ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год восемнадцатый

№ 1 (69)

январь - март 2014 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 1 (69), 2014 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2014 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.03.2014 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (69), январь – март 2014 г.

Содержание

К разработке концепции математического образования[1]

В. В. Цукерман

В статье изложена позиция не стороннего наблюдателя, сформированная после знакомства автора с тремя вариантами проекта концепции математического образования представленными 19 июня 2013 г.:

http://www.math.ru/conc/

I. О незамеченной проблеме

Во всех этих проектах обойдена проблема первостепенной важности. **В нашей средней школе, за редкими исключениями, фактически произошла ликвидация доказательной математики.** Думаю, это беда с далеко идущими последствиями. Не приучившись доказывать в школе, студенты не умеют, как правило, проводить доказательства и в ВУЗе. Не умеют анализировать учебный материал. Такие выпускники ВУЗов, если и смогут работать по уже установленным правилам и алгоритмам, то открывать новое знание они не смогут. Если такое положение не изменится, то весьма вероятно, что лет так через 20 в России не останется фундаментальной науки.

Причин, приведших к такому положению дел, много, но в конечном итоге они связаны с неудачей реформы школьного математического образования, предложенной в 60-х годах минувшего века А. Н. Колмогоровым. Гениальный математик выдвинул грандиозную задачу ознакомления выпускников средней школы с математикой Нового времени, ставшей фундаментом взрывного развития науки, промышленности, технологии за последние три столетия. Это было время первого спутника Земли и полета Юрия Гагарина. Ставилась задача усиления роли математики в целях успешного развития страны путем приобщения оканчивающих школу к идеям математического анализа (идеям ньютоновской концепции математического естествознания). Задуманный Колмогоровым план содержательного изучения *алгебры и начал анализа* в массовой школе, в случае его успеха, по масштабности, важности и даже амбициозности был бы вполне сопоставим с этими событиями. Но учителя, в своей массе, оказались не подготовленными для успешного преподавания нового предмета в средней школе (подробнее об этом см. в Приложении 2 к этому тексту). При этом оказалось невозможным доступное проведение в школьном учебнике доказательной линии изложения курса "Алгебра и начала анализа". Существующие ныне весьма содержательные учебники по этому предмету содержат многочисленные логические пробелы изложения и поэтому недоступны для работы по ним массовому учительству. Эти учебники — для учителей и репетиторов очень высокой квалификации, которые в состоянии помочь своим ученикам преодолеть "рвы" логических пробелов и овладеть богатством содержания этих учебников.

Оказалось не выполненным основное требование: **"Учитель математики должен владеть доказательным обоснованием материала, который он преподает"**. Если это условие выполнено, то для проведения доказательной линии изложения предмета нет необходимости проводить детально все доказательства, оставив для усвоения наиболее интересные и поучительные, остальные пояснив (и, желательно, представив их как проблему). Но так преподавать

[1]Здесь автор не затрагивает вопросы математического образования начальной школы, считая его состояние относительно благополучным.

может лишь учитель указанного выше уровня. Таковых в достаточном количестве во время проведения реформы не оказалось. И тогда под влиянием многих приходящих обстоятельств другие лица вместо требующей определенного времени работы по повышению квалификации учителей, решили оставить лишь оболочку – название предмета “Алгебра и начала анализа”, выбросив практически все содержание. Заодно перестали требовать знание доказательств в геометрии, нарушив более чем вековую традицию русского среднего образования (гимназии, реальные училища). Так пришли к сегодняшнему положению в средней школе.

В Приложениях 1 и 2 к этому тексту, по сути, представлена для обсуждения программа реализации целей школьного курса “Алгебра и начала анализа”, как это было задумано Андреем Николаевичем Колмогоровым. Приложение 1 – это доклад 1994 г., имеющий программное значение. В нем была высказана идея *минимального расширения* школьной программы, чтобы стало доступным строго доказательное изложение теории. Первоначально это касалось только вопросов математического анализа, включенных реформой в программу средней школы. Но при реализации плана выяснилось, что план нельзя осуществить, не распространив это *минимальное расширение* и на традиционный материал школьного курса Алгебры (действительные числа, координатная прямая, основные элементарные функции). В итоге оказалось, что, после достаточно подробного рассмотрения действительных чисел и координатной прямой, весь остальной материал: пределы, непрерывность, касательная, производная с ее ролью в исследовании функций, интеграл уже не представляют сколько-нибудь существенных трудностей. В Приложении 2 указан список уже опубликованных материалов для реализации программы. При этом книга [1] и журнальные статьи в [3, 4, 5] представляют собой единый **комплекс** материалов, охватывающий строгим изложением достаточный объем теоретических знаний содержательного курса “Алгебра и начала анализа”. В **комплексе** содержится материал, которым должен свободно владеть учитель математики старших классов. Такого владения, полагаю, можно добиться, поскольку объем этого материала в 10 и более раз меньше, чем объем педвузовского курса математического анализа с примыкающими к нему дисциплинами. **Комплекс** еще предстоит оснастить соответствующим задачным материалом. Особую роль играет серия статей [6], где в порядке диссертационного исследования Е. В. Гераськиной представлена последовательность изучения темы “интеграл” в средней школе, доведенная до поурочного планирования при строго доказательном, доступном изложении с решением задач и упражнений.

Рассмотренное направление деятельности по научно-методическому обеспечению доказательной линии в изучении курса “Алгебра и начала анализа” средней школы я обсуждал с академиком В. А. Васильевым, профессором Мехмата МГУ В. М. Тихомировым, зав. лабораторией популяризации и пропаганды математики МИАН им. Стеклова Н. Н. Андреевым, бывшим зам. министра Минобрнауки Ю. М. Реморенко и другими лицами. Во всех беседах развернутая программа нашла сочувственное понимание. Указанным математикам я передал для обсуждения **комплекс** материалов [1, 3, 4, 5]. Этот же **комплекс** был передан в Отдел научно-методической поддержки сферы общего образования МГУ (И. Ю. Самоненко).

Задача обучения школьников проведению доказательств математических утверждений должна, по мнению автора этого текста, **найти своё место в концепции математического образования**.

II. Некоторые замечания к проектам концепции от 19.06.2013 г.

Вариант, предложенный МГУ

В проекте развернута многосторонняя система математического образования. В частности указаны этапы обучения, где важна “необходимость строгого доказательства утверждений для установления их истинности”. Этот вопрос связывается с важностью “особого внимания к изучению геометрии”, где “обилие идей, строгость рассуждений учат логически мыслить, развивают воображение, интуицию, творческие способности учащихся”. Однако эти возможности никак не увязываются с курсом “Алгебра и начала анализа”, название которого в предложенном проекте концепции вообще не упоминается.

Обойден вопрос о том, что основная масса учителей математики подготавливается в педвузах. Чувствуется, что авторы проекта относятся к этому с недоверием. Между тем система математических дисциплин, представленных в программе педвузов, немногим отличается от университетской. Дело в постановке учебного процесса в конкретном вузе. Нет спора, что положение за последние годы ухудшилось. Однако открытие педотделений при математических факультетах университетов положения не спасет. Здесь нужно преодолеть порочный круг: повышение требований ведет к снижению успеваемости, сокращению числа студентов, сокращению ставок, что вынуждает деканат требовать (обычно по умолчанию) правильной отчетности с вытекающими отсюда последствиями.

Не прописана четкая система повышения квалификации учителей. Между тем такая система существовала и справлялась со своими обязанностями. В каждом областном центре был свой институт повышения квалификации учителей, курирующий работу методистов по преподаванию математики в каждом районе. Такими методистами были, как правило, опытные учителя, реально помогавшие своим менее опытным коллегам. Этот опыт, думаю, надо использовать, быть может, повысив статус этих учреждений, например (подражая медикам), открыв отдельные институты (университеты) последипломного педагогического образования или соответствующие отделения при обычных вузах. У меня нет сведений, как работает система повышения квалификации учителей по России сейчас. Но когда я захотел рассказать окружным методистам по математике в Москве об открывшихся методических возможностях, связанных с изучением действительных чисел, то оказалось, что функции этих методистов изменились и они занимаются в основном регистрационной работой.

Сказанное – это то, что я хотел добавить, ознакомившись с концепцией (1). С остальным я полностью согласен и считаю разработанный проект важным для формирования целостной системы математического образования в стране.

Проект, представленный А. Л. Семеновым

Тексту материала предшествует подзаголовок “ключевые идеи” и это прямо соответствует его содержанию. Хотя здесь и не представлена структура целостной системы математического образования, но высказаны многочисленные очень важные положения и формулировки, которые непременно должны войти в окончательный вариант концепции математического образования. Очень интересным мне показался список показателей эффективности математического образования.

Все же в проекте (2) прослеживается тенденция, которой я хотел бы противостоять. Хотя к целям математического образования и отнесено *развитие способности к логическому мышлению*, но первым и единственным пунктом (имеющим отношение к математике) “Подготовки педагога, который будет заниматься с детьми математикой” поставлено “Решение задач”. Разумеется, учитель математики должен уметь решать задачи, но этим не может ограничиваться подготовка учителя математики в своей специальности. Изучение математики обладает, пожалуй, наибольшими возможностями приобщения учащихся к интеллектуальной культуре логического способа соединения знаний в систему и, следовательно, к более эффективному использованию знаний. В представленном материале нет ничего о роли и месте дедуктивного метода при изучении математики и соответствующей подготовке учителя.

Проект, представленный С. К. Смирновым

Проект (3) написан лаконично и четко. После отмеченного ранее, тут мне нечего добавить. Я полностью согласен со всем, что здесь написано. Мне особенно близким и интересным показался раздел 5.2 (Дошкольное и среднее образование).

Приложение 1

(Статья в журнале “Математика в школе”, 1996, № 3, с.33-34)

Математический анализ и общее среднее образование[1]

В.В. Цукерман (Москва)

Вопрос о включении элементов математического анализа в содержание общего среднего образования обсуждался в России еще в начале века. Ставилась задача приближения школьного математического образования к современному состоянию математической науки. Решение, однако, не было найдено. Положение в целом не изменилось до начала 70-х гг. нашего столетия.

Новый материал не укладывался в традиции школьного математического образования. Содержание курса математического анализа не позволяло сохранить достигнутое в средней школе сочетание доказательности и доступности. По этой причине поиску решения заведомо сложной проблемы, **как** излагать элементы анализа в средней школе, естественно, должно предшествовать объяснение того, **зачем** это вообще нужно делать. При этом ссылка на приближение школьной математики к современному состоянию науки явно недостаточна хотя бы потому, что классический анализ ныне отнюдь не фронт математической науки. Нужно объяснить, какой вклад в общую культуру современного образованного человека (быть может, даже чистого гуманитария) вносит знакомство с элементами математического анализа. И если этот вклад окажется значительным, тогда возникнет проблема ответа на вопрос **“как!”**.

Важнейшими понятиями анализа, обладающими вместе с тем огромной общекультурной значимостью, являются производная, интеграл (определенный интеграл) и дифференциальное уравнение. Они напрямую связаны с универсальными проблемами движения, развития, поисками характеристик сложных объектов, прогнозированием будущего. Вспомним, более столетия назад Лев Толстой в "Войне и мире" говорил о "дифференциале истории" и "интеграле истории". Великий писатель и мыслитель интуитивно уловил глубинную сущность анализа как обобщенную возможность получения локальных и глобальных характеристик текущих процессов. Остановимся на роли указанных трех понятий анализа более подробно.

Производная характеризует тенденцию изменения процесса, отнесенную к данному моменту времени или данной точке пространства. Сама необходимость и возможность характеризовать тенденцию изменения, например скорость, в данный момент времени отнюдь не самоочевидна. Ведь можно себе представить дело таким образом, что в данный момент двигающееся тело просто где-то находится и потому якобы нет смысла говорить о движении в данный момент времени, искать характеристику движения (скорость) в данный момент,

---

[1] Доклад на конференции “Norma-94” (2—6 сентября 1994, г. Лахти, Финляндия). Ранее опубликован в Research Report 141 University of Helsinki: Vitaly V. Tsuckerman. Calculus and general secondary education. Proceedings of the NORMA-94 conference in Lahti, 1994. Helsinki, 1995. P. 169—173.

поскольку путь, пройденный в данный момент времени, равен нулю, равна нулю и временная протяженность момента, а делить ноль на ноль, вычисляя скорость по обычным правилам, нельзя.

Приведенное рассуждение лежит в русле тех же идей, на которых древнегреческий философ Зенон основывал доказательство невозможности движения. Ведь если все моменты времени заняты тем, что тело где-то находится, то на собственно движение просто не останется времени. Разрешение парадокса состоит в том, что нельзя отрывать движение от "нахождения". В данный момент времени тело и движется, и где-то находится. Но если так, то нужно попытаться охарактеризовать быстроту движения в данный момент времени. Производная функции, описывающей движение, создает эту возможность (и реализует понятие мгновенной скорости).

Следует при этом иметь в виду, что производная при данном значении аргумента есть просто число, но так как производная определяется на некотором множестве значений аргумента, то на этом множестве она представляет собой уже функцию и производная от производной (вторая производная) характеризует собой как бы тенденцию второго порядка изменения процесса при данном значении аргумента. Таким образом, функция, имеющая производные разных порядков, способна описывать процесс, одновременно характеризуя мгновенные тенденции его изменения. Свойства функции оказываются связанными с ее производными. Теория дифференциального исчисления позволяет исследовать функцию (и, следовательно, процесс, описываемый этой функцией), вычисляя ее производную.

Понятие интеграла (определенного интеграла) служит инструментом получения суммарных характеристик неравномерных процессов[2]. Так, площадь прямоугольника, трапеции может быть вычислена прямым способом, но если ордината точки криволинейной трапеции зависит от ее абсциссы не по линейному закону, то для получения величины площади используется понятие интеграла. Точно так же, если в прямолинейном движении скорость (а следовательно, и мгновенная скорость) постоянна, то путь равен просто результату умножения затраченного времени на величину скорости. Если же мгновенная скорость не постоянна во времени, то для вычисления пути по известному закону изменения мгновенной скорости используется понятие интеграла и т. д.

Дифференциальное уравнение представляет собой соотношение между аргументом, значением функции (основными характеристиками процесса), производными до определенного порядка (т. е. тенденциями изменения процесса) для некоторого множества значений аргумента. Открытая Ньютоном форма записи законов природы в виде дифференциальных уравнений оказалась необыкновенно плодотворной. Ньютон одновременно указал способы решения этих уравнений, т. е. создал возможность извлекать глубокие выводы из открытых закономерностей, прогнозировать течение процессов во времени. Дифференциальные уравнения явились чрезвычайно эффективной формой для математического моделирования причинно-следственных связей реального мира. Это направление исследований получило столь широкое развитие, что к последней трети XIX в. стало казаться, что дифференциальные уравнения являются универсальной формой записи естественнонаучных закономерностей. И хотя дифференциальные уравнения потеряли свою монополию в описании законов природы, но и сейчас они являются исключительно мощным и эффективным способом исследования различных процессов.

Здесь в общей форме выражены те идеи математического анализа, ради усвоения которых и стоит вводить элементы анализа в содержание среднего образования. Эти идеи неотделимы от истории развития человеческой цивилизации. Математический анализ существует около трехсот лет. Если взять современный объем естественнонаучных и технических знаний, то доля в нем того, что было известно более трех веков назад, составляет едва ли сотые доли процента. Гигантское ускорение развития науки и техники за последние 300 лет неотделимо от продуктивного использования идей и методов математического анализа.

Сказанное выше не является откровением для тех, кто основательно изучил достаточно полный курс анализа. Вместе с тем такое прямое изложение сущности идей математического анализа отнюдь не типично для развернутых курсов этой дисциплины. Такие курсы обычно эмоционально весьма сдержанны. Усвоение общекультурного смысла идей анализа в них достигается опосредованно при глубоком изучении логически стройной теории и решении большого количества разнообразных задач, использующих эту теорию. Для школы такой метод недоступен, необходим иной путь, включающий формулировку гуманитарного содержания основных идей анализа в явном виде. По мнению автора этого текста, для целей общего образования другие вопросы анализа (кроме указанных выше) могут быть представлены в минимальном объеме, необходимом для достижения цельности изложения.

Легко заметить, что здесь уже совершен переход от вопроса **"зачем?"** к вопросу **"как?"**. В этой связи обратим внимание еще только на два момента, которые представляются достаточно обоснованными.

1) Важно иметь печатное пособие, базовым ядром которого были бы указанные выше вопросы анализа, а в целом оно должно представлять собой такое минимальное расширение базового ядра, чтобы стало доступно доказательное изложение теории.

2) Для того чтобы хотя бы для части учеников средней школы сохранить традиционную систему построения школьного курса математики, можно поступить следующим образом. На основных занятиях в школе все сколько-нибудь серьезные технические элементы доказательств опускаются, но формулируются как проблемы, требующие решения. У сильных учеников такой метод (а не замазывание трудностей) стимулирует интерес к предмету. Учеников приглашают освоить пропущенные доказательства или на специальных занятиях, или самостоятельно по книге, указанной в предыдущем абзаце. Это предъявляет существенные требования к ее доступности.

[2] В дальнейшем термин "интеграл" будет обозначать только определенный интеграл. Это соответствует истории возникновения понятия интеграла у Лейбница.

Приложение 2

Цукерман В.В.

Реформа А. Н. Колмогорова и школьное математическое образование сегодня[2]

Речь идет о курсе: "Алгебра и начала анализа". То что ныне составляет содержание соответствующего школьного предмета, лишенное понятия предела и содержательной теории, не отвечает этому названию.

В период, предшествующий реформе, положение с преподаванием математики в средней школе считается относительно благополучным. В педагогические институты поступали школьники, успешные в изучение математических предметов, уже в основном умевшие решать школьные математические задачи. В педвузах эти знания и умения подкреплялись и углублялись на кафедрах методики и педагогики. При этом глубокие математические дисциплины, входящие в программу педвузов, по-настоящему усваивались лишь незначительной частью студентов (по 50-ти летнему опыту автора — это 5-8%). Эти 5-8% выпускников педвузов далеко не всегда становились учителями школ, а находили иные сферы деятельности. Но и остальные выпускники могли, как правило, достаточно успешно работать в школе. Изъяны в усвоении дисциплин высшей математики не являлись серьёзной преградой работе учителя математики.

Реформа ввела в школьную программу элементы математического анализа, на фундаменте которого стало возможным взрывное развитие науки, технологии, промышленности за последние три столетия. Идеи анализа имеют и глубокое гуманитарное содержание, знакомство с которым важно для каждого образованного человека. Для проведения реформы требовалась иная квалификация учителя математики. Учителя, которые ранее могли легко обходиться без серьёзных знаний по высоким предметам педвузовского курса математики, оказались не в состоянии удовлетворительно вести учебную работу по вновь введенному предмету "Алгебра и начала анализа". Это, разумеется, не единственная причина неудачи реформы. Требование доступности не позволило в школьном учебнике провести доказательную линию изложения. Работать успешно по такому учебнику может только тот учитель, который сам владеет доказательным обоснованием излагаемого материала, видит характер трудностей того или иного сложного доказательства, может пояснить суть дела, указав на проблемы, связанные с пропущенным доказательством. Трудности проведения реформы привели к её выхолащиванию.

Решение проблемы видится в создании учебного пособия — книги, содержащей минимальное расширение школьной программы в таком объёме, чтобы стало возможным доказательное изложение теории. Этим материалом должен полностью владеть учитель. Изложение в такой книге должно быть достаточно доступным (уровень сложности не выше трудностей разбора олимпиадных задач), чтобы способные школьники, не удовлетворенные отсутствием обоснования того или иного математического утверждения, могли по указанию учителя восполнить пропущенное по этой книге. Этот принцип изложения был руководящим при написании книги [1] и в статьях [2,3,4,5,6].

Реформой была, по сути, поставлена грандиозная задача повышения математической культуры населения страны в целях её успешного развития. В частности, это задача содержательного ознакомления с ньютоновской концепцией математического естествознания. Идеи реформы не потеряли своей актуальности, но для их реализации в той или иной форме необходимы существенные изменения в системе подготовки учителей математики. Некоторые, связанные с этим, методические вопросы изложения материала рассматриваются в предлагаемом сообщении.

[2]Тезисы выступления на Второй научно-методической конференции: "Новые образовательные программы МГУ и школьное образование", 17 ноября 2012 г.

Тезисы опубликованы: Новые образовательные программы МГУ и школьное образование, ч.1, стр. 53-54, М., 2012.

Литература

1. Цукерман В.В. Действительные числа и основные элементарные функции. - М.: Издательство Икар, 2010.

2. Цукерман В.В. К вопросу о профессиональной компетентности учителя математики // Математика (Первое сентября). - 2012. - № 1. Приложения на CD-диске.

См. также http://gnpbu.ru/index.php?file=event2012-1.htm

3. Гераськина Е.В. Об ограниченности функции, непрерывной на отрезке // Математическое образование. - 2011. - № 2(58).

4. Гераськина Е.В., Цукерман В.В. Теорема Лагранжа — мощный инструмент исследования функции // Математическое образование. - 2011. - № 3-4(59-60).

5. Гераськина Е.В., Цукерман В.В. Интеграл и общее среднее образование: проблема и вариант её решения // Математическое образование. - 2002. - № 4(23).

6. Гераськина Е.В. Определённый интеграл в средней школе (вариант изучения темы, поурочные планирование) // Математика (Первое сентября). - 2003. - №№ 41,46. - 2004. - №№ 2,3,11,13.

Цукерман Виталий Владимирович,
Профессор кафедры Математики и физики
МГГУ им. М. А. Шолохова.

E-mail: tsuckerman@front.ru

Об одном приближении схемы гибели и размножения

В. В. Ивлев

Математическая модель, описываемая уравнениями схемы гибели и размножения, широко используется в прикладных науках: теории массового обслуживания, теории надежности. При большом числе состояний (уравнений) дискретная модель становится громоздкой, а значимость отдельных состояний несущественной. Предлагается непрерывный аналог дискретной системы уравнений, при этом последняя свертывается в одно уравнение в частных производных — уравнение Колмогорова.

В настоящее время существуют и разрабатываются системы и структуры, содержащие сотни и тысячи однотипных приборов, устройств. С позиций теории массового обслуживания — это многоканальные системы, каналы которые случайным образом загружаются или простаивают; в терминах теории надежности — это изделия, элементы которых выходят из строя и восстанавливаются.

Пусть прямые уравнения схемы гибели и размножения с отражающими экранами имеют вид:

$$\frac{\partial P_{i,n}(t)}{\partial t} = \lambda_{n-1}P_{i,n}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_{i,n}(t) + \mu_{n+1}P_{i,n+1}(t), \tag{1}$$

где $P_{i,n}(t)$ — вероятность нахождения системы массового обслуживания (СМО) в момент времени t в состоянии $E_{i,n}$ с n отказавшими элементами (занятыми каналами) при условии, что при $t=0$ СМО находилось в состоянии с i отказавшими элементами;

λ_n, μ_n — интенсивности переходов СМО из состояний $E_{i,n}$ и $E_{i,n+1}$ в состояния $E_{i,n+1}$ и $E_{i,n}$ соответственно;

$E_{i,0}$, $E_{i,N}$ — состояния отражающих экранов; $\mu_0 = \lambda_n = 0$, $n = \bar{0}, \bar{N}$.

В качестве первого шага, учитывая, что $N \gg 1$, заменим индексы i и n нормированными переменными $x = i(N+1)^{-1}$, $y = n(N+1)^{-1}$, $\Delta y = (N+1)^{-1}$. Тогда (1) может быть представлено в дифференциально-разностной форме.

$$\frac{\partial P(x,y,t)}{\partial t} = \lambda(y-\Delta y)P(x,y-\Delta y) - [\lambda(y)+\mu(y)]P(x,y,t) + \mu(y+\Delta y)P(x,y+\Delta y,t), \text{ где}$$

$$P(x,y,t) = P_{i,n}(t), \quad \lambda(y) = \lambda_n, \quad \mu(y) = \mu_n, \quad \Delta y = (N_n)^{-1}. \tag{2}$$

Прямой переход в (2) к пределу при $N \to \infty$ смысла не имеет, так как N хотя и большое, но конечное число.

Для построения непрерывного аналога рассмотрим другой марковский однородный процесс с дискретом в k раз меньшим, чем в (2), т.е.

$$\overline{\Delta y} = \Delta y \cdot k^{-1} \tag{3}$$

Рассмотрим теперь смену состояний в обоих процессах как одномерное движение двух точек-индикаторов на отрезке $[0;\,1]$ с дискретами (2) и (3).

Естественно требовать от обоих процессов выполнения условий эквивалентности: интенсивности $\bar{\lambda}(y)$ и $\bar{\mu}(y)$ должны быть таковы, чтобы математические ожидания перемещений ΔS и $\overline{\Delta S}$ точек-индикаторов в процессах за время Δt и дисперсии этих перемещений были равны, т.е.

$$M[\Delta S] = M[\overline{\Delta S}], \quad D[\Delta S] = D[\overline{\Delta S}] \tag{4}$$

Так как

$$M[\Delta S] = \frac{\mu(y) - \lambda(y)}{(N+1)}\Delta t, \quad M[\overline{\Delta S}] = -\frac{\mu(y) - \lambda(y)}{k(N+1)}\Delta t,$$

$$D[\Delta S] = \frac{\mu(y) + \lambda(y)}{(N+1)^2}\Delta t, \quad D[\overline{\Delta S}] = -\frac{\mu(y) + \lambda(y)}{k^2(N+1)^2}\Delta t,$$

то необходимо

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2}[k^2(\lambda + \mu) - k(\mu - \lambda)], \;\; \bar{\mu} = \frac{1}{2[k^3(\lambda + \mu) + k(\mu - \lambda)]}; \tag{5}$$

$\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, λ, μ — функции от y.

Уравнение (2) пригодно и для процесса-аналога с заменой $P(x,y,t)$ на $\bar{P}(x,y,t)$, $\lambda(y)$ на $\bar{\lambda}(y)$, $\mu(y)$ на $\bar{\mu}(y)$, Δy на $\overline{\Delta y} = k(N+1)^{-1}$.

Разложим с учетом сказанного правую часть (2) в ряд Тейлора относительно y и приращения $\overline{\Delta y} = kN^{-1}$ с учетом (5). Получим

$$\frac{\partial \bar{P}(x,y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}[a(y)\bar{P}(x,y,t)] + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}[b(y)\bar{P}(x,y,t)] -$$

$$-\frac{\partial^3}{\partial^3 y}[a(y)\bar{P}(x,y,t)]\frac{1}{3!k(N+1)} + \frac{\partial^4}{\partial^4 y}[b(y)\bar{P}(x,y,t)]\frac{1}{4!k^2(N+1)^2} + \dots, \tag{6}$$

$$\text{где } a(y) = \frac{\lambda(y) - \mu(y)}{(N+1)}, \quad b(y) = \left(\sqrt{2(N+1)}\right)^{-2}[\mu(y) + \lambda(y)]$$

Наконец, переходя к пределу при $k \to \infty$, получим прямое уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial \bar{P}(x,y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}[a(y)\bar{P}(x,y,t)] + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}[b(y)\bar{P}(x,y,t)]. \tag{7}$$

В теории диффузионных процессов (7) называют уравнением Планка, где $a(y)$ — коэффициент сноса (скорость точки-индикатора), $b(y)$ — коэффициент диффузии, связанный с дисперсией скорости $b(y) = \frac{1}{2}\sigma^2(y)$. В стационарном случае при $t \to \infty$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}[a(y)\bar{P}(y)] = \frac{\partial^2}{\partial^2 y}[b(y)\bar{P}(y)]. \tag{8}$$

Рассмотрим приложение (8) к теории надежности. По определению, стационарный коэффициент готовности системы равен

$$K(y) = \int_0^y \bar{P}(y)dy, \tag{9}$$

y — доля отказавших элементов, приводящая к отказу системы. Подставив (9) в (8), получим

$$a(y)\frac{\partial}{\partial y}K(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[b(y)\frac{\partial}{\partial y}K(y)\right] \tag{10}$$

Решение (1) должно удовлетворять граничными условиям $K(0) = 0$, $K(1) = 1$. С учетом этого

$$K(y) = \frac{\int_0^y e^{-\int \gamma(x)dx} dx}{\int_0^1 e^{-\int \gamma(x)dx} dx} \tag{11}$$

где $y = \dfrac{b'(y) - a'(y)}{b(y)} = \dfrac{\mu'(y) + \lambda'(y) + 2(N_n)(\mu(y) - d(y))}{\mu(y) + \lambda(y)}$.

Для простоты считается, что система выключается после отказа. В частном случае $\gamma = const$,

$$K(y) = \frac{1 - e^{-\gamma y}}{1 - e^{-\gamma}}.$$

Случай отдельных видов резервирования и наличия очередей читатель при желании может получить самостоятельно.

В общем случае $K(y)$ из (10) есть интегральная функция распределения доли отказов элементов (занятых каналов), а $\bar{p}(y)$, равная $\bar{p}(y) = \frac{d}{dy}K(y)$ — плотность распределения для y.

Ряд вероятностных и средних характеристик надежности и СМО можно получить также из обратных уравнений схемы гибели и размножения.

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,y,t) = \lambda(x)P(x + \Delta x, y, t) - [\lambda(x) + \mu(x)]P(x,y,t) + \mu(x)P(x - \Delta x, y, t). \tag{12}$$

Здесь решения являются функциями от x при фиксированном y. Повторяя ту же процедуру предельного перехода, приходим к обратному уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{P}(x,y,t) = a(x)\frac{\partial}{\partial x}\bar{P}(x,y,t) + b(x)\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\bar{P}(x,y,t). \tag{13}$$

Из (13) для стационарного случая в [3] получен ряд характеристик систем — средние времена перехода системы из состояния x в состояние y, где y — поглощающий барьер, моменты распределений времени перехода и др.

Планируется детально рассмотреть эти вопросы в дальнейшем. Сюда же относится и проблема точности такого приближения.

Литература

1. Ивлев В.В. Использование диффузионных процессов при анализе надежности // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. - М., 1983 г.

2. Ивлев В.В. Непрерывные аналоги дискретных структур / Всероссийская научно-практическая конференция. - М. МФЮА, 2009 г.

3. Ивлев В.В. Диффузионные модели в теории надежности. - М.: Знание, 1983 г.

Ивлев Валерий Васильевич,
профессор кафедры высшей математики
Московского Государственного Гуманитарного
Университета им. М.А.Шолохова,
доктор технических наук.

О некоторых «треугольных» кониках (окончание)

Алексей Мякишев

Окончание статьи, в которой изучаются коники, проходящие через точки, выбранные специальным образом относительно данного треугольника. Первая часть статьи напечатана в предыдущем номере журнала.

Конец доказательства в тексте помечается значком □. Для котангенса используется международное обозначение cot, в отличие от принятого в России ctg.

§ 6. Равноквадратная коника

Заменим равные окружности Пааша на пары одинаковых квадратов, вписанных в углы треугольника — так, что каждая пара квадратов имеет общую сторону[1].

Оказывается, тогда имеет место теорема, во многом аналогичная теоремам 5.1 и 5.2.

Теорема 6.1. Все шесть точек, расположенных на сторонах (или их продолжениях) исходного треугольника и являющихся вершинами соответствующих пар одинаковых квадратов (но отличные от общих вершин пары!) — всегда лежат на одной конике.

Центр коники (всегда конечный) есть точка $X(590)$ в ETC с барицентрическими координатами вида

$$2 + \cot B + \cot C : 2 + \cot C + \cot A : 2 + \cot A + \cot B = 4S + a^2 : 4S + b^2 : 4S + c^2.$$

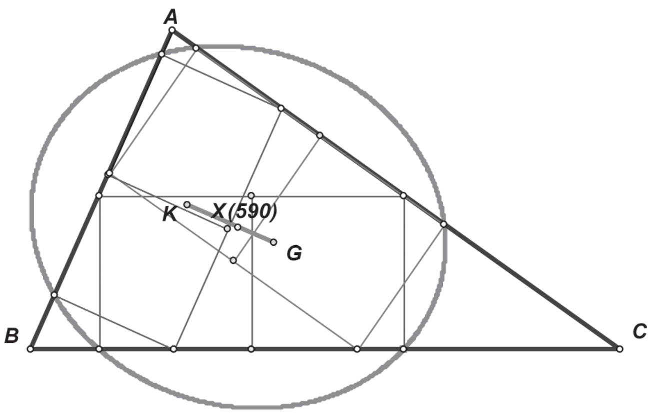


Рис. 15.

Она делит отрезок GK[2] в следующем отношении: $\frac{GX_{590}}{KX_{590}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{S}$.

Тип коники определяется углами треугольника:

- если все его углы меньше $\frac{3\pi}{4}$ (135^0), то получается *эллипс* (рис. 16);
- если найдется угол, *больший* $\frac{3\pi}{4}$, то получается гипербола (рис. 17);
- если же один из углов в точности *равен* $\frac{3\pi}{4}$, то коника вырождается в пару параллельных прямых[3] (рис. 18).

[1] Если треугольник тупоугольный, то некоторые вершины оснований двух пар одинаковых квадратов обязательно попадут на продолжения сторон треугольника — а именно, квадратов с основаниями на прямых, содержащих стороны треугольника и вершину тупого угла.

[2] K — точка Лемуана ($X(6)$ у Кимберлинга). Является изогонально сопряженной центроиду G — см. [1]–[3], [6]. Прямую GK иногда называют осью Лемуана.

[3] Причем две пары равных квадратов имеют общую вершину, совпадающую с вершиной тупого угла. Через нее же проходит “серединная” параллель, содержащая точку X (590).

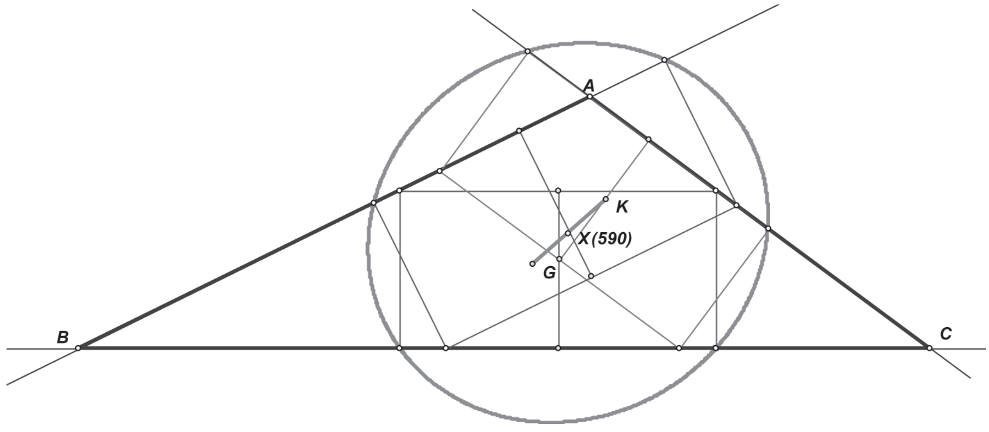


Рис. 16.

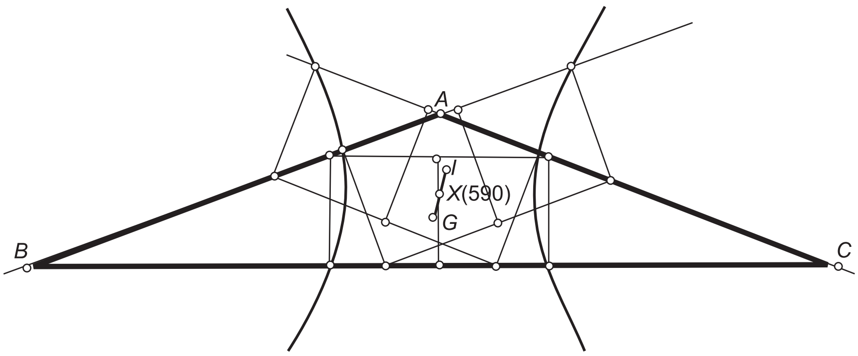


Рис. 17.

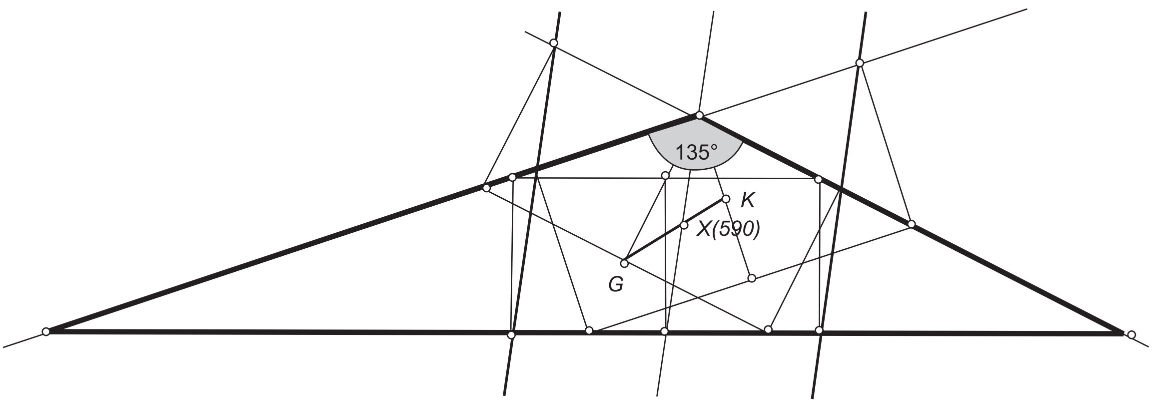


Рис. 18.

Доказательства всех этих утверждений почти дословно повторяют доказательства **теорем 5.1** и **5.2** (а также **замечания 5.2**).

Выкладки практически полностью аналогичны, нужно только всюду поменять котангенсы половинных углов на «просто» их котангенсы: $\cot\frac{A}{2} \;\to\; \cot A, \cot\frac{B}{2} \;\to\; \cot B, \cot\frac{C}{2} \;\to$ $\to \cot C$.

Уравнение коники запишется тогда в виде

$$d(2+d)x^2 + e(2+e)y^2 + f(2+f)z^2 - 2(2+e+f+ef)zy - \\ - 2(2+f+d+fd)2(2+d+e+de)yx = 0,$$

(где $d = \cot A, e = \cot B$ и $f = \cot C$). Вид коники будет определяться знаком выражения $\Phi = 16(1+d)(1+e)(1+f)(3+(d+e+f))$.

И, например, при $d = -1$ (т.е. $\cot A = -1, A = \frac{3}{\pi}4$) коника распадется на две параллельные прямые $x - ey + (f+2)z = 0$ и $x + (e+2)y - fz = 0$. И т.д. и т.п. $\square$

Замечание 6.1. «Квадратный» бонус — гипербола Киперта!

Как мы видели, в конфигурации с равными окружностями прямые, соединяющие вершины исходного треугольника с противоположными точками касания пары окружностей, *конкурентны.*

А как же обстоит дело в *«равноквадратном»* аналоге? Касание ведь в этом случае распространяется на *все* общие точки общих сторон каждой пары.

Прежде всего, очевидно, что тройка прямых, соединяющих вершины треугольника с противолежащими им «верхними» точками касания, пересекается в его центроиде G.

Несложно также показать (стороны квадрата, все необходимые барицентрические координаты тривиально вычисляются через углы данного треугольник), что конкурентными будут еще две тройки прямых — одна из них соединяет вершины с «нижними» точками (и точкой пересечения будет $X(485)$ с координатами

$$\frac{\sin A}{\sin A+\cos A}:\frac{\sin B}{\sin B+\cos B}:\frac{\sin C}{\sin C+\cos C}=$$

$$\sin A\csc\left(A+\frac{\pi}{4}\right):\sin B\csc\left(B+\frac{\pi}{4}\right):\sin C\csc\left(C+\frac{\pi}{4}\right).$$

Это — так называемая точка Вектена (Vecten point). Ее еще можно получить, построив на сторонах треугольника квадраты вовне, а затем соединить их центры с противоположными вершинами.)

Другая же проходит через вершины и *середины* противолежащих общих сторон соответствующих пар квадратов (и точкой конкурентности здесь окажется $X(3316)$ с координатами $\frac{\sin A}{2\sin A+\cos A}:\frac{\sin B}{2\sin B+\cos B}:\frac{\sin C}{2\sin C+\cos C}$. (Мы оставляем все эти несложные выкладки читателю) (рис. 19).

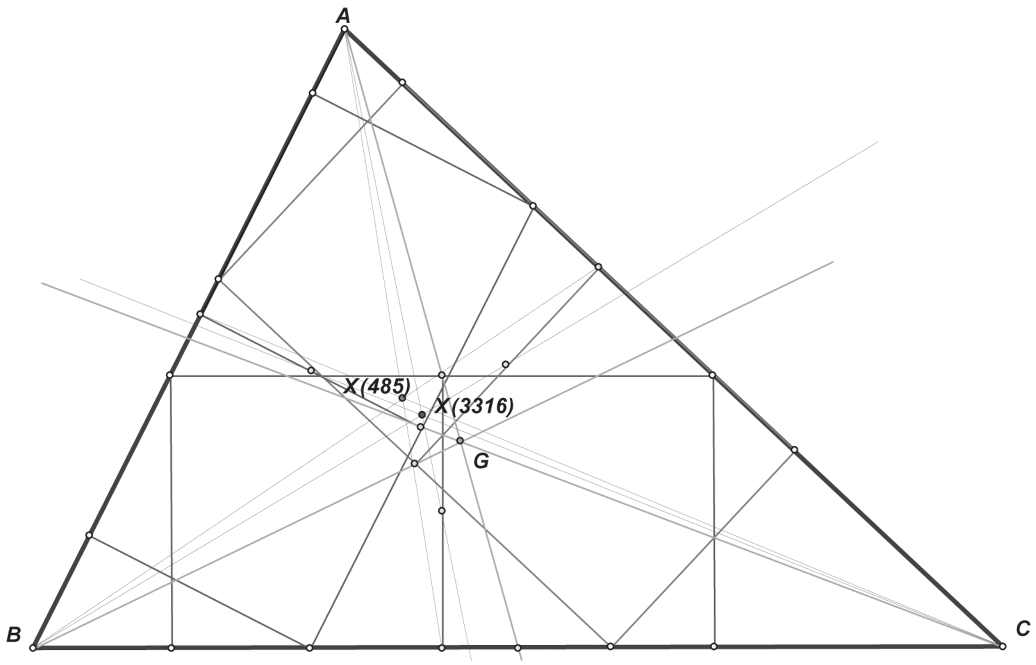


Рис. 19.

Тут-то и родилась гипотеза — а что, если существует *бесконечное множество* точек конкурентности? Только надо сообразить, по какому правилу следует задавать тройку точек на смежных сторонах. Первое, что пришло в голову (и как оказалось, пришло довольно удачно) — станем выбирать эти точки *на прямых, содержащих смежные стороны пар,* так, чтобы отрезки с началом в нижних точках общих оснований и концом в выбранной точке *имели бы длину, пропорциональную соответствующей стороне пары одинаковых квадратов, с одним и тем же* *коэффициентом пропорциональности для всех трех отрезков* (причем все три отрезка откладываются одновременно либо вовне, либо вовнутрь треугольника).

Компьютер эту догадку подтвердил полностью, и даже *более чем.*

Согласно проницательной железяке — оказалось, что не только все такие тройки прямых пресекаются, но и притом «заметают» классическое ГМТ (по английскому совсем коротко — *locus*) — а именно, т.н. *гиперболу Киперта — это гипербола, описанная около исходного треугольника ABC, и содержащая его центроид G и ортоцентр H* (рис. 20).

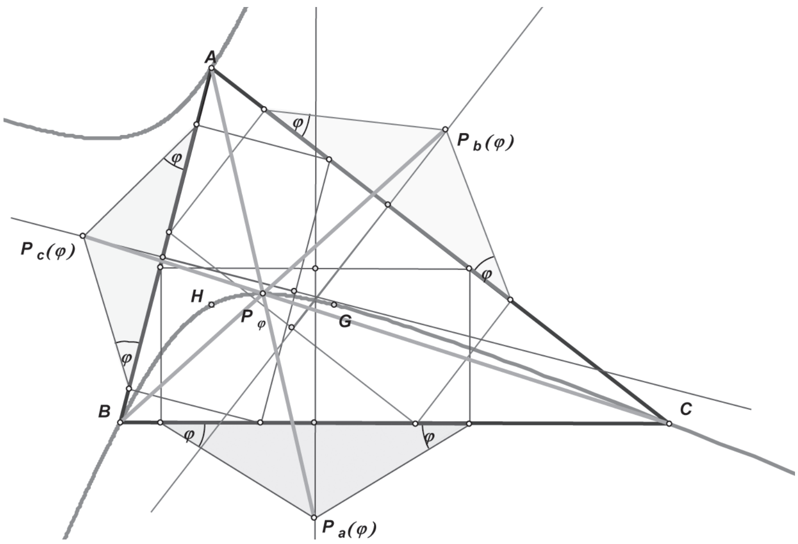


Рис. 20.

Поначалу этот факт (назовем его **утверждение 6.1**) застал меня несколько врасплох, но потом я обратил внимание на следующие два обстоятельства, в свете которых всё стало выглядеть довольно естественно.

Прежде всего заметим, что наш выбор трех точек на общих прямых в «равноквадратной» конфигурации, очевидно, эквивалентен рассмотрению вершин трех равнобедренных треугольников, построенных на смежных сторонах соответствующих пар, как на основаниях, с одинаковыми при них углами φ $(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$, положительным значениям угла соответствует «внешняя» вершина, а отрицательным — «внутренняя». Предельному значению $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ соответствует ортоцентр H — поскольку вершины равнобедренных треугольников тогда уходят на бесконечность и «обращаются» — с проективных позиций — в бесконечно удаленные точки соответствующих высот.

А предельному же значению $\varphi = 0$ соответствует, как следует из вышесказанного, точка Вектема $X(485)$.

Но и с гиперболой Киперта дела примерно такие же.

Вот ее схожее описание посредством так называемых *перспекторов Киперта*

Утверждение 6.2. Рассмотрим вершины $P_a(\varphi), P_b(\varphi), P_c(\varphi)$ трех равнобедренных треугольников, построенных на сторонах исходного треугольника ABC, как на основаниях, с одинаковыми при них углами $\varphi(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$, положительным значениям угла соответствует «внешняя» вершина, а отрицательным — «внутренняя» (рис. 21).

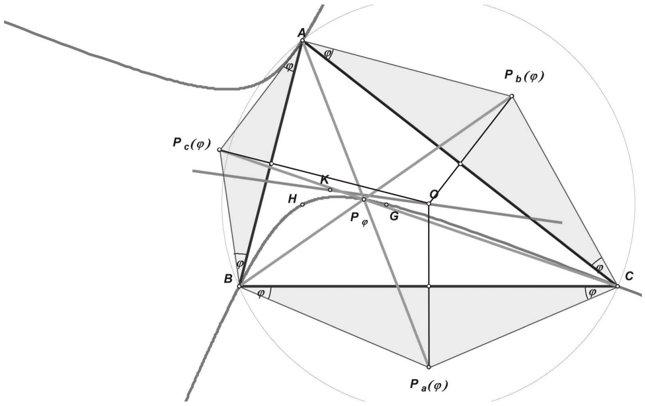


Рис. 21.

Тогда прямые $AP_a(\varphi), BP_b(\varphi), CP_c(\varphi)$ всегда пересекаются в некоторых точках P_φ, и все такие точки образуют описанную около треугольника ABC гиперболу, проходящую через ортоцентр H и центроид G. Эта гипербола является *изогональным* образом прямой OK (так называемой *оси Брокара*).

Итак, аналогии просматриваются — но все же пока остается неясным и не доказанным совпадение и даже существование обоих ГМТ (перспекторов Киперта — и «равноквадратичных» — т.е. пока что мы не привели еще доказательств **утверждений 6.1** и **6.2**)

Ниже мы эти пробелы восполним, но прежде перечислим еще некоторые замечательные свойства гиперболы Киперта и вообще описанных коник без доказательств, просто из любви, как говорится, к чистому искусству. (Если кого-то из читателей это заинтересует — все необходимые материалы имеются в [1], [2], [6], [8], [9]. В особенности обратите внимание на [1] и [8]. Помимо всего прочего, там приведено чисто геометрическое доказательство **утверждения 6.2**, основанное на одной мощной теореме — так называемой *теореме Сонда.* Вероятно, с ее помощью можно доказать геометрически и **утверждение 6.1** — и мы очень рекомендуем попытаться это сделать).

Итак, имеют место быть:

Факт 6.1. Всякая описанная около треугольника коника есть изогональный образ некоторой прямой (если эта прямая пересекает описанную окружность в двух точках — то после преобразования получим гиперболу; если касается — параболу; если пересечений нет — то эллипс. Что связано с известным свойством описанной окружности — она и только она переходит при изогональном сопряжении в бесконечно удаленную прямую).

Факт 6.2. Если описанная коника содержит ортоцентр H, то она представляет собой *равностороннюю гиперболу* (т.е. *асимптоты* ее *перпендикулярны*), а центр лежит на *окружности Эйлера* (она же — *девяти точек*).

(А так как гипербола Киперта ортоцентр содержит, то указанное только что свойство справедливо и для нее.)

Факт 6.3. Четвертой точкой пересечения гиперболы Киперта с описанной окружностью является точка $X\,(98)$ — *точка Тарри* (*Tarry point).*

Факт 6.4. Асимптоты гиперболы Киперта (естественно, пересекающиеся в ее центре) есть *прямые Симсона–Валлиса*[4], порожденные точками пересечения оси Брокара OK с описанной окружностью.

Факт 6.5. Центр гиперболы Киперта есть также точка пересечения окружности Эйлера и окружности, описанной около подерного треугольника центроида G — из двух точек пересечения это та, которая ближе расположена к ортоцентру H.

[4] Если опускать из некоторой точки P перпендикуляры на прямые, содержащие стороны треугольника ABC, то их основания служат вершинами нового треугольника, который называют педальным (или подерным) треугольником точки P относительно треугольника ABC. Треугольник вырождается в отрезок тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной около ABC окружности. А прямые, эти отрезки содержащие, и называются прямыми Симсона–Валлиса точки P.

Факт 6.6. Гипербола Киперта задается в барицентрических координатах следующим уравнением:

$$\left(b^2-c^2\right)yz+\left(c^2-a^2\right)zx+\left(a^2-b^2\right)xy=0.$$

Впечатляет, не правда ли (рис. 22)?

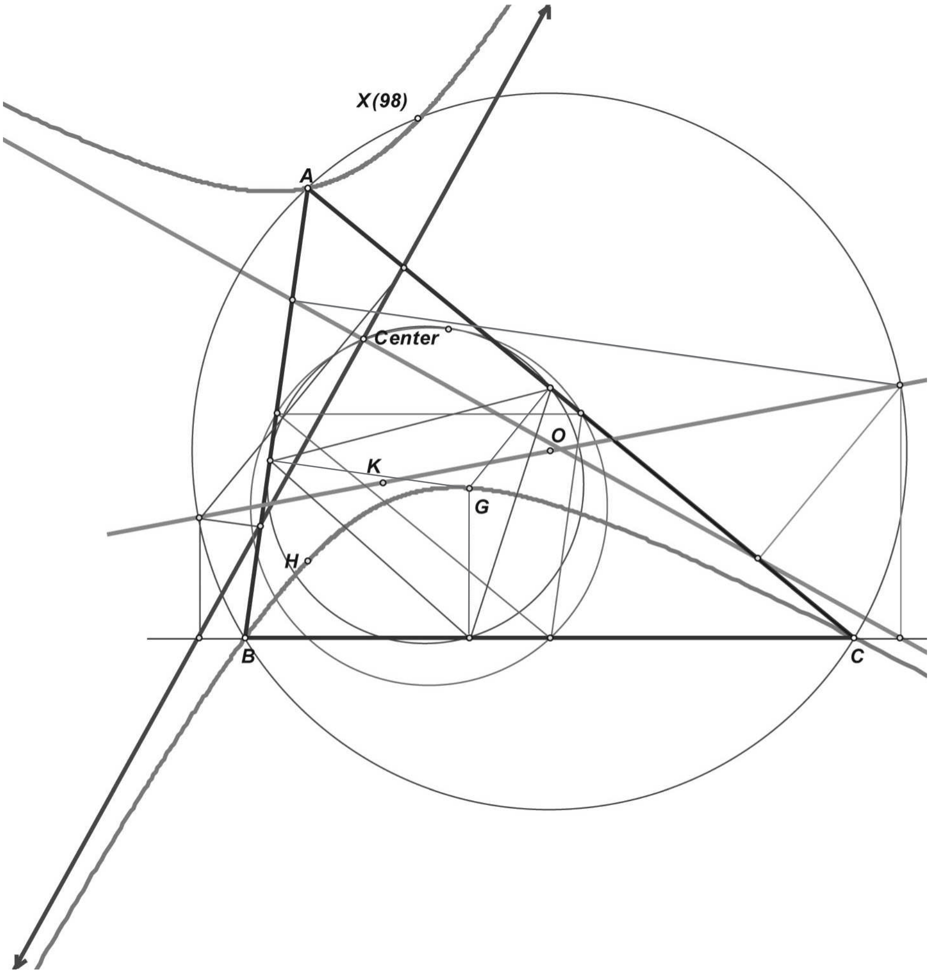


Рис. 22.

И мы теперь, с чистой совестью, переходим к обещанным доказательствам — оба они носят вычислительный характер и используют так называемые *обозначения Конвея*. Поэтому сначала несколько слов о них.

Замечание 6.2 (Обозначения Конвея и некоторые их свойства). В конце прошлого века выдающийся математик Джон Конвей ввел в элементарную геометрию следующий символ: $S_\theta \underset{def}{=} 2S_{ABC}\cdot\cot\theta$, где, как обычно, S_{ABC} — площадь данного треугольника ABC, а θ — некоторый произвольный угол. При этом произведение двух (и т.д.) символов обозначаются так: $S_\theta\cdot S_\varphi \underset{def}{=} S_{\theta\varphi}$.

Оказалось, что нотация Конвея буквально «заточена» под конструкции, связанные с построением треугольников на сторонах данного. Перечислим основные свойства символов Конвея.

1) $S_A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$; $S_B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$; $S_C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$.

   Действительно, $S_A=2S\cdot\frac{\cos A}{\sin A}=2S\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{bc}{2S}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$ (из теоремы косинусов и формулы площади треугольника «половина произведения сторон на синус угла между ними» — где, как обычно, A,B,C и a,b,c — углы и стороны произвольного треугольника ABC).

2) $S_B + S_C = a^2; S_C + S_A = b^2; S_C + S_A = c^2$ (сразу следует из предыдущего); и тогда еще $S_A + S_B + S_C = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

3) $S_{BC} + S_{CA} + S_{AB} = 4S^2$ (основано на легко проверяемом тождестве, справедливом в любом треугольнике: $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$).

4) Координаты ортоцентра H $(\tan A : \tan B : \tan C)$ и изогонально ему сопряженного центра описанной окружности O $\left(a^2 \cot A : b^2 \cot B : c^2 \cot C\right)$ в символах Конвея примут вид: $H = \frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} = S_{BC} : S_{CA} : S_{AB}$ (и суммарная масса координат, если использовать их правую форму записи, есть $4S^2$, по свойству 3); $O = a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C = (S_B + S_C) S_A : (S_C + S_A) S_B : (S_C + S_A) S_B$ (по свойству 2) — и в такой форме сумма координат равна, понятно, $2(S_{BC} + S_{CA} + S_{AB}) = 8S^2$.

5) *Формула Конвея.* Построим на стороне BC треугольника ABC некоторый треугольник BP_aC и пусть $\angle CBP_a = \beta, \angle BCP_a = \gamma$ $(-\frac{\pi}{2} \leq \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$, причем оба угла *ориентированные*: угол β положителен или отрицателен в зависимости от того, противоположны или совпадают направления обхода вершин треугольников CBP_a и CBA. Аналогично, угол γ положителен или отрицателен в зависимости от того, противоположны или нет направления обхода вершин треугольников BCP_a и BCA).

   Тогда координаты новой вершины следующие: $P_a = -a^2 : S_C + S_\gamma : S_B + S_\beta$ (рис. 23).

Доказательство: Как известно, барицентрические координаты произвольной точки P можно рассматривать как *ориентируемые* площади соответствующих треугольников: $P_a = S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP}$ (перед площадью ставится знак «плюс», если соответствующий треугольник ориентирован *так же*, как исходный треугольник ABC, если же ориентации *противоположны*, то ставится «минус» — см. [2], [6], [10]).

Таким образом, для случая, изображенного на рисунке[5], углы β, γ положительны, а в тройке площадей отрицательной будет первая.

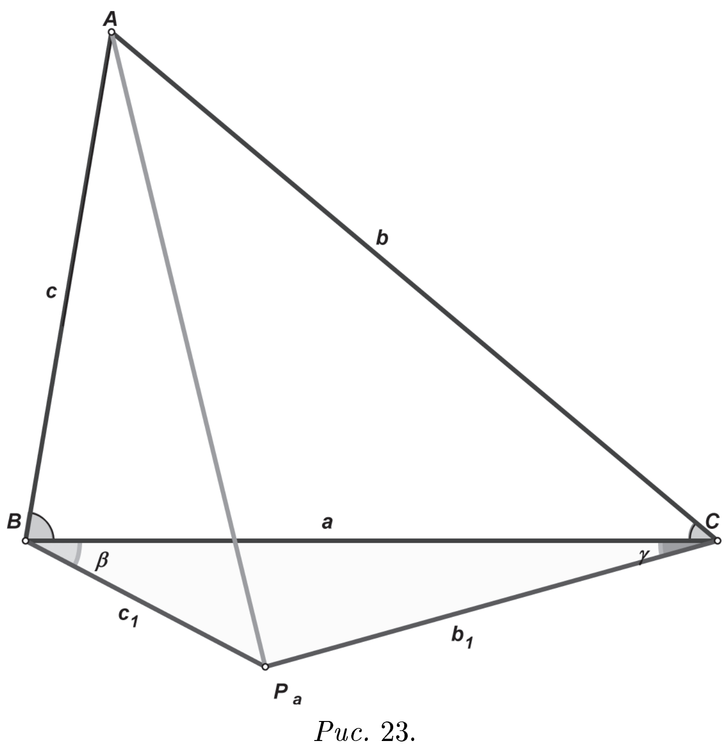


Рис. 23.

[5] Остальные разбираются аналогично — и, разумеется, результат не изменится.

Таким образом, $P_a = -\frac{1}{2}a \cdot c_1 \cdot \sin\beta : \frac{1}{2}b \cdot b_1 \cdot \sin(\gamma + C) : \frac{1}{2}c \cdot c_1 \cdot \sin(\beta + B) =$(применяем далее формулу суммы синусов, а также используем *однородность* координат)

$$= -a \cdot c_1 \cdot \sin\beta : b \cdot b_1 \cdot (\sin\gamma\cos C + \sin C\cos\gamma) : c \cdot c_1 \cdot (\sin\beta\cos B + \sin B\cos\beta).$$

Теперь умножим все координаты на $\frac{a}{c_1 \cdot \sin\beta}$ =(по теореме синусов) $= \frac{a}{b_1 \cdot \sin\gamma}$, после чего первая координата сразу примет искомый вид: $-a^2$. А со второй произойдут следующие метаморфозы:

$$\frac{a \cdot b \cdot b_1 \cdot (\sin\gamma\cos C + \sin C\cos\gamma)}{b_1 \cdot \sin\gamma} = (ab\cos C + ab\sin C)\cot\gamma = (ab\sin C)\cot C + (ab\sin C)\cot\gamma =$$

$$2S\cot C + 2S\cot\gamma = S_C + S_\gamma.$$

И, точно так же, третья предстанет как сумма $S_B + S_\beta$[6].□

С помощью формулы Конвея мы теперь быстренько докажем оба наших утверждения, начав со второго.

Доказательство **утверждения 6.2.** Действительно, воспользовавшись формулой Конвея, сразу найдем координаты вершин равнобедренных треугольников:

$$P_a(\varphi) = -a^2 : S_C + S_\varphi : S_B + S_\varphi;$$
$$P_b(\varphi) = S_C + S_\varphi : -b^2 : S_A + S_\varphi;$$
$$P_c(\varphi) = S_B + S_\varphi : S_A + S_\varphi : -c^2$$

(последние две координаты получаются из первой соответствующими циклическими сдвигами).

Поскольку уравнение прямой, проходящей через две точки, может быть записано в виде $\begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$, т.е. $(q_1r_2 - q_1r_2)\,p + (p_2r_1 - p_1r_2)\,q + (p_1q_2 - p_2q_1)\,r = 0$ (см. [2], [6], [10]), то уравнение прямой $AP_a(\varphi)$ запишется, как $\begin{vmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \end{vmatrix} = 0$ и прямая будет иметь коэффициенты $0 : -r_1 : q_1$. Коэффициенты прямой $BP_b(\varphi)$ получаются из предыдущих циклическими сдвигами, в результате которых возникает тройка $r_2 : 0 : -p_2$.

Координаты точки пересечения двух прямых с известными уравнениями связаны все с тем же определителем $\begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$, только две последние его строки — это уже коэффициенты прямых, а не координаты точек[7] (см. [2], [6], [10]).

В данном случае, получаем, очевидно, такие координаты:

$$P_{a,b}(\varphi) = \begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & -r_1 & q_1 \\ r_2 & 0 & -p_2 \end{vmatrix} = r_1p_2 : q_1r_2 : r_1r_2 =$$
$$= (S_B + S_\varphi)(S_C + S_\varphi) : (S_C + S_\varphi)(S_A + S_\varphi) : (S_B + S_\varphi)(S_A + S_\varphi) =$$
$$= \frac{1}{S_A + S_\varphi} : \frac{1}{S_B + S_\varphi} : \frac{1}{S_C + S_\varphi}.$$

[6]Совершая аналогичные преобразования, знаменатель исходной дроби $b_1 \cdot \sin\gamma$ заменять на $b_1 \cdot \sin\gamma$ уже нет необходимости.

[7]А одинаковость определителей, задающих уравнение прямой, проходящей через пару точек, и координаты точки пересечения двух прямых — есть ни что иное, как очередное проявление великого принципа проективной двойственности — см. [1], [2].

Как видим, координаты выдерживают циклические сдвиги — что, конечно, может означать лишь одно: две другие точки пересечения соответствующих пар прямых, т.е. точки $P_{b,c}(\varphi)$ и $P_{c,a}(\varphi)$ — имеют в точности такие же координаты. Тем самым, существование перспекторов Киперта доказано:

прямые $AP_a(\varphi), BP_b(\varphi), CP_c(\varphi)$ при всех значениях φ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$ пересекаются в некоторых точках $P_\varphi = \frac{1}{S_A+S_\varphi} : \frac{1}{S_B+S_\varphi} : \frac{1}{S_C+S_\varphi}$.

Причем, предельному значению $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ соответствует ортоцентр H, предельному же значению $\varphi = 0$ — очевидно, центроид G.

Наконец, рассмотрим множество точек, *изогонально сопряженных* точкам P_φ:

$P_\varphi^l = a^2\left(S_A + S_\varphi\right) : b^2\left(S_B + S_\varphi\right) : c^2\left(S_B + S_\varphi\right)$. Множество это есть не что иное, как *некая прямая*, заданная *параметрически*[8]: $p = a^2S_A + a^2t : q = b^2S_B + b^2t : c^2S_B + c^2t$, где параметр $t = S_\varphi = 2S\cot\varphi$ принимает все значения на интервале $(-\infty; ; +\infty)$. Можно даже считать, что t обращается в бесконечность при $\varphi = 0$. Прямая эта при $t = 0$ проходит через точку $O = a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C$ — центр описанной около исходного треугольника ABC окружности; а при $t = \infty$ — через точку Лемуана $K = a^2 : b^2 : c^2$ — т.е. является осью Брокара треугольника ABC.

Стало быть, множество перспекторов Киперта является изогональным образом прямой OK, и, значит (по **Факту 6.1**), и на самом деле заметает описанную около треугольника ABC *гиперболу*. $\square$

Доказательство **утверждения 6.1.** Вернемся к началу — т.е. к «равноквадратной» конфигурации. Введем обозначения, как показаны на рисунке (рис. 24).

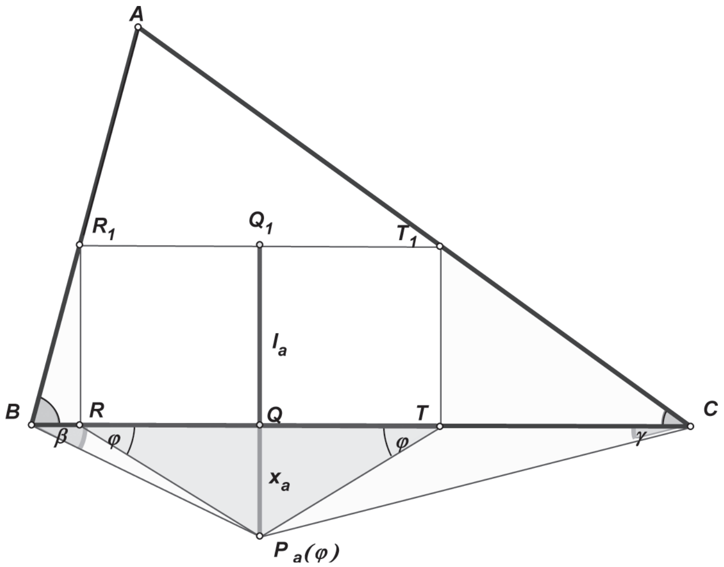


Рис. 24.

Доказательство полностью аналогично доказательству **утверждения 6.2**. Согласно формуле Конвея,

$$P_a(\varphi) = -a^2 : S_C + S_\gamma : S_B + S_\beta;$$

Но

$$S_\beta = 2S\cot\beta = 2S\left(\frac{BR + RQ}{QP_a(\varphi)}\right) = 2S\left(\frac{l_a\cot B + l_a}{x_a}\right) = (\text{поскольку } \frac{l_a}{x_a} = \cot\varphi) =$$

[8]Несложно показать, что любую прямую, проходящую через точки $P_1\left(x_1 : y_1 : z_1\right)$ и $P_2\left(x_2 : y_2 : z_2\right)$ можно представить параметрически в виде $x = x_1 + x_2t : y = y_1 + y_2t : z = z_1 + z_2t$. Например, это следует из того, что определитель, составленный из этих трех точек (двух фиксированных и переменной), обращается в нуль, поскольку «переменная» строка является линейной комбинацией «фиксированных». И при $t = 0$ получим точку P_1, а при $t = \infty$ — P_2 . Ведь если разделить на t все координаты, то возникнет точка $x_2 + \frac{x_1}{t} : y_2 + \frac{y_1}{t} : z_2 + \frac{z_1}{t}$, которая при $t \to \infty$ в пределе перейдет в точку P_2 .

$$2S\cot B\cdot\cot\varphi + 2S\cot\varphi = \frac{S_B\cdot S_\varphi}{2S} + S_\varphi.$$

И, точно так же, $S_\gamma = \frac{S_C\cdot S_\varphi}{2S} + S_\varphi$.

Значит, $P_a(\varphi) = -a^2\cdot 2S : 2S\cdot S_C + S_\varphi\,(2S+S_C) : 2S\cdot S_B + S_\varphi\,(2S+S_B)$.

Другие две получаются циклическими сдвигами:

$$P_b(\varphi) = 2S\cdot S_C + S_\varphi\,(2S+S_C) : -b^2\cdot 2S : 2S\cdot S_A + S_\varphi\,(2S+S_A),$$
$$P_c(\varphi) = 2S\cdot S_B + S_\varphi\,(2S+S_B) : 2S\cdot S_A + S_\varphi\,(2S+S_A) : -c^2\cdot 2S.$$

Совершив затем, след в след и шаг в шаг, действия, подробно описанные при доказательстве предыдущего утверждения, получим, что прямые $AP_a(\varphi), BP_b(\varphi), CP_c(\varphi)$ при всех значениях $\varphi(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$ пересекаются в некоторых точках

$$P_\varphi = \frac{1}{2S\cdot S_A + S_\varphi\,(2S+S_A)} : \frac{1}{2S\cdot S_B + S_\varphi\,(2S+S_B)} : \frac{1}{2S\cdot S_C + S_\varphi\,(2S+S_C)}.$$

Тогда множество точек, *изогонально сопряженных* точкам P_φ, точки P_φ^l — образуют прямую с параметрическим уравнением $p = 2S\cdot S_A\cdot a^2 + a^2\,(2S+S_A)\,t$: $q = 2S\cdot S_B\cdot b^2 + b^2\,(2S+S_B)\,t$: $r = 2S\cdot S_C\cdot c^2 + c^2\,(2S+S_C)\,t$.

При $t=0$ получаем точку $O = a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C$ (сократив на общий множитель $2S$) — центр описанной около исходного треугольника ABC окружности; а при $t=\infty$ — некую точку P с координатами $2S\cdot a^2 + S_A{\cdot}a^2 : 2S\cdot b^2 + S_B{\cdot}b^2 : 2S\cdot c^2 + S_C{\cdot}c^2$, которые естественным образом разбиваются на две подсистемы, задающие точки $O = a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C$ (с суммарной массой $8S^2$, по свойству 4) символов Конвея) и точку Лемуана $K = 2S\cdot a^2 : 2S\cdot b^2 : 2S\cdot c^2$ (с суммарной массой $2S(a^2+b^2+c^2)$).

Из правила рычага тогда вытекает, что точка P лежит внутри отрезка OK (т.е. на *оси Брокара*) и делит его в отношении $\frac{OP}{KP} = \frac{1}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{S}$.

Таким образом, множество «равноквадратичных» перспекторов есть также изогональный образ прямой OK, и, значит (по **утверждению 6.2**) действительно представляет собою *гиперболу Киперта.* □

§ 7. Коники бывают не всегда

Все вышеприведенные конструкции невольно наводят на мысль о том, что *любая конфигурация,* подчиненная тем или иным *законам симметрии* и порождающая 6 точек, связанных с треугольником и расположенных попарно на прямых, содержащих его стороны, *всегда задает* некоторую *конику*, через них проходящую.

Увы, это совершенно не соответствует действительности — жизнь, как и положено, устроена не так просто, как порой хотелось бы.

Приведем один пример, развеивающий описанную иллюзию.

Речь пойдет о трех окружностях, вписанных в углы треугольника и попарно касающихся друг друга — так называемых *окружностях Мальфатти.*

Рассмотрим 6 точек $B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c$, в которых эти окружности касаются сторон треугольника (рис. 25).

Кажется, куда уж симметричней! — своею симметрией данная конструкция не может не радовать глаз человека, даже далекого от геометрии. И потому у нас и тени сомнений не возникло относительно принадлежности этих точек некоему эллипсу — тем более изготовленный на скорую руку рисунок в *Живой Геометрии* наше предположение, вроде бы, подтвердил.

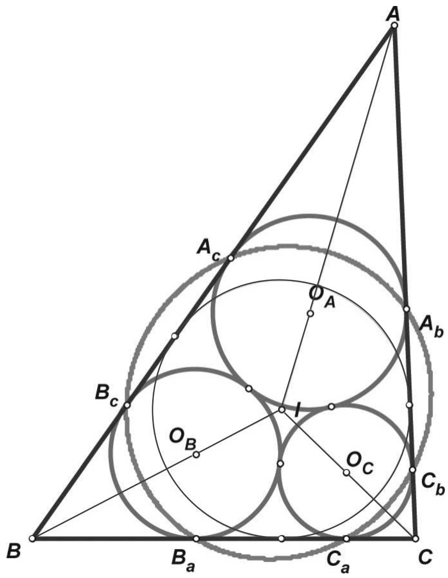


Рис. 25.

$BC_a = 5{,}52378$ см, $CA_b = 4{,}04904$ см, $AB_c = 8{,}19303$ см, $BC_a \cdot CA_b \cdot AB_c = 183{,}25$ см^3, $CB_a = 3{,}87017$ см, $BA_c = 6{,}06245$ см, $AC_b = 7{,}83$ см, $CB_a \cdot BA_c \cdot AC_b = 183,79$ см^3

Прозрение наступило лишь после довольно продолжительных и бесплодных усилий, втуне потраченных на проверку условия Карно (**теорема 1.1**).

Поскольку $AA_b = AA_c, BB_c = BB_a$ и $CC_a = CC_b$ (как отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки), то нужно было проверить справедливость равенства

$BC_a \cdot CA_b \cdot AB_c = CB_a \cdot BA_c \cdot AC_b$ — а оно весьма упорно этому сопротивлялось (рис. 26).

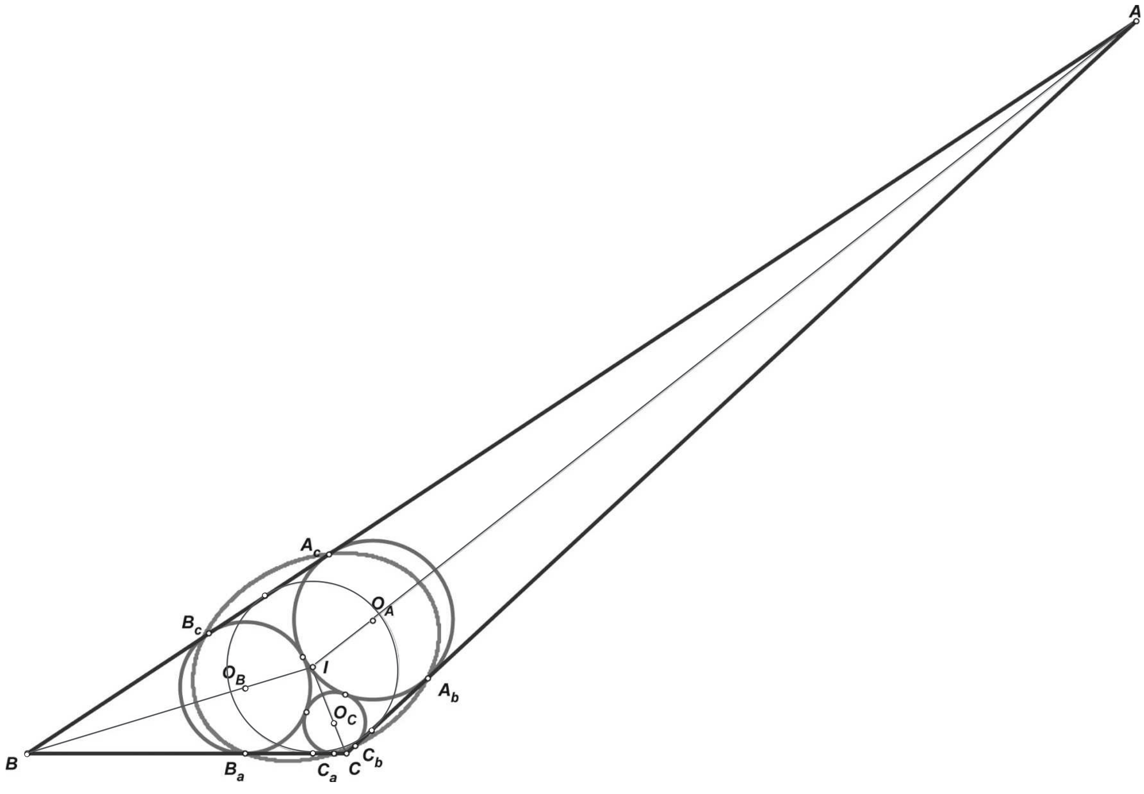


Рис. 26.

$CA_b = 2{,}33164$ см, $AB_c = 23{,}48376$ см, $BC_a \cdot CA_b \cdot AB_c = 355{,}61$ см^3, $CB_a = 2{,}13965$ см, $BA_c = 7{,}65637$ см, $AC_b = 22{,}51$ см, $CB_a \cdot BA_c \cdot AC_b = 368{,}82$ см^3

Тогда, наконец, вернулись к рисунку, «вытянули» треугольник — и стало *заметно*, что *точка* B_c на картинке *не лежит на эллипсе, проходящем через остальные 5 точек.*

Померили затем нужные расстояния и вычислили их произведения (программа позволяет это делать) — как видно по рисунку, они оказались различными.

Различными они оказались и на «стартовой» картинке (где совсем нелегко усмотреть, что одна из точек на конике *не лежит*) — правда, лишь в десятых долях. На столь деликатную разницу глаз, видимо, не реагирует.

§ 8. Методико-лирическое отступление: точка Мальфатти как личная точка отсчета

Остановлюсь на конфигурации Мальфатти более подробно — ведь это именно она в большой степени способствовала моему увлечению *элементарной геометрией*, впоследствии переросшему в нечто большее, чем просто забава — речь, конечно, идет об исключительно субъективном восприятии.

А дело было так.

В конце 90-ых годов прошлого века один из моих учеников (я к тому времени уже лет пять как успел отработать преподавателем математики в школе) пожаловался, что никак не может справиться с геометрической задачкой из какой-то заочной олимпиады — по типу нынешних *«Покори Воробьевы Горы»* (ведущие ВУЗы страны, надо сказать, еще и в *застойные* даже годы пытались как-то заранее отбирать будущих потенциальных студентов — вот и проводили подобные конкурсы, только, может не под такими броскими лозунгами, за версту отдающими рекламным запашком[9]). Вроде бы, то была олимпиада *физтеховская* — а сама задача формулировалась так:

В углы произвольного треугольника вписали окружности таким образом, что они еще и внешне касаются друг друга попарно. Доказать[10]*, что прямые, соединяющие вершины треугольника с противолежащими точками касания, пересекаются в одной точке.*

Решить мне ее сразу, естественно, не удалось — знаний было маловато: я не только что не подозревал о существовании каких-то там окружностей Мальфатти, но даже и о теореме Чевы имел весьма смутное представление — например, о ее формулировке *в форме синусов* и слыхом не слыхивал.

Тем не менее, долго и упорно над нею бился, а параллельно почитывал (не помню при каких обстоятельствах попавшую мне в руки) книжечку [10] — такое хорошо и интересно написанное введение в барицентрическое исчисление и геометрию треугольника. Почитывал так просто, как говорится, для души — и надо же такому случиться, именно *геометрия масс* и послужила ключом к разгадке.

В один прекрасный день казавшиеся разрозненными фрагменты головоломки (со множеством вроде бы лишних кусочков и каких-то явно недостающих деталей) вдруг сложились в единую и прекрасную картину.

Трудно передать словами нахлынувшие тогда на меня эмоции — весь этот прямо-таки *шквал позитива* (вот еще одно модное в наши дни словечко). Думается, его можно только пережить лично, и именно решив самостоятельно какую-нибудь сложную задачу (не обязательно математическую) каким-нибудь неожиданным и красивым способом[11] (рис. 27).

---

[9] Лично для меня отталкивающим. Кстати, по ихнему, по рекламному — никакой не лозунг, а слоган.

[10] Тогда еще, если не изменяет память, в ходу бытовало именно такое, тоталитарно-безликое обращение в жестко-требовательной форме, вскорости поменявшееся во всей учебной литературе на более толерантное «докажите». Следующий шаг, вероятно, состоял бы в повсеместном внедрении оборота «докажите, пожалуйста» — а там и вовсе изъятия этого, на глазах устаревающего морально, слова из обращения.

[11] Скажем, это не совсем те ощущения, когда первый раз прыгаешь с парашютом — хотя и те, и эти сопровождаются выбросом большого количества адреналина в кровь. Кому-то может показаться удивительным или смешным или чем еще похлеще — но это ничтожное событие (в сравнении с тогдашними катаклизмами — на всякий случай напомню: то были суровые девяностые годы — поставившие большинство населения России и

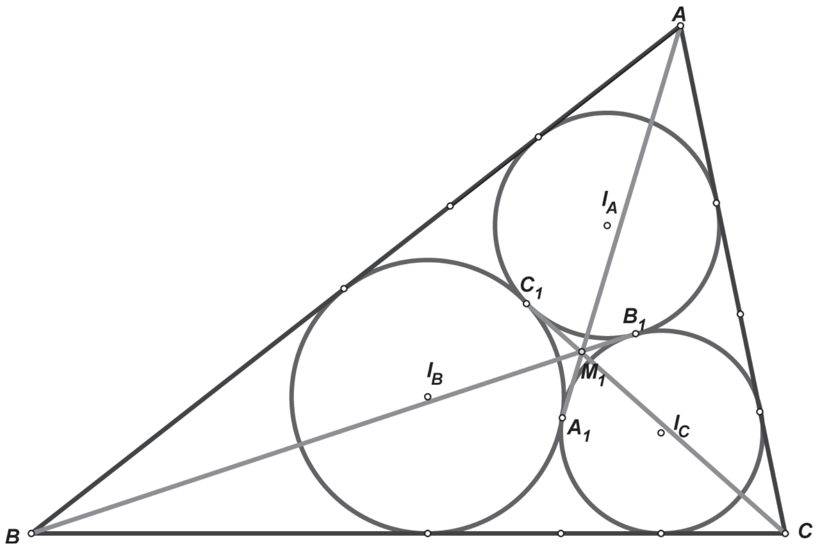


Рис. 27.

Теорема 8.1. Прямые, соединяющие вершины треугольника с противолежащими точками касания окружностей Мальфатти друг с другом, пересекаются в некоторой точке $M1$ — так называемой первой точке *Аджима–Мальфатти*[12] ($X\,(179)$ — 1st Ajima-Malfatti point).

Доказательство[13]. Рассмотрим систему материальных точек: $-\frac{1}{r}I$; $\frac{1}{r_A}I_A$; $\frac{1}{r_B}I_B$; $\frac{1}{r_C}I_C$ (т.е., нагрузим центр вписанной окружности ее «обратным» радиусом[14], взятым со знаком «минус», а центры окружностей Мальфатти — их «обратными» радиусами) — см.[2], [3], [6], [10].

Пусть M_1 — центр масс этой системы. Однако подсистема $-\frac{1}{r}I$; $\frac{1}{r_A}I_A$; имеет (по правилу рычага) своим центром масс вершину A, а подсистема $\frac{1}{r_B}I_B$; $\frac{1}{r_C}I_C$ точку касания A_1.

Отсюда (из правила группировки и рычага) следует, что центр масс M_1 лежит на прямой AA_1 (рис. 28).

Два аналогичных разбиения ($-\frac{1}{r}I$; $\frac{1}{r_B}I_B$ и $\frac{1}{r_A}I_A$; $\frac{1}{r_C}I_C$, а также $-\frac{1}{r}I$; $\frac{1}{r_C}I_C$ и $\frac{1}{r_A}I_A$; $\frac{1}{r_B}I_B$) указывают на то, что M_1 принадлежит также прямым BB_1 и CC_1. $\square$

Захотелось, конечно, с кем-нибудь из людей сведущих поделиться оригинальным решением. Среди моих тогдашних знакомых таковых было тогда не много — а один из них, довольно близкий приятель еще по мехмату, *Андрей Михайлович Сторожев*[15], как раз незадолго до описываемых событий отбыл на ПМЖ в Австралию.

«братских» республик на грань, а то и за грань выживания) — ну, решил какую-то там себе задачку с кружочками — и связанные с ним переживания до сих пор иногда греют душу ровным, теплым светом; а грязь всякая как-то хотя и вспоминается, но не часто (тем паче, пищу такого рода щедро поставляют дни нынешние… но «ходить бывает склизко по камешкам иным — итак, о том, что близко, мы лучше умолчим»). А вообще-то, подобное инфантильное мировосприятие, как оказалось, свойственно многим *ботаникам* (согласно всяческим словарикам молодежного сленга и жаргона, так и кишащим в интернете, — это человек, который слишком много учится, уделяя мало внимания другим сторонам жизни). К примеру, вот какие откровения выдающегося отечественного математика Д. Е. Меньшова можно прочитать в [13]: «…В 1915 году мы занимались функциональными рядами, а в 1916 году — ортогональными рядами. А потом наступил тысяча девятьсот семнадцатый год. Это был очень памятный год в нашей жизни, в тот год произошло важнейшее событие, повлиявшее на всю нашу дальнейшую жизнь: мы стали заниматься тригонометрическими рядами.» Печально и страшно на самом деле то, что подрастает (а то уже и выросло) поколение, отдельным представителям которого приходится пояснять, а в чем же здесь, собственно, прикол.

[12]Что она так называется, и в геометрии известна с довольно давних пор — я узнал значительно позднее.

[13]и я до сих пор убежден — изящнее, чем приведенное ниже, доказательства попросту не существует.

[14]Величина, обратная радиусу окружности называется ее кривизной.

[15]Сильный алгебраист-профессионал и крупный специалист в области олимпиадной математики. В Австралии долгое время участвовал в подготовке сборных команд для участия в ММО и Турнире Городов, в проведении местных математических соревнований среди школьников и студентов.

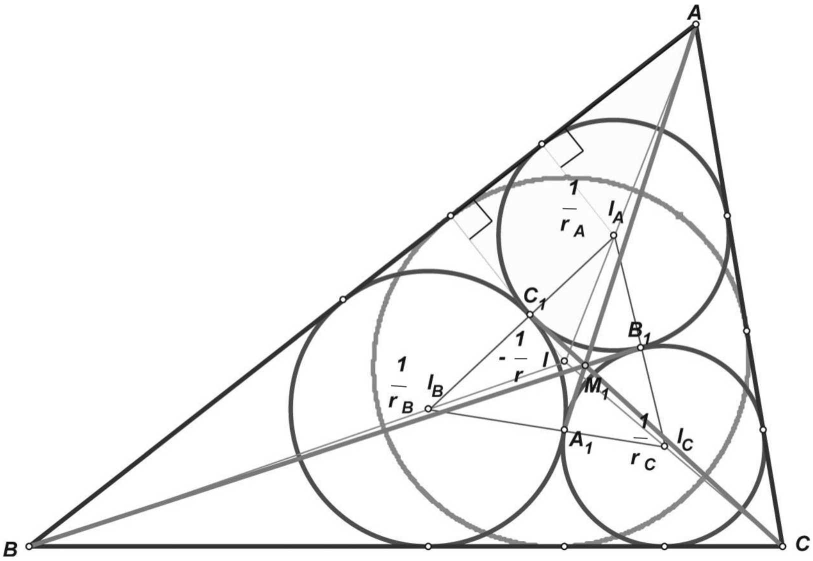


Рис. 28.

Ну, я и отправил соответствующую депешу в далекий город *Канберра* — старым дедовским способом, поскольку интернет в те времена еще только начинал опутывать планету своею паутиной и до России практически не дотянулся.

И где-то через месяц пришел ответ *с оказией* — мне позвонил некий человек, летавший по каким-то там своим делам в Австралию, и при встрече передал небольшую посылку от А.М. — с письмом и книжкой.

Андрей отвечал, что сравнительно недавно читал где-то статью про *конфигурацию Мальфатти* — в которой, в частности, говорилось, что конкурентность прямых сохранится, если рассмотреть тройку *любых* окружностей, вписанных в углы треугольника — а точки касания заменить тогда на *центры внутренних гомотетий* (т.е. с отрицательным коэффициентом), переводящих окружности друг в друга (рис. 29).

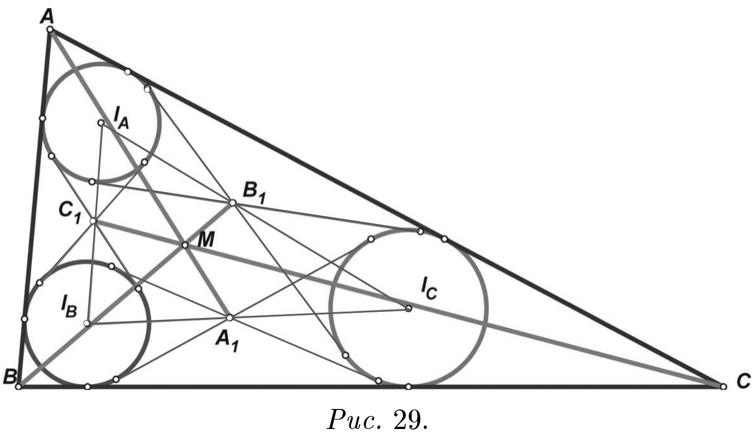


Рис. 29.

И понятно почему — приведенное доказательство с массами, очевидно, «работает» безо всяких изменений и в этой, немного обобщенной, ситуации.

Однако в статье содержался и другой, совершенно новый и неожиданный для меня факт:

> оказывается, конкурентность сохранится, если вместо вершин исходного треугольника взять его *эксцентры* [16].

А именно, справедлива

[16] От английского слова excenter — центр вневписанной окружности.

Теорема 8.2. Если в условиях предыдущей теоремы заменить вершины исходного треугольника ABC его *эксцентрами*, то соответствующая тройка прямых также пересечется в одной точке. Прямые, соединяющие вершины треугольника с противолежащими точками касания окружностей Мальфатти друг с другом, пересекаются в некоторой точке M_2 — так называемой второй точке *Аджима–Мальфатти*. (X (180) — 2nd Ajima-Malfatti point) (рис. 30).

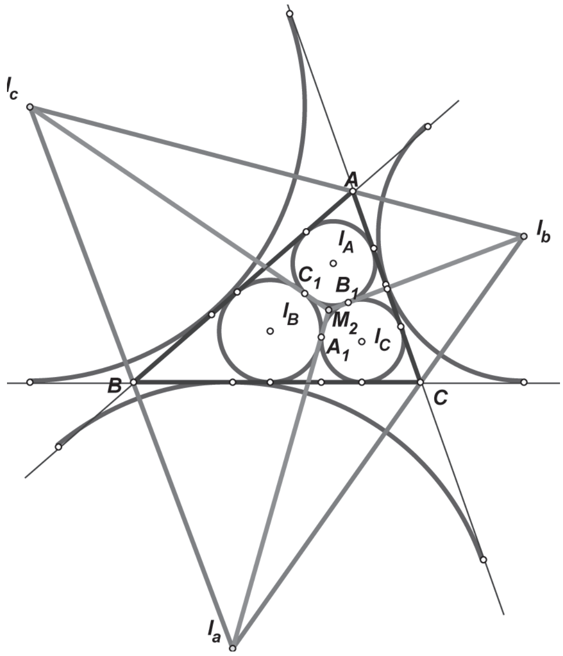


Рис. 30.

«В Штатах (писал далее Сторожев) есть человек, который подобными вещами сильно интересуется и даже сочинил на сей счет целую книгу. Случайно она попалась мне в руки — и, так как, насколько вижу, все эти геометрические заморочки тебя серьезно интересуют (а вот меня — так впечатляют совсем не очень), то пересылаю ее тебе вкупе с *емейлом* автора.»

Автором этим оказался не кто иной, как будущий создатель фундаментальнейшей ETC [5] Кларк Кимберлинг, а книжка [14] — ее бумажной предтечей, так сказать, *лайт-версией* — содержащей описание лишь 400 точек (текущий электронный вариант насчитывает 5509 таковых — по состоянию на июль месяц 2013 года)[17].

И книжка и мейл очень даже пригодились — и получилось так, что где-то года через три именно Кларк Кимберлинг редактировал мою первую англоязычную статью по геометрии [15][18].

А вот одолеть «вневписанный» случай мне все никак не удавалось, как я над ним не бился.

И вот, наконец, кто-то надоумил обратиться за помощью к *Игорю Федоровичу Шарыгину* — выдающемуся отечественному геометру и блестящему композитору задач[19].

[17] То есть, фундаментальность вроде бы уже и зашкаливает, переходя в явный, с прагматической точки зрения, абсурд. Но, располагая собственной именной парой центров X (3588) и X (5393) — мне бы не хотелось, разумеется, судить столь строго.

Сам Кларк любит, между прочим, уподоблять центральные точки звездам в ночи и ему (как, впрочем, и любому «точечному» фану - фанатику) наверняка пришлись бы по вкусу следующие строки:

Послушайте! Ведь, если звезды зажигают —
значит — это кому-нибудь нужно?
Значит — кто-то хочет, чтобы они были?
Значит — кто-то называет эти плевочки
жемчужиной?

[18] Словом, как в одном из рассказов Аверченко, «...и всё заверте...» И возможно ли, спрашивается, после всего произошедшего, отрицать столь явное вмешательство Руки Провидения в жизнь и судьбу отдельно взятого человека?

[19] И, добавлю — Личности, с большой буквы. Исчезающий вид Homo Sapiens'а в эпоху вырождения.

И.Ф. тогда где-то раз в неделю читал лекции учителям в МГИУУ[20], что возле метро «Аэропорт». Там-то я его и однажды подстерег в перерыве между парой в коридорчике и рассказал о никак не поддающейся решению задачке — так и познакомились. Поразила, помнится, внешняя открытость и демократичность общения И.Ф.[21] — он внимательно и довольно доброжелательно выслушал совершенно неизвестного ему «человека с улицы», сказал, что подумает и назначил встречу на следующей лекции.

И действительно, в ту, вторую встречу растолковал мне решение, основанное, по его словам, на некоем методе, им специально разработанным для задач такого рода.

Суть метода будет видна из приведенного далее доказательства, но прежде сформулируем и докажем одно свойство трапеции, которым существенно воспользуемся в процессе последующих рассуждений.

Лемма 8.1 (об отрезке, параллельном основанию трапеции). В трапеции $ABCD$ с основаниями $a = AD, b = BC$ провели отрезок MN, параллельный основанию. Известно отношение, в котором этот отрезок делит боковые стороны: $\lambda = \frac{BM}{AM} = \frac{CN}{DN}$. Тогда длина этого отрезка l однозначно определяется длинами оснований и отношением: $l = \frac{\lambda a+b}{\lambda+1}$.

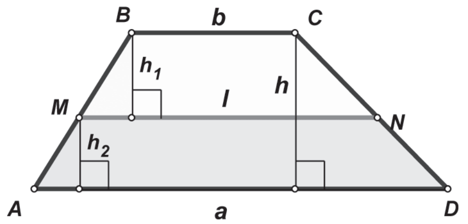


Рис. 31.

Доказательство леммы. Воспользуемся методом площадей. Пусть h_1, h_2, h — соответственно высоты в трапециях $MDCN, AMND$ и $ABCD$. Понятно, что $h = h_1 + h_2$ и $\frac{h_1}{h_2} = \frac{BM}{AM} = \lambda$ (что вытекает из подобия соответствующих прямоугольных треугольников) (рис. 31).

Поскольку $S_{ABCD} = S_{MBCN} + S_{AMND}$, то, с учетом формулы площади трапеции («полусумма оснований на высоту»), имеем:

$$\frac{1}{2}(a+b)\,h = \frac{1}{2}(b+l)\,h_1 + \frac{1}{2}(a+l)\,h_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(h_1+h_2) = (b+l)\,h_1 + (a+l)\,h_2.$$

Разделив обе части последнего равенства на h_2, получим линейное уравнение относительно неизвестного l: $(a+b)(\lambda+1) = (b+l)\,\lambda + (a+l)$. Отсюда, после раскрытия скобок и приведения подобных, приходим к искомому отношению. □

Доказательство **теоремы 8.2** (по И. Ф. Шарыгину). Согласно *обратной теореме Чевы в форме синусов* (см. [1]–[4], [6]), достаточно убедиться в том, что произведение отношений синусов соответствующих углов равно единице:

$$\frac{\sin\angle I_cI_aA_1}{\sin\angle I_bI_aA_1}\cdot\frac{\sin\angle I_aI_bB_1}{\sin\angle I_cI_bB_1}\cdot\frac{\sin\angle I_bI_cC_1}{\sin\angle I_aI_cC_1} = 1.$$

Опустив перпендикуляры из точки A_1 на стороны I_cI_a и I_aI_b, получим отрезки $d_{A,b}$ и $d_{A,c}$ соответственно. Понятно, что $\frac{\sin\angle I_cI_aA_1}{\sin\angle I_bI_aA_1} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{d_{A,b}}{d_{A,c}}$.

Точно так же, опустив перпендикуляры из точек B_1 (на стороны I_aI_b и I_bI_c) и C_1 (на стороны I_bI_c и I_cI_a) — получим еще две пары отрезков: $d_{B,c}$, $d_{B,a}$ и $d_{C,a}$, $d_{C,}$ соответственно.

[20]Московский Государственный Институт Усовершенствования Учителей; затем — МИПКРО (Московский Институт Повышения Квалификации Работников Образования); а ныне — МИОО (Московский Институт Открытого образования). Последняя аббревиатура, будто бы неявно, но предполагает наличие всяких там МИЗО — заведений, не так ли?

[21]Впрочем, позже мне приходилось видывать И.Ф. и в других, далеко не столь добродушных, состояниях.

Тогда в условии Чевы отношения синусов можно заменить на отношения этих отрезков — т.е. в терминах их длин, показать нужно, что $\frac{d_{A,b}}{d_{A,c}} \cdot \frac{d_{B,c}}{d_{B,a}} \cdot \frac{d_{C,a}}{d_{C,b}} = 1$ (рис. 32).

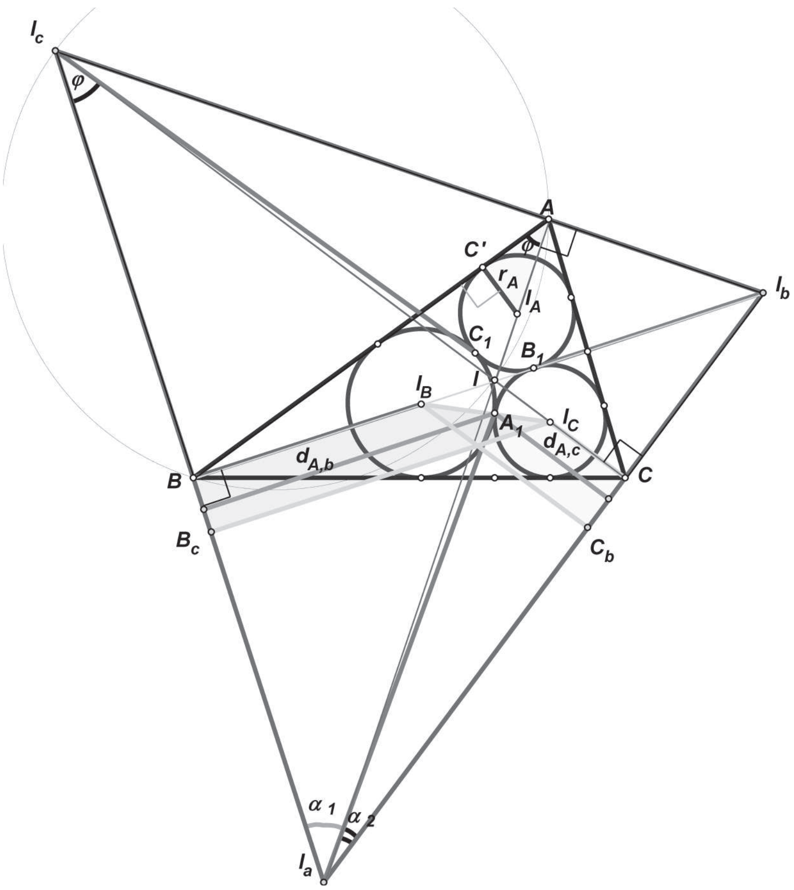


Рис. 32.

Оказывается, вся эти расстояния выражаются через *радиусы окружностей Мальфатти* r_A, r_B, r_C и через *отрезки* d_A, d_B, d_C.

Естественно, речь идет собственно о длинах отрезков (в случаях, когда это не ведет к путанице, мы игнорируем слово «длина»), соединяющих центры окружностей Мальфатти с соответствующими вершинами исходного треугольника (отметим здесь также, что отрезки эти будут перпендикулярны соответствующим сторонам эксцентрического треугольника, например $I_A A \perp I_b I_c$ — поскольку внутренние биссектрисы исходного треугольника в «*эксцентрическом*» треугольнике «оборачиваются» его высотами — ведь внутренняя и внешняя биссектрисы угла треугольника *перпендикулярны* — и *центры окружностей Мальфатти принадлежат этим «биссектрисам-высотам»*) — а также тройку ρ_A, ρ_B, ρ_C *отрезков, соединяющих эксцентры с соответствующими центрами окружностей Мальфатти* (отрезки $I_a I_A$ и т.д.).

Обозначим также буквой $\varphi = \angle I_a I_c I = \angle IAB$ (как опирающиеся на одну дугу, поскольку четырехугольник $BIAI_c$ является вписанным в окружность, будучи составлен из двух прямоугольных треугольников с общей гипотенузой).

Перейдем от слов, наконец, к делу — т.е. непосредственно к выводу нужных соотношений.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $I_C I_B B B_c$ и заметим, что отрезок $d_{A,b}$ параллелен ее основанию и делит боковые стороны в отношении $\lambda_{A,b} = \frac{I_B A_1}{I_C A_1} = \frac{r_B}{r_C}$. Из **леммы 8.1** тогда следует, что $d_{A,b} = \frac{\frac{r_B}{r_C} \cdot I_C B_c + I_B B}{1 + \frac{r_B}{r_C}}$. Но, в наших обозначениях, $I_B B = d_B$, а $I_C B_c = I_c I_C \cdot \sin\varphi = I_c I_C \cdot \frac{r_A}{I_A A}$ (из прямоугольного треугольника $I_A A C'$) $= \rho_C \cdot \frac{r_A}{d_A}$.

Итак, после приведения к общему знаменателю,

$$d_{A,b} = \frac{d_A \cdot d_B \cdot r_C + r_A \cdot r_B \cdot \rho_C}{(r_B + r_C) d_A}.$$

Понятно, что $d_{A,c}$ получается из полученной формулы нехитрой перестановкой буквенных индексов по принципу $B \leftrightarrow C$, $A \leftrightarrow A$ [22]:

$$d_{A,c} = \frac{d_A \cdot d_C \cdot r_B + r_A \cdot r_C \cdot \rho_B}{(r_B + r_C) d_A}.$$

Знаменатели о обоих выражений, заметим, *одинаковы.* И одинаковы, в силу «равноправного» их описания с точностью до «циклического» переименования вершин и сторон исходного треугольника, будут также знаменатели и в двух других парах.

Значит, в произведении Чевы знаменатели каждой пары сократятся, и в выражении $\frac{d_{A,b}}{d_{A,c}} \cdot \frac{d_{B,c}}{d_{B,a}} \cdot \frac{d_{C,a}}{d_{C,b}}$ следует учитывать лишь *числители* соответствующих выражений.

А тогда понятно, что *равны числители* следующих пар: $d_{A,b}$, $d_{B,a}$ (получающиеся друг из друга перестановками $B \leftrightarrow A$, $C \leftrightarrow C$ — которые, очевидно, не меняют этих выражений); и, на схожих основаниях, $d_{B,c}$, $d_{C,b}$ и $d_{C,a}$, $d_{A,c}$.

Вот мы и показали, наконец-то, что $\frac{d_{A,b}}{d_{A,c}} \cdot \frac{d_{B,c}}{d_{B,a}} \cdot \frac{d_{C,a}}{d_{C,b}} = 1$. $\square$

Как видим, метод И.Ф. и вправду обладает большой пробивной силой и в данном случае сработал безукоризненно[23].

А все же, хотелось бы взглянуть на чисто геометрическое доказательство. Что таковое имеется — лично у меня сомнений нет (как нет и сомнений в том, что оно должно быть достаточно изысканным и трудно находимым).

Может, обнаружить его посчастливится кому-нибудь из читателей?

§ 9. «Полувписанный» эллипс

В этом параграфе мы рассмотрим конику, связанную с так называемыми *полувписанными* окружностями.

Напомним, что внутренней (внешней) полувписанной окружностью называют окружность, вписанную в один из углов треугольника и касающуюся описанной около треугольника окружности внутренним (внешним) образом.

Эти окружности порождают довольно-таки богатый набор любопытных геометрических утверждений (о многих из которых можно прочитать в [6], [11], [12]).

Одно из них (вовсе не очевидное! — доказательства имеются в указанном выше списке) сейчас поможет нам выявить очередную конику.

Утверждение 9.1. Если рассмотреть полувписанную внутренним образом в треугольник окружность, то отрезок, соединяющий точки ее касания со сторонами угла, в который она вписана, проходит через инцентр[24] I исходного треугольника, причем делится им пополам.

Сформулируем теперь основную теорему этого раздела.

Теорема 9.1. Все шесть точек касания трех вневписанных внутренним образом в треугольник окружностей с его сторонами лежат на одной конике с центром в точке I.

Доказательство. Рассмотрим три четырехугольника с вершинами в точках касания (рис. 33):

$$A_1'A_2'B_2'C_1',\, B_1'B_2'C_2'A_1',\, C_1'C_2'A_2'B_1'$$

[22]Усомнившиеся могут применить аналогичные рассуждения в отношении трапеции $I_B I_C C C_b$ — либо просто посмотреть на нее (и соседку) внимательно.

[23]Понятно, что и здесь конкурентность сохраняется, если точки касания заменить на внутренние центры гомотетий, переводящих пары вписанных в углы треугольника окружностей друг в друга — приведенное доказательство легко «выдерживает» эти незначительные усиления условия.

[24]От английского incenter — центр вписанной окружности.

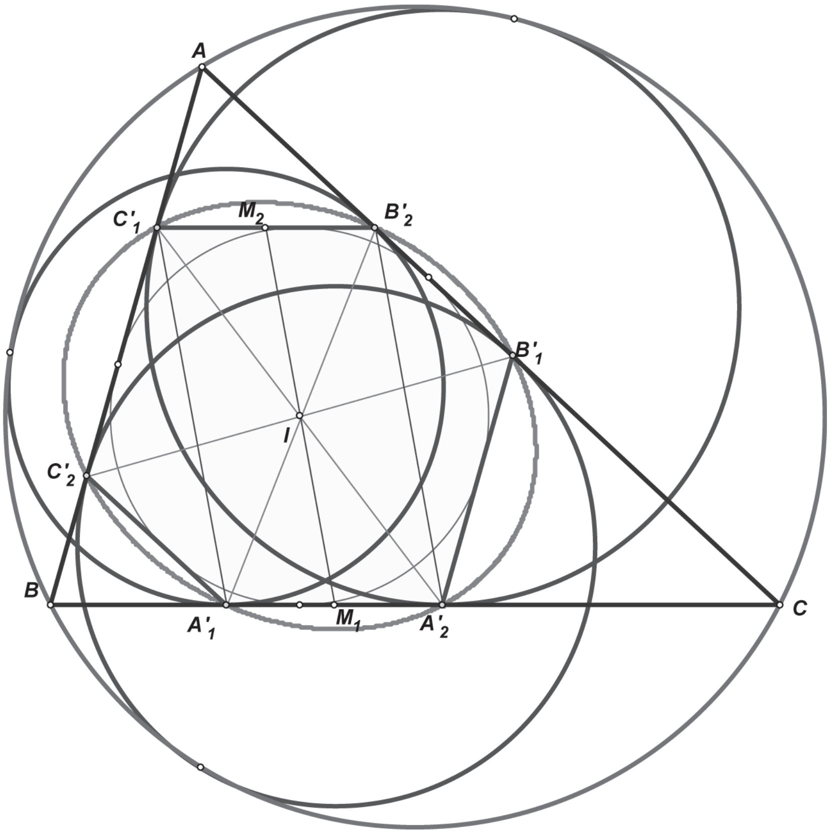


Рис. 33.

Согласно **утверждению 9.1**, *диагонали* каждого из них *делятся инцентром* I *пополам*, поэтому все четырехугольники являются *параллелограммами.*

Значит, шестиугольник $A_1'A_2'B_1'B_2'C_1'C_2'$ представляет собою *шестиугольник-параллелограмм* (и, более того, *выпуклый* и *центрально-симметричный* шестиугольник).

А около любого шестиугольника-параллелограмма, в силу обратной теоремы Паскаля, всегда можно описать конику (см. *доказательство* **теоремы 2.1** из § **2**). А поскольку *средняя* линия всякого параллелограмма проходит через его центр симметрии (одна из таких линий, M_1M_2 — изображена на рисунке), общий для трех рассматриваемых — то точка I и будет центром этой коники (каждая средняя линия проходит через середины параллельных отрезков с концами на конике — и потому проходит через ее центр — см. [1], [6]). □

Замечание 9.1. Пользуясь известными (см. [6], [12]) соотношениями, выражающими радиусы внутренних полувписанных окружностей через углы исходного треугольника и радиус вписанной в него окружности: $r_A = \frac{r}{\cos^2\frac{A}{2}}$; $r_B = \frac{r}{\cos^2\frac{B}{2}}$;$r_A = \frac{r}{\cos^2\frac{C}{2}}$, легко можно вычислить барицентрические координаты вершин коники и выписать ее уравнение.

Рекомендуем читателю все же проделать все необходимые выкладки.

Замечание 9.2. В рассматриваемый шестиугольник можно также и *вписать* конику. Так как его *главные* диагонали пересекаются в одной точке, то это сразу следует из *теоремы Брианшона* — см.[1], [6].

И возникают стандартные вопросы: что представляет собой уравнение коники, каков ее вид, координаты ее центра и т.д.

Но в этих заметках мы исследовали исключительно *описанные около шестиугольников коники.*

Изучение же *коник вписанных* — тема несколько иная, и вполне заслуживает, на наш взгляд, отдельной статьи.

Замечание 9.3. Если положиться на мнение компьютера, то *при замене внутренних полувписанных окружностей на внешние* (замене либо полной, либо частичной — в любых комбинациях), аналогичной коники, вообще говоря, *существовать не будет.*

Теорема 9.2. Рассматриваемая коника представляет собой *эллипс.*

Доказательство. На сей раз обойдемся без выписывания соответствующего алгебраического выражения, знак которого определяет вид коники — а просто докажем, что *коника, описанная около* произвольного *выпуклого шестиугольника-параллелограмма*, есть *эллипс* (рис. 34).

Очевидно, что, в силу выпуклости, такой шестиугольник всегда можно «вписать» в треугольник.

Понятно также, что центр описанной около шестиугольника коники (существующей по обратной теореме Паскаля) лежит на пересечении отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

Следовательно, центр нашей коники находится внутри шестиугольника и является *конечной*(обычной) точкой плоскости. Поэтому коника не может быть параболой (центр которой — бесконечно удален). Не может она быть и параболой вырожденной, т.е. парой параллельных прямых — хотя центром такого «*вырожденца*» и можно считать любую (конечную и бесконечную!) точку на «серединной» параллели, но, ясное дело, вершины *выпуклого* шестиугольника не могут разместиться на каких-либо *двух* прямых.

Стало быть, описанная коника представляет собой либо эллипс, либо гиперболу.

Будем теперь сдвигать, параллельно соответствующим сторонам треугольника, соответствующие стороны шестиугольника — к вершинам треугольника.

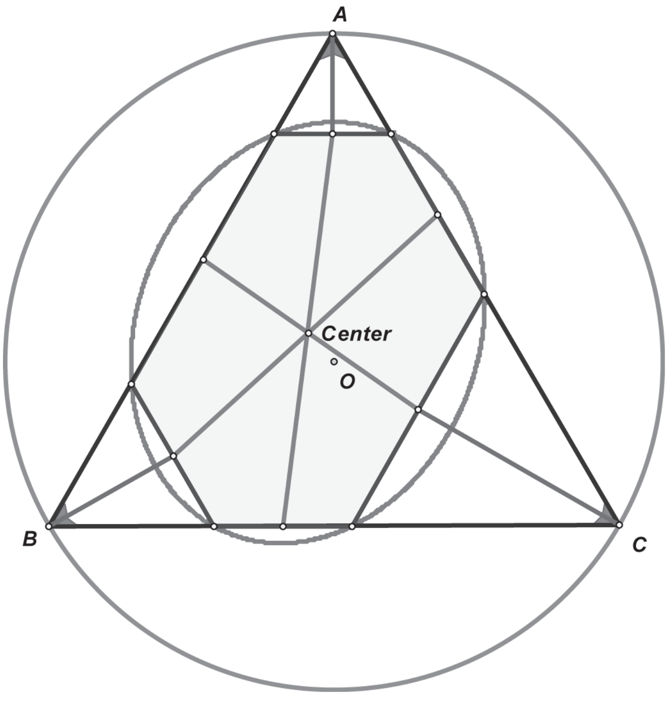


Рис. 34.

Из соображений непрерывности следует, что при таких деформациях *коника не может изменить свой вид* — ведь для этого она должна пережить *«параболическую катастрофу»*, т.е. в какой-то момент обернуться параболой (возможно, вырожденной).

А это-то и невозможно, так как центр по-прежнему конечен (в любой момент деформации) и двух прямых по-прежнему не достаточно, чтобы разместить на них все вершины.

В предельном случае, когда деформируемые отрезки стянутся в точки, совпадающие с вершинами треугольника, мы получаем описанную около треугольника окружность — частный случай эллипса.

Значит, описанная около изначального шестиугольника коника также представляла собою эллипс. □

§ 10. Коники от Григорьева

В заключение мы бегло ознакомимся еще с тремя кониками, открытыми зимой этого года учащимся Московского Химического Лицея (ГОУ № 1303) *Дмитрием Григорьевым.*

Поскольку все они были включены в Коллекцию Кимберлинга, ограничимся простым оттуда *«копипастом»*[25] (рис. 35)[26].

> $X(5430)$ = ЦЕНТР ПЕРВОЙ КОНИКИ ГРИГОРЬЕВА
> Барицентрические координаты (здесь и далее Кимберлинг приводит лишь первую координату — остальные получаются из нее соответствующими циклическими сдвигами. Он часто так поступает в случаях "громоздких" координат. — *Прим. ред.*):
>
> $(1 + \csc A/2)(\csc B/2 + \csc C/2) - \cot 2A/2$.

Пусть L_A — прямая, параллельная прямой BC и касающаяся описанной окружности треугольника ABC с отрицательной стороны от BC (это область, не содержащаю точку A); определим L_B и L_C циклически. Положим $A' = L_B \cap L_C$, определим B' и C' циклически. Пусть A_B — образ точки A при симметрии с осью $A'B'$, а A_C — образ точки A при симметрии с осью $A'C'$. Пусть C_1 — точка касания вписанной окружности треугольника A_BAB и прямой AB, а B_2 — точка касания вписанной окружности треугольника A_CAC и прямой AC. Определим A_1, B_1 и C_2, A_2 циклически. Тогда $|AB_2| = |CB_1|, |BA_1| = |CA_2|, |AC_1| = |BC_2|$, так что по теореме Карно, шесть точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на некоторой конике. Уравнение первой коники Григорьева в барицентрических координатах следующее:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\csc(A/2)yz - 2\csc(B/2)zx - 2\csc(C/2)xy = 0$$

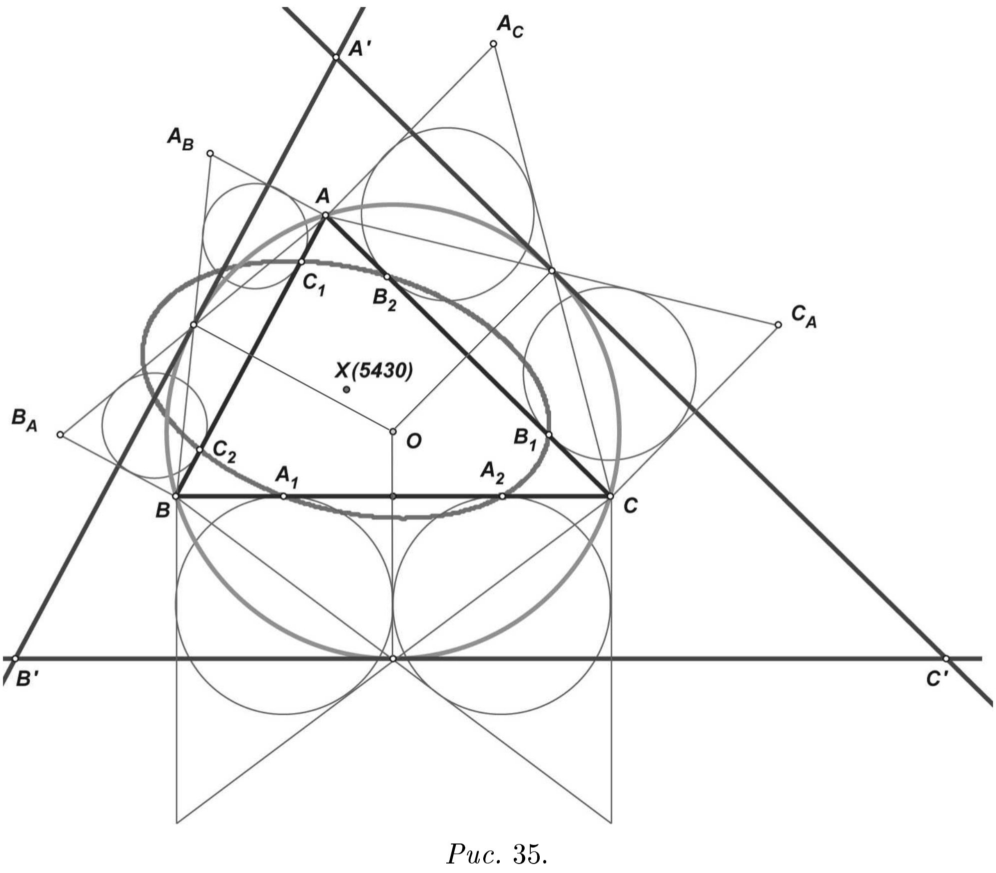


Рис. 35.

[25] В русском переводе — *прим. ред.*
[26] При желании читатель без труда выведет приведенные ниже уравнения и координаты

(Сообщено Алексеем Мякишевым от имени Дмитрия Григорьева, Москва, 28 марта, 2013 г.)

Перспектором первой коники Григорьева является центр $X(188)$. (Randy Hutson, 30 марта, 2013 г.)

Если у вас есть программа “The Geometer’s Sketchpad”, вы можете увидеть $X(5430)$

$X(5430)$ лежит на прямых, соединяющих такие центры: {8, 188}, {236, 3161}

$X(5431)$ = ЦЕНТР ВТОРОЙ КОНИКИ ГРИГОРЬЕВА

Барицентрические координаты:

$(1 + \sec A/2)(\sec B/2 + \sec C/2) - \tan 2A/2.$

Пусть L_A — прямая, параллельная BC и касающаяся описанной окружности треугольника ABC в положительной стороне от BC (область, содержащая точку A), определим L_B и L_C циклически. Пусть $A' = L_B \cap L_C$; определим B' и C' циклически. Пусть A_B — образ точки A при симметрии относительно прямой $A'B'$, а A_C — образ A при симметрии относительно $A'C'$. C_1 — точка касания вписанной окружности треугольника A_BAB и прямой AB, B_2 — точка касания вписанной окружности треугольника A_CAC и прямой AC. Определим A_1, B_1 и C_2, A_2 циклически. Тогда $|AB_2| = |CB_1|, |BA_1| = |CA_2|, |AC_1| = |BC_2|$, так что по теореме Карно шесть точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на некоторой конике. Барицентрическое уравнение второй коники Григорьева следующее:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\sec(A/2)yz - 2\sec(B/2)zx - 2\sec(C/2)xy = 0$$

Перспектором второй коники Григорьева является центр $X(5451)$. (Randy Hutson, 8 апреля 2013 г.) См. также $X(5452)$.

Если у Вас есть программа “The Geometer’s Sketchpad”, можно увидеть $X(5431)$.

$X(5431)$ лежит на прямой, соединяющей центры {178, 5451} (рис. 36).

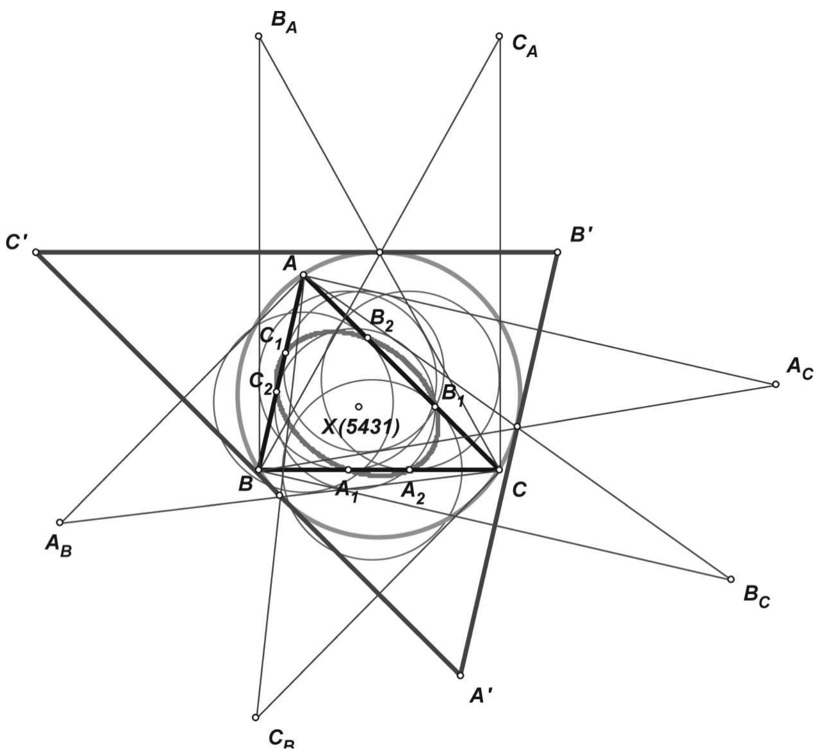


Рис. 36.

$X(5452)$ = ЦЕНТР КОНИКИ ПРИВАЛОВА

Трилинейные координаты: $f(A, B, C) : f(B, C, A) : f(C, A, B)$, где

$$f(A, B, C) = \cos^2(A/2)[-\sin A \cos^2(A/2) + \sin B \cos^2(B/2) + \sin C \cos^2(C/2)]$$

(Randy Hutson, 19 апреля 2013 г.).

Барицентрические координаты:

$$a^2(b+c-a)[a^3-a^2b-a^2c+ab^2+ac^2-(b+c)(b-c)^2].$$

Пусть $A'B'C'$ — антикомплементарный (также антидополнительный или антисерединный) треугольник треугольника ABC (треугольник антикомплементарен данному, если данный треугольник является для него серединным). Пусть A'' — образ точки A' при симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC, определим B'' и C'' циклически. Пусть A_1 — точка касания вписанной окружности теугольника $A''BC$ и прямой BC, A_2 — точка касания вписанной окружности треугольника $A'BC$ и BC. Определим точки B_1, B_2, C_1, C_2 циклически. Тогда $|AC_2| = |BC_1|, |BA_1| = |CA_2|, |CB_1| = |AB_2|$, так что по теореме Карно шесть точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат не некоторой конике, названной в честь *Александра Привалова*[27]. Барицентрическое уравнение конки Привалова следующее:

$$x^2+y^2+z^2+f(a,b,c)yz+f(b,c,a)zx+f(c,a,b)xy=0,$$

где $f(a,b,c)=2[(b-c)^2+a^2]/[(b-c)^2-a^2]$, или, равносильно,

$$x^2+y^2+z^2-g(A,B,C)yz-g(B,C,A)zx-g(C,A,B)xy=0,$$

где $g(A,B,C)=\tan(B/2)\tan(C/2)[\cot^2(B/2)+\cot^2(C/2)]$.

(Сообщено Дмитрием Григорьевым 15 апреля, 2013 г.).[28]

Коника Привалова — двучевианная коника центров $X(7)$ и $X(8)$, т.е. коника, проходящая через вершины intouch[29] *и extouch*[30] *треугольников*[31]. Ее центр $X(5452)$ является также центром коники, проходящей через A, B, C, $X(101), X(294), X(651), X(666)$, которая изогонально сопряжена к прямой Жергонна (так иногда называют прямую Эйлера антикомплиментарного треугольника). Эта описанная коника является геометрическим местом трилинейных полюсов прямых, проходящих через центр $X(55)$. Также, $X(5452)$ = "перекрестная разность" (на английском — crossdifference — о смысле этого термина можно прочитать в *Словаре (Glossary)* у Кимберлинга [5]) каждой пары точек на поляре центра $X(6)$ относительно вписанной окружности. (Randy Hutson, 19 апреля 2013 г.).

При помощи программы "The Geometer's Sketchpad" можно увидеть $X(5452)$.

$X(5452)$ лежит на следующих прямых, соединяющих центры: {2, 1814}, {6, 354}, {9, 1040}, {33, 210}, {55, 2195}, {218, 226}, {219, 3686}, {294, 497}, {650, 1376}, {2238, 2911}

$X(5452)$ = $X(2)$–*"чевасопряженная"* (на английском — *Ceva conjugate* — о смысле этого термина можно прочитать в *Словаре (Glossary)* у Кимберлинга [5]) к $X(55)$ (рис. 37).

---

[27]Александр Андреевич Привалов — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики в Московском Химическом Лицее. Доводится внучатым племянником знаменитому русскому математику Ивану Ивановичу Привалову.

[28]Дмитрий Григорьев здесь фактически приводит другое геометрическое описание коники из § 4 — см. теорему 4.2 и замечание 4.4.

[29]Так в англоязычной литературе принято называть треугольник с вершинами в точках касания вписанной в данный треугольник окружности с его сторонами. В нашей литературе этот треугольник часто именуют *Треугольником Жергонна.*

[30]Так в англоязычной литературе принято называть треугольник с вершинами в точках касания вневписанных в данный треугольник окружностей с его сторонами.

[31]А вот «вписанно-описанная» суть этой коники, не укрывшаяся от Кимберлинга.

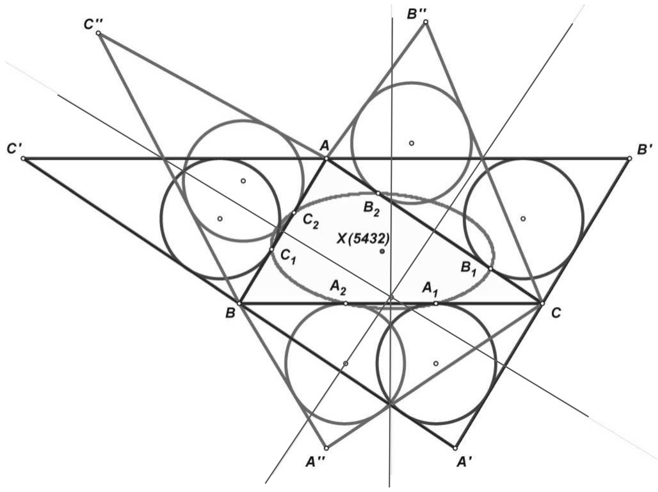


Рис. 37.

Литература

1. Акопян А., Заславский А. Геометрические свойства кривых второго порядка. - М.:МЦНМО, 2011.

2. Мякишев А. Элементы геометрии треугольника. - М.: МЦНМО, 2009.

3. Прасолов В. Задачи по планиметрии. - М.: МЦНМО, 2007.

4. Шарыгин И. Геометрия. Планиметрия. (Задачник 9-11). - М.: Дрофа, 2001.

5. Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers. URL: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

6. Yiu P. Introduction to the Geometry of the Triangle. URL: http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf

7. Куланин Е, Мякишев А. О некоторых кониках, связанных с треугольником. - М.:Институт логики, 2008.

8. Zaslavsky A. Geometry of Kiepert and Grinberg–Myakishev hyperbolas. URL: http://jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp65-71.pdf

9. Grinberg D., Myakishev A. A Generalization of the Kiepert Hyperbola. URL: http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200429index.html

10. Балк М., Болтянский И. Геометрия масс./ Серия Библиотечка «Квант», выпуск 61. - М.:Наука, 1987. URL: http://www.math.ru/lib/book/djvu/bib-kvant/kvant_61.djvu

11. Кожевников П. «Полувписанная» окружность: Сборник “Математика в задачах” (под редакцией Заславского А. и др.). - М.:МЦНМО, 2009.

12. Кушнир И. Геометрия на баррикадах (глава 17.6 “Этюд о полувписанной окружности”). - Киев: Знания на Украине, 2011.

13. Тихомиров В. О математиках — с улыбкой // Квант. - 1996. - № 4.

14. Kimberling C. Triangle Centers and Central Triangles // Congress Numerantion (Winnipeg, Canada). - 1998. - Vol. 129.

15. Myakishev A. Some Properties of the Lemoine Point. URL: http://forumgeom.fau.edu/FG2001volume1/FG200113index.html

Мякишев Алексей Геннадьевич,
Москва.

E-mail: myakishev62@mail.ru

Статья поступила в редакцию 16 июля 2013 г.

О вычислении точек равновесия по Нэшу для игры двух игроков на квадрате с квадратичными функциями выигрыша

М. С. Никольский, М. Абубакар

В статье рассматривается весьма общая игра двух лиц (см. [1-7]) на квадрате с квадратичными функциями выигрыша. Изучается вопрос о нахождении множества точек равновесия по Нэшу. Разработан конструктивный графический метод нахождения искомого множества. Построен общий пример игры, в которой множество точек равновесия по Нэшу содержит целый отрезок ненулевой длины.

Изучению свойств множеств равновесий по Нэшу посвящено много работ (см., например, [1-7] и др.). Понятие точки равновесия по Нэшу широко используется в современной теории игр и ее приложениях, в частности, оно широко используется в математической экономике. Наша статья дает полезный иллюстративный материал для изучения теории игр, учитывая весьма частое использование квадратичных критериев в этой теории.

Рассматривается игра двух игроков на квадрате $K = [0,1] \times [0,1]$. Функция выигрыша 1-го игрока задается в виде

$$f(x,y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y, \tag{1}$$

где $(x,y) \in K$, a_i —произвольные фиксированные числа, причем $a_1 \neq 0$. Функция выигрыша 2-го игрока задается в виде

$$g(x,y) = b_1y^2 + b_2xy + b_3x^2 + b_4y + b_5x, \tag{2}$$

где $(x,y) \in K$, b_i —произвольные фиксированные числа, причем $b_1 \neq 0$. С помощью выбора $x \in [0,1]$ первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш $f(x,y)$. С помощью выбора $y \in [0,1]$ второй игрок стремится максимизировать свой выигрыш $g(x,y)$. Мы будем изучать точки равновесия по Нэшу для описанной игры.

Определение. Точка $(x_0,y_0) \in K$ называется точкой равновесия по Нэшу для рассматриваемой игры, если выполняются условия:

$$f(x,y_0) \leqslant f(x_0,y_0) \quad \forall x \in [0,1]\,,$$

$$g(x_0,y) \leqslant g(x_0,y_0) \quad \forall y \in [0,1]\,.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество точек равновесия Нэша в нашей игре. Вообще говоря, множество $\mathfrak{A}$ может оказаться пустым.

С помощью известной теоремы 7.2.2 из [1] нетрудно показать, что в нашей игре $\mathfrak{A} \neq \varnothing$ при $a_1 < 0$, $b_1 < 0$. Если хотя бы одно из чисел a_1, b_1 положительно, то вопрос о непустоте $\mathfrak{A}$ решается более сложно. Обозначим через $\omega_1(y)$ при $y \in \mathbb{R}$ множество точек $x \in [0,1]$, максимизируюших функцию $f(x,y)$ по $x \in [0,1]$, а через $\omega_2(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ множество точек $y \in [0,1]$, максимизируюших функцию $g(x,y)$ по $y \in [0,1]$ (здесь символом $\mathbb{R}$ обозначается числовая прямая). Нетрудно видеть, что множество $\omega_1(y) \neq \varnothing$ и является компактом для любого $y \in \mathbb{R}$. Аналогично, множество $\omega_2(x) \neq \varnothing$ и является компактом для любого $x \in \mathbb{R}$. Символически определения множеств $\omega_1(y)$, $\omega_2(x)$ записывают так:

$$\omega_1(y) = \operatorname*{Arg\,max}_{x\in[0,1]} f(x,y),$$

$$\omega_2(x) = \operatorname*{Arg\,max}_{y\in[0,1]} g(x,y).$$

Множественнозначные функции $\omega_1(y)$, $\omega_2(x)$ являются примерами многозначных отображений. Теория многозначных отображений широко используется в современной математике (см., например [6]). Для получения аналитического описания искомого множества $\mathfrak{A}$ полезно рассмотреть множество

$$Gr\omega_1 = \{(x,y) \in K : x \in \omega_1(y), y \in [0,1]\} \tag{3}$$

и множество

$$Gr\omega_2 = \{(x,y) \in K : x \in [0,1], y \in \omega_2(x)\}. \tag{4}$$

Множества $Gr\omega_1$, $Gr\omega_2$ называются графиками многозначных отображений ω_1, ω_2 соответственно. Из теории многозначных отображений (см., например, [6]) вытекает, что множества $Gr\omega_1$, $Gr\omega_2$ являются компактами. Известным фактом из теории игр (см., например, [1-4], [6]) является равенство

$$\mathfrak{A} = Gr\omega_1 \bigcap Gr\omega_2. \tag{5}$$

Формула (5) представляет большой интерес для исследуемой игры. Мы покажем, что многозначные отображения ω_1, ω_2 имеют достаточно простую структуру, что позволяет конструктивно (графически) использовать формулу (5) для вычисления $\mathfrak{A}$. Для построения многозначного отображения $\omega_1(y)$ полезно рассмотреть функции

$$h_1(\xi,\eta) = -\xi^2 + c_2\xi\eta + c_3\eta^2 + c_4\xi + c_5\eta,$$

$$h_2(\xi,\eta) = \xi^2 + d_2\xi\eta + d_3\eta^2 + d_4\xi + d_5\eta,$$

где c_i, d_j —произвольные фиксированные числа.

Займемся максимизацией функции $h_1(\xi,\eta)$ по $\xi \in [0,1]$ при $\eta \in \mathbb{R}$. Выделяя полный квадрат, получаем следующее представление:

$$h_1(\xi,\eta) = -\left(\xi - \frac{c_2\eta + c_4}{2}\right)^2 + \frac{(c_2\eta + c_4)^2}{4} + c_3\eta^2 + c_5\eta.$$

Отсюда для функции

$$\omega_3(\eta) = \operatorname*{Arg\,max}_{\xi\in[0,1]} h_1(\xi,\eta),$$

получаем следующую формулу:

$$\omega_3(\eta) = k\left(\frac{c_2\eta + c_4}{2}\right),$$

где функция $k(\zeta) = 0$ при $\zeta < 0$, $k(\zeta) = \zeta$ при $\zeta \in [0,1]$ и $k(\zeta) = 1$ при $\zeta > 1$. Отметим, что функция $k(\zeta)$ является однозначной скалярной функцией. Аналогично рассуждая, для задачи максимизации функции $h_2(\xi,\eta)$ по $\xi \in [0,1]$ получаем для множественнозначной функции

$$\omega_4(\eta) = \operatorname*{Arg\,max}_{\xi\in[0,1]} h_2(\xi,\eta)$$

следующую формулу:

$$\omega_4(\eta) = l\left(\frac{d_2\eta + d_4}{2}\right),$$

где множественнозначная функция $l(\zeta) = 0$ при $\zeta < -\frac{1}{2}$, $l(\zeta) = 1$ при $\zeta > -\frac{1}{2}$ и $l\left(-\frac{1}{2}\right)$ — двухточечное множество $\{0,1\}$.

Отметим, что функция $l(\zeta)$ везде, кроме точки $-\frac{1}{2}$, однозначна, а в точке $-\frac{1}{2}$ двузначна. Для построения $\omega_1(y)$ представим $f(x,y)$ в виде

$$f(x,y) = |a_1|\tilde{f}(x,y),$$

здесь

$$\tilde{f}(x,y) = \operatorname{sign} a_1.(x^2 + \tilde{a}_2 xy + \tilde{a}_3 y^2 + \tilde{a}_4 x + \tilde{a}_5 y),$$

где $\tilde{a}_i = \dfrac{a_i}{a_1}$, $i = 2, ..., 5$. Нетрудно видеть, что

$$\omega_1(y) = \operatorname*{Arg\,max}_{x \in [0,1]} \tilde{f}(x,y).$$

Если функция f первого типа, т.е $\operatorname{sign} a_1 < 0$, тогда, на основании сказанного, при $y \in \mathbb{R}$ имеем

$$\omega_1(y) = k\left(\frac{-\tilde{a}_2 y - \tilde{a}_4}{2}\right). \tag{6}$$

Если функция f второго типа, т.е $\operatorname{sign} a_1 > 0$, тогда при $y \in \mathbb{R}$ имеем

$$\omega_1(y) = l\left(\frac{\tilde{a}_2 y + \tilde{a}_4}{2}\right). \tag{7}$$

Аналогично рассуждая, для функции g первого типа, т.е. при $\operatorname{sign} b_1 < 0$, для $x \in \mathbb{R}$ получаем формулу

$$\omega_2(x) = k\left(\frac{-\tilde{b}_2 x - \tilde{b}_4}{2}\right) \tag{8}$$

и для функции g второго типа, т.е. при $\operatorname{sign} b_1 > 0$, для $x \in \mathbb{R}$ получаем формулу

$$\omega_2(x) = l\left(\frac{\tilde{b}_2 x + \tilde{b}_4}{2}\right), \tag{9}$$

где $\tilde{b}_2 = \dfrac{b_2}{b_1}$, $\quad \tilde{b}_4 = \dfrac{b_4}{b_1}$.

После построения многозначных отображений $\omega_1(y)$, $\omega_2(x)$ теперь можно для вычисления искомого множества $\mathfrak{A}$ воспользоваться формулами (3)-(5). Отметим, что в случае одноточечности множеств $\omega_1(y)$ при $y \in [0,1]$ и множеств $\omega_2(x)$ при $x \in [0,1]$ обе функции будут непрерывными соответственно для $y \in [0,1]$ и $x \in [0,1]$. В этом случае на K можно рассмотреть отображение

$$m(x,y) = (\omega_1(y), \omega_2(x)).$$

Очевидно, что $m(x,y)$ отображает квадрат K в себя. Применяя известную теорему Брауэра о неподвижной точке (см., например [6]), можно утверждать, что непрерывное отображение $m(x,y)$ имеет хотя бы одну неподвижную точку $(x_0, y_0) \in K$, для которой выполняются соотношения

$$x_0 = \omega_1(y_0), \quad y_0 = \omega_2(x_0).$$

Отсюда легко следует, что $\mathfrak{A}$ не пусто и что точка $(x_0, y_0) \in \mathfrak{A}$. Из сказанного вытекает, что только при выполнении хотя бы одного из неравенств $a_1 > 0, \quad b_1 > 0$ возможна пустота множества $\mathfrak{A}$, при этом в случае $a_1 > 0$ должно выполняться соотношение:

$$-\frac{1}{2} \in \operatorname{co}\left\{\frac{\tilde{a}_4}{2}, \frac{\tilde{a}_2 + \tilde{a}_4}{2}\right\},$$

т.е.

$$-1 \in \operatorname{co}\{\tilde{a}_4, \tilde{a}_2 + \tilde{a}_4\},$$

а при $b_1 > 0$ должно выполняться соотношение

$$-1 \in \operatorname{co}\left\{\tilde{b}_4, \tilde{b}_2 + \tilde{b}_4\right\},$$

где co означает операцию овыпукления множества.

Теперь займемся построением частного случая нашей игры, для которого $\mathfrak{A}$ содержит отрезок ненулевой длины. Фиксируем числа в (1), (2): $a_1 = -1$, $b_1 = -1$. В связи с формулой (6) рассмотрим при $y \in [0, 1]$ функцию

$$h(y) = \frac{1}{2}\left(a_2 y + a_4\right), \qquad (10),$$

где a_2 — ненулевое число и выполняются условия

$$a_4 \in [0, 2], \quad a_2 + a_4 \in [0, 2]. \qquad (11)$$

При выполнении соотношений (11) для $y \in [0, 1]$ справедливо включение

$$h(y) \in [0, 1].$$

В соответствии с формулой (6) и определением функции $k(\zeta)$ из (10), (11) вытекает, что при $y \in [0, 1]$

$$\omega_1(y) = \frac{1}{2}\left(a_2 y + a_4\right).$$

Теперь перейдем к построению констант b_2, b_4 (при $b_1 = -1$). Рассмотрим уравнение

$$x = \frac{1}{2}\left(a_2 y + a_4\right).$$

Из него получаем уравнение

$$y = \frac{2x - a_4}{a_2}. \qquad (12)$$

Полагая (см. (8), (12))

$$\frac{b_2 x + b_4}{2} \equiv \frac{2x - a_4}{a_2},$$

мы приходим к соотношениям

$$b_2 = \frac{4}{a_2}, \quad b_4 = -\frac{2a_4}{a_2}.$$

Константы a_3, a_5, b_3, b_5 можно выбрать произвольными. Нетрудно видеть, что при выбранных нами a_1, a_2, a_4, b_1, b_2, b_4 множеству $\mathfrak{A}$ принадлежит отрезок ненулевой длины на плоскости переменных (x, y), соединяющий точки с координатами $\left(\frac{a_4}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{a_2 + a_4}{2}, 1\right)$.

Определенный интерес представляет оценка сверху числа точек $\mathfrak{A}$, когда оно не пусто, в "общем" случае. Здесь можно использовать определение кусочно-линейных функций $k(\zeta)$, $l(\zeta)$ при $\zeta \in \mathbb{R}$, а также формулы (6)-(8). Отметим, что при $a_1 < 0$ график функции $x = \omega_1(y)$ (см.(6)), где $y \in \mathbb{R}$, на плоскости переменных (x, y) в общем случае состоит из 3-х прямолинейных кусков, лежащих соответственно на трех прямых :

$$x = 0; \quad x = 1; \quad x = -\frac{1}{2}\left(\tilde{a}_2 y + \tilde{a}_4\right). \qquad (13)$$

При $a_1 > 0$ график функции $\omega_1(y)$ (см. (7)) в общем случае состоит из двух прямолинейных отрезков, лежащих соответственно на двух прямых:

$$x = 0, \quad x = 1. \qquad (14)$$

Для графика функции $y = \omega_2(x)$ (см. (8), (9)) аналогичным образом появляются при $b_1 < 0$ прямые

$$y = 0; \quad y = 1; \quad y = -\frac{1}{2}\left(\tilde{b}_2 x + \tilde{b}_4\right), \qquad (15)$$

при $b_1 > 0$ прямые

$$y = 0; \quad y = 1. \tag{16}$$

Предположим, что $a_1 < 0$, $b_1 < 0$. К этому случаю имеют отношение три прямые из (13) и три прямые из (15). Если $\tilde{a}_2 \neq 0$, $\tilde{b}_2 \neq 0$ и $\dfrac{\tilde{a}_2}{2} \neq \dfrac{2}{\tilde{b}_2}$, то каждая из 3-х прямых из (13) имеет с каждой из трех прямых из (15) только одну точку пересечения и поэтому здесь из формулы (5) вытекает оценка числа точек $\mathfrak{A}$ сверху числом 9. Эта оценка грубая, так как графики многозначных отображений (3), (4) принадлежат квадрату K, а это не учитывается нами при подсчете числа попарных пересечений соответствующих исследуемых прямых.

Рассмотрим еще случаи:

1) $a_1 < 0, \quad b_1 > 0$; 2) $a_1 > 0, \quad b_1 > 0$; 3) $a_1 > 0, \quad b_1 < 0$.

В силу сказанного выше, при $\mathfrak{A} \neq \varnothing$: в первом случае число точек в $\mathfrak{A}$ не больше двух, причем (см. (6), (9))

$$\mathfrak{A} \subset \{(\omega_1(0), 0), (\omega_1(1), 1)\};$$

во втором случае число точек в $\mathfrak{A}$ не больше четырех, причем (см. (7), (9))

$$\mathfrak{A} \subset \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\};$$

во третьем случае число точек в $\mathfrak{A}$ не больше двум, причем (см. (7), (8))

$$\mathfrak{A} \subset \{0, \omega_2(0)), (1, \omega_2(1))\}.$$

В заключение остановимся на выяснении условий, при которых можно гарантировать одноточечность множества $\mathfrak{A}$. Для этого мы применим теоремы 2, 6 из [7], фиксируя при этом константы $r_1 = 1$, $r_2 = 1$. Для одноточечности $\mathfrak{A}$ в соответствии с рецептом работы [7] надо вычислить некоторую симметричную (2x2)-матрицу $G(z,r) + G'(z,r)$, где $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, штрих означает транспонирование матрицы, и обеспечить за счет a_i, b_j при $a_1 < 0$, $b_1 < 0$ ее отрицательную определенность. Простые вычисления приводят в нашем случае к требованию отрицательной определенности симметричной матрицы $\begin{pmatrix} 4a_1 & a_2 + b_2 \\ a_2 + b_2 & 4b_1 \end{pmatrix}$. С помощью критерия Сильвестра (помимо неравенств $a_1 < 0$, $b_1 < 0$) получаем неравенство

$$16 a_1 b_1 > (a_2 + b_2)^2 .$$

Благодарности Работа написана при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-12112-офи-м-2011, 12-01-00175-а, 12-01-00506, 13-01-00685, 13-01-12446 офи_м2).

Авторы благодарят Ф. П. Васильева, В. И. Жуковского и В. В. Морозова за обсуждение настоящей статьи и полезные замечания.

Литература

1. *Пархасаратхи Т., Рагхаван Т.* Некоторые вопросы теории игр двух лиц. - М.: Мир, 1974.

2. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. - М.: Высшая школа, 1998.

3. *Васин А.А., Морозов В.В.* Введение в теорию игр с приложениями к экономике. - М., 2003.

4. *Мащенко С.О.* Концепция равновесия по Нэшу и ее развития (обзор) // Journal of Comput. and Appl. Mathematics. – 2012. № 1(107). – С. 40-65.

5. *Жуковский В.И.* Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесия по Нэшу. - М.: КРАСАНД, 2010.

6. *Обен Ж.П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения. – М.: Мир, 1988.

7. *Rosen J.B.* Existence and uniqueness of equilibrium points for concave N-person games // Econometrica. – 1965. Vol. 33, № 3. – P. 520-534.

Никольский Михаил Сергеевич
ведущий научный сотрудник МИАН РАН,
доктор физ.-мат. наук.

E-mail: mni@mi.ras.ru

Мусса Абубакар,
Maitre-Assistant, канд. физ.-мат. наук,
Кафедра математики и информатики,
Ниамейский Университет им. Абду Мумуни,
Ниамей, Нигер

E-mail : moussa@mail.ru

Внешние биллиарды

Ф. Д. Рухович

В статье рассмотрено отображение внешнего биллиарда на плоскости относительно выпуклой гладкой кривой. Для случаев достаточно простых кривых (окружность, эллипс, многоугольники с небольшим числом сторон) построена классификация областей плоскости по отношению к устройству траекторий точек при данном отображении. Для более сложных кривых приведены результаты компьютерных экспериментов.

Введение

Для любой гладкой строго выпуклой кривой на плоскости можно определить отображение внешности этой кривой в себя, называемое *внешним биллиардом.* А именно, обозначим кривую γ, и пусть x — точка вне ее. Существуют две касательные к γ прямые, проходящие через x; выберем одну из них, например правую относительно x, и, отразив x относительно точки касания, получим новую точку Tx:

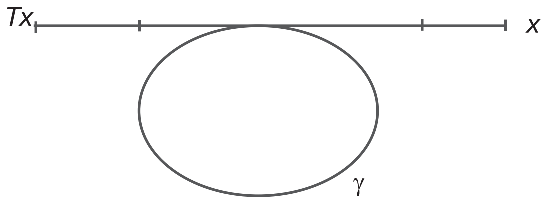


Рис. 1. Определение внешнего биллиарда

Отображение T называется *внешним биллиардом*; кривая γ называется *кривой внешнего биллиарда.*

Точку x вне фигуры γ назовем *периодической*, если существует такое натуральное n, что $T^n x = x$, а *периодом* этой точки — минимальное такое n. В данной работе мы будем исследовать периоды различных точек для различных кривых γ (эти кривые ещё называют «столами»), а также пытаться найти точки с бесконечной траекторией (т. е. апериодические точки; такие точки мы иногда будем называть бесконечными).

Данная тема интересна своей наглядностью. В настоящей работе почти не будет формул, а значительной частью доказательств будут являться картинки. Такая наглядность действительно редко встречается в современной математике, как видится автору. Кто-то может заявить об «игрушечности» этой темы — да, это всего лишь игра. Но разве математика не является одной большой прекрасной игрой? И есть ли лучшее средство для развития, чем игра? К тому же одним из наиболее общих методов исследования в науке является метод построения игрушечных моделей с последующим их усовершенствованием этих моделей. За примером далеко ходить не надо: сам внешний биллиард на заре своего существования рассматривался Мозером как игрушечная модель движения планет, ибо орбита точки вокруг стола внешнего биллиарда напоминает орбиту небесного тела. Как и в случае планетарных движений, динамику двойственного биллиарда легко определить, но трудно проанализировать; в частности, совсем не ясно, может ли орбита точки уйти на бесконечность или же «упасть» на стол (цит. по [2]);

Этот вопрос был первоначально поставлен Б. Нейманом, который, по-видимому, и ввёл внешние (или «двойственные») биллиарды в конце 1950-х годов.

В той же книге [2] Табачников приводит две мотивации к изучению внешних биллиардов. Приведем их, почти без изменений, и мы.

«Начнем с двух мотиваций. Сначала… дадим интерпретацию двойственной биллиардной системы как механической системы, а именно импульсного осциллятора… Рассмотрим гармонический осциллятор на прямой, то есть частицу, координата которой, как функция времени, есть линейная комбинация $\sin t$ и $\cos t$ Имеется также 2π-периодически движущаяся массивная стена слева от частицы, положение которой $p(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $p''(t) + p(t) = r(t)$, где $r(t)$ — это неотрицательная периодическая функция, которая удовлетворяет условиям

$$\int_0^{2\pi} r(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} r(t)\cos t\,dt = 0.$$

Когда частица ударяется о стену, происходит упругое отражение так, что скорость частицы относительно стены мгновенно меняет знак.

Эта механическая система изоморфна двойственному биллиарду относительно замкнутой выпуклой кривой $\gamma(t)$, параметризованной углом, образованным касательной с горизонтальным направлением, радиус кривизны которой r(t). Выберем начало координат O внутри γ и пусть $p(t)$ — опорная функция. Как мы уже знаем... $p''(t) + p(t) = r(t)$. Пусть x — точка вне γ, и пусть плоскость вращается с постоянной угловой скоростью относительно начала координат O. Рассмотрим проекции x и γ на горизонтальную прямую. Положение вращающейся точки определяется как функция времени t соотношением $(R\cos(t+t_0), R\sin(t+t_0))$. Следовательно, проекция этой точки x есть гармонический осциллятор на прямой, правая концевая точка проекции γ, есть «стена» $p(t)$. Когда осциллятор и стена соударяются, касательная из x в γ, будет вертикальной. Для того чтобы в проекции было упругое отражение, точка x должна отражаться от точки касания:

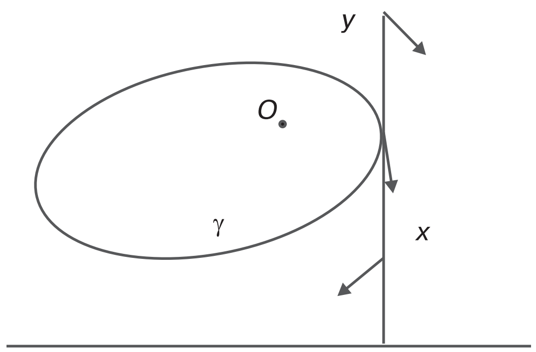


Рис. 2. Двойственный биллиард как импульсный осциллятор

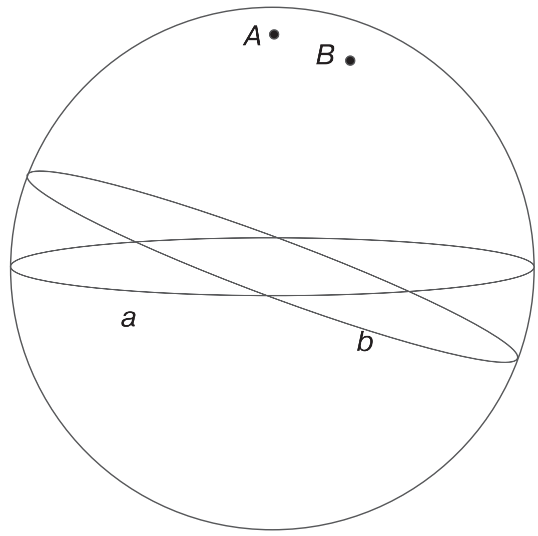


Рис. 3. Сферическая двойственность

Второй мотивацией и объяснением термина «двойственный биллиард» является сферическая двойственность... Напомним, что на единичной сфере имеет место двойственность между точками и ориентированными прямыми (то есть большими окружностями): полюсу соответствует ориентированный экватор (см. рис. 3). Заметим, что сферическое расстояние AB равно углу между линиями a и b.

Как и проективная двойственность..., сферическая двойственность распространяется на гладкие. кривые: кривая γ, определяет однопараметрическое семейство касательных, а каждая прямая определяет двойственную точку. Результирующее однопараметрическое семейство точек образует двойственную кривую γ^*...

Рассмотрим биллиардное отражение от кривой γ (см. рис. 4). Закон биллиардного отражения читается: угол падения равен углу отражения. В терминах двойственной картины это означает, что $AL = LB$, и, следовательно, двойственное биллиардное отражение относительно двойственной кривой γ^* переводит A в B. Таким образом, внутренний и внешние биллиарды сопряжены сферической двойственностью и две системы изоморфны на сфере. В плоскости внутренний и внешний биллиарды не зависят друг от друга так непосредственно и не существует прямой связи между системами.»

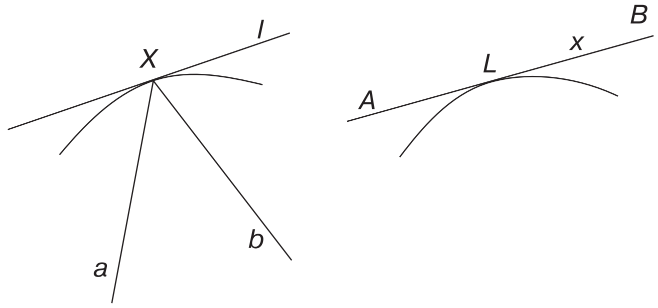


Рис. 4. Двойственность между внутренним и внешним биллиардами

Внешние биллиарды на круге

Для начала исследуем преобразование внешнего биллиарда на круге.

Рассмотрим круг радиуса r с центром O и точку x на расстоянии $R > r$ от центра этого круга. Тогда $x_1 := Tx$ есть такая точка, что $|x_1, O| = R$ и $\angle(xOx_1) = 2\arccos(r/R) =: \alpha$. Отсюда получаем, что точка x периодична $\Leftrightarrow$ существует такие натуральные n и k, что $\alpha n = 2\pi k \Leftrightarrow \alpha/(2\pi)$ — рациональное число; период же такой точки есть знаменатель (несократимой) дроби $\alpha/(2\pi)$; если же число $\alpha/(2\pi)$ иррационально, то x оказывается апериодичной, а ее траектория (множество точек $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$) получается плотной на окружности радиуса R.

Отсюда следуют два важных свойства:

1. Плоскость вне круга разбивается на инвариантные относительно T кривые; в таких случаях говорят, что преобразование T интегрируемо. В силу того, что T коммутирует с аффинными преобразованиями(очевидно), получаем, что и T для эллипса также интегрируемо. Возникает открытый на текущий момент вопрос: есть ли иные фигуры, для которых T интегрируемо?

2. Заметим, что $\alpha/(2\pi)$ может быть любым положительным рациональным числом, меньшим $1/2$. Это означает, что для любого натурального $n \geq 3$ существует точка с периодом n (см. рис. 5).

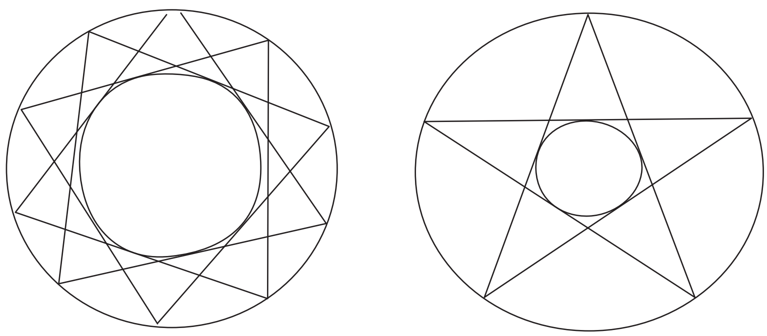


Рис. 5. Примеры начала апериодической и периодической траекторий точки в случае круга/эллипса как биллиардного стола

Естественно возникает аналогичный вопрос: а есть ли иные кривые с таким свойством? Оказывается, что верен существенно более общий результат, который мы сейчас и докажем.

Теорема 1. *Для любой гладкой замкнутой выпуклой кривой γ, т.ч. не существует (невырожденных) отрезков, лежащих целиком на кривой γ, и для любого натурального числа $n \geq 3$ существует периодическая точка с периодом n.*

Доказательство проведем в «полуфизическом» стиле. Рассмотрим n-угольник минимальной площади, описанный вокруг фигуры γ. Пусть это многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$, а отрезок A_1A_2 касается γ в точке B. Пусть B' — бесконечно близкая к B точка кривой, находящаяся «ближе» к точке A_2. Проведем через B' касательную к γ, и пусть эта касательная пересекает лучи A_nA_1 и A_3A_2 в точках A_1' и A_2' соответственно:

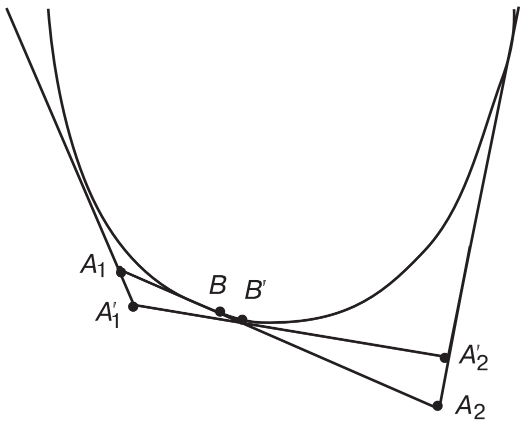


Рис. 6. Изменение касательной на бесконечно малую величину

Тогда в первом порядке малости имеем

$$\Delta S := S_{A_1'A_2'A_3\ldots A_n} - S_{A_1A_2\ldots A_n} \approx 1/2 \cdot d\alpha \cdot (|A_2B|^2 - |A_1B|^2),$$

где $d\alpha$ — угол между прямыми A_1A_2 и $A_1'A_2'$. В силу минимальности площади $A_1A_2\ldots A_n$ имеем ΔS≥ 0, откуда $|A_2B| \geq |A_1B|$. Аналогично можно показать, что $|A_1B| \geq |A_2B|$; следовательно, $|A_2B| = |A_1B|$. Таким образом, в минимальном по площади описанном многоугольнике точки касания делят стороны пополам; следовательно, вершины этого многоугольника суть траектория внешнего бильярда.$\square$

Более того, аналогичным способом можно показать, что существуют и траектории нужного периода, «обходящие» фигуру не один раз, а любое нужное нам число раз! Соответствующая теорема выглядит следующим образом:

Теорема 2. *Для любой гладкой замкнутой выпуклой кривой γ, т.ч. не существует (невырожденных) отрезков, лежащих целиком на кривой γ, и для любых натуральных чисел n и k, т.ч. $n \geq 2k+1$ существует периодическая точка с периодом n, причем её траектория «обходит» фигуру ровно k раз.*

Доказательство: зафиксируем произвольную точку O внутри кривой γ. Вместо описанного n-угольника будем рассматривать замкнутые описанные вокруг γ n-звенные ломаные $A_1A_2\ldots A_n$, обходящие кривую γ ровно k раз, причем при движении по каждому ребру мы «обходим» кривую в фиксированном направлении (например, против часовой стрелки), т. е. векторные произведения векторов $\vec{OA_1}$ и $\vec{OA_2}$, $\vec{OA_2}$ и $\vec{OA_3}$, $\ldots$, $\vec{OA_n}$ и $\vec{OA_1}$, строго положительны. В качестве оптимизируемого функционала S возьмём сумму площадей треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, $\ldots$ OA_nA_1.

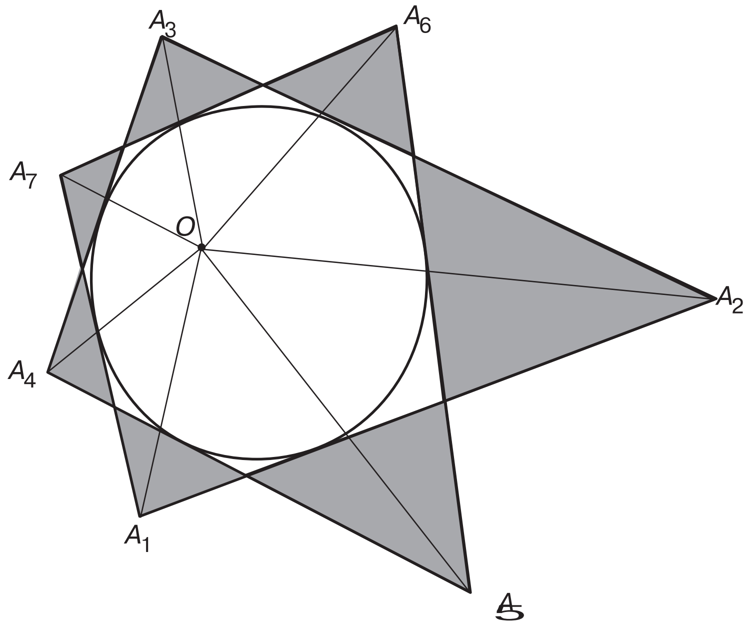


Рис. 7. Пример ломаной для $n = 7$ и $k = 2$; S в этом случае есть сумма площадей серых треугольников и удвоенной площади белого многоугольника

Аналогично доказательству теоремы 1 видим, что точки касания делят соответствующие отрезки пополам, и теорема доказана… по модулю существования соответствующих ломаных. Действительно, для $n \leq 2k$ таких ломаных не бывает в принципе, ибо ломаная должна «замести» угол $2\pi k$ (относительно O) n отрезками, каждый из которых «заметает» угол строго меньший, чем π. Однако если строить ломаные с сильно удаленными от кривой γ точками, то обойти требуемый угол за $2k + 1$ отрезок, а затем и построить нужную ломаную (для $n > 2k + 1$ дополнительно применяем метод обрезания углов) не составляет труда (см. рис. 8).

Условие о том, что на кривой нет отрезков, является критичным: в следующих нескольких разделах мы увидим, что, например, для столов-многоугольников эти теоремы неверны; более того, возможные периоды могут принадлежать лишь определенному классу чисел. Что это за числа, и есть ли бесконечные точки — попробуем исследовать в следующих разделах.

Внешние биллиарды на многоугольниках

При рассмотрении отображения внешнего биллиарда (будем называть его по-прежнему T) для столов-многоугольников возникает проблема некорректности определения T на продолжениях сторон многоугольника. В этом случае будем говорить, что T не определено для таких точек. Таким образом, область определения T для n-угольника распадается на n областей D_i, в каждой из которых T есть центральная симметрия относительно соответствующей вершины A_i многоугольника (см. рис. 9).

В случае многоугольника точки вне стола можно разбить на следующие три типа: 1) точки с конечной траекторией (случай, когда на очередном шаге мы попадаем в точку, в которой T не определено); 2) точки с периодической траекторией; 3) точки с апериодической траекторией (бесконечные точки).

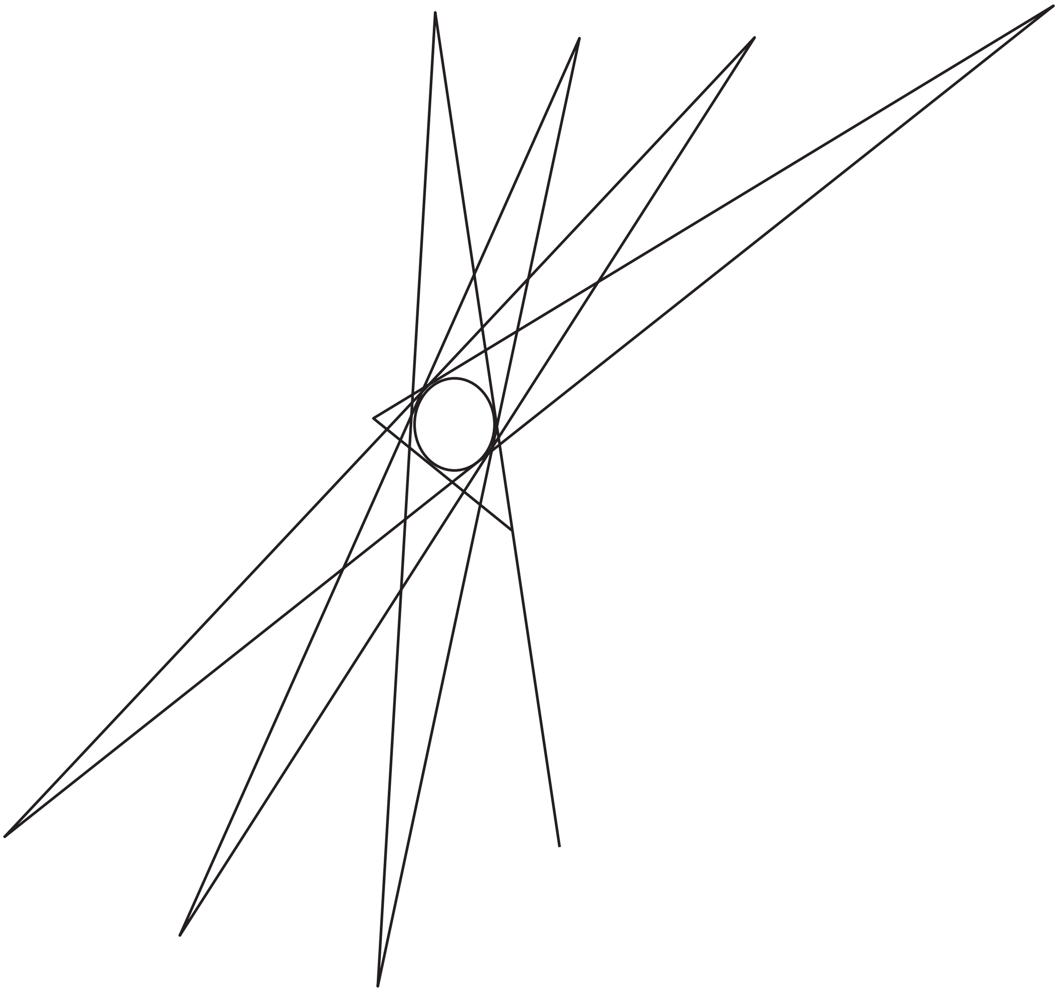
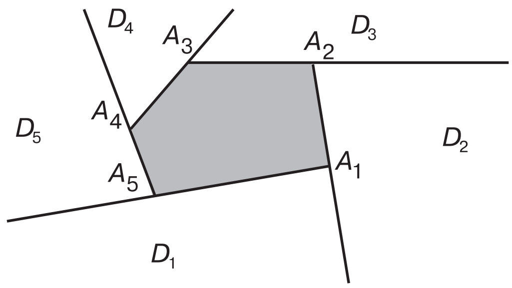


Рис. 8. Пример построения ломаной для случая $k = 4$ и $n = 9$

Рис. 9. Области определения внешнего биллиарда для многоугольника



Рассмотрим несколько свойств внешнего биллиарда:

1. Множества точек каждого типа инвариантны относительно T (с точностью до точек, в которых T не определено);

2. Пусть B_i — множество точек, т.ч. T^i определено, а T^{i+1} нет. Тогда

   а) $B_{i+1} = T^{-1}(B_i \setminus \{\text{множество точек, в которых } T^{-1} \text{ не определено}\})$;

   б) множество точек первого типа есть $A_0 := \{\text{объединение всех } B_i\}$;

3. Если точка x имеет периодическую траекторию, то существует окрестность этой точки, состоящая целиком из периодических точек; например, можно взять (открытую) ε-окрестность точки x, где ε — минимальное из расстояний от точек траектории до границ соответствующих D_v и половин попарных расстояний между точками траекторий; более

того, если период x четен, то период точек окрестности будет совпадать с периодом x; в противном случае период точек окрестности будет вдвое больше;

4. A_0 разбивает плоскость на компоненты, являющиеся выпуклыми фигурами (возможно, нулевой меры); каждая из этих компонент при преобразовании T переходит в равную компоненту;

5. Последовательность вершин стола, относительно которых происходит отражение при построении траектории точки, зависит лишь от компоненты, в которой лежит эта точка; следовательно, понятия «типы 2 и 3» можно применять к компонентам;

6. Компонента нулевой меры не может быть компонентой 2-го типа (прямое следствие свойства 3);

7. Все точки периодической компоненты имеют один и тот же четный период, кроме, возможно, одной точки; в этом случае компонента является центрально-симметричной, а «выколотой» точкой является центр симметрии компоненты, причем его период нечетен и равен половине периода остальных точек (при каждом применении T компонента переходит в центрально-симметричную; следовательно, в тот момент, когда она перейдет сама в себя, либо все точки вернутся в свое первоначальное положение (первый случай), либо все точки перейдут в симметричные относительно центра симметрии компоненты (второй случай); четности периодов всех точек в обоих случаях очевидны; заметим, что центрально-симметричная компонента не обязана иметь выколотый в смысле периода центр — контрпример мы увидим далее);

8. Если траектория компоненты ненулевой меры ограничена, то она (траектория) периодична (ибо на ограниченном пространстве есть ограниченное число равных фигур);

9. T^2 есть параллельный перенос вдоль некоторой стороны либо диагонали; длина вектора переноса есть удвоенная длина этой диагонали или стороны (как композиция центрально-симметричных отражений);

10. Компонента есть ограниченное множество. Действительно, предположим, что одна из компонент бесконечна. Применим аффинное преобразование так, чтобы вершина A_1 отражения T для этой компоненты (назовем её C) была самой «правой» вершиной многоугольника:

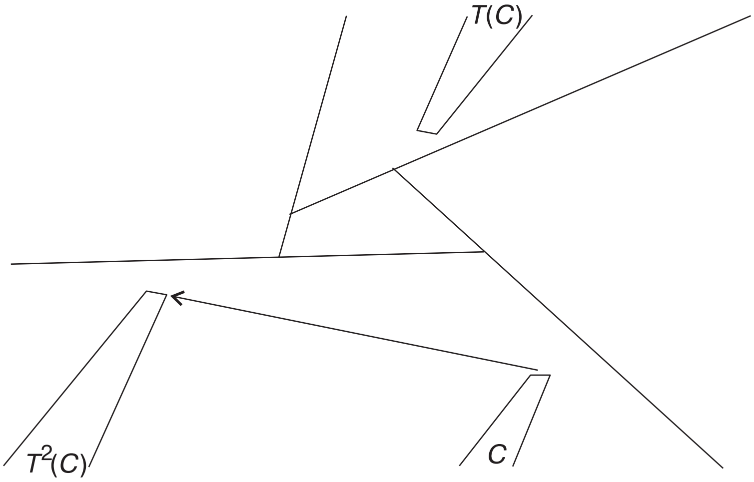


Рис. 10. Сдвиг бесконечной компоненты при T^2 «влево-вверх»

Очевидно, что T^2 сдвинет компоненту «влево-вверх» либо строго «влево», причем длины сдвигов «влево» и «вверх» отделены от нуля. Заметим, что сдвиг строго «влево» при T^2 возможен лишь в случае, если вторая вершина отражения есть A_n, т. е. $T(C)$ лежит в D_n:

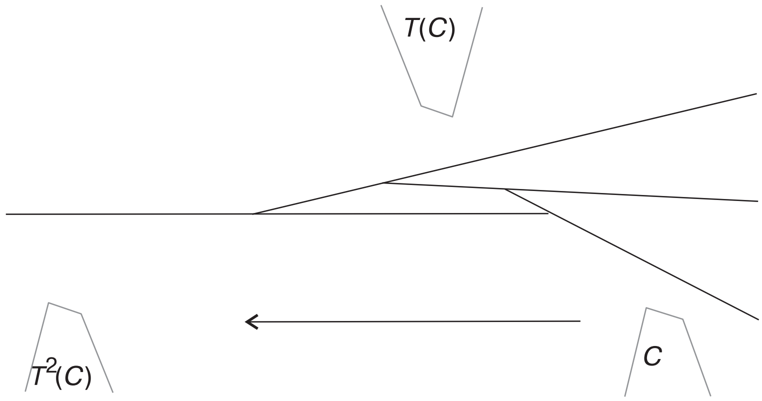


Рис. 11. Сдвиг бесконечной компоненты при T^2 «влево»

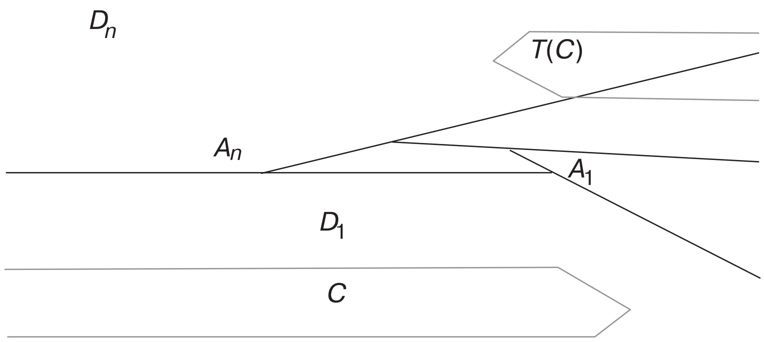


Рис. 12. «Бесконечная только влево» компонента

По мере применения $T^2(C)$ сдвигается влево, а $T(C)$ — вправо, причем на постоянную величину. Следовательно, через несколько итераций $T(C)$ покинет D_n, причем навсегда (ибо $T(C)$ сдвигается либо строго «вправо», либо «вправо-вниз»). Это означает, что T^2, начиная с некоторого момента, будет двигать C «влево-вверх». Это означает, что рано или поздно С покинет D_1 и переместится в D_n. Т.к. D_n ограничена снизу, то и C не может быть неограниченной снизу. Т.к. C в исходном состоянии ограничена лучом A_1A_n сверху и A_2A_1 справа, то она (C) неограничена слева.

11. Каждая компонента представляет собой либо (открытый) выпуклый многоугольник, стороны которого параллельны сторонам многоугольника, либо отрезок, параллельный одной из сторон многоугольника, либо точку (ибо все множество A_0 точек первого типа состоит из лучей и отрезков, параллельных сторонам многоугольника);

    Относительно этого свойства отметим, что автор не встречался с случаем компоненты отрезка. Теоретически, ни одно из свойств напрямую не противоречит ситуации, когда компонента ненулевой площади имеет уходящую в бесконечность траекторию; однако в [1] приводится теорема, из которой следуют следующее свойство:

12. Траектории внешнего биллиарда вне решеточных и правильных многоугольников ограничены.

13. Все компоненты для решеточного многоугольника суть невырожденные многоугольники (справедливо Утверждение: расстояния между параллельными прямыми, содержащими лучи либо отрезки множества В, отделены от нуля. Докажем Утверждение для лучей, параллельных ребру A_nA_1 произвольного выпуклого решеточного многоугольника. Переведем A_nA_1 в горизонтальный отрезок так, чтобы вершины многоугольника остались целочисленными. При таком преобразовании расстояния между всеми парами прямых, содержащих параллельные A_nA_1 лучи/отрезки, а) домножились на одну и ту же константу; б)

превратились в натуральные числа, т. е. стали ≥ 1 (в силу коммутируемости T и аффинного преобразования). Следовательно, Утверждение доказано, а с ним и свойство).

14. Все компоненты решеточного многоугольника есть невырожденные компоненты типа 2 (прямое следствие свойств 8, 12, 13).

Вооруженные таким мощным багажом знаний о внешних биллиардах, мы можем перейти к изучению конкретных примеров многоугольников.

Внешний биллиард вне квадрата

По-видимому, квадрат является если не самым простым для исследования внешнебиллиардным столом, то по крайней мере самым простым многоугольным столом. Попытки нарисовать A_0 вручную, равно как и компьютерные эксперименты, дают возможность предполагать, что множеством A_0 в случае квадрата с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ является целочисленная сетка (т. е. набор прямых вида $x = C$ и $y = D$, где C и D — целочисленные константы) (см. рис. 13).

Прямым следствием этой гипотезы является тот факт, что получившиеся «квадратики» должны стать компонентами. Попробуем доказать эту гипотезу.

Факт о том, что при преобразовании T квадратик переходит в квадратик, вполне очевиден. Однако напрямую это означает лишь то, что каждый квадратик принадлежит одной компоненте, но не то, что каждый квадратик есть отдельная компонента. Но из следующей картинки очевиден следующий факт: при применении T не изменяется *манхэттенское расстояние* от квадратика до стола[1] (см. рис. 14).

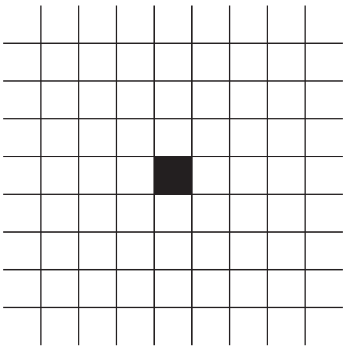


Рис. 13. Потенциальное множество точек первого типа

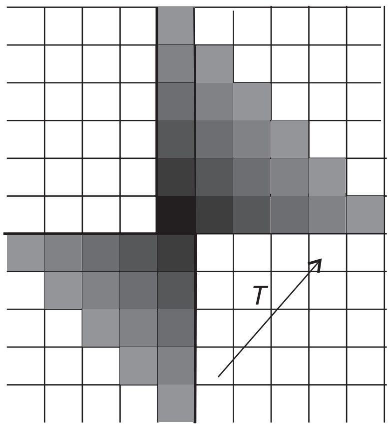


Рис. 14. Иллюстрация инвариантности «манхэттенского» расстояния до стола относительно преобразования внешнего биллиарда

Итак, каждый квадратик движется строго по «ожерелью» из 4d квадратиков, находящихся на (манхэттенском) расстоянии d. Если раскрасить все эти квадратики в шахматном порядке, то становится видно, что 1) преобразование T меняет цвет квадратика; 2) преобразование T^2 перемещает квадратик по ожерелью на 2 квадратика по часовой стрелке.

Последние два факта позволяют заключить, что период каждого квадратика есть ровно $4d$, а так как любые два соседних квадратика имеют разные периоды, то граница между ними состоит из точек лишь первого типа (ибо в какой-то момент квадратики будут отражаться от разных точек), что и приводит нас к итоговой картинке, полностью совпадающей с компьютерными экспериментами.

[1] Имеется в виду минимальное количество шагов, которое нужно сделать для перехода из квадратика до стола, если на каждом шаге можно переходить лишь в соседний по стороне квадратик.

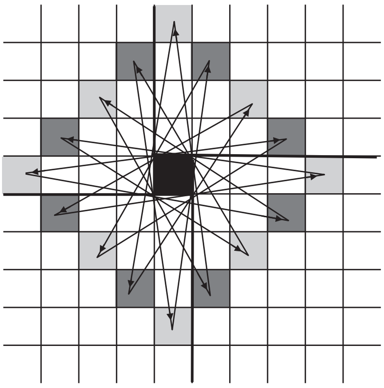


Рис. 15. Траектория одного из квадратиков

Аналогично можно провести анализ для случаев правильных треугольника и шестиугольника. Здесь можно увидеть и компоненты с выколотым по периоду центром, и не центрально-симметричные компоненты. Из рис. 17 видно, что в случае шестиугольника шестиугольные компоненты одного периода делятся на две орбиты, по $(3 \cdot \mathrm{levelNumber})$ шестиугольников в каждом, а треугольные есть единая орбита из $(12 \cdot \mathrm{levelNumber} - 6)$ треугольников. В треугольном же случае мы имеем орбиты из $(6 \cdot \mathrm{levelNumber} - 3)$ шестиугольников и $(12 \cdot \mathrm{levelNumber})$ треугольников. Здесь “levelNumber” есть номер “кольца” из одноцветных треугольников/шестиугольников; кольца нумеруются в порядке возрастания “радиуса” начиная с 1.

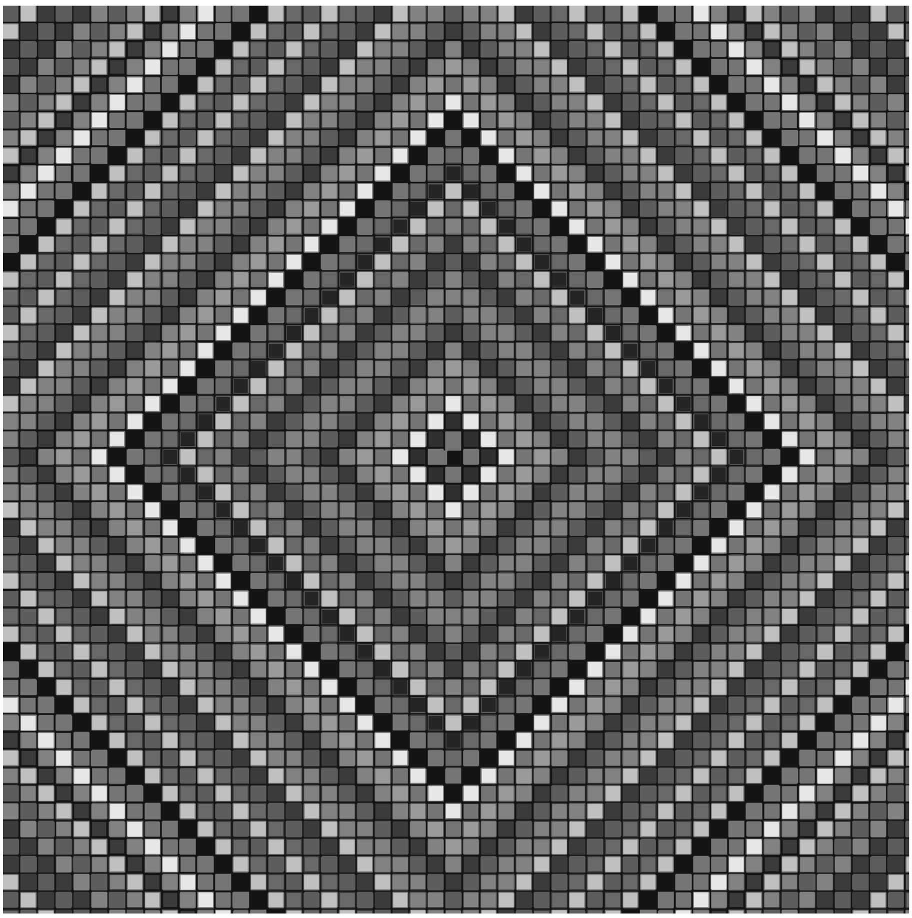
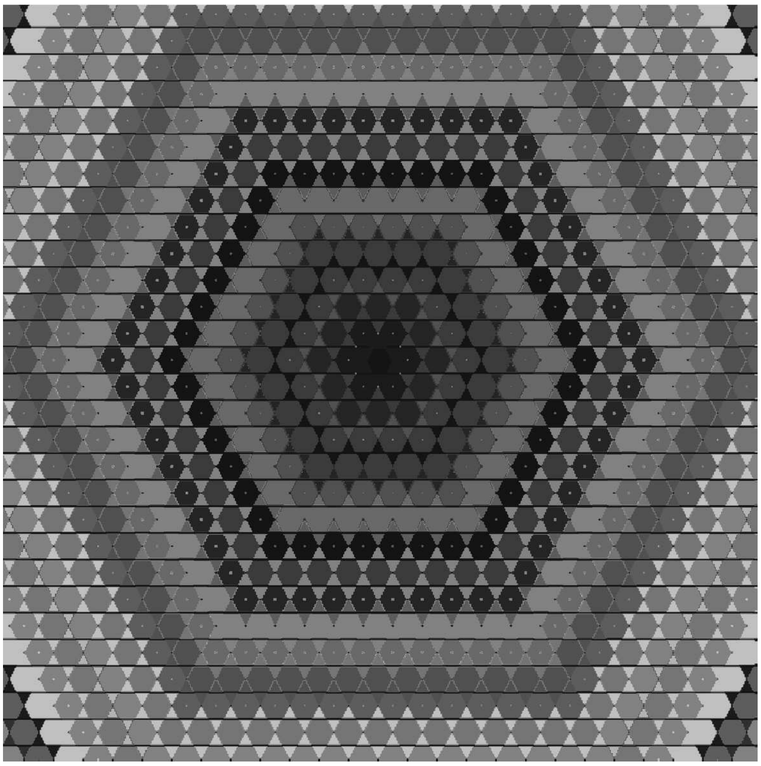


Рис. 16. Зоопарк точек внешнего биллиарда вне четырехугольника



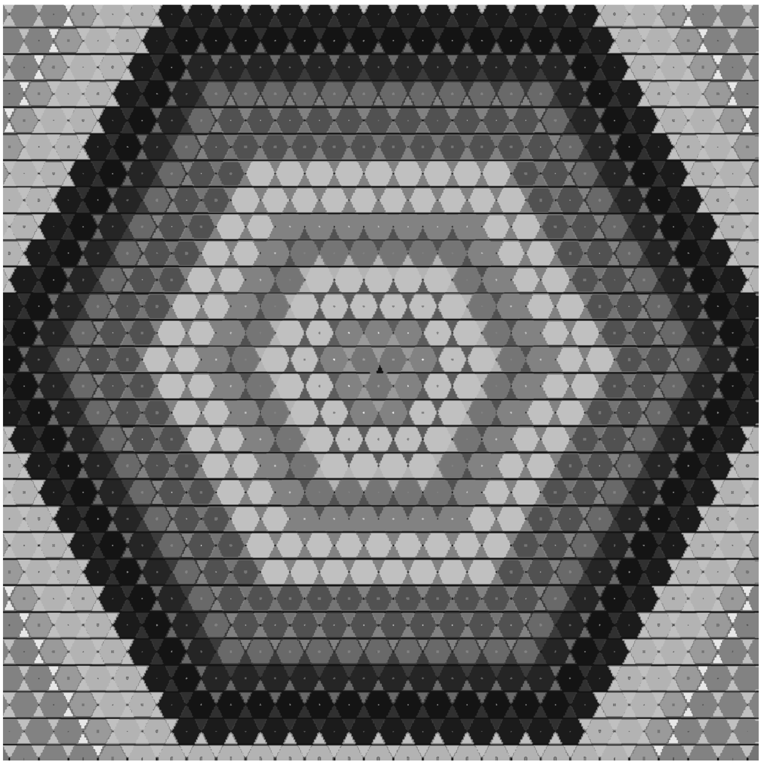


Рис. 17. Внешний биллиард вне правильных шестиугольника и треугольника

Правильный восьмиугольник

Простейшим случаем правильного нерешеточного многоугольника является правильный пятиугольник. Этот случай был подробно исследован в, например, [1]. Мы же проведем аналогичное исследование для правильного восьмиугольника.

Рассмотрим следующую инвариантную относительно T компоненту:

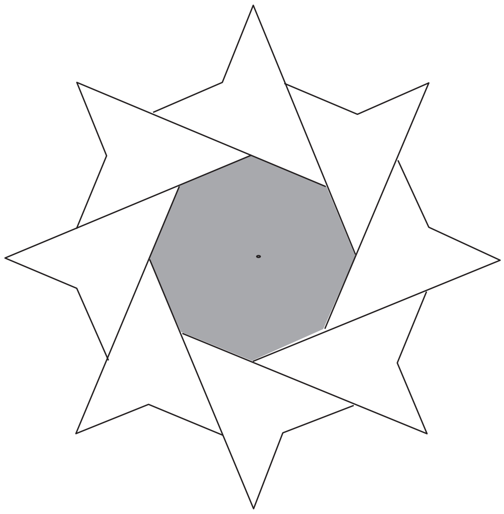


Рис. 18. Инвариантная относительно T компонента

Разделим ее на 8 равных частей, как показано на рис. 18, и отождествим их относительно поворота на $45n$ градусов; будем понимать под T производное отображение на получившейся фигуре, выглядящее следующим образом:

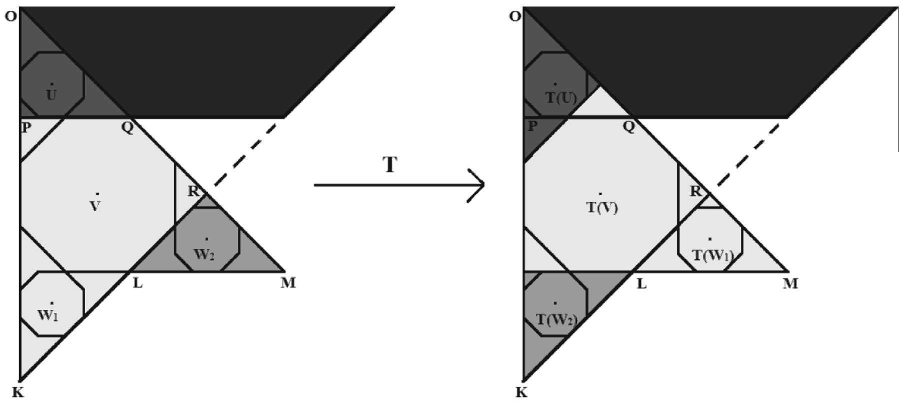


Рис. 19. Модифицированное преобразование внешнего биллиарда

Т.е. преобразование T поворачивает треугольник POQ на 135 градусов относительно точки U, четырехугольник KPQR — на 90 градусов вокруг V, а треугольник LRM — на 45 градусов вокруг точки W (во всех случаях поворачиваем против часовой стрелки). Назовем эти повороты u, v и w соответственно.

Заметим, что четырехугольник $OKLM$ можно разбить на «вписанный» в него правильный восьмиугольник с центром в точке V и три равные фигуры, подобные $OKLM$. Каждую из этих фигур можно разбить рекурсивно (см. рис. 20):

Заметим, что центральный восьмиугольник инвариантен относительно T. Верно также и то, что множество точек, лежащих в восьмиугольниках одного размера, также инвариантно относительно T. Не будем проводить доказательство этого (очевидного) факта; вместо этого сосредоточимся на дальнейшем анализе. Введем преобразование Γ, являющееся сжатием с центром в т. O и переводящим $OKLM$ в $OK'L'M'$ (см. рис. 21).

Из рис. 21 очевидно получается следующая

Лемма 1. *$\Gamma T x = T^k \Gamma x$, где $k = 15$ для x-ов треугольника OPQ, 9 дляx-ов четырехугольника $KPQR$ и 3 для x-ов треугольника LRM. Более точно,*

$$\Gamma u(x) = uvvwvwvwvwvwvvu\Gamma x, \quad \Gamma v(x) = uvvwvwvvu\Gamma(x), \quad \Gamma w(x) = uuu\Gamma(x)$$

Для дальнейшего анализа введем понятие *ранга*. Рангом точки x назовем максимальное n такое, что $\Gamma^{-n}x$ еще лежит в четырехугольнике $OKLM$, а рангом орбиты — максимум среди рангов всех ее точек.

Лемма 2. *Любая траектория ранга $n > 0$ может быть получена из траектории ранга $n-1$путем подстановки по правилу Γ из леммы 1.*

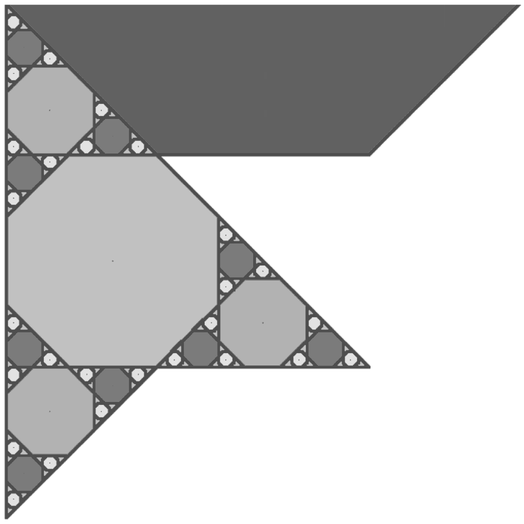


Рис. 20. Самоподобие фигуры

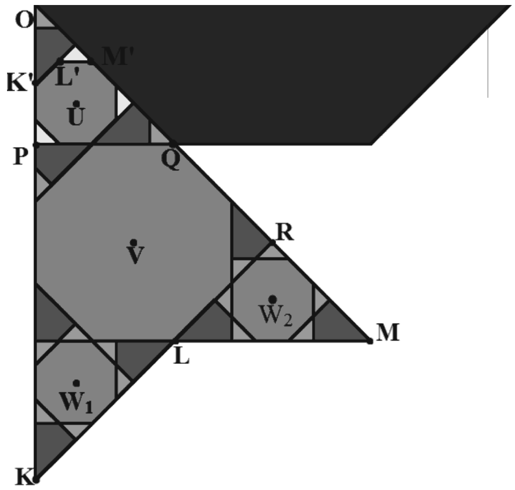


Рис. 21. Доказательство леммы 1

Доказательство: рассмотрим орбиту ранга n, и пусть x — точка ранга n этой орбиты, а $y = \Gamma^{-1}x$. Тогда, по лемме 1, $\Gamma T^k y = T^{f(k)}x$, где $f(k)$ — некоторая возрастающая функция. Т.к. ни одна из точек $\Gamma T^k y$ не имеет ранга $> n$, то ранг траектории y не превышает $n-1$, а т.к. ранг y есть $n-1$, то лемма доказана.

Лемма 2 означает, что любая периодическая траектория ранга n получается из траектории ранга 0 путем n применений операции Γ. Заметим также, что при применении Γ две соседние точки x_1 и x_2 орбиты превращаются в две точки орбиты ранга выше, между которыми появляется несколько (2, 8 или 14, если быть точнее) вершин ранга 0 (очевидно из картинки). Это дает нам возможность посчитать размер любой орбиты. Сделаем это следующим образом. Пусть в текущей периодической орбите для получения следующего элемента a_k раз применяется оператор u, b_k раз применяется оператор v, c_k раз применяется оператор w (k — ранг траектории). Тогда из леммы 1 несложно увидеть, что после применения к орбите Γ получаем:

$$a_{k+1} = 2a_k + 2b_k + 3c_k, \quad b_{k+1} = 8a_k + 5b_k, \quad c_{k+1} = 5a_k + 2b_k.$$

Разрешая эту систему, получаем:

$$\begin{aligned}
a_k &= (1 + 4(-3)^k + 3\cdot 9^k)a_0 + (-2 + 2\cdot 9^k)b_0 + (3 - 4(-3)^k + 9^k)c_0,\\
b_k &= (-2 - 4(-3)^k + 6\cdot 9^k)a_0 + (4 + 4\cdot 9^k)b_0 + (-6 + 4(-3)^k + 2\cdot 9^k)c_0,\\
c_k &= (1 - 4(-3)^k + 3\cdot 9^k)a_0 + (-2 + 2\cdot 9^k)b_0 + (3 + 4(-3)^k + 9^k)c_0,
\end{aligned}$$

а величина орбиты ранга k есть

$$a_k + b_k + c_k = (1.5\cdot 9^n - 0.5\cdot(-3)^n)a_0 + 9^n\cdot b_0 + (1.5\cdot 9^n + 0.5\cdot(-3)^n)c_0.$$

Остается лишь рассмотреть, какие траектории ранга 0 имеются в наличии (окрестностью здесь является соответствующий восьмиугольник; траектории ранга 0 на рис. 21 — четыре светло-серых восьмиугольника):

Таблица 1. Траектории ранга 0 и их характеристики

Положение стартовой точки	Маршрут	a_0	b_0	c_0	Период соответствующей траектории ранга n
Точка V	v	0	1	0	9^n
Окрестность V	$vvvv$	0	4	0	$4\cdot 9^n$
Точка U	U	1	0	0	$1.5\cdot 9^n - 0.5\cdot(-3)$
Окрестность U	$Uuuuuuuu$	8	0	0	$12\cdot 9^n - 4\cdot(-3)^n$
Точка W_1	vw	0	1	1	$1.5\cdot 9^n + 0.5\cdot(-3)^n$
Окрестность W_1	$(vw)^8$	0	8	8	$12\cdot 9^n + 4\cdot(-3)^n$

Таким образом, множество точек, имеющих траектории n-го уровня, есть, как несложно видеть, набор из $4\cdot 9^n$ восьмиугольников. Отсюда следует, что компонентами в четырехугольнике $OKLM$ являются изображенные в начале раздела восьмиугольники, и только они; помимо этих восьмиугольников и их границ (очевидно, являющихся точками первого типа), внутри $OKLM$ остаются точки; это есть точки с бесконечной траекторией.

Выводы, или что дальше?

Итак, пришло время подвести итоги. В этой работе:

Был рассмотрен внешний биллиард на круге/эллипсе, а также доказана теорема о существовании периодической траектории произвольного (возможного с точки зрения обхода фигуры нужное число раз) периода.

Были исследованы свойства внешнего биллиарда на выпуклом многоугольнике, дающие возможность установить общую структуру плоскости с точки зрения периодичности траекторий точек.

Был проведен анализ, позволивший установить самоподобие и существование точек с бесконечной траекторией для правильного восьмиугольника. Результаты находятся в полном согласии с результатами экспериментов, приведенными в [3].

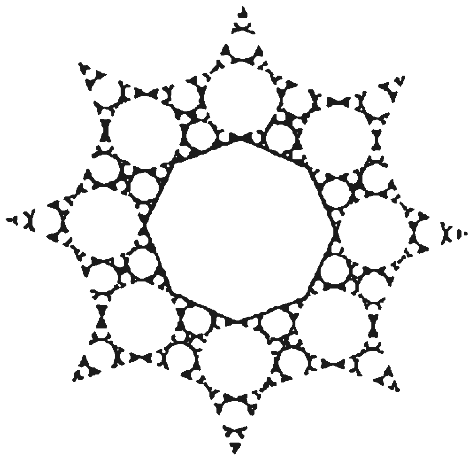


Рис. 22. Компьютерная картинка для восьмиугольника

Как было сказано ранее, проведенный анализ для восьмиугольника дал результаты, аналогичные имеющимся данным о пятиугольнике. Возникает естественный вопрос, а существует ли точка с бесконечной траекторией для внешнего бильярда на произвольном правильном n-угольнике (кроме $n = 3, 4, 6$)? Вопрос об этом остается открытым до сих пор. По данным С. Табачникова [3], компьютерные эксперименты, приведенные ниже (рис. 23–25) для различных n

позволяют утверждать, что такая точка есть, и что в первой компоненте можно пытаться провести аналогичный анализ. Однако тот факт, что нам удалось придумать такое замечательное отображение Γ (кстати, для случая пятиугольника Γ есть композиция сжатия и симметрии относительно биссектрисы угла), для восьмиугольника есть лишь следствие попытки повторить рассуждения для пятиугольника. Думается, что подобные рассуждения можно провести для каждого случая в отдельности, но 1) с возрастанием количества углов растет сложность картинки; 2) пока неясно, как такое рассуждение можно было бы обобщить на все n или хотя бы какой-нибудь подкласс натуральных чисел. . .

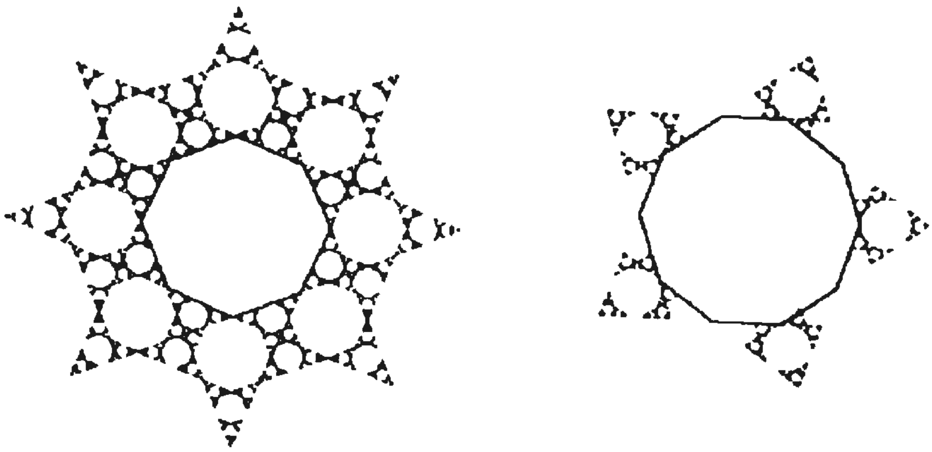


Рис. 23. Эксперименты для восьми- и десятиугольника

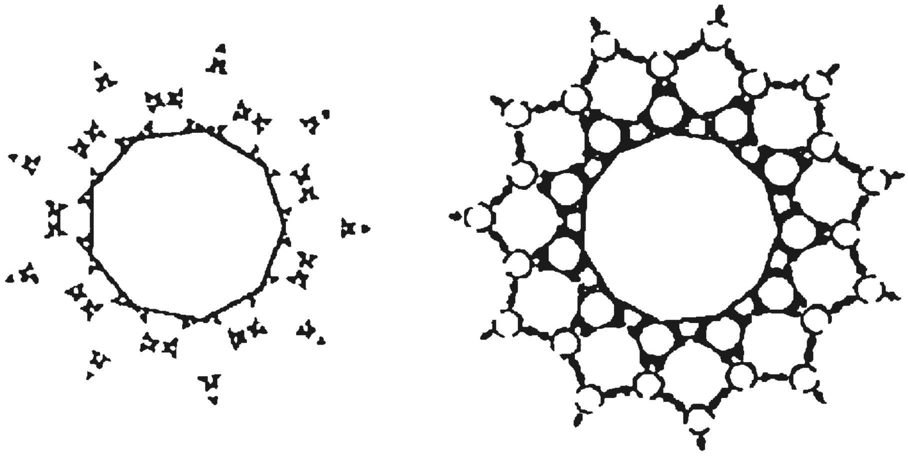


Рис. 24. Эксперименты для девяти- и одиннадцатиугольника

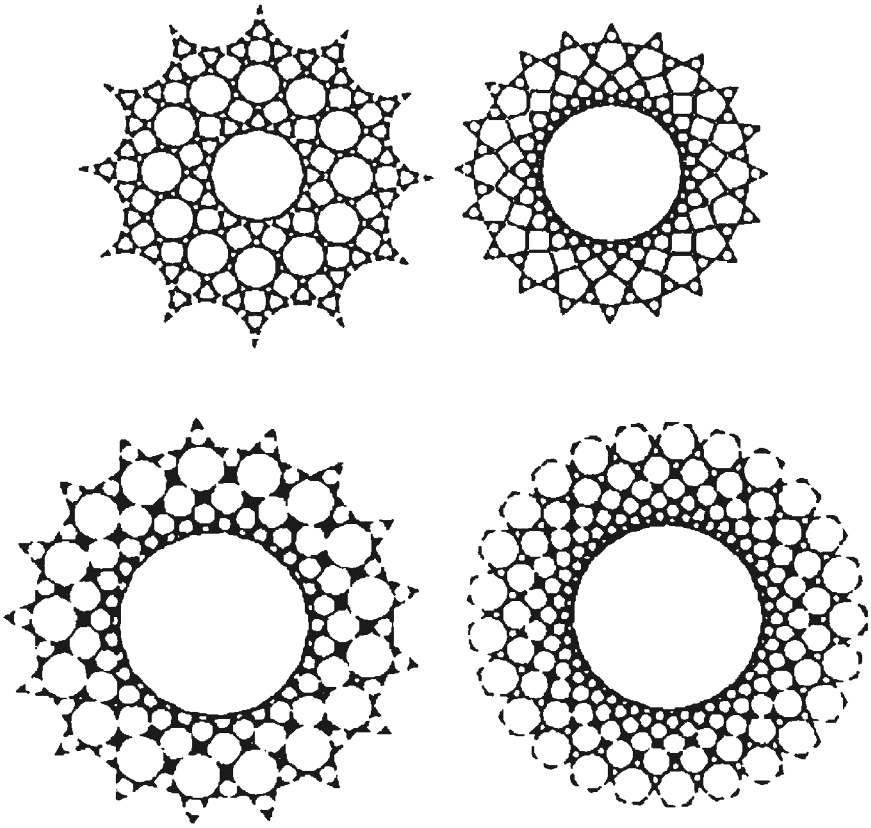


Рис. 25. Эксперименты для фигур с большим число углов

Литература

[1] Табачников С. Внешние биллиарды // Успехи математических наук. - 1993. - т. 48, № 6(294).

[2] Табачников С. Геометрия и биллиарды // Библиотека журнала «Реальная и хаотическая динамика», АНО «Ижевский институт научных исследований». - М.:Ижевск, 2011.

[3] Tabachnikov S. On the dual billiard problem // Advances in Math. - 1995. - № 115. - P. 221-249.

Рухович Филипп Дмитриевич,
студент МФТИ.

E-mail: dprpavlin@gmail.com

К 150-летию журнала "Педагогический сборник"

Р. З. Гушель

В 2014 г. исполняется 150 лет со времени начала выхода журнала "Педагогический сборник", оказавшего значительное влияние на развитие математического образования в России. В статье рассказано о деятельности журнала, а также приведена (в сокращении) напечатанная в нем статья выдающегося математика и педагога С. Н. Бернштейна.

В 2014 г. исполняется 150 лет со времени выхода в свет в С.-Петербурге первого номера журнала "Педагогический сборник". Это было издание Главного управления военно-учебных заведений. Возглавил журнал Н. Х. Вессель (1834-1906).

Первый номер, вышедший в октябре 1864г., открывается редакционной статьёй, в которой сказано, в частности: "Необходимость согласного и основательного обсуждения всех педагогических и дидактических вопросов в ближайшем применении к воспитательной и учебной деятельности преобразовывающихся военно-учебных заведений и вызвала издание «Педагогического сборника»" [1, с.V].

Здесь же была сформулирована программа нового издания. В неё вошли:

"1) Общепедагогические статьи.

2) Обсуждение вопросов о целесообразном учебном и воспитательном устройстве военных училищ...

3) Военные гимназии...

4) Педагогическая библиография" [Там же, с.VI].

Статьи вышеуказанной проблематики должны были составить неофициальную часть журнала. Была в "Педагогическом сборнике" и официальная часть, содержавшая основные документы по военному образованию.

Н. Х. Вессель руководил журналом до 1882 г., когда на посту редактора его сменил А. Н. Острогорский (1840-1917), остававшийся во главе издания до 1910 г. Третьим, и последним, редактором журнала был И. С. Симонов.

"Педагогический сборник" выходил ежемесячно до 1917 г. включительно. Регулярность издания была нарушена лишь в 1880 г., когда не вышло ни одного номера. В течение следующих двух лет выходило по 4 номера, а с 1883 г. журнал вновь стал ежемесячным.

Как известно, в военных учебных заведениях математические науки преподавались на довольно высоком уровне. И в журнале статьи по математике и вопросам её преподавания занимают видное место.

Среди авторов-математиков, наряду с профессорами В. П. Ермаковым и В. Я. Цингером, были генералы М. Г. Попруженко и В. Ю. Шидловский, многие годы преподававшие в военных учебных заведениях, и такие известные методисты как А. И. Гольденберг, В. А. Евтушевский, В. А. Латышев, С. И. Шохор-Троцкий. Этот список далеко не полон.

Значительное место в журнале отводилось рецензиям как на отечественную, так и на зарубежную литературу по всем учебным предметам.

Приведём названия некоторых статей по математике и методике её преподавания:

Евтушевский В.А. Пропедевтика алгебры (1868, №№ VII, VIII).

Латышев В.А. О преподавании геометрии (1877, № XII).

Гольденберг А.И. Как решать неопределённые уравнения первой степени с двумя неизвестными? (1884, № X).

Ермаков В.П. Роль памяти в математике (1894, № V).

Шохор-Троцкий С.И. О связи теории пределов с теорией иррациональных чисел (1901, № I).

Шапошников А.Н. Учение о мнимом числе (1904, № VI).

Балдин С. О преподавании аналитической геометрии в кадетских корпусах (1909, № I).

Попруженко М.Г. Материалы по методике анализа бесконечно малых в средней школе (1912, №№ VIII-X).

Шидловский В.Ю. О желательности ознакомления учащихся старших классов нашей средней школы со способом интерполирования (1913, № VI).

В 1912 и 1914гг. в России проходили I и II Всероссийские съезды преподавателей математики. М. Г. Попруженко, будучи участником обоих съездов, рассказал о них на страницах журнала (1912, № II; 1914, № VII).

Укажем теперь несколько книг по математике, рецензии на которые были помещены в "Педагогическом сборнике".

Киселёв А.П. Элементарная алгебра. 1888. Две части. (рец. М.Попруженко, 1889, № IV).

Рыбкин Н.А. Учебник прямолинейной тригонометрии для средних учебных заведений. М., 1896 (рец. В. Шидловского, 1897, № III).

Клейн Ф. Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии. Киев, 1898 (рец. В. Шидловского, 1899, № VIII).

Щербина К.М. Математика в русской средней школе. Киев, 1908 (рец. С. Бернштейна, 1909, № XII).

Адлер А. Теория геометрических построений. Одесса, 1910 (рец. С. Бернштейна, 1911, № III).

Даже из такого краткого списка статей и рецензий виден широкий спектр проблем, которым были посвящены публикации журнала. Они отражали стремления и авторов, и редакции к обновлению средней школы в России.

В 1915 г. в С.-Петербурге вышел "Систематический указатель статей, напечатанных в неофициальной части "Педагогического сборника" за пятьдесят лет (1864-1914). Составил С. А. Переселенков". Объём этой книги составил около трёхсот страниц. Она содержит список всех публикаций журнала, распределённых по областям знания. Отдельно приведен и перечень всех рецензий, расположенных по тому же принципу.

Листая указатель, вспоминаешь слова И. Я. Депмана, считавшего что "Педагогический сборник" "несомненно, самый солидный из всех чисто методических журналов по математике до революции" [2, с.12].

Рецензии на математическую литературу, помещённые в журнале, относятся, преимущественно к концу XIX – началу XX века. Ведущими рецензентами в эти годы были С. Н. Бернштейн, М. Г. Попруженко и В. Ю. Шидловский.

Замечательный отечественный математик Сергей Натанович Бернштейн (1880-1968) был в начале XX века приват-доцентом Харьковского университета. Впоследствии он стал крупным учёным, создателем научных школ по теории дифференциальных уравнений, теории функций и теории вероятностей, академиком АН СССР (в 1929 г.). С 1933 г. С. Н. Бернштейн — профессор Ленинградского политехнического института и Ленинградского университета, а с 1935 г. — сотрудник МИАН СССР. В начале XX века учёный активно участвовал в работе по реформе курса математики в средней школе. В частности, он был делегатом обоих Всероссийских съездов преподавателей математики, где выступил с докладами: "Исторический обзор понятия о функции" и "Понятие функции в средней школе".

Ниже приводится (в сокращении) статья С. Н. Бернштейна "Проект учебного плана по математике для мужских гимназий, предлагаемый Киевским физико-математическим обществом", опубликованная в сентябрьском номере "Педагогического сборника" за 1908 г. [3].

Начало XX века как в России, так и за рубежом, было ознаменовано попытками реформирования курса математики мужской средней школы. В 1908 г. была создана Международная комиссия по преподаванию математики во главе с выдающимся немецким математиком Ф. Клейном (1849-1925). Русскую национальную подкомиссию возглавил председатель Учёного Комитета министерства народного просвещения академик Н. Я. Сонин (1849-1915).

Киевское физико-математическое общество разработало проект учебного плана по математике для гимназий. Ему и посвящена статья С. Н. Бернштейна.

Скажем несколько слов о Киевском физико-математическом обществе (КФМО). Оно было основано 125 лет назад, в 1889 г. Активное участие в учреждении общества приняли такие видные учёные и педагоги, как Б. Я. Букреев, М. Ю. Ващенко-Захарченко, В. П. Ермаков и Э. К. Шпачинский.

Членами КФМО были как учёные-математики, так и преподаватели средних учебных заведений города, а также студенты. В круг интересов общества входили как сугубо научные, так и педагогические вопросы.

В 1907 г. в КФМО была создана комиссия для разработки проекта реформы среднего математического образования в России. В состав комиссии вошли: Г. К. Суслов, В. П. Ермаков, И. И. Косоногов, А. Д. Билимович, Г. Т. Белобжевский, П. А. Долгушин и К. М. Щербина. Комиссия подготовила проект учебного плана по математике для мужских гимназий. Этот проект был опубликован отдельным изданием, а также помещён в виде приложения в книге К. М. Щербины “Математика в русской средней школе” [4], вышедшей в Киеве в 1908 г.

В рецензии на эту книгу, опубликованной в “Педагогическом сборнике” в 1909г., № XII, С. Н. Бернштейн писал, что ее идеи были положены в основу проекта учебного плана по математике КФМО. Его же статья, вышедшая годом раньше, была специально посвящена этому проекту.

Одобряя, в целом, подход и взгляды составителей, автор статьи высказал свои замечания по некоторым конкретным пунктам проекта. Так, он считал целесообразным перенести изучение элементов аналитической геометрии из восьмого класса в шестой, чтобы активнее использовать метод координат при изучении математики в старших классах.

С. Н. Бернштейн с сомнением отнёсся к целесообразности введения в восьмой класс “логического обоснования математических понятий”, считая, что эти вопросы для средней школы и трудны, и необязательны.

Кроме того, он считал желательным исключить из программы вопросы теоретической арифметики в том виде, как они изучались в восьмом классе гимназии. Однако, несмотря на некоторые замечания, учёный активно поддержал работу киевлян.

Приведённая ниже публикация весьма убедительно показывает, что в начале XX века математическое сообщество серьёзно заботило состояние среднего математического образования в стране. Указаны основные направления его совершенствования, в том числе, и за счёт введения новых для средней школы разделов.

В работе по обновлению школьного математического образования роль периодической печати и, в частности, журнала “Педагогический сборник” трудно переоценить.

Литература

1. Систематический указатель статей, напечатанных в неофициальной части “Педагогического сборника” за пятьдесят лет (1864-1914). Составил С. А. Переселенков. Пг., 1915.

2. Депман И.Я. Русские математические журналы для учителя // Математика в школе. 1951, № 6, с.9-23.

3. Бернштейн С. Проект учебного плана по математике для мужских гимназий, предлагаемый Киевским физико-математическим обществом // Педагогический сборник, 1908, № IX, с.241-248.

4. Щербина К.М. Математика в русской средней школе. Киев, 1908.

С. Бернштейн

Проект учебного плана по математике для мужских гимназий, предлагаемый Киевским физико-математическим обществом

Вопрос о реформе преподавания математики в наших гимназиях уже давно назрел. Достаточно беглого взгляда на программу, чтобы убедиться, что в ней нет и следа глубоких математических открытий, которые, начиная с XVIII столетия, совершили величайший переворот в математике и сделали ее необходимой основой всех положительных наук.

Нет сомнения, что в близком будущем у нас, как и за границей, преподавание математики будет поставлено на более рациональных началах. Но нужно, чтоб реформа явилась результатом разностороннего обсуждения этого вопроса всех заинтересованных в нем и не была бы сюрпризом для преподавателей, которые должны проводить программы в жизнь.

В реальных училищах реформа уже осуществлена, но к сожалению, она не в достаточной мере обсуждалась в печати, и поэтому, по существу вполне отвечая назревшей потребности, она пропитана старым канцелярским духом... Неподготовленность преподавательского персонала, и в особенности, отсутствие хороших учебников и задачников усугубляют трудность проведения реформы.

Нельзя поэтому не приветствовать важного шага, сделанного Киевским физико-математическим обществом, для выработки программы по математике для мужских гимназий, опубликованием своего проекта, явившегося плодом продолжительного и разностороннего изучения вопроса.

Общее число часов в неделю, посвящаемое математике, согласно проекту КФМО должно остаться приблизительно неизменённым: примерно 33 часа во всех классах: в V-м классе 5 уроков, а в остальных по 4 в неделю. Изменяется лишь характер и содержание преподавания. Вот что сказано по этому поводу в введении к проекту:

"В основу курсов арифметики и алгебры должны быть положены две главных идеи: первая - развитие понятия о числе (от целого положительного до комплексного) в зависимости от последовательно вводимых новых операций и вторая — выяснение и раскрытие понятия о функциональной зависимости величин".

Относительно преподавания геометрии говорится: "Главною целью курса геометрии должно быть качественное и количественное изучение пространственных представлений... Немалую пользу: может принести изучение законов симметрии, гомотетии и перемещения фигур".

При выработке учебного плана на основании этих принципов КФМО пользуется опытом Западной Европы и вводит изменения в ныне действующие у нас программы весьма осторожно. Предлагается упразднить:

1°. По арифметике: Церковно-славянскую нумерацию; пропорции; правило учета векселей и цепное правило; признаки, необходимые и достаточные для обращения обыкновенных дробей в десятичные данного типа, и обратно.

2°. По алгебре: Извлечение квадратного корня из многочленов, извлечение кубического корня из чисел; непрерывные дроби; теорию соединений; бином Ньютона; решение системы линейных уравнений по способу Безу.

3°. По геометрии: Условия равенства трехгранных углов, равенства и подобия призм и пирамид; отношения поверхностей и объемов подобных цилиндров и конусов.

Уменьшение программы по арифметике позволяет уделить в младших классах гимназии значительное внимание эмпирической геометрии, наглядному ознакомлению детей с основными геометрическими фигурами и телами, важнейшими их свойствами и способами измерения.

Курс алгебры и геометрии III и IV классов остается по существу неизмененным. С четвертого класса вводится, однако, уже понятие функции, а в пятом указывается графическое изображение простейших из них. По геометрии в пятом классе обращается особое внимание на способы перемещения и преобразования фигур. В шестом классе дается графическое представление логарифмической функции и принципа линейного интерполирования.

Эти незначительные добавления вполне компенсируются указанными выше сокращениями программы. В седьмом классе систематизируются общие сведения о функциях, дается понятие о непрерывности и о производной функции; геометрическое представление производной; признаки возрастания и убывания функций; понятие об интеграле, графическое представление его площадью. Курс тригонометрии остается неизменным. В восьмом классе сохраняется теоретическая арифметика и обращается особое внимание при повторении курса на обоснование и развитие математических понятий. Также систематизируются из аналитической геометрии — уравнения прямой, круга и конических сечений.

Таковы важнейшие изменения, предлагаемые КФМО. Введение в гимназический курс аналитической геометрии, элементов дифференциального и интегрального счисления является, без сомнения, насущной потребностью. Пора окончательно искоренить слишком еще распространенный взгляд на школьную математику, как на умственную гимнастику, содержание которой безразлично, а важна лишь формально-логическая сторона... Если б математика представляла бесцельную умственную работу, для большинства учеников она была бы столь мало интересна, что, несмотря на её логическую ценность, пришлось бы предпочесть её изучению предметы, дающие более живую пищу уму. Однако люди, хоть сколько-нибудь знакомые с современной положительной наукой, знают, какую важную роль во всех областях точного знания играет математика. Сообщая учащимся основные и, по существу, простые методы, которые делают из математики самое ценное теоретическое и практическое орудие мысли, мы вносим ту живую струю интереса в преподавание, без которой большая часть труда у ученика при изучении математики уходит на усилие уделить хотя бы часть своего внимания на поверхностное усвоение отвлеченных и, по-видимому, бесполезных понятий и силлогизмов...

Но мне кажется, что КФМО недостаточно тесно связывает вновь вводимое с тем, что остается из прежнего, заботясь, по-видимому, главным образом, о том, чтоб сохранить точное количественное равновесие между вводимым и упраздняемым. В действительности же необходимо, чтоб аналитическая геометрия с дифференциальным счислением заняли центральное место в преподавании, если не по количеству уделяемого им времени, то, по крайней мере, в том смысле, что весь курс должен объединяться этими теориями.

В проекте КФМО мы этого не видим; сразу бросается в глаза его мозаичный характер: отбрасываются наиболее отжившие кусочки старого, вроде непрерывных дробей или извлечения кубического корня и на то же место... вставляется понятие о производной или графическом изображении функций. Систематическое изучение основ аналитической геометрии откладывается на восьмой класс, где, согласно проекту, проходятся: понятие о координатах; расстояние между точками; прямая линия, канонические уравнения эллипса, параболы и гиперболы[1]. Этим поздним изучением совершенно сводится к нулю практическое значение аналитической геометрии при решении задач. Теория конических сечений без ущерба для цельности курса элементарной геометрии могла бы быть и вовсе упразднена; хуже всего, если простые принципы аналитической геометрии будут затемнены в голове ученика многочисленными свойствами этих новых для него кривых, запоминание которых отвлечет большую часть его умственной энергии. Элементарная синтетическая геометрия обыкновенно ограничивается кругом и прямой. Тем же вначале должна ограничиться и аналитическая геометрия. Изучая новый метод, нужно сначала испытать его и свыкнуться с ним на знакомых примерах; и только тогда, когда, благодаря многочисленным упражнениям, аналитическому решению и исследованию элементарных задач на построение, решаемых циркулем и линейкой, ученик поймет и оценит преимущества новой теории, можно в общих чертах указать ему, как обширна область её применения. Мне казалось бы поэтому более правильным несколько изменить порядок прохождения курса геометрии. Вместо синтетической стереометрии в шестом классе было бы желательно пройти основы тригонометрии и аналитической геометрии, ограничиваясь теорией прямой и круга; особое внимание следовало бы обратить на параллельное решение задач на построение путем аналитическим и синтетическим. Сравнительное применение этих двух основных методов мышления оказало

[1] Очевидно, по недоразумению пропущено уравнение окружности.

бы самое благотворное влияние на умственное развитие ученика и представляло бы, на мой взгляд, идеальную логическую гимнастику. Курс стереометрии следовало бы отложить до седьмого класса, когда многочисленными и разносторонними упражнениями предшествующего года у ученика окончательно укрепится знание планиметрии.

В седьмом же классе по проекту КФМО предполагается, как было указано выше, дать понятие об определённом интеграле, и таким образом возможно будет заменить недостаточно строгую в научном отношении теорию измерения объемов и поверхностей школьного курса теорией, являющейся непосредственным применением интегрального исчисления.

При этой перестановке материала в шестом и седьмом классе получается, правда, некоторая прибавка в виде аналитической теории прямой и круга, но благодаря этому, курс получает необходимое единство, облегчающее усвоение тесно связанных, переплетающихся между собой идей: теория объемов поглощается интегралами, исследование уравнений наглядно иллюстрируется аналитической геометрией. Но если б даже, ввиду увеличения программы, потребовалось увеличить число часов в шестом классе, то было бы целесообразно отнять для этого один час из восьмого класса, не изменяя вовсе общего числа часов.

Что касается курса 8-го класса, то проект КФМО в этом отношении меня мало удовлетворяет... Мне представляется преувеличенным то внимание, которое уделяется в проекте КФМО логическому обоснованию математических понятий. Без сомнения, все понятия и символы, с которыми приходится оперировать, должны быть точно и ясно определены; однако не следует забывать, что обоснование математики есть вопрос трудный, далеко еще не решенный и имеющий более философско-психологическое значение, чем положительно научное. Поэтому, вдаваясь в слишком большие подробности... преподаватель рискует запутаться в дебрях, вовсе не доступных для учеников. В еще большей мере я считал бы желательным упразднить так называемую теоретическую арифметику. Теоретическая арифметика имела бы смысл лишь в том случае, если б она сопровождалась изучением теории чисел, но об этом не может быть и речи в средней школе. Таким образом: весь курс математики восьмого класса должен быть изменен не так, как это предложено в рассматриваемом нами проекте...

...Нужно, чтоб средняя школа знакомила учащихся со всеми важнейшими отраслями человеческой деятельности.

В частности, необходимо резюмировать элементарный курс математики изложением того, что из себя представляет эта наука, каковы её задачи и приложения: Дополнительный курс восьмого класса должен был бы отличаться большой эластичностью в зависимости от степени развития учеников, носить характер общеобразовательный; успехи в нем ни в каком случае не должны ни оцениваться баллами, ни проверяться экзаменами; содержание его в общих чертах могло бы быть следующее:

1. Алгебраические уравнения. Понятие об алгебраическом, численном и графическом решении уравнений. Задачи на построение, разрешаемые при помощи циркуля и линейки. Понятие о конических сечениях и алгебраических кривых.

2. Понятие о дифференциальных уравнениях. Приложения дифференциальных уравнений к механике и физике.

Как бы то ни было, несмотря на поправки, которые казались бы желательны к проекту КФМО, по существу он идет навстречу потребностям времени и дает вполне удовлетворительную основу для детального обсуждения плана преподавания математики в средней школе.

Гушель Ревекка Залмановна,
г. Ярославль, научный сотрудник отдела
Истории математики и математического образования
Научно-практического центра
"Математическое просвещение".

E-mail: gushelr@yandex.ru

Библиографические материалы к юбилейным датам 2014 года. I полугодие

Р. З. Гушель

Календарь юбилейных дат первой половины 2014 г., связанных с именами известных деятелей в области математики и математического образования, а также с важнейшими событиями в этой сфере. После краткой информации о человеке или событии приводится небольшой список литературы.

9 января — 150 лет со дня рождения отечественного математика и механика, академика (с1912 г.) **Владимира Андреевича Стеклова** (умер 30 мая 1926). С 1919 по 1926 г. являлся вице-президентом АН СССР. Организовал и возглавил Физико-математический институт АН, на базе которого в 1934 г. был создан Институт математики АН, носящий и сегодня его имя.

1) Владимиров В.С. , Маркуш И.И. Владимир Андреевич Стеклов — учёный и организатор науки. - М. - 1981.

2) Гюнтер Н.М. Труды В. А. Стеклова по математической физике // УМН. - 1946. - Т. 1. - Вып. 3-4. - С. 23-43.

3) Депман И.Я. В. А. Стеклов в Петербургском университете // ИМИ. - 1953. - Вып. 6. - С. 509-528.

4) Смирнов В.И. Памяти Владимира Андреевича Стеклова // Труды МИАН. - 1964. - Т. 73. - С. 5-13.

5) Стеклов В.А. О дифференциальных уравнениях математической физики // МСк. - 1897. - Т. 19. - С. 690-806.

6) Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. - Пг. - 1922. - Т. 1. - 285с.

7) Стеклов В.А. Теория и практика в исследованиях Чебышева // УМН. - 1946. - Т. 1. - Вып. 2. - С. 4-11.

10 февраля — 175 лет со дня рождения известного отечественного педагога-математика **Александра Николаевича Страннолюбского** (умер 9 мая 1908). Им опубликован ряд учебных руководств, а также первая в России книга по методике алгебры. Среди его учеников были А. Н. Крылов и С. В. Ковалевская.

1) Александр Николаевич Страннолюбский // Образование. - 1893. - № 7-8. - С. 81-82.

2) Каптерев П. А.Н. Страннолюбский как общественно-педагогический деятель // Образование. - 1904. - № 5. - С. 25-42.

3) Ланков А.В. К истории развития передовых идей в русской методике математики. - М. - 1951.

4) Прудников В.Е. Александр Николаевич Страннолюбский — педагог и математик // МШ. - 1950. - № 5. - С. 9-13.

5) Прудников В.Е. Русские педагоги-математики XVIII-XIX веков. М. - 1956.

6) Страннолюбский А.Н. Курс алгебры, основанный на постепенном обобщении арифметических задач. - СПб. - 1868.

15 февраля — 450 лет со дня рождения выдающегося итальянского математика, механика и астронома **Галилео Галилея** (умер 8 января 1642). Последователь гелиоцентрической системы мира, созданной Н. Коперником, за публикацию сочинений на эту тему он был привлечён инквизицией к ответственности и лишён права публиковать свои труды. В математике он — один из предшественников создателей учения о неделимых, а также теории вероятностей.

1) Выгодский М.Я. Галилей и инквизиция. - М. - 1934. - Т. 1.

2) Голуб Н.С. Галилео Галилей // МОб. - 1914. - № 5. - С. 209-222.

3) Григорьян А.Т. Мера, пропорция и математическая структура механики Галилея // ИМЕН. - 1975. - Вып. 17. - С. 76-80.

4) Кузнецов Б.Г. Галилей. - М. - 1964.

5) Погребысский И.Б. Галилей и математика // Вопр. ИЕТ. - 1964. - Вып. 16. - С. 34-37.

6) Широков В.С. Галилей и средневековая математика // ИМИ. - 1979. - Вып. XXIV. - С. 88-103.

7) Галилей Г. Избранные труды. - М. - 1964. - Т. 1; 2.

12 марта — 110 лет со дня рождения отечественного математика, специалиста в области теории функций действительного переменного и теоретико-множественной топологии, доктора физико-математических наук (1941) **Людмилы Всеволодовны Келдыш** (умерла 16 февраля 1976). Она — мать пятерых детей, один из которых — лауреат Филдсовской премии, академик РАН С. П. Новиков (1938 г.р.).

1) Александров П.С. , Ляпунов А.А. Людмила Всеволодовна Келдыш (к 50-летию со дня рождения) // УМН. - 1955. - Т. 10. - Вып. 2. - С. 217-223.

2) Александров П.С. и др. Келдыш Людмила Всеволодовна (к 70-летию со дня рождения) // УМН. - 1974. - Т. 29. - Вып. 4. - С. 187-192.

3) Мацкина Р.Ю. Людмила Всеволодовна Келдыш // МШ. - 1965. - № 2. - С. 75-78.

4) Келдыш Л.В. Открытое отображение трёхмерного куба на четырёхмерный куб // МПр. - 1958. - № 3. - С. 259-264.

5) Келдыш Л.В. Топологические вложения в евклидово пространство // Труды МИАН. - 1966. - Т. 81. - С. 1-184.

19 марта — 80 лет со дня рождения отечественного педагога-математика, академика РАО (с 1993 г.) **Григория Давыдовича Глейзера**. В 1995г. назначен директором Института информатизации образования РАО.

1) Глейзер Г.Д. Геометрия. Пособие для классов вечерних (сменных) школ с ускоренным прохождением курса восьмилетней школы. - М. - 1969. - Изд. 2.

2) Глейзер Г.Д. Развитие пространственных представлений школьников при обучении геометрии. - М. - 1978.

3) Глейзер Г.Д. Психолого-математические основы развития пространственных представлений при обучении геометрии // Преподавание геометрии в 9-10 классах. - М. - 1980. - С. 253-269.

4) Глейзер Г.Д. Повышение эффективности обучения математике в школе. - М. - 1989.

5) Глейзер Г.Д. Каким быть школьному курсу геометрии // МШ. - 1991. - №4. - С. 68-71.

6) Глейзер Г.Д. Феликс Клейн о реформировании математического образования: история и современность // Математика. - 1998. - № 5. - С. 1-2.

7) Глейзер Г.Д., Ванеев К.Г. К истории изучения векторов // История математики и математического образования как предмет исследования и преподавания. - Ярославль. - 2003. - С. 201-212.

23 марта — 80 лет со дня рождения отечественного математика и физика-теоретика, академика РАН **Людвига Дмитриевича Фаддеева**. С 1993г. — директор Международного математического института имени Л. Эйлера, в 1987-1990гг. — президент Международного математического союза, главный редактор журнала “Функциональный анализ и его приложения”. С 1976 по 2000г. — директор отделения МИРАН в С.-Петербурге.

1) Людвиг Дмитриевич Фаддеев. Библиографический указатель литературы. - Л. - 1984.

2) Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния // УМН. - 1959. - Т. 14. - Вып. 4. - С. 57-119.

3) Фаддеев Л.Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трёх частиц // Труды МИАН. - 1963. - Т. 69. - С. 1-122.

4) Фаддеев Л.Д. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов // Теоретич. и математич. физика. - 1969. - Т. 1. - Вып. 1. - С. 3-18.

5) Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. - Л. - 1980.

6) Решетихин Н.Ю., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантование групп Ли и алгебр Ли // Алгебра и анализ. - 1989. - Т. 1. - Вып. 1. - С. 178-206.

29 апреля — 160 лет со дня рождения замечательного французского математика, физика и философа **Анри Пуанкаре** (умер 17 июля 1912). Основные исследования посвящены теории чисел, алгебре, топологии, математической физике, основаниям математики. С 1908 г. член Французской академии, член-корр. Петербургской АН (с 1895г.), член более 25 академий наук.

1) Александров П.С. Пуанкаре и топология // УМН. - 1972. - Т. 27. - Вып. 1. - С. 147-158.

2) Богомолов С. Вопросы обоснования геометрии. - М. - 1913. - Ч. 1.

3) Массон Ф. О жизни и деятельности Анри Пуанкаре // ВОФЭМ. - 1912. - № 566.

4) Тяпкин А.А., Шибанов А.С. Пуанкаре. - М. - 1982.

5) Пуанкаре А. Избранные труды. М. - 1971-1974. - Т. 1-3.

6) Пуанкаре А. Логика и интуиция в математической науке и в преподавании // ПС. - 1902. - № 1. - С. 57-62.

7) Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. - М.-Л. - 1947. - 392с.

8) Пуанкаре А. О науке. - М. - 1983.

11 мая — 90 лет со дня рождения советского и американского математика, члена Национальной академии наук США, **Евгения Борисовича Дынкина**. Основные работы в области математики относятся к теории групп и теории вероятностей. С 1950-х годов вёл математические кружки при МГУ. С 1976 года — в эмиграции.

1) Введенская Н.Д. и др. Евгений Борисович Дынкин (к семидесятилетию со дня рождения) // УМН. - 1994. - Т. 49. - Вып. 4. - С. 183-188.

2) Дынкин Е.Б. Марковские процессы. - М. - 1963. - 859с.

3) Дынкин Е.Б., Успенский В.А. Математические беседы. - М.-Л. - 1952.

4) Дынкин Е.Б. и др. Математические соревнования. Арифметика и алгебра. - М. - 1970. - 96с.

5) Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. - М. - 1967. - 231с.

13 мая — 115 лет со дня рождения замечательного отечественного учёного, специалиста в области механики, математики и истории науки, академика АН СССР (с 1958г.) **Пелагеи Яковлевны Полубариновой-Кочиной** (умерла в 1996 г.).

1) Александров П.С. и др. Пелагея Яковлевна Кочина // УМН. - 1979. - Т. 34. - Вып. 4. - С. 217-220.

2) Андреев К. Математика и жизнь. Научная и общественная работа П.Я.Полубариновой-Кочиной // Огонёк. - 1954. - № 29. - С. 23-24.

3) Полубаринова-Кочина П.Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды // Изв. АН СССР, сер. математ. - 1938. - С. 371-398.

4) Полубаринова-Кочина П.Я. Жизнь и деятельность С. В. Ковалевской. - М. - 1950. - 52с.

5) Полубаринова-Кочина П.Я. Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс // УМН. - 1966. - Т. 21. - Вып. 3. - С. 213-224.

6) Кочина П.Я. Николай Евграфович Кочин (1901-1944). - М. - 1979. - 347с.

7) Кочина П.Я. Наука. Люди. Годы. - М. - 1988.

22 мая — 100 лет со дня рождения американского математика, члена Национальной АН США, президента Американского математического общества (1975-1977) **Липмана Берса** (умер 29 октября 1993). Основные работы относятся к теории функций комплексного переменного и дифференциальным уравнениям с частными производными.

1) Берс Л. Математический анализ. - М. - 1975. - Т. 1; 2.

2) Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. - М. - 1966. - 351с.

3 июня — 120 лет со дня рождения известного отечественного педагога-математика, чл. -корр. АПН СССР **Ивана Косьмича Андронова** (умер 11 ноября 1975).

1) Брадис В.М. Иван Косьмич Андронов // МШ. - 1974. - № 2. - С. 84-85.

2) Депман И.Я. Иван Косьмич Андронов // МШ. - 1954. - № 5. - С. 71-73.

3) Стратилатов П.В. Чествование И. К. Андронова // МШ. - 1975. - № 4.

4) Андронов И.К. Математика действительных и комплексных чисел. - М. - 1975.

5) Андронов И.К. Полвека развития школьного математического образования в СССР. - М. - 1967. - 180с.

6) Андронов И.К. Трилогия предмета и метода математики. - М. - 1974 - Ч. 1. - 206с.

7) Андронов И.К. Три этапа в развитии международного школьного математического образования в XIX-XX веках // МШ. - 1967. - № 4. - С. 82-85.

15 июня — 120 лет со дня рождения отечественного математика, чл. -корр. АН СССР **Николая Григорьевича Чеботарева** (умер 2 июля 1947). Его труды относятся к алгебре, теории чисел, вариационному исчислению. Ученик Д. А. Граве.

1) Делоне Б.Н. Николай Григорьевич Чеботарев // Изв. АН СССР, сер. матем. - 1948. - Т. 12. - № 4. - С. 337-340.

2) Морозов В.В., Фомина Л.А. Николай Григорьевич Чеботарев. - Казань. - 1945. - 49с.

3) Окунев Л.Я. Проблема резольвент Чеботарева. - М. - 1949.

4) Чеботарев Н.Г. Дискретные бесконечные группы и их место в общей теории групп // УМН. - 1940. - Т. 8. - С. 336-364.

5) Чеботарев Н.Г. Математическая автобиография // УМН. - 1948. - Т. 3. - Вып. 4. - С. 3-66.

6) Чеботарев Н.Г. Собрание сочинений. М.-Л. - 1949-1950. - Т. 1-3.

7) Чеботарев Н.Г. Теория Галуа. - М.-Л. - 1936. - 156с.

8) Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. - М. - 2003. - 400с.

22 июня — 150 лет со дня рождения немецкого математика и физика, профессора Геттингенского университета **Германа Минковского** (умер 12 января 1909). Им было дано математическое обоснование общей теории относительности, в частности, он развил теорию четырёхмерного пространства, введя гиперболическое мероопределение.

1) Борн М. Вспоминания о Германе Минковском // Борн М. Размышления и воспоминания физика. - М. - 1977.

2) Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. - М. - 1989. - Т. 1.

3) Розенфельд Б.А. История неевклидовой геометрии. - М. - 1976.

4) Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф. От проективной геометрии - к неевклидовой. - М. - 1979.

5) Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. - М. - 1969.

6) Минковский Г. Пространство и время // Принцип относительности. - Л. - 1935. - С. 181-219.

Январь — 100 лет со времени проведения в Москве **II Всероссийского съезда преподавателей математики**, на котором присутствовало свыше 1000 делегатов. Среди докладчиков были такие известные учёные и педагоги, как А. В. Васильев, А. К. Власов, К. Ф. Лебединцев, Б. К. Млодзеевский, П. А. Некрасов, Д. М. Синцов и другие.

1) Дневник II Всероссийского съезда преподавателей математики. - М. - 1913-1914.

2) Доклады, читанные на II Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве. - М. - 1915.

3) Метельский Н.В. Очерки истории методики математики. - Минск. - 1968. - 340с.

4) Никитин Н.Н. Съезды преподавателей математики в России // Изв. АПН РСФСР. - М. - 1946. - Вып. VI.

5) Попруженко М. Второй Всероссийский съезд преподавателей математики // ПС. - 1914. - №№ 7, 8.

6) Синцов Д.М. Второй Всероссийский съезд преподавателей математики // ВОФЭМ - 1914. - № 603. - С. 72-82.

Апрель — 100 лет со времени проведения в Париже очередной **конференции Международной комиссии по преподаванию математики**, созданной в 1908 г. на IV Международном математическом конгрессе в Риме. Президентом комиссии был избран Ф. Клейн.

1) Бычков Б.П. Международная комиссия по математическому образованию // МШ. - 1970. - № 5. - С. 83-86.

2) Гушель Р.З. О деятельности Международной комиссии по преподаванию математики в начале XX столетия // МОб. - 2001. - № 3. - С. 69-85.

3) Международная комиссия по преподаванию математики. Предварительный доклад // ЖМНП. - 1909. - № 3; МСк. - 1909. - Т. 27. - Вып 1; ВОФЭМ. - 1909. - № 475-476.

4) Поляков А. Международная конференция по преподаванию математики, состоявшаяся в Париже с 1 по 4 апреля н. ст. 1914 // МОб. - 1914. - № 6.

5) Поссе К.А. Международная комиссия по преподаванию математики. Конференция в Париже 1-4 апреля (н. ст.) 1914г. // ВОФЭМ. - 1914. - № 607. - С. 198-205.

Июнь — 50 лет со времени **первого выпуска школы-интерната № 18 при МГУ** (ныне СУНЦ МГУ). Это учебное заведение носит в настоящее время имя А. Н. Колмогорова.

1) Вавилов В.В. Математических и специальных наук школа // МОб. - 2005. - № 3. - С. 58-82.

2) Колмогоров А.Н., Вавилов В.В., Тропин И.Т. Физико-математическая школа при МГУ. - М.: Знание. - 1981.

3) 50 лет СУНЦ МГУ // МОб. - 2013. - № 3. - С. 2-4.

Список сокращений

АПН — Академия педагогических наук.

Вопр. ИЕТ — Вопросы истории естествознания и техники. Сборники статей, выходившие до 1980 г.

ВОФЭМ — Вестник опытной физики и элементарной математики. Журнал, издавался в Одессе в 1886-1917 гг.

ЖМНП — Журнал Министерства народного просвещения.

ИМИ — Историко-математические исследования. Сборники статей.

ИМЕН — История и методология естественных наук. Сборники статей, издававшиеся в МГУ.

МИАН — Математический институт Академии наук (ныне МИРАН).

МОб. — Математическое образование. Журнал, выходивший в 1912-1917 и 1928-1930 гг. В 1997 г. его издание возобновлено.

МПр. — Математическое просвещение. Сборники статей, выходившие в 1934-1938 и 1957-1961 гг. В 1995 г. его издание возобновлено.

МСк. — Математический сборник. Журнал, издаётся с 1866 г.

МШ — Математика в школе. Журнал.

ПС — Педагогический сборник. Журнал, выходивший в 1864-1917 гг.

УМН — Успехи математических наук. Журнал.

Гушель Ревекка Залмановна,
г. Ярославль, научный сотрудник отдела
Истории математики и математического образования
Научно-практического центра
"Математическое просвещение".

E-mail: gushelr@yandex.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал "Математическое образование".

Журнал в электронном виде размещается формате PDF в архиве по указанной ссылке.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2014 год (включая стоимость пересылки) – 80 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2014 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 70 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ) и Российском индексе научного цитирования (РИНЦ).

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >