чему их учили в университете, им не нужно, а тому, что им нужно, их не учили" [4, с.196]. (Ф. Клейн назвал это "системой двойного забвения".)

И далее Дмитрий Матвеевич говорит о том, что, по его мнению, надо изменить и в средней, и в высшей школе, чтобы сгладить, по возможности, переход из одной в другую и сделать максимально осознанным выбор выпускником гимназии того факультета университета, где бы он хотел учиться.

Среди тех недостатков, которые назвал докладчик, и перегрузка первого курса лекциями, и "исключительная теоретичность" постановки преподавания математики в университете. Серьезным недостатком он считал и большое число слушателей на потоке. Уменьшить численность потоков можно было лишь за счет увеличения числа университетов в стране.

"Только с увеличением числа университетов и уменьшением числа слушателей-математиков можно достичь того, что можно назвать лабораторными занятиями по математике" [4, с.198-201].

Особое внимание в своем выступлении Д. М. Синцов уделил вопросу о необходимости подготовки студентов к тому, что им потребуется в преподавательской работе. Для этого он считал важным включить в курс обучения такие учебные предметы как "элементарная математика с высшей точки зрения, история математики, основания геометрии, учение о приближенных вычислениях". Докладчик полагал, что эти дисциплины особенно полезны для будущих преподавателей математики.

Что касается тех изменений, которые, по мнению Д. М. Синцова, должны были произойти в курсе средней школы, то эти изменения заключались в обновлении содержания школьного курса математики. Он сказал: "Основные понятия о функции, функциональной зависимости, о графическом изображении функций, метод координат и понятие о производной как пределе отношения приращения зависимого переменного к приращению независимого переменного, настолько необходимы для современного естествознания и техники, что с ними до́лжно быть знакомым всякому образованному человеку" [4, с.203].

Как видим, эти предложения очень близки тем, которые звучали на I и II Всероссийских съездах преподавателей математики (1912, 1914 гг.).

Д. М. Синцов обратился к проблеме разрыва между средней и высшей школой и высказал ряд соображений по поводу возможных путей её решения. Этой же теме был посвящен доклад П. А. Некрасова "Промежуточная лицейская ступень между средней и высшей школами".

Павел Алексеевич Некрасов (1353-1924) в 1878 г. окончил физико-математический факультет Московского университета и был в нем оставлен. С 1890 г. он — ординарный профессор, а в

1893-1898гг. — ректор Московского университета. С 1898 по 1905 г. он являлся попечителем Московского учебного округа, а в 1905 г. стал сотрудником Министерства народного просвещения. Активно боролся за введение в среднюю школу элементов теории вероятностей.

П. А. Некрасов считал, что "в основу строя школы нужно положить индивидуализацию образования, дабы не превысить учебными предметами силы учеников и, с другой стороны, интенсивно обслужить все требования жизни, предъявляемые к науке и образованию" [5, с.31].

Автор предложил создать в качестве переходных от среднего к высшему образованию специальные лицейские классы, которые он также считал высшей школой, но только подготовительной к "разветвленному высшему образованию". Он видел служебные функции лицейской ступени в следующем:

"Во-первых, эта школьная ступень должна освоить учеников с предметными группами высшего образования и выработать вкус к дальнейшему факультетскому образованию у людей, жаждущих углубления теоретического знания...

Во-вторых, эта ступень должна обслуживать возможность правильного индивидуального отбора образованных людей по специальностям..." [5, с.32]. Павел Алексеевич предложил в своим проекте "установить ответвление четырех подгрупп учебных предметов A, B, C и D, развивающихся из двух групп: 1) СЛОВЕСНАЯ ФИЛОСОФИЯ и II) МАТЕМАТИКА, причем каждая большая группа I и II этой бифуркации еще раз бифурцируется. Получается схема I (A и B) и II (C и D), содержащая четыре подгруппы".

Автор не предлагал увеличить возраст оканчивающих среднюю школу. Двухлетнюю лицейскую ступень он ввел за счет сокращения срока обучения в гимназии с 8 до 7 лет и более раннего (с 9 лет) поступления учащихся в 1 класс. А по действовавшему в то время уставу в 1 класс принимали детей в возрасте 10-12 лет.

Далее, оставив в стороне школы типов A и B, П. А. Некрасов остановил свое внимание на группах C и D.

"...Школьный тип C в России естественно развивается... из нынешних реальных училищ, а школьный тип D — из средних учебных заведений, в сущности общеобразовательных, но носящих профессиональные титулы: коммерческие училища, сельскохозяйственные училища, кадетские корпуса с военными училищами и пр.

Разницу между учебными планами C и D по содержанию их учебных предметов выразим следующею сравнительной характеристикой. В отделении C господствуют математические предметы, развивающие дедуктивное мышление и строго определенный количественный анализ... Но этих важных методов для индуктивных описательных наук, как экономика и биология, недостаточно, и поэтому в учебном плане отделения D на видное место выдвигаются предметы, развивающие индуктивное мышление... Научно-описательный и сравнительный индуктивный метод (математико-статистический) в русской школе страшно отстал от его современного положения и значения в культурном движении... Курсом D должна быть заполнена эта пропасть..." [5, с.37-40].

И далее докладчик привел примерное распределение выпускников разных групп по факультетам:

"... C. Отделение C готовит в факультеты физико-математический и медицинский, в политехнические институты и инженерные училища (отделы: механический, строительный, электротехнический и путей сообщения).

D. Отделение D готовит в факультеты физико-математический, юридический (административное и политико-экономическое отделения) и медицинский, в институты сельскохозяйственный и коммерческий и в политехнический институт и инженерные училища (отделы: горный, путей сообщения, экономический, мелиорационный, химико-технический)" [5, с.40-41].

В 1913 г. П. А. Некрасов не единственный и не первый раз выступал за введение промежуточной лицейской ступени в средней школе. В частности, он говорил об этом и через полгода на Втором всероссийском съезде преподавателей математики в Москве [6]. И у него были сторонники.

Закончил П. А. Некрасов свой доклад так: “Идея лицейских двухгодичных отделений и лицейской системы связи среднего и высшего образования настолько живуча среди педагогов и настолько справедлива перед судом истории и здравой логики, что ныне она опять пробивает себе дорогу во взглядах преподавателей средней и высшей школы; ибо кроме этой схемы, нет другого пути поднять в нашей стране уровень среднего, высшего, а следовательно, и низшего образования...” [5, с.42-43].

Мы видим, что два делегата съезда, оба — известные в стране ученые, а второй к тому же и крупный администратор в системе народного просвещения, независимо друг от друга подняли один и тот же вопрос. И хотя предлагаемые ими решения этого вопроса не вполне совпадают, но по существу они говорят об одном и том же — о согласовании обучения в средней и высшей школе, ведущем к повышению качества образования на обеих его ступенях.

Нельзя сказать, что выдвинутые ими предложения устарели, хотя сегодня, спустя 100 лет, запросы как средней, так и высшей школы несколько изменились, в том числе, и потому, что средняя школа является массовой.

К сожалению, мы не располагаем шеститомником трудов XIII съезда русских естествоиспытателей и врачей. Но даже и рассмотренные выше материалы свидетельствуют о том, что это было весьма представительное собрание, участие в котором приняло очень большое, особенно по тем временам, число педагогов высшей и средней школы. Тематика докладов, как по математике, так и по вопросам ее преподавания отражала те тенденции, которые имели место в науке и просвещении начала XX века.

Имена Н. Е. Жуковского и И. А. Каблукова вполне определяют научный уровень съезда. А доклады П. А. Некрасова и Д. М. Синцова свидетельствуют о глубокой заинтересованности ученого сообщества в повышении уровня и качества преподавания в средней и высшей школе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сборник постановлений по Министерству народного просвещения. - Т.4. Царствование Императора Александра II. 1865-1870. - СПб., 1871.

2. Синцов Д.М. XIII-й съезд русских естествоиспытателей и врачей в Тифлисе // Вестник опытной физики и элементарной математики. - 1913. - №591.

3. Киро С.Н. Математика на съездах русских естествоиспытателей и врачей // Историко-математические исследования. - М., 1958. Вып. XI. - С.133-158.

4. Синцов Д.М. Университет и средняя школа // Математическое образование. - 1913. - № 5. - С.193-206.

5. Некрасов П.А. Промежуточная лицейская ступень между средней и высшей школами // Журнал Министерства народного просвещения. - 1913, Ноябрь. - С.31-48.

6. Некрасов П.А. Вторая (бакалаврская) ступень в составе будущей средней школы // Математическое образование. - 1914. - №№ 5, 6.

Гушель Ревекка Залмановна,
Ярославский государственный педагогический
университет имени К. Д. Ушинского.

E-mail: gushelr@yandex.ru

Экспериментальная математика

А. В. Жуков

Редакция завершает публикацию оставшихся в ее распоряжении материалов Александра Владимировича Жукова (16.03.1955 – 29.11.2011). Это третья часть лекции, в которой автор подчеркивает экспериментальный аспект математики, приглашая, при помощи специально разработанных программ, наблюдать, формулировать и пытаться доказывать математические закономерности. В заключение приводим краткие воспоминания о Жукове С. В. Дворянинова, письмо Л. Штейнгарца, и список публикаций А. В. Жукова в нашем журнале.

Замечание о программах

Программы "Жизнь" ("Life"), "Dynamic Geometry", "Set Formula" используемые в этой части лекции, находятся в свободном доступе на странице math.child.ru/podumai/labor/

Они имеют интуитивно понятный интерфейс. Каждый раз, когда в лекции написано "Эксперимент", это означает запуск соответствующей программы; указано, какие параметры следует ввести. После значка процента идет комментарий к вводу параметра или к работе программы. Когда параметры введены, для запуска программы надо последовательно нажать кнопки ПРИМЕНИТЬ, ПУСК. Пользователь наблюдает полученное изображение после окончания работы программы или видит динамическую картинку во время работы программы.

Доказательство третье[1]. Модели эволюции

Все ныне существующие эволюционные модели можно описать одной формулой:

НОВОЕ — это СТАРОЕ, преобразованное по определённому ЗАКОНУ.

По такому принципу, например, устроена эволюционная модель "Жизнь", впервые опубликованная американским математиком Джоном Конвеем в 1970 году (Конвей её придумал, рассуждая о принципе работы самовоспроизводящихся автоматов Джона фон Неймана). Известный популяризатор науки Мартин Гарднер посвятил данной игре три главы в своей известной книге "Крестики-нолики", которую я всем рекомендую прочитать.

Игра "Жизнь".

Запустить программу Life.exe

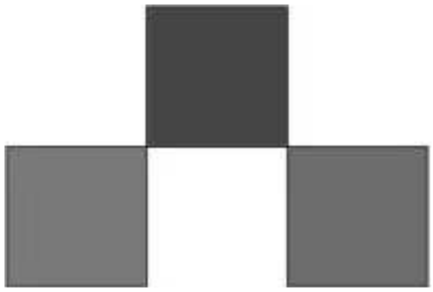
Эксперимент.

Grid Size: 10

t = 2000 мс

Каждая клетка таблицы может находиться в двух состояниях: живом или мёртвом.

Прямо в поле таблицы щёлкнем мышкой в трёх соседних местах, вот так:



[1]Имеется в виду обоснование утверждения, что математика является экспериментальной наукой. — *Прим. ред.*

(цвет появляется автоматически).

Эти цветные клеточки — “живые”, все остальные (белые клетки таблицы) — “мёртвые”.

Начальное распределение живых клеток задаётся внешним наблюдателем. Новое поколение клеток рассчитывается из СТАРОГО на основе следующих правил.

1. Условие рождения. В новом временном такте клетка оживает, если в предыдущем такте рядом с ней находились ровно три живые клетки (соседями называются клетки, имеющие общие точки — как по стороне, так и по углам, у каждой клетки 8 соседок).

Вопрос: оживёт ли при заданной конфигурации какая-нибудь клетка? (Ответ: Да, внутри треугольника).

2. Условия жизни: В новом временном такте клетка продолжает жить, если в предыдущем такте рядом с ней находились две или три живые соседки.

Вопрос: Какие из отмеченных выше клеток будут продолжать жить? (Ответ: только верхняя).

Ну и, соответственно, по принципу дополнения, получаем

3. Условия гибели: в новом временном такте клетка умирает от одиночества, если в предыдущем такте рядом с ней находилось меньше двух соседей (в приведенном примере это две нижние клетки)

или умирает от удушья, если в предыдущем такте рядом с ней находилось больше трёх соседей.

Вопрос: Что произойдёт с заданной конфигурацией клеток на ВТОРОМ такте? (Ответ: Они все погибнут).

Давайте посмотрим: запустить один такт программы, потом ещё один такт.

Удивительно, но эти простые правила приводят к огромному разнообразию сцен из жизни клеток. (Впрочем, вспомним, что в основе алгоритма “Стежок” тоже лежали очень простые правила.)

Эксперимент.

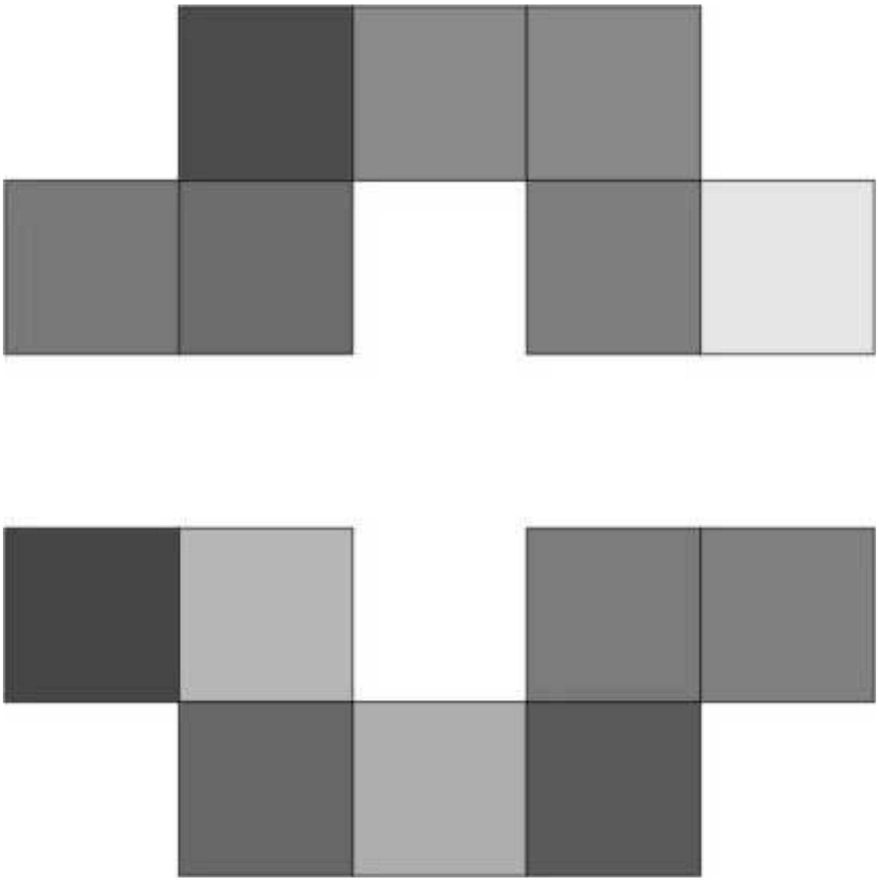
Δt = 500 мс;

n = 80;

сетка: НЕТ

кнопки: Clear, Apply — несколько раз перещёлкать.

Начальная конфигурация ПО ЦЕНТРУ:



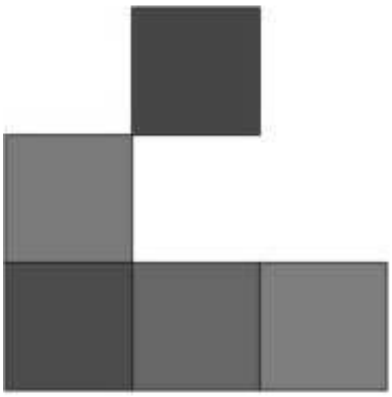
Эта цивилизация живых клеток постепенно начинает эволюционировать.

Нажать: Run

Сначала она разрастается, потом, видимо, в предчувствии грядущей гибели, отправляет в глубины пространства посланников: в определённый момент она снаряжает 4 планера (“глайдера”), а потом ещё 4 планера, потом — ещё 4 (всего 12 планеров). В моей программе ”на границе Вселенной” — периферии таблицы — нарушаются классические условия эволюции: планеры превращаются в квадраты вместо того, чтобы улетать в бесконечность. На бесконечной плоскости или на поверхности тора сцены будут несколько иные.

Раз и навсегда выбрав начальную конфигурацию, мы больше не вмешиваемся в её эволюцию — она начинает жить по своим законам. Это не совсем соответствует оригиналу, с которого была “слеплена” данная модель.

Учёт внешних факторов можно произвести следующим образом. Я говорю волшебное слово “замри!” (Stop)— эволюция останавливается, я добавляю какую-нибудь новую колонию, например, вот такой глайдер,



и опять запускаю модель (Run).

Можно поступить и более радикальным способом: залезть в “исходник” программы и поменять условия жизни и смерти — например, добавить учёт влияния дальних соседей, изменить правила рождения или гибели. После чего перетранслировать программу и запустить её снова.

Но это могу делать и не я вовсе, а другая, управляющая, программа, в реальном масштабе времени анализирующая ситуацию на экране и, в зависимости от этого, подбрасывающая колониям клеток “питание” или, наоборот, “мусор”, создавая им невыносимые экологические условия.

Остановить программу Life.

Запустить программу Dynamic Geometry, 2 раза щёлкнув в поле внизу под картиной $256 * 256$ в центре формы. % А справа — ПОКА НЕ НАДО.

Однако, и управляющая программа может работать под руководством другой управляющей программы.

Таким образом мы приходим к концепции иерархии управляющих программ. Над всеми программами главенствует программа-демиург. Одни верят, что ДЕМИУРГ на самом деле существует, другие полагают, что ДЕМИУРГОМ является сама биологическая система, которую мы пытаемся моделировать.

Я не буду сейчас залезать в эти сложные вопросы. Я хочу показать вам лишь простенькую двухуровневую систему. Программа первого уровня — интерпретатор формул — рисует геометрические узоры: портреты этих формул. Программа второго уровня динамически изменяет алгоритм работы программы первого уровня. Делает она это так. Я заготовил около 2000 операторов-формул, по сути маленьких “атомарных” кусочков алгоритмов — и эти кусочки программа “Начинающий Демиург” случайным образом вытаскивает из базы операторов и предлагает их для интерпретации первой программе. Конечно же, базовых операторов может быть не 2000, а целый океан, и, в принципе, с их помощью может синтезироваться огромное количество различных геометрических конфигураций — молекул.

Получаются довольно замысловатые геометрические узоры — в этой программе возможно около 16 миллионов различных вариаций. Мы их смотреть не будем. Я выдерну из этого комбинаторного хаоса лишь несколько.

Нажать Stop (внизу под картиной $256 * 256$ в центре формы) и на фоне остановленной программы показывать статические картинки из двух внутренних папок из папки Formuly—Ris:

сначала папка: Izyaschnye Obyekty % просмотр
потом папка: Neobychnye Obyekty % просмотр.

Экспериментируя с операторами, а именно — слегка варьируя в них числовые значения некоторых параметров, я обнаружил, что последовательность мало отличающихся друг от друга формул может задавать некий смысловой ряд. Я хочу показать вам несколько подобных микромультфильмов.

Запустить программу Set Formula и поочерёдно показывать зафиксированные сюжеты, последовательно выбирая опции: “Бутон”, “Появление рогатого”,... и нажимая кнопку Movie.

Конечно, создавать океан формул из расчёта, что оттуда, как из пены морской, рано или поздно выйдет Афродита, не приходится — это слишком маловероятное событие. Поэтому однажды я решил привлечь уже готовые макроструктуры — так, чтобы они, погружённые в “формульную среду”, генерировали какие-то новые образования.

% Показывать рисунки из папок:

Галерея — Бегемот —
здесь несколько наложений геометрических узоров на рисунок Бегемота в исполнении Анатолия Тимофеевича Фоменко. Его рисунок приводится на обложке романа “Мастер и Маргарита”, выпущенной в издательстве Астрель: АСТ в 2010 году (с иллюстрациями А. Т. Фоменко).

Monna Liza —1 — обратите внимание на её глаза!

Органичное вплетение “Монны Лизы” в геометрические структуры свидетельствует о том, что в бессмертном произведении Леонардо да Винчи содержится скрытая математическая гармония.

Monna Liza — 2
Kot Lusien
Дерево — Я. Амелин
Avtoportret

Запустить программу Dynamic Geometry, щёлкнув сначала снизу картинки $256*256$ в центре формы, а потом справа её — “оживить” Бегемота.

В заключение я скажу, что все имеющиеся у нас на данный момент эволюционные модели несовершенны. Мы плохо представляем себе механизмы образования ПРИНЦИПИАЛЬНО НОВОГО на базе имеющегося СТАРОГО. Вот не было амёбы, и вдруг она появилась. Как это ей удалось? В этом плане мы не продвинулись дальше известного древнегреческого мыслителя Анаксагора (V в. до н.э.), утверждавшего: “Всё возникает из всего”. По Анаксагору, в основе мира лежат мельчайшие частички — гомеомерии, которые, перестраиваясь, образуют то облако, то яблоко, то пятку Ахиллеса. Как именно это происходит, он нам не объяснил, а мы пока тоже догадаться не можем.

Подводя итог всей лекции, я обращаю ваше внимание на то, что компьютер — чудодейственный прибор, позволяющий заглянуть в загадочный мир математических виртуалий. Там можно бродить, наблюдать удивительные, ещё никем не изведанные ландшафты, причудливые формообразования и структуры, как делают, например, путешественники среди снежных торосов, альпинисты в горах, космонавты на поверхности Луны или Марса. Я приглашаю вас посетить этот огромный, непостижимый и загадочный мир — тем более, что он находится рядом с нами. В нём можно совершать открытия столь же увлекательные и поразительные, сколь и в бесконечно разнообразном мире под солнцем, частью которого, по большому счёту, и является наша с вами математика, то есть ЖИЗНЬ.

Благодарю за внимание.

Александр Жуков, 04.12.2010.

Памяти Александра Владимировича Жукова

В январе 1970 г. вышел в свет первый номер журнала “Квант”. Одним из первых его подписчиков (и, главное, читателей!) стал Саша Бугай (в будущем Жуков) — восьмиклассник из небольшого города Изяслав, что в Хмельницкой области Украины.

В №3 “Кванта” за 1972 г. на с. 36 читаем:

“Мы уже сообщали (см. “Квант” №1 за 1970 г. и 1971 г.), что школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения задач “Задачника «Кванта»”, получат право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады наравне с победителями районных и городских олимпиад. За прошлый, 1971 год редакция получила более полутора тысяч писем с решениями и отобрала авторов правильных и наиболее интересных решений.

Ниже мы публикуем список школьников 7-10 классов, которые получили право участвовать в Московской и Ленинградской городских олимпиадах, а также в областных, краевых и республиканских (в АССР и союзных республиках без областного деления) олимпиадах.

К участию в математической олимпиаде допущены...” — пятым в этой славной когорте назван Александр Бугай — Изяслав, средняя школа № 5.

Летом того же года Александр Владимирович поступил в МГУ им. М. В. Ломоносова.

После окончания в 1977 г. механико-математического факультета (кафедра аэромеханики и газовой динамики) молодой специалист А. В. Жуков распределился в Красноярский Вычислительный центр СО АН СССР. В 1980 г. был призван в кадры Вооружённых Сил СССР.

Начал службу в одной из противоракетных частей в Подмосковье, а закончил в 45-м Институте Министерства обороны в звании подполковника.

Вышел в отставку по состоянию здоровья в 1998 г. Окончил адъюнктуру 45-го Института и там же осенью 1990 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Диссертация была посвящена проблемам искусственного интеллекта.

Все годы службы в армии Александр Владимирович не терял связи с любимым журналом "Квант". Был его постоянным читателем, а в начале восьмидесятых годов напечатал в нём несколько математических кроссвордов, в том числе трёхмерный кроссворд. Кроссворды составлялись по программам, написанным Жуковым, громоздкими военными вычислительными машинами того времени.

С 1998 г. А. В. Жуков всецело посвятил свои силы и талант любимому делу — математическому просветительству. С 1998 по 2008 г. Александр Владимирович — ведущий рубрики КМШ ("Квант" для младших школьников) в журнале, знакомом и дорогом ему со школьных лет. Конкурс "Математика 6-8", летние математические школы — также в сфере его деятельности.

Появились многочисленные статьи и задачи А. В. Жукова в журналах "Домашний лицей", "Математическое образование", "Математика для школьников", в газете "Математика" и, конечно, в "Кванте".

А. В. Жуков занимался со школьниками в Московском детском клубе "Компьютер", созданном фирмой "ПараГраф". Сайт "Планета «Математика»" http://math.child.ru/ создан его учениками.

Александр Владимирович Жуков является автором нескольких научно-популярных книг по математике и программированию. Среди них:

- энциклопедия для школьников "Математика" (в соавторстве, 1998, издательство "Аванта+");
- энциклопедия для школьников "Математика. Информатика" (в соавторстве, 2007, издательство "РОСМЭН");
- "Изучаем Delphi" (2000, издательство "ПИТЕР");
- "Вездесущее число" (2004, издательство "URSS"; 2012 г. — 5-е издание);
- "Элегантная математика" (в соавторстве, 2005, "URSS").

В издательстве "URSS" готовится к выходу последняя книга А. В. Жукова — "Прометеева искра", посвященная первоистокам европейской математической традиции в античные времена. Последние годы своей жизни Александр Владимирович провел за изучением трудов древнегреческих и древнеримских мыслителей и поэтов, переводя на язык современной математики их вычисления и логические открытия.

С 2009 г. А. В. Жуков — редактор журнала "Математика в школе", ведущий конкурса "Эврика!" в журнале "Математика для школьников".

А. В. Жуков хранил и достойно продолжал традиции отечественного математического образования. Все его работы свидетельствуют о широте и универсальности его таланта. В его математических работах находили свое естественное место и философия, и искусство: в одной из своих последних статей им была изучена группа преобразований, названная им группой Малевича-Флоренского-Панкина GMFP.

В предисловии к своей книги про число π А. В. Жуков в 2011 г. сказал: "Число — река, которая катила воды свои еще до того, как мы родились и пришли на ее берег. Налюбовавшись, мы уйдем с берега, а вода в реке будет уплывать все так же, ибо земных пределов у нее нет. Или — более романтично — число можно сравнить с кустом великолепных роз, ... — он находится рядом, его хорошо видно, но приблизиться к нему вплотную, чтобы в полной мере ощутить и осязать все прелести аромата и мягкого шелеста его, невозможно, поскольку располагается он на другом краю пропасти".

Сейчас Александр Владимирович на другом краю пропасти. Он ушел с берега реки жизни. Успел ли он налюбоваться этой рекой? Кто знает...

Александр Владимирович Жуков был замечательным человеком и верным другом. Умер от повторного инфаркта 29 ноября 2011 года. Остались жена, дочь, внук.

С. В. Дворянинов.

Письмо доктора педагогических наук Лейба Александровича Штейнгарца

(Письмо от 12.02.2012 адресовано С. В. Дворянинову, публикуется с разрешения автора.)

Очень жаль, что мы с Вами знакомимся в связи со столь печальным событием.

С Александром Владимировичем мы были знакомы, к сожалению, лишь заочно. Но я получал от него письма, как от очень близкого друга. Получал письма часто. Иногда — каждый день. Я всегда поражался, какАлександр Владимировичнаходит время писать мне подробные письма, помня при этом даже о мелких деталях. Письма всегда были необыкновенно доброжелательные, без малейшего гонора. И очень содержательные. Я всегда с большим нетерпением ждал писем от него. И всегда был уверен, что письма будут очень теплыми, очень радушными. Эти письма всегда воодушевляли меня. Хотелось продолжать заниматься математическим творчеством.

Мы все потеряли невероятно доброго, отзывчивого, очень талантливого человека. Замечательного математика, исследователя и, на мой взгляд, уникального педагога. В нашей школе, где я работаю, мы с учениками создали Математический Музей. Александр Владимировичочень интересовался этим Музеем, всегда расспрашивал о новых экспонатах.

В этом Музее имеется два издания книгиАлександра Владимировича о числе "ПИ", его "Элегантная математика", Математическая энциклопедия для детей, в которой имеется много статейАлександра Владимировича

Я бы хотел посвятить Александру Владимировичу экспозицию в нашем Музее. Он это, безусловно, заслужил. Был бы очень благодарен всем, кто знал Александра Владимировича Жукова за любой материал, который мог бы быть полезен для нашего музея.

Это могут быть воспоминания о Жукове, фотографии или что-нибудь другое (мой e-mail: leybleyb@yahoo.com).

Всего Вам доброго, с уважением Лейб Штейнгарц, г. Иерусалим.

Список публикаций А.В.Жукова в журнале "Математическое образование"

Где ошибка? № 1(16), 2001, 38-67; № 2(17), 2001, с. 24-50.

Составитель А. В. Жуков. А не самые ли почтенные имена — "Ум" и "Разумение"? Платон об образовании № 1(49), 2009, с. 40-42.

Сага о спинорном квадрате, № 1(57), 2011, с. 49-56.

"Башни из двоек и троек" Велимира Хлебникова, № 3-4(59-60), 2011, с. 55-61.

Экспериментальная математика, № 1(61), 2012, с. 47-65; № 3(63), 2012, с. 53-67; № 3(67), 2013, с. 62-66.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал "Математическое образование".

Журнал в электронном виде размещается формате PDF в архиве по указанной ссылке.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2013 год (включая стоимость пересылки) – 80 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2013 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 70 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ) и Российском индексе научного цитирования (РИНЦ).

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >