ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год восемнадцатый

№ 4 (72)

октябрь - декабрь 2014 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта "Научно-просветительский клуб «Ломоносов»"
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (72), 2014 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2014 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.12.2014 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 3,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (72), октябрь – декабрь 2014 г.

Содержание

Пять окружностей

В. Б. Дроздов

Автор рассматривает пять замечательных окружностей, связанных с треугольником, выводит соотношения, связывающие их радиусы с другими параметрами треугольника, а также единым способом выводит ряд геометрических неравенств между элементами треугольника. Статья может быть полезна при подготовке к решению сложных планиметрических задач из второй части ЕГЭ.

В последнее время среди задач ЕГЭ по планиметрии типа С4 (задача номер 18 профильного варианта по новой классификации — *прим. ред.*) стали встречаться задачи, в условиях которых фигурируют радиусы вневписанных окружностей треугольника. Например:

1) Найдите произведение радиусов всех вневписанных окружностей треугольника со сторонами 4, 5, 6. *Ответ:* $\dfrac{225\sqrt{7}}{8}$.

2) Найдите произведение сторон треугольника, если известно, что радиусы его вневписанных окружностей равны 9, 18 и 21. *Ответ:* 5460.

В связи с этим рассмотрим вневписанные окружности подробно.

I. Определения и формулы

Свойства *вписанной* и *описанной* окружностей треугольника хорошо известны. Менее широко освещаются три другие окружности, связанные с треугольником. Окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух его других сторон, называется *вневписанной*. Найдем радиус r_a вневписанной окружности, касающейся стороны $BC = a$ треугольника ABC, см. рис. 1.

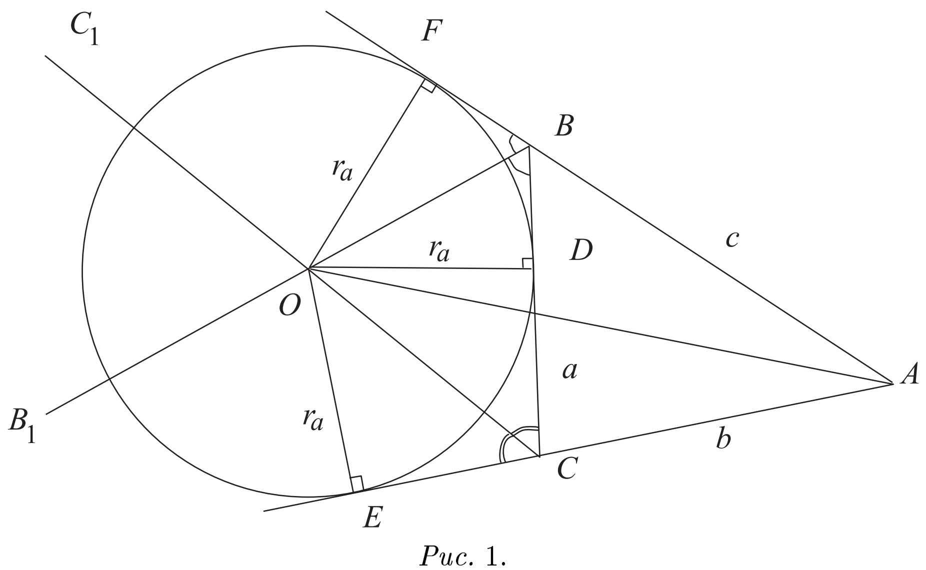


Рис. 1.

Очевидно, что центр вневписанной окружности O находится в точке пересечения биссектрис BB_1, и CC_1 соответствующих внешних углов треугольника ABC. Соединим точки A и O и рассмотрим площади треугольников:

$$S_{ABO} = \frac{cr_a}{2}, \quad S_{ACO} = \frac{br_a}{2}, \quad S_{BCO} = \frac{ar_a}{2}.$$

Но $S_{ABC} = S = S_{ABO} + S_{ACO} - S_{BCO}$, т.е. $\dfrac{r_a(b+c-a)}{2} = S$, откуда $r_a = \dfrac{2S}{2p-2a} = \dfrac{S}{p-a}$. Аналогично определяются и два другие радиуса:

$$\begin{cases} r_a = \dfrac{S}{p-a}, \\ r_b = \dfrac{S}{p-b}, \\ r_c = \dfrac{S}{p-c}. \end{cases} \tag{1}$$

Из формул (1) ясно, что $r_a = r_b = r_c \Leftrightarrow a = b = c$ и $r_a < r_b < r_c \Leftrightarrow a < b < c$.

Радиусы пяти окружностей, связанных с одним треугольником, обязательно должны быть связаны красивыми алгебраическими соотношениями, к поиску которых мы и приступаем.

II. Решение треугольника по радиусам вневписанных окружностей

Представляет несомненный интерес решить треугольник, считая известными величины r_a, r_b, r_c. По формулам (1) имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} = \dfrac{2p-a-b}{S} = \dfrac{c}{S}, \\ \text{Аналогично:} \\ \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{b}{S}, \\ \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{a}{S}. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Из формул (2) находим отношения сторон треугольника $a : b : c$:

$$a : b : c = \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) : \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}\right) : \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}\right),$$

откуда

$$\left.\begin{array}{l} a = \left(\dfrac{r_ar_c + r_ar_b}{r_ar_c + r_br_c}\right) \cdot c, \\ b = \left(\dfrac{r_ar_b + r_br_b}{r_ar_c + r_br_c}\right) \cdot c. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Из формул (1) выразим сумму $\Sigma = r_ar_b + r_ar_c + r_br_c$ попарных произведений —

$$\Sigma = S^2 \cdot \left(\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-a)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-b)}\right) = \\ = \frac{S^2(p-c+p-b+p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^2p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ = \frac{S^2p^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^2p^2}{S^2} = p^2.$$

Значит, периметр треугольника

$$2p = 2\sqrt{r_ar_b + r_ar_c + r_br_c}. \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) непосредственно следует, что

$$\begin{cases} c = \dfrac{r_c(r_a+r_b)}{\sqrt{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}}, \\ \text{и аналогично} \\ b = \dfrac{r_b(r_a+r_c)}{\sqrt{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}}, \\ a = \dfrac{r_a(r_b+rc)}{\sqrt{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}}. \end{cases} \qquad (5)$$

Формулы (5) свидетельствуют о том, что треугольник однозначно определяется заданием трех радиусов вневписанных окружностей и что любые три положительных числа могут быть длинами этих радиусов. Действительно, очевидно, что из формул (5) следуют неравенства $a+b > c, a+c > b, b+c > a$ при любых r_a, r_b, r_c.

III. Красивое геометрическое неравенство

Из формул (2) и (5) сразу вытекает, что $S = \dfrac{r_ar_br_c}{\sqrt{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}}$, тогда радиус описанной окружности

$$R = \frac{aLc}{4S} = \frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)(r_b+r_c)}{4(r_ar_b+r_ar_c+r_br_c)}.$$

Радиус вписанной окружности $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{r_ar_br_c}{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}$. Следовательно,

$$\frac{R}{2r} = (r_a+r_b)(r_a+r_c)(r_b+r_c)8r_ar_br_c.$$

Но $\dfrac{r_a+r_b}{2} \geq \sqrt{r_ar_b}$, $\dfrac{r_a+r_c}{2} \geq \sqrt{r_ar_c}$, $\dfrac{r_b+r_c}{2} \geq \sqrt{r_br_c}$.

Значит, $\dfrac{R}{2r} \geq 1$, т.е. $R \geq 2r$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $r_a = r_b = r_c$, т.е. в случае равностороннего треугольника при $a = b = c$.

IV. Элементарные симметрические многочлены

Перемножим три радиуса вневписанных окружностей:

$$r_ar_br_c = \frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{pS^3}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{pS^3}{S^2} = pS.$$

Несколько сложнее выразить сумму этих радиусов. Удобно вычислить величину $x = r_a + r_b + r_c - r$. Имеем:

$$\begin{aligned} x = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} = \\ = S\left(\frac{p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right) = \\ = S\left(\frac{p(p-c)(p-a+p-b)+(p-a)(p-b)(p-p+c)}{S^2}\right) = \\ = \frac{pc(p-c)+c(p-a)(p-b)}{S} = \frac{c(p^2-pc+p^2-pa-pb+ab)}{S} = \\ = \frac{C(2p^2-p(a+b+c)+ab)}{S} = \frac{abc}{S} = 4R \end{aligned}$$

Итак, выше нами получены значения элементарных симметрических многочленов от трех переменных — радиусов r_a, r_b, r_c вневписанных окружностей треугольника ABC:

$$\begin{cases} \sigma_1 = r_a + r_b + r_c = 4R + r, \\ \sigma_2 = r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = b^2, \\ \sigma_3 = r_a r_b r_c = pS. \end{cases} \tag{6}$$

Это открывает путь к получению математически красивых неравенств.

V. Неравенства между средними величинами

Рассмотрим цепочку классических неравенств:

$$\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}},$$

верных при $x > 0, y > 0, z > 0$ (равенства имеют место тогда и только тогда, когда $x = y = z$). Фактически, здесь шесть попарных неравенств, отраженных ниже в таблице. Сделаем в них замену переменных $x = r_a, y = r_b, z = r_c$ и воспользуемся формулами (6).

Докажем, например, первое неравенство из правого столбца таблицы:

$$\sqrt{\frac{(r_a + r_b + r_c)^2 - 2(r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c)}{3}} \geq \frac{r_a + r_b + r_c}{3},$$

Дальнейшие выкладки очевидны: $(4R + r)^2 - 2p^2 \geq \frac{1}{3}(4R + r)^2$, откуда следует, что $4R + r \geq$ $\geq p\sqrt{3}$.

Естественно, равенство имеет место в том, и только в том случае, когда треугольник равносторонний. Читатель без труда получит самостоятельно остальные пять неравенств, приведенных в таблице, а также решит две задачи из начала статьи. Интересно, что удалось единообразно «сконструировать» шесть неравенств, относящихся к геометрии треугольника.

Неравенство \ Замена переменных	$x = r_a,\ y = r_b,\ z = r_c$
$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}$	$4R + r \geq p\sqrt{3}$
$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}$	$(4R + r)^2 \geq 2p^2 + 3\sqrt[3]{p^2S^2}$
$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$	$(4R + r)^2p^2 \geq 27S^2 + 2p^4$
$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$	$(4R + r)^3 \geq 27pS$
$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$	$R \geq 2r$
$\sqrt[3]{xyz} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$	$p2 \geq 3\sqrt{3}S$

Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.

О формуле Гурса́ в полярных координатах

С. В. Шведенко

Автор показывает, как формулу Гурса́, восстанавливающую (с точностью до постоянного слагаемого) аналитическую функцию по ее действительной части, можно записать в полярных координатах на комплексной плоскости.

Известна *формула Гурса́*, восстанавливающая (с точностью до постоянного слагаемого) аналитическую функцию $w = f(z)$ по ее действительной части $u(x, y) = \mathrm{Re} f(x + iy)$:

$$\boxed{f(z) = 2u\Big(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\Big)}\,.$$

Вывод этой формулы на основе степенных разложений по двум переменным дан в учебнике французского математика Э. Гурса́[1] [**1**] (том III, часть 1, с. 145); более простое обоснование, использующее лишь уравнения Коши–Римана, предложено в заметке автора [**2**].

Прямыми следствиями указанной формулы[2] оказываются формулы восстановления аналитической функции (с точностью до постоянного слагаемого) по ее мнимой части и (с точностью до постоянных множителей) по ее модулю $\rho(x, y) = |f(x+iy)|$ и ее аргументу $\psi(x, y) = \arg f(x+iy)$:

$$\boxed{f(z) = 2iv\Big(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\Big)}\,,\quad \boxed{f(z) = \rho^2\Big(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\Big)}\,,\quad \boxed{f(z) = \exp\Big(2i\psi\Big(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\Big)\Big)}\,.$$

Может возникнуть вопрос (у автора он возник) касательно возможных аналогов указанных формул при записи переменной $z = x + iy$ в *полярной* форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$. В настоящей заметке предлагается следующий ответ на этот вопрос.

Пусть $w = f(z)$ — аналитическая функция в области, где определена однозначная ветвь $\varphi = \arg z$. Тогда она восстанавливается (с точностью до постоянного слагаемого) по своей действительной части $u(r, \varphi) = \mathrm{Re} f(re^{i\varphi})$ формулой $\boxed{f(z) = 2u\Big(\sqrt{z}, \frac{\ln z}{2i}\Big)}$, *т. е. подстановкой* $\begin{cases} r = \sqrt{z} \ \Big(= \exp\dfrac{\ln z}{2}\Big) \\ \varphi = \dfrac{\ln z}{2i} \end{cases}$ *в* $2u(r, \varphi)$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку в полярных координатах *условие Коши–Римана* для функции $w = f(z)$ принимает вид $\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{i}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$, или (в записи $f = u + iv$) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases}$, то полагая $\underline{\widetilde{f}(z) = 2u\Big(\sqrt{z}, \frac{\ln z}{2i}\Big),\ \ z = re^{i\varphi}}$, <u>и находя</u> (с учетом указанной подстановки) производные

[1] Goursat Eduard (1858–1936).

[2] При замене в ней $f(z)$ соответственно на $-if(z)$, $\ln f(z)$ и $-i\ln f(z)$.

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial r}=2\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{e^{i\varphi}}{2\sqrt{re^{i\varphi}}}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\,\frac{e^{i\varphi}}{2ire^{i\varphi}}\Big)=\frac{\partial u}{\partial r}+i\,\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial r}\,,$$

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\varphi}=2\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{ire^{i\varphi}}{2\sqrt{re^{i\varphi}}}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\,\frac{ire^{i\varphi}}{2ire^{i\varphi}}\Big)=i\,\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,,$$

можно заключить, что в упомянутой в условии области функция $w=\widetilde{f}(z)$

а) удовлетворяет *условию Коши–Римана* (в полярных координатах);

б) совпадает с функцией $w=f(z)$ или отличается от нее на *постоянное слагаемое*.

Примеры. В случае функции $w=\ln z$, для которой $u(r,\varphi)=\ln r$, применение *формулы* дает: $2u\Big(\sqrt{z}\,,\frac{\ln z}{2i}\Big)=\ln z$; если же $w=z^2$ и, соответственно, $u(r,\varphi)=r^2\cos 2\varphi$, то

$$2u\Big(\sqrt{z}\,,\frac{\ln z}{2i}\Big)=2(\sqrt{z})^2\,\frac{\exp\left(i2\frac{\ln z}{2i}\right)+\exp\left(-i2\frac{\ln z}{2i}\right)}{2}=z\big(z+z^{-1}\big)=z^2+1.$$

Как следствия приведенной *формулы* (см. подстрочное примечание[2]) имеют место следующие формулы восстановления аналитической функции (с точностью до постоянного слагаемого) по ее мнимой части $v(r,\varphi)=\operatorname{Im}f(re^{i\varphi})$ и (с точностью до постоянных множителей) по ее модулю $\rho(r,\varphi)=|f(re^{i\varphi})|$ и по ее аргументу $\psi(r,\varphi)=\arg f(re^{i\varphi})$:

$$\boxed{f(z)=2iv\Big(\sqrt{z}\,,\frac{\ln z}{2i}\Big)}\,,\quad\boxed{f(z)=\rho^2\Big(\sqrt{z}\,,\frac{\ln z}{2i}\Big)}\,,\quad\boxed{f(z)=\exp\Big(2i\psi\Big(\sqrt{z}\,,\frac{\ln z}{2i}\Big)\Big)}.$$

Примеры. *1.* В случае функции $f(z)=e^{iz}$, имеющей мнимую часть $v(r,\varphi)=e^{-r\sin\varphi}\sin(r\cos\varphi)$,

$$2iv\Big(\sqrt{z}\,,\frac{\ln z}{2i}\Big)=2i\exp\Big(-\sqrt{z}\,\frac{\exp(i\frac{\ln z}{2i})-\exp(-i\frac{\ln z}{2i})}{2i}\Big)\times$$
$$\times\frac{1}{2i}\Big[\exp\Big(i\sqrt{z}\,\frac{\exp(i\frac{\ln z}{2i})+\exp(-i\frac{\ln z}{2i})}{2}\Big)-\exp\Big(-i\sqrt{z}\,\frac{\exp(i\frac{\ln z}{2i})+\exp(-i\frac{\ln z}{2i})}{2}\Big)\Big]=$$
$$=\exp\frac{1-z}{2i}\Big[\exp\Big(i\,\frac{z+1}{2}\Big)-\exp\Big(-i\,\frac{z+1}{2}\Big)\Big]=e^{iz}-e^{-i}.$$

2. Поскольку квадрат модуля дробно-линейной функции $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ имеет в полярных координатах представление

$$\rho^2(r,\varphi)=\Big(\frac{are^{i\varphi}+b}{cre^{i\varphi}+d}\Big)\Big(\frac{\bar{a}re^{-i\varphi}+\bar{b}}{\bar{c}re^{-i\varphi}+\bar{d}}\Big)=\frac{a\bar{a}r^2+\bar{a}bre^{-i\varphi}+a\bar{b}re^{i\varphi}+b\bar{b}}{c\bar{c}r^2+\bar{c}bre^{-i\varphi}+c\bar{d}re^{i\varphi}+d\bar{d}}\,,$$

подстановка в него $r=\sqrt{z},\ \varphi=\dfrac{\ln z}{2i}$ дает:

$$\rho^2\Big(\sqrt{z}\,,\frac{\ln z}{2i}\Big)=\frac{a\bar{a}z+\bar{a}b+a\bar{b}z+b\bar{b}}{c\bar{c}z+\bar{c}b+c\bar{d}z+d\bar{d}}=\overline{\frac{a+b}{c+d}}\cdot\frac{az+b}{cz+d}\,.$$

3. Если $w=ze^z$, то аргумент этой функции можно записать в полярных координатах как $\psi(r,\varphi)=\arg\big(re^{i\varphi}e^{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\big)=\varphi+r\sin\varphi$. Соответственно

$$\exp\Big(2i\psi\Big(\sqrt{z}\,,\frac{\ln z}{2i}\Big)\Big)=\exp\Big(2i\,\Big(\frac{\ln z}{2i}+\sqrt{z}\,\frac{\exp(i\frac{\ln z}{2i})-\exp(-i\frac{\ln z}{2i})}{2i}\Big)\Big)=z\exp\big(\sqrt{z}\,(\sqrt{z}-(\sqrt{z})^{-1})\big)=ze^ze^{-1}.$$

Литература

[**1**] Гурса́ Э. Курс математического анализа. - М.-Л.: ГТТИ, 1933.

[**2**] Шведенко С.В. О равносильных определениях связности открытого множества и формуле Гурса́, восстанавливающей аналитическую функцию по ее действительной части // Математическое образование. - 2012. - №2 (62). - С. 66-70.

По поводу заметки "К выводу первого замечательного предела"[1]

Как ни странно, далеко не всем известно следующее крайне простое доказательство того факта[2], что площадь *кругового сектора*, опирающегося на дугу единичной окружности длины x, равна $\frac{x}{2}$.

В силу самого определения *длины дуги окружности*[3] выполняется предельное соотношение $x = \lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot 2\sin\frac{x}{2n}$. Переписав его (с заменой x на $2x$) в виде $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x}{n} = \frac{x}{2}$ и интерпретируя левую часть как предел *сумм площадей треугольников*, имеющих основаниями звенья правильных n-звенных ломаных, вписанных в дугу единичной окружности длины x, а общей вершиной ее центр, сразу получают значение *площади* упомянутого *кругового сектора*[4].

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук

E-mail: sershvedenko@mail.ru

---

[1] С.В.Шведенко. Две заметки по математическому анализу. "Математическое образование", №3–4 (59–60), 2011, с. 34.

[2] Обычно преподносимого как "самоочевидный", из-за чего традиционный вывод предельного соотношения $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, основанный на "сравнении площадей", оказывается некорректным (см. обсуждение этого вопроса в вышеуказанной заметке автора).

[3] Как предел (при $n\to+\infty$) *длин правильных n-звенных ломаных*, вписанных в эту дугу.

[4] В соответствии с обычным ("школьным") ее определением.

Хроматический многочлен графа в задачах

А. Ю. Эвнин

В статье компактно излагается материал, связанный со свойствами хроматического многочлена графа. Введено понятие хроматической функции графа; доказано, что эта функция является многочленом с определенными свойствами; приведен ряд задач для самостоятельного решения.

В статье используется терминология из [1,2] и стандартные обозначения [1–4]:

N_n — пустой граф с n вершинами;
K_n — полный граф с n вершинами;
C_n — циклический граф с n вершинами;
P_n — цепь с n вершинами;
W_n — колесо с n вершинами;
$G_1 \cup G_2$ — объединение графов G_1 и G_2;
$G_1 \cap G_2$ — пересечение графов G_1 и G_2;
$(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$ — нисходящий факториал.

Определение

Пусть G — граф. Обозначим через $f_G(x)$ число правильных раскрасок вершин графа в x цветов. Здесь под *раскраской в x цветов* понимается отображение множества V вершин графа в некоторое фиксированное множество мощности x, элементы которого называются «цветами». Раскраска — *правильная*, если образы смежных вершин различны (т.е. любые две смежные вершины покрашены разным цветом). Заметим, что данное определение не предполагает, что все x цветов используются (другими словами, отображение не обязательно сюръективно).

Функцию $f_G(x)$ называют *хроматической функцией* графа G. Чуть позднее мы увидим, что эта функция является многочленом от переменной x.

Если в графе есть петля, то данный граф не имеет правильных раскрасок. Ясно также, что добавление или удаление кратных рёбер никак не влияют на хроматическую функцию графа. Поэтому мы будем рассматривать *простые* графы (т.е. графы без петель и кратных рёбер).

Полезно отметить, что наименьшее натуральное число x, при котором $f_G(x) > 0$, есть *хроматическое число* графа G — наименьшее число цветов в правильной раскраске G.

Примеры

Вычислим хроматическую функцию для некоторых стандартных графов.

Пример 1. $f_{N_n}(x) = x^n$. Действительно, каждая из n вершин пустого графа N_n может быть покрашена независимо от других вершин любым из x цветов.

Пример 2. $f_{P_n}(x) = x(x-1)^{n-1}$. Любую правильную раскраску цепи можно получить, раскрашивая её вершины последовательно, начиная с одной из концевых вершин. Ясно, что при этом первую вершину можно покрасить любым из x цветов, а любую другую одним из $x-1$ цветов (каждый раз запрещённым является цвет предыдущей вершины). Отсюда и получается выражение для хроматической функции цепи.

Пример 3. $f_{K_n}(x) = x(x-1)\dots(x-n+1)$. Поскольку цвета всех вершин полного графа должны быть разными, любая правильная раскраска графа K_n в x цветов представляет собой размещение из x по n. Значит, хроматическая функция K_n и есть $A_x^n = (x)_n$ — число размещений из x по n.

Случай циклического графа не столь тривиален, как предыдущие. Поэтому не будем сразу проводить рассуждение в общем виде, а сначала рассмотрим граф C_4. Пронумеруем его вершины последовательно числами от 1 до 4. Если исключить ребро 1-4, то получим цепь P_4, число правильных раскрасок которой нам уже известно. Сколько из этих раскрасок не являются правильными для C_4? Ровно столько, сколько есть раскрасок, в которых совпадают цвета смежных вершин 1 и 4. Для подсчёта таких раскрасок мы можем «стянуть» ребро 1-4 в одну вершину и получить треугольник C_3. Таким образом,

$$f_{C_4}(x) = f_{P_4}(x) - f_{C_3}(x) = x(x-1)^2 - x(x-1)(x-2).$$

Пример 4. Вычислим $C_n(x)$ для произвольного $n \geqslant 3$. Рассуждая точно так же, как и выше, имеем:

$$f_{C_n}(x) = f_{P_n}(x) - f_{C_{n-1}}(x).$$

Учитывая уже известное выражение для $f_{P_n}(x)$ и обозначая $g_n = f_{C_n}(x)$, получаем

$$g_n = x(x-1)^{n-1} - g_{n-1} = (x-1)^n + (x-1)^{n-1} - g_{n-1}.$$

Отсюда

$$g_n - (x-1)^n = (x-1)^{n-1} - g_{n-1}. \tag{1}$$

Пусть $h_n = g_n - (x-1)^n$. Тогда из (1) следуют равенства

$$h_n = -h_{n-1} = h_{n-2} = \cdots = (-1)^k h_{n-k} = \cdots = (-1)^{n-3} h_3.$$

Вычислим h_3:

$$h_3 = g_3 - (x-1)^3 = x(x-1)(x-2) - (x-1)^3 = -(x-1).$$

Поэтому $h_n = (-1)^n(x-1)$ и

$$f_{C_n}(x) = (x-1)^n + (-1)^n(x-1).$$

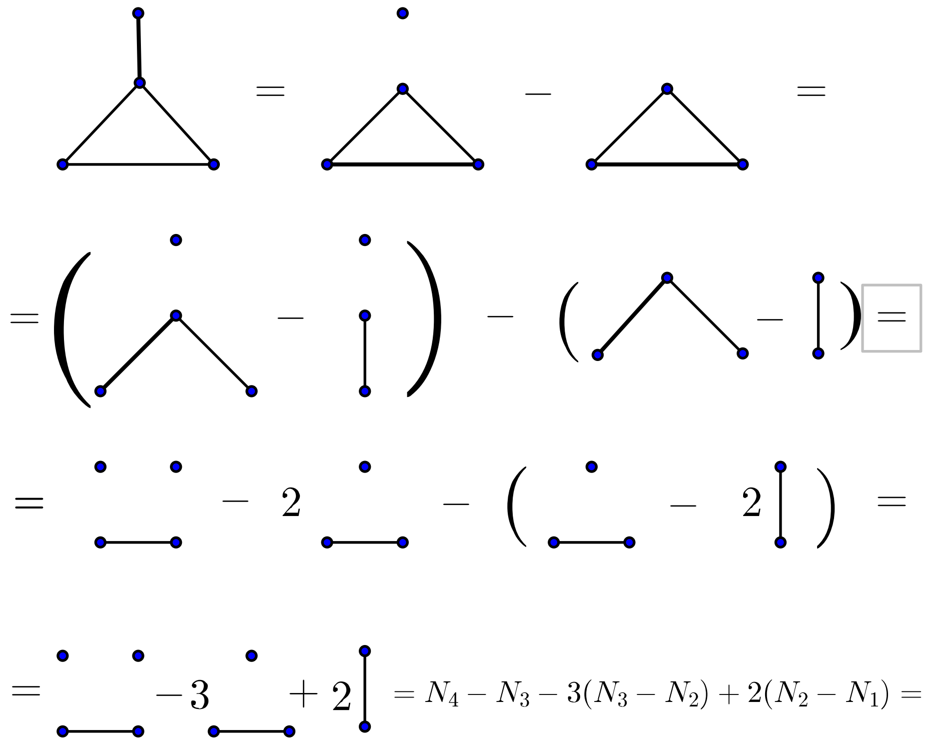
Рекуррентные соотношения

Способ, каким была получена хроматическая функция графа C_4, работает и в общем случае. Пусть $e = uv$ — ребро графа G, а графы G' и G'' получаются из G соответственно удалением и стягиванием ребра e. Последняя операция означает следующее: ребро e удаляется, вершины u и v заменяются одной вершиной, смежной с теми и только теми вершинами исходного графа, которые были смежны хотя бы с одной из вершин u или v (возникающие при стягивании «лишние» кратные рёбра будем удалять). Рассуждения, вполне аналогичные проведённым выше в случае графа C_4, показывают, что

$$f_G(x) = f_{G'}(x) - f_{G''}(x). \tag{2}$$

Заметим, что в графе G' столько же вершин, сколько и в графе G, а рёбер меньше на единицу; в графе G'' по сравнению с G на одну вершину меньше, а количество рёбер меньше хотя бы на единицу. Итак, вычисление хроматической функции графа сводится к такой же задаче для двух графов с меньшим числом рёбер. Повторение данной операции в конечном итоге приводит к линейной комбинации хроматических функций пустых графов. Поскольку, как мы уже установили, для пустого графа N_k имеет место равенство $f_{N_k}(x) = x^k$, доказано, что хроматическая функция является многочленом. Поэтому в дальнейшем уже можно с полным правом использовать термин «хроматический многочлен».

Пример 5. С помощью формулы (2) проведём вычисление хроматического многочлена графа с рис. 1; для наглядности в данных выкладках хроматическая функция графа заменяется изображением самого графа.



$$= N_4 - N_3 - 3(N_3 - N_2) + 2(N_2 - N_1) =$$

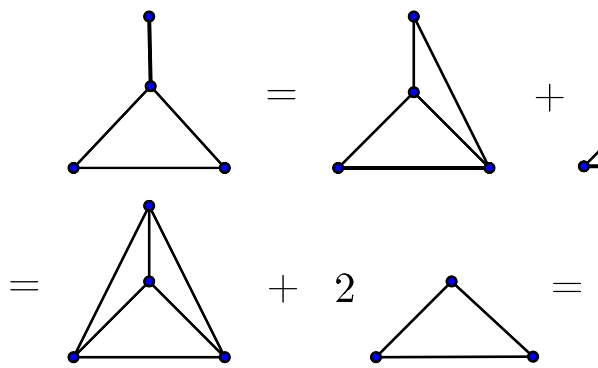
$$= N_4 - 4N_3 + 5N_2 - 2N_1 = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x.$$

Рис. 1.

Соотношение (2) можно переписать в виде

$$f_{G'}(x) = f_G(x) + f_{G''}(x). \tag{3}$$

Здесь граф G получается из графа G' добавлением ребра uv, где u и v — несмежные вершины графа G'; а G'' получается из G' склеиванием вершин u и v (возникающие при этом «лишние» кратные рёбра будем удалять). Повторение данной операции в конце концов приводит к линейной комбинации хроматических многочленов полных графов, поскольку пар несмежных вершин рано или поздно не останется. Иногда применение соотношения (3) позволяет вычислить хроматический многочлен графа быстрее, чем при использовании (2). Иллюстрация этому — рис. 2.



$$= K_4 + 2K_3 =$$

$$= x(x-1)(x-2)(x-3) + 2x(x-1)(x-2).$$

Рис. 2.

Свойства

Хроматический многочлен графа обладает рядом интересных свойств. Некоторые из них сформулированы в следующей теореме.

Теорема 1. (Х. Уитни) *Пусть G — простой граф с n вершинами, m рёбрами и k компонентами связности. Тогда его хроматический многочлен имеет вид*

$$f_G(x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-k}a_{n-k}x^k,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$ — положительные целые числа, причём $a_1 = m$.

Доказательство. Индукция по числу вершин графа. База индукции: $f_{N_1}(x) = x$.

Индукционный шаг. Пусть утверждение теоремы справедливо для любого простого графа, в котором либо меньше вершин, чем в G, либо вершин столько же, но меньше рёбер. Возьмём две смежные вершины u и v графа G (если таковых нет, то граф пустой и $f_G(x) = x^n$ — доказываемое утверждение выполнено) и образуем графы G', удалив ребро uv, и G'', склеив вершины u и v. Заметим, что в G'' такое же количество компонент связности, что и в G. По предположению индукции,

$$f_{G'} = x^n - a_1'x^{n-1} + a_2'x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-k}a_{n-k}'x^k;$$
$$f_{G''} = x^{n-1} - a_2''x^{n-2} + a_3''x^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1-k}a_{n-k}''x^k,$$

где $a_1', \dots, a_{n-k}'$ — неотрицательные целые числа (при удалении ребра число компонент связности может увеличиться на единицу и тогда $a_{n-k}' = 0$), а $a_2'', \dots, a_{n-k}''$ — положительные целые числа (если $k > 1$) . Применим соотношение (2):

$$f_G(x) = x^n - (a_1' + 1)x^{n-1} + (a_2' + a_2'')x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-k}(a_{n-k}' + a_{n-k}'')x^k =$$
$$= x_n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-k}a_{n-k}x^k.$$

По предположению индукции, $a_1' = m - 1$ (ведь в графе G' ровно на одно ребро меньше, чем в G). Значит, $a_1 = m$. Для каждого i коэффициент $a_i = a_i' + a_i''$ положительный, поскольку $a_i' \geqslant 0$ и $a_i'' > 0$, и целый. Всё доказано!

Задачи

«Много задач вместе иногда решить легче, чем всего лишь одну из них, если это большое множество задач хорошо согласовано, а одна задача сама по себе изолирована».
Д. Пойа. *Математика и правдоподобные рассуждения.*

Ниже предлагается ряд задач, которые заинтересованный читатель сможет решить самостоятельно. Задачи, в основном, заимствованы из книг [3–5]. Если задача не является вычислительной, то представляет собой утверждение, которое нужно доказать.

1. Вычислите хроматический многочлен графа с рис. 3.

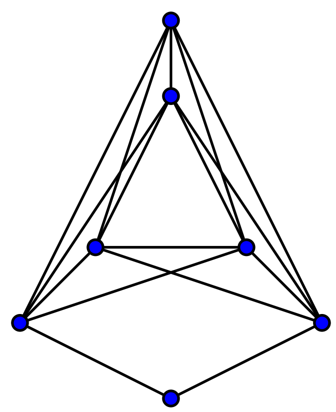


Рис. 3.

2. Пусть G — простой граф и $f_G(x) = x^4 - 3x^3 + sx^2$, где s — некоторое число. Найдите s.

3. Пусть в графе G есть висячая вершина v, а граф H получается из G удалением вершины v и инцидентного ей ребра. Тогда $f_G(x) = (x-1)f_H(x)$.

4. Пусть T — дерево с n вершинами. Тогда $f_T(x) = x(x-1)^{n-1}$.

5. Пусть G — связный граф с n вершинами. Тогда для любого натурального x выполнено неравенство $f_G(x) \leqslant x(x-1)^{n-1}$.

6. Пусть $f_G(x) = x(x-1)^{n-1}$. Тогда G — дерево с n вершинами.

Указание. Найдите сначала число вершин, рёбер и компонент связности графа G.

7. Пусть в графе G есть вершина v степени 2, причём смежные с v вершины смежны между собой, а граф H получается из G удалением вершины v и инцидентных ей рёбер. Тогда $f_G(x) = (x-2)f_H(x)$.

8. Вычислите хроматический многочлен графа с рис. 4.

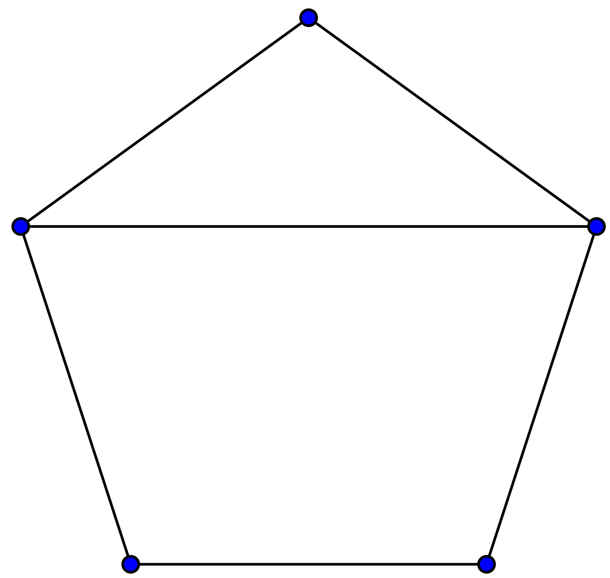


Рис. 4.

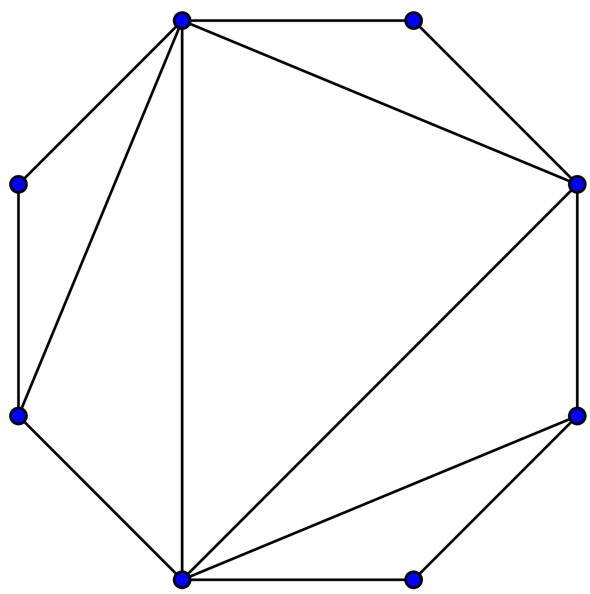


Рис. 5.

9. Пусть граф G соответствует выпуклому n-угольнику, разбитому непересекающимися диагоналями на треугольники (иллюстрация на рис. 5), то есть вершины графа — это вершины многоугольника, а рёбра — стороны и соответствующие диагонали. Тогда $f_G(x) = x(x-1)(x-2)^{n-2}$.

Указание. Количество треугольников равно $n-2$ (подсчитайте сумму их углов!) — меньше, чем количество сторон n-угольника. Поэтому найдутся две стороны разбиваемого многоугольника, входящих в границу одного и того же треугольника.

10. Пусть в графе G есть вершина v, смежная со всеми остальными, а граф H получается из G удалением вершины v и инцидентных ей рёбер. Тогда $f_G(x) = xf_H(x-1)$.

11. $f_{W_n}(x) = x(x-2)\left((x-2)^{n-2} + (-1)^{n-1}\right)$.

12. Вычислите хроматический многочлен графа с рис. 6.

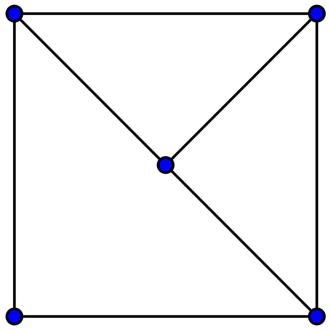


Рис. 6.

13. Пусть G_1, G_2, …, G_k — все компоненты связности графа G. Тогда

$$f_G(x) = f_{G_1}(x) \cdot f_{G_2}(x) \cdot \ldots \cdot f_{G_k}(x).$$

14. Пусть $G = G_1 \cup G_2$, причём $G_1 \cap G_2 = K_s$. Тогда

$$f_G(x) = \frac{f_{G_1}(x) \cdot f_{G_2}(x)}{(x)_s}.$$

15. Пусть p_i — количество разбиений множества вершин графа G на i независимых множеств (множество вершин называется *независимым*, если эти вершины попарно несмежны). Тогда

$$f_G(x) = \sum_i p_i \cdot (x)_i.$$

Указание. p_i — это количество правильных раскрасок, использующих ровно i цветов.

16. Наибольший действительный корень хроматического многочлена $f_G(x)$ не больше $n-1$, где n — количество вершин графа G.

17. Хроматический многочлен не имеет отрицательных действительных корней.

Указание. Примените теорему Уитни.

18. Пусть G — связный граф с n вершинами. Тогда $(-1)^n f_G(x) < 0$ при $0 < x < 1$, где n — количество вершин графа G.

Указание. Примените индукцию. В качестве базы индукции рассмотрите дерево. Индукционный шаг использует соотношения (2).

19. Пусть $G = \langle V, E\rangle$ — граф с множеством вершин V и множеством рёбер E. Для каждого подмножества рёбер $T \subset E$ определим $c(T)$ как число компонент связности графа $\langle V, T\rangle$. Тогда

$$f_G(x) = \sum_{T \subset E} (-1)^{|T|} x^{c(T)}.$$

Доказательство. Пусть U — множество всех раскрасок вершин графа $G = \langle V, E\rangle$ в x цветов (т.е. множество отображений из V в $\{1, 2, \ldots, x\}$). Для каждого ребра $e \in E$ обозначим через A_e множество раскрасок, в которых концы ребра E одного цвета. Для множества рёбер $T \subset E$ определим

$$A_T = \bigcap_{e\in T} A_e.$$

Договоримся также, что $A_\emptyset = U$. Множество правильных раскрасок является пересечением дополнений ко всем множествам A_e. По формуле включения-исключения,

$$f_G(x) = |\bigcap_{e\in E} \overline{A_e}| = \sum_{T\subset E} (-1)^{|T|}|A_T|.$$

Осталось заметить, что если раскраска входит в A_T, то все вершины из одной компоненты связности графа $\langle V, T\rangle$ должны быть одного цвета, откуда $|A_T| = x^{c(T)}$.

20. Пусть G — простой связный граф с n вершинами. Обозначим через $even(G)$ и $odd(G)$ количество стягивающих подграфов графа G соответственно с чётным и нечётным числом рёбер. Тогда коэффициент при x в хроматическом многочлене $f_G(x)$ равен разности $even(G) - odd(G)$.

21. Пусть простой связный граф G имеет n вершин. Тогда (в обозначениях предыдущей задачи) $even(G) > odd(G)$ при нечётном n и $even(G) < odd(G)$ при чётном n.

Дополнительные сведения о хроматическом многочлене графа можно найти в обширной монографии [6].

Ответы. 1. $x(x-1)(x-2)(x-3)^3(x-4)$. **2.** 2. **8.** $x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 15x^2 + 6x$. **12.** $x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 23x^2 + 10x$.

Литература

[1] Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. и др. Вся высшая математика: учебник. - М.: КомКнига, 2014. - Т.7 - 208 с.

[2] Эвнин А.Ю. Задачник по дискретной математике. - М.: ЛИБРОКОМ, 2014. - 264 с.

[3] Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: Уч. пособие. - 2-е изд. - СПб: Изд-во «Лань», 2010. - 368 с.

[4] Ландо С.К. Введение в дискретную математику. - М.: МЦНМО, 2012. - 265 с.

[5] Lovasz L. Combinatorial Problems and Exersizes. - American Mathematical Society, 2007. - 639 p.

[6] Dong F.M., Koh K.M., Teo K.L. Chromatic Polynomials and Chromaticity of Graphs. - World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005. - 380 p.

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики
Южно-Уральского государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

О теме "Длина, площадь, объем" в старших классах гуманитарного профиля

В. М. Имайкин

Учащиеся старших классов гуманитарного профиля имеют меньше часов по математике, чем учащиеся общеобразовательных классов. Однако, с одной стороны, им также предстоит сдавать обязательный ЕГЭ, а с другой — хотелось бы сохранить ряд важных математических идей в их общекультурном багаже. Автором разработано несколько блоков интенсивного изучения и повторения важных и достаточно сложных тем, например "Проценты", "Теория вероятностей", "Длина, площадь, объем". В статье подробно обсуждается последний блок.

Введение. О ретроспективном изучении некоторых математических тем

Изучение ряда тем в школьном курсе математики разбито на небольшие фрагменты, которые проходятся в разных классах.

Например, тема длин, площадей (фигур и поверхностей) и объемов геометрических тел, хотя и занимает значительное место в школьном курсе геометрии, изучается фрагментарно в 9 и 11 классах — мы видим большой разрыв. Заметим, что к этой теме относятся многие задания итоговых аттестаций ГИА и ЕГЭ. Общепризнано, что тема полезна и с точки зрения практического применения.

Другой пример — тема "Проценты". Она изучается в средних классах, а затем вновь "всплывает" при подготовке к решению задач ГИА и ЕГЭ. Аналогично обстоит дело с теорией вероятностей — дети заканчивают ее изучение в 9 классе, сдают ГИА, включающее задачу по теории вероятностей, а затем задача на эту тему возникает в ЕГЭ.

Наш многолетний опыт преподавания в старших классах гуманитарного профиля (школы №№ 1314, 179 и 261 г. Москвы) показывает, что в последний год обучения в багаже учащихся по таким "разорванным" темам остаются лишь некоторые разрозненные рецепты вычислений. Скажем, по первой теме — некоторые формулы для вычисления длин (например, теорема Пифагора) и площадей некоторых стандартных фигур. Из теории вероятностей обычно остается в памяти только формула классической вероятности без понимания смысла, а проценты, в основном, оказываются прочно забытыми. Учащиеся не осознают единства таких тем, а также лежащих в их основе идей. В гуманитарных классах положение усугубляется меньшим (на 1 час в неделю) количеством часов по математике по сравнению с базовой школой.

Для улучшения ситуации автором разработаны небольшие учебные блоки ретроспективного изучения этих тем. Например, тема "Длина, площадь, объем" дается в единстве (длина линии и площадь фигуры на плоскости — повторение, а объемы тел и площадь поверхности в пространстве — новый материал); об этом блоке будет подробно рассказано в настоящей статье. По теме "Проценты" (6 часов) повторяем элементарные вычисления с процентами, в качестве нового материала добавляем непрерывный процент и применение показательной функции для его вычисления, а также небольшое введение в финансовую тематику: ставка рефинансирования и виртуальная экономическая игра, цель которой — виртуально получить прибыль на колебаниях курсов валют. По теории вероятностей (6 часов) тщательно изучаем понятие вероятностного пространства и повторяем формулы классической и геометрической вероятности. Обсуждаем прогностическое значение вероятностных результатов (примеры из практики) и, факультативно, рассматриваем парадоксы теории вероятностей, связанные с неоднозначностью интерпретации вероятностного пространства (парадокс Бертрана и т.п.).

Общеобразовательная цель таких блоков для учащихся гуманитарного профиля — чтобы эти идейно богатые темы осталась частью их общей культуры, даже после того, как они забудут все конкретные формулы (плюс, разумеется, локальная прагматическая цель повторения перед ЕГЭ).

Ниже мы подробно расскажем о блоке "Длина, площадь, объем".

Если материал блока подается в лекционном стиле, а упражнения даются на дом, блок занимает 8 часов. Однако, разумно закреплять основные пункты упражнениями в классе, тогда блок длится 12 часов.

Блок апробирован при работе в 11Б классе школы № 261 г. Москвы в 2013/14 учебном году.

1. Идея измерения. Число как результат измерения

Мы начинаем с идеи измерения, т.е. сравнения измеряемой величины с выбранной единицей измерения — эталоном. Эта идея лежит в основе понятий длины, площади и объема. На практике мы выбираем некоторый отрезок за единицу измерения и определяем, сколько раз такой отрезок укладывается в измеряемом отрезке, например, при помощи циркуля.

Сразу же возникает вопрос, каким числом может быть выражен результат измерения длины отрезка.

В простейшем случае результат может быть выражен *натуральным числом* — эталон точно укладывается в измеряемом отрезке определенное число раз, например, 5; тогда мы говорим, что длина измеренного отрезка равна пяти и т.п.

Понятно, что эталон может не уложиться в измеряемом отрезке целое число раз. В этом случае можно надеяться, что если разделить эталон на некоторое количество равных частей, то эти части уложатся в измеряемом отрезке целое число раз. Например, мы разделили эталон на 5 равных частей и в измеряемом отрезке уложилось два целых эталона и три его пятых части, т.е. в совокупности 13 его пятых частей. Тогда мы говорим, что длина отрезка равна $13/5 = 2\frac{3}{5} = 2,6$.

Из этого соображения возникает, во-первых, геометрическая задача — как разделить заданный отрезок (эталон в нашем случае) на несколько равных частей? Во-вторых, введем **определение:** два отрезка называются *соизмеримыми*, если некоторая часть первого отрезка целое число раз укладывается во втором отрезке. (Нетрудно понять, что тогда и некоторая часть второго отрезка целое число раз укладывается в первом, т.е. определение симметрично.) И, в третьих, приходим к выводу, что если отрезок и эталон соизмеримы, то длина отрезка выражается *положительным рациональным числом.*

Напомним, что геометрическая задача о делении отрезка на равные части решается с использованием циркуля и линейки на основе теоремы Фалеса, см. рис. 1.

Допустим, нам надо разделить отрезок AB на n равных частей (на рисунке $n = 5$). Строим вспомогательный луч AC и на нем от точки A откладываем последовательно n равных вспомогательных отрезков. Соединим конец D последнего отрезка с точкой B. Через общие концы вспомогательных отрезков проведем прямые, параллельные прямой DB. Эти прямые разделят отрезок AB на n равных частей, согласно теореме Фалеса.

На будущее заметим, что все описанные построения можно выполнить при помощи циркуля и линейки без делений.

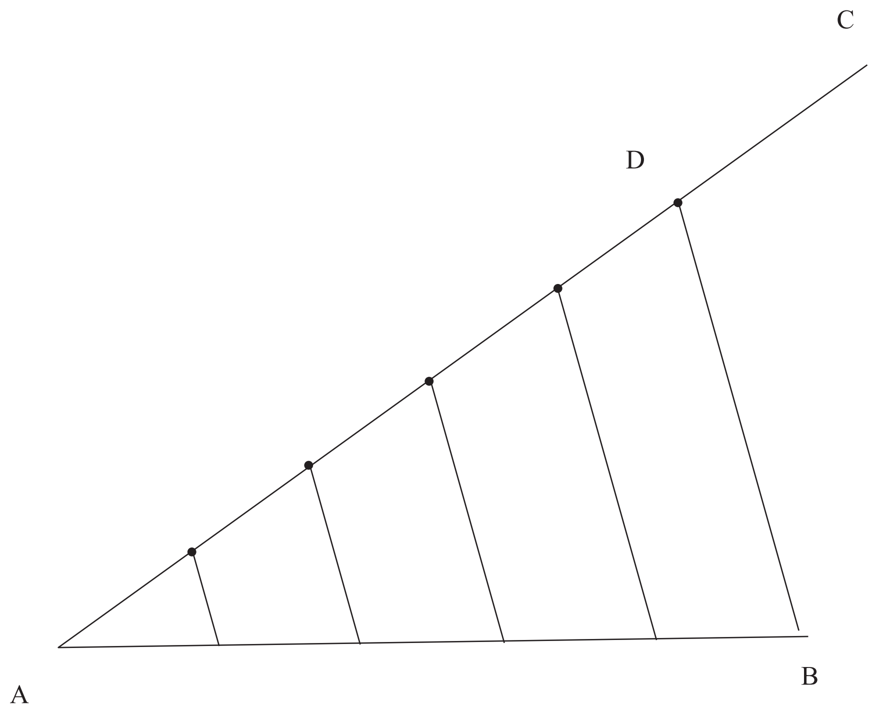


Рис. 1 Деление отрезка на 5 равных частей

Однако еще в античности было сделано великое математическое открытие о существовании *несоизмеримых* отрезков (традиционно его относят к школе пифагорейцев). Например, несоизмеримыми оказываются сторона и диагональ квадрата.

Действительно, рассмотрим квадрат со стороной 1 (т.е. сторону квадрата примем за эталон). Тогда, по теореме Пифагора, квадрат его диагонали равен двум. Но нетрудно доказать, что *не существует никакого рационального числа, квадрат которого равен двум.* Итак, диагональ и сторона квадрата несоизмеримы. Если мы надеемся, что любой отрезок имеет определенную длину, то длина диагонали выражается числом, которое *не является рациональным.*

Мы изучаем стандартное доказательство указанного факта, основанное на возможности представить рациональное число в виде *несократимой дроби.* В этот момент дети хорошо мотивированы, чтобы воспринять доказательство.

Заметим также, что мы подобрались к двум вопросом, которые выходят за рамки собственно математики и являются в определенной мере философскими: “любой ли отрезок имеет длину?”, а также “что такое число?”

Построимые числа и действительные числа

Более тщательно исследуем вопрос: какими числами в итоге могут быть выражены длины отрезков?

Можно принять следующий *геометрический* взгляд: припишем длины тем отрезкам, которые мы можем строить при помощи определенного набора инструментов. По традиции мы ограничились случаем построений циркулем и линейкой без делений, исходя из единичного отрезка. Набор чисел-длин, первоначально включающий положительные рациональные числа и некоторые квадратные корни, расширяется при помощи таких построений, и возникает новая для детей числовая система — совокупность *построимых чисел*[1].

Теорема 1. *Если числа a и b построимы, то построимы и числа $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, a/b, $\sqrt{a}$.*

Доказательство. Построение отрезков $a+b$, $a-b$ элементарно и показано на рис. 2.

[1] Здесь автор использовал материал, который изучал в 10 классе ФМШ № 18 при МГУ (ныне СУНЦ МГУ), см. [4].

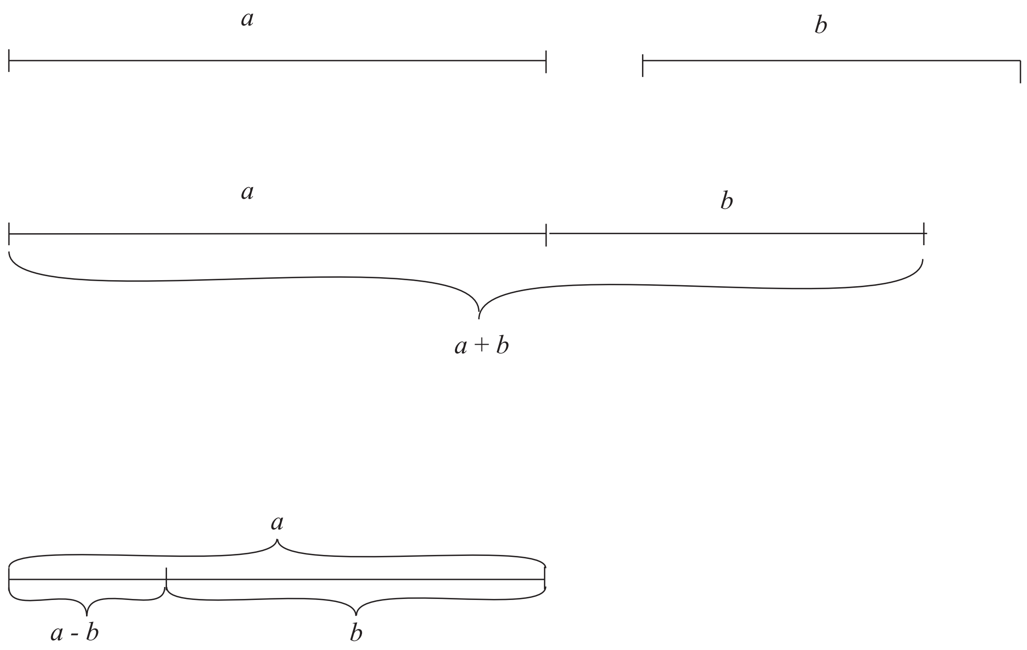


Рис. 2

Построение отрезков $a \cdot b$, a/b показано на рис. 3, а отрезка $\sqrt{a}$ — на рис. 4.

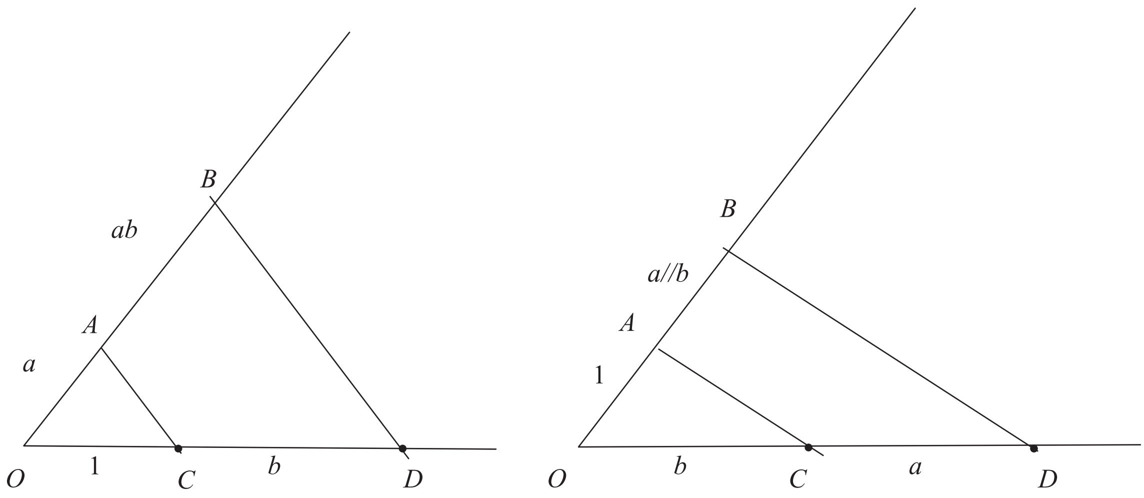


Рис. 3

Действительно (см. левую часть рис. 3), отложим на одном луче отрезки OC=1 и CD=b, на другом луче — отрезок OA=a. Проведем параллельные прямые CA и DB. По теореме о пропорциональных отрезках, AB/CD = OA/OC, т.е. AB/b = a/1, откуда AB = ab. На правой части рис. 3 отрезок AB строится аналогично, и аналогично доказывается, что его длина равна a/b.

Далее, на одной прямой откладываем отрезки AD=1 и DC=a, см. рис. 4. Строим окружность, для которой отрезок AC является диаметром, и проводим перпендикуляр DB до пересечения с окружностью. Получился прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. По теореме: высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, является средним пропорциональным между проекциями катетов на гипотенузу — заключаем, что длина отрезка DB равна $\sqrt{a}$.

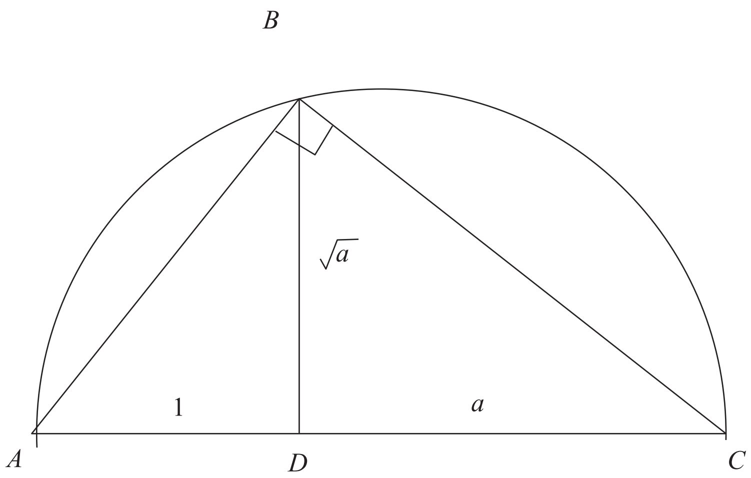


Рис. 4

Очевидно, что все указанные построения могут быть выполнены циркулем и линейкой исходя из данных построимых отрезков a, b и единичного отрезка.

Заметим, что мы повторили тему построений циркулем и линейкой и вспомнили некоторые важные геометрические конструкции.

Теперь перейдем к *алгебраическому* взгляду. Повторим понятие *действительных чисел* как всех возможных бесконечных десятичных дробей без 9 в периоде. а) Обсуждаем вопрос, почему следует исключить дроби с 9 в периоде. б) Вспоминаем, что рациональные числа выражаются периодическими дробями и, наоборот, в) периодические дроби являются десятичной записью рациональных чисел. г) Рассматриваем пример построения непериодической десятичной дроби.

Комментарий: В этом месте мы не занимаемся строгими доказательствами: пункты а) и б) поясняются примерами. Пункт в) поясняется примером с применением формулы суммирования бесконечной геометрической прогрессии (кстати, повторяем и эту тему) и обратной проверкой, что полученная сумма выражается исходной периодической десятичной дробью. В пункте г) мы строим конкретную непериодическую десятичную дробь, например, 0,1001000100001000001... и обосновываем ее не периодичность. Сравниваем этот пример с десятичной записью числа, например, $\sqrt{2}$, в чем разница?

Теорема 2. *Всякое построимое число является действительным числом.*

Эту теорему мы не доказываем, поясняем на примерах. В частности, важно дать понять учащимся, что в совокупности действительных чисел так же, как и в совокупности построимых чисел, допустимы арифметические операции и извлечение квадратного корня из неотрицательного числа.

Возникает обратный вопрос: всякое ли действительное число построимо?

Как известно, ответ на этот вопрос отрицательный — примером являются три знаменитые неразрешимые задачи древности: задача об удвоении куба, трисекции угла и квадратуре круга. Идею неразрешимости первых двух задач детям можно пояснить: не получается построить числа-корни определенных кубических уравнений при помощи тех операций над числами, к которым приводят построения циркулем и линейкой (они фактически приведены в Теореме 1). Про более трудный случай квадратуры круга ограничиваемся просто рассказом, заинтересованных учащихся отсылаем к соответствующей литературе, см., например, [6].

Понятие длины

Мы выходим на *понятие длины отрезка*. Каждому отрезку ставится в соответствие *единственное положительное действительное число*, называемое *длиной отрезка*. Длина отрезка обладает свойствами: если точка С лежит внутри отрезка АВ, то длина отрезка АВ равна сумме длин отрезков АС и ВС (аддитивность); длины равных отрезков равны (инвариантность).

Существование длины отрезка фактически следует из аксиом (мы повторяем с учащимися нужные аксиомы). Свойство инвариантности в случае длины фактически тавтологично, поскольку равные отрезки определяются как отрезки с равными длинами. Мы отмечаем, что понятие длины построено на основе идеи измерения, но не совпадает с ней буквально.

Площади многоугольников и объемы многогранников

Сначала мы обсуждаем трудность непосредственного измерения площадей фигур и объемов при помощи эталона. Например, если за единицу площади взять площадь некоторого квадрата, то кроме фигур, составленных из равных ему квадратов, другие фигуры, например, треугольник нельзя будет непосредственно измерить этим эталоном, рис. 5.

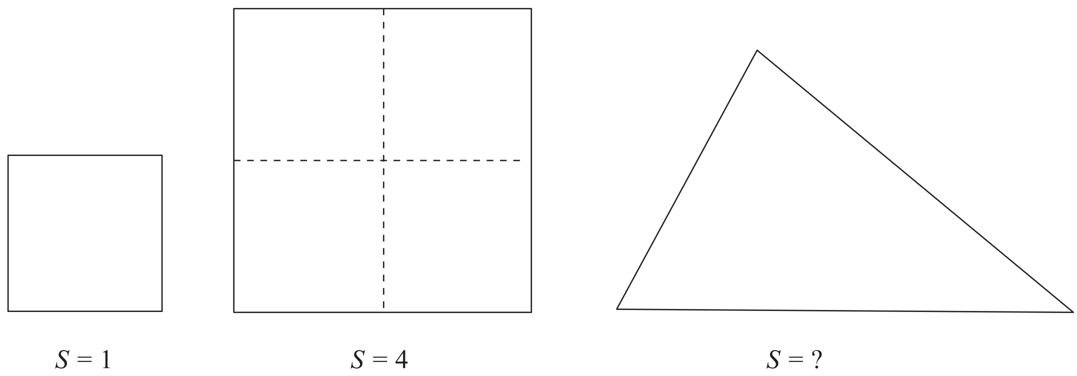


Рис. 5

Случай длины подсказывает нам выход — использовать *понятие площади многоугольника*: каждому многоугольнику ставится в соответствие единственное положительное действительное число, причем выполнены свойства

аддитивности (если многоугольник разрезан на несколько многоугольников отрезками, то его площадь равна сумме площадей частей);

инвариантности (площади равных многоугольников равны) и

нормированности (площадь квадрата со стороной 1 равна 1).

Основная теорема: *площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон.*

Эту теорему мы даем с пояснением, без полного доказательства. Однако, если есть достаточно времени, можно показать, как при доказательстве работает *свойство непрерывности* действительных чисел (ключевое свойство, отличающее действительные числа от рациональных).

Далее мы повторяем, как вывести из этой теоремы формулы площадей некоторых многоугольников.

Заметим, что *существование* площади многоугольника (в отличие от существования длины отрезка) — не очевидный факт; это довольно трудная теорема, мы делаем необходимые пояснения для учащихся. Важно обратить внимание на единый тип работы с понятием площади при выводе всех формул — наблюдаем, как работают свойства инвариантности и аддитивности (свойство нормированности “сработало” при выводе основной теоремы).

Далее мы (без общего доказательства, на примерах) обсуждаем вопрос о равносоставленности равновеликих многоугольников. На наш взгляд, совершенно неправильно, что эта теорема — фактически, вершина теории площади многоугольника — не включена в общеобразовательную программу. Не обязательно доказывать ее во всей полноте, можно проиллюстрировать на нескольких простых примерах. Эта теорема очень ярко и наглядно демонстрирует одну из фундаментальных математических идей — идею *преобразования и инварианта*, а такие идеи, по мнению автора, и составляют общеобразовательную ценность математики как части культуры.

Аналогично, вводим понятие объема многогранника и выводим основные формулы объемов.

Расширение класса фигур. Интегральные определения и формулы

Далее мы задаемся вопросом, как распространить понятия длины, объема и площади на более широкий класс фигур: кривые линии, плоские фигуры с криволинейной границей и пространственные тела, ограниченные искривленными поверхностями.

Сначала мы рассматриваем ряд частных приемов: приближение длины окружности периметрами вписанных и описанных правильных многоугольников, приближение площади круга площадями правильных многоугольников (вписанных и описанных), квадрирование параболы по Архимеду, см. [1,2], площадь поверхности цилиндра и конуса как площадь развертки, невозможность развертки сферы. Основная цель здесь — показать идеи на максимально простых примерах.

Далее мы переходим к общему взгляду на задачу определения длин, площадей и объемов с точки зрения математического анализа. Мы наблюдаем, как при приближенном вычислении длины части графика функции при помощи вписанных ломаных линий, площади плоской фигуры при помощи вписанных ступенчатых многоугольников, объема пространственного тела при помощи вписанных ступенчатых цилиндрических тел всегда возникает формула одного и того же типа, а именно, интегральная сумма для определенной функции на некотором отрезке. Вспоминаем понятие определенного интеграла и приходим к трем основным интегральным формулам.

1) Формула длины графика гладкой функции на отрезке $[a;b]$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{1}$$

2) Формула площади плоской фигуры “по сечениям”:

$$S = \int_a^b l(x)\, dx, \tag{2}$$

где $l(x)$ — длина сечения фигуры прямой, ортогональной оси OX и проходящей через точку x, см. рис. 6.

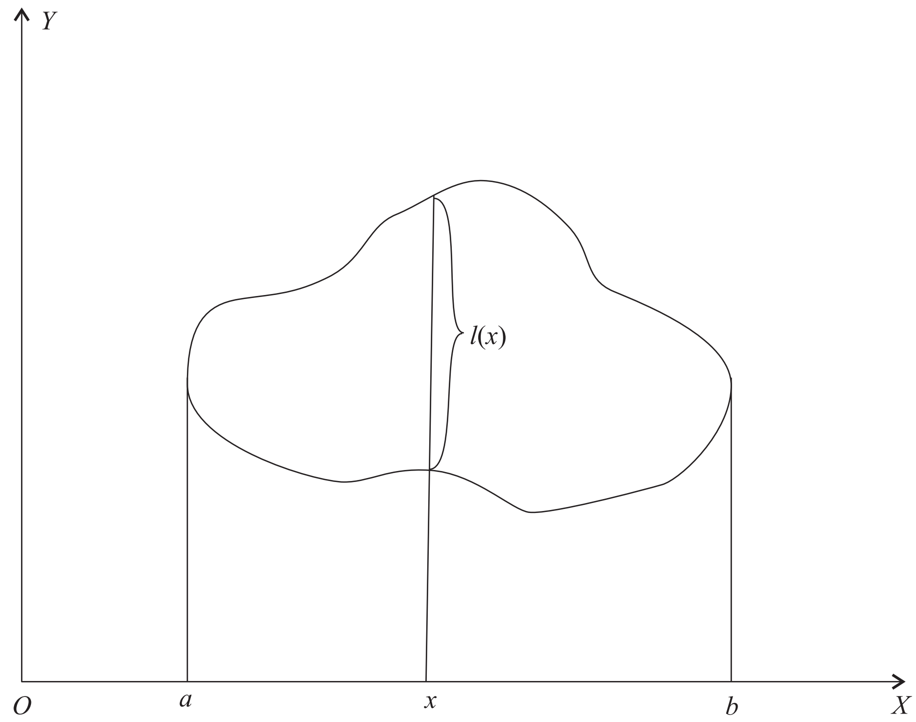


Рис. 6

2) Формула объема пространственного тела "по сечениям":

$$S = \int\limits_a^b S(x)\,dx, \tag{3}$$

где $S(x)$ — площадь сечения фигуры плоскостью, ортогональной оси OX и проходящей через точку x, см. рис. 7.

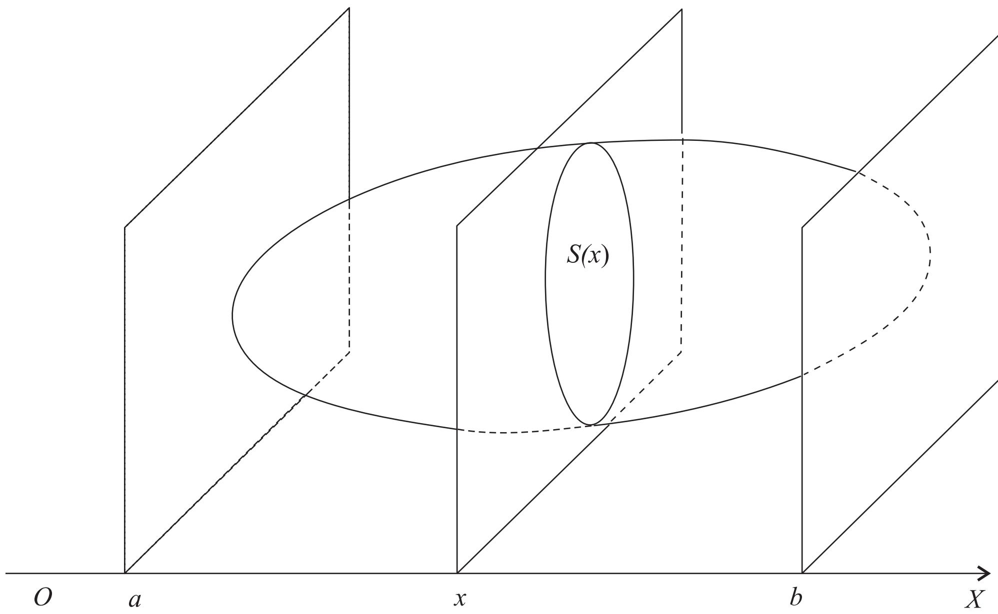


Рис. 7

Учащимся гуманитарного профиля особенно интересен следующий *логический* прием: интегральные формулы можно принять за *определения* длины, площади, объема. Преимущества этого подхода такие. Во-первых, интегральными формулами эти понятия определяются для очень широкого класса фигур. Во-вторых, интегральное исчисление — это очень развитая теория и она берет на себя технические трудности и тонкости вычисления длин, площадей и объемов конкретных кривых, плоских фигур и пространственных тел; для практики вычисляем ряд длин, площадей и объемов при помощи формулы Ньютона-Лейбница.

Важно обсудить с учащимися, в какой мере интегральные определения соответствуют интуитивным представлениям и введенным выше понятиям длины, площади и объема. Мы рассматриваем ряд примеров и видим, что в уже известных частных случаях отрезков, многоугольников и многогранников получаются прежние формулы, а именно:

• Если линия является прямолинейным отрезком, то ее длина, вычисленная по интегральной формуле, совпадает с длиной отрезка, вычисленной по обычной формуле (через координаты концов отрезка).

• Если плоская фигура является привычным многоугольником (прямоугольником, треугольником, параллелограммом, трапецией), то ее площадь, вычисленная по интегральной формуле, совпадает с площадью фигуры, вычисленной по известной формуле.

• Если пространственное тело является привычным многогранником (параллелепипедом, призмой, пирамидой, цилиндром, шаром), то ее объем, вычисленный по интегральной формуле, совпадает с объемом тела, вычисленным по известной формуле.

Свойства длин, площадей и объемов, выраженные в определениях соответствующих понятий, становятся *теоремами* интегрального исчисления, поясняем это на нескольких примерах.

Наконец, мы обсуждаем важный вопрос *инвариантности* интегрального определения *относительно системы координат*, которая участвует в определении. Рассмотрим один пример подробно. Возьмем квадрат со стороной 1 и систему координат, как на рис. 8.

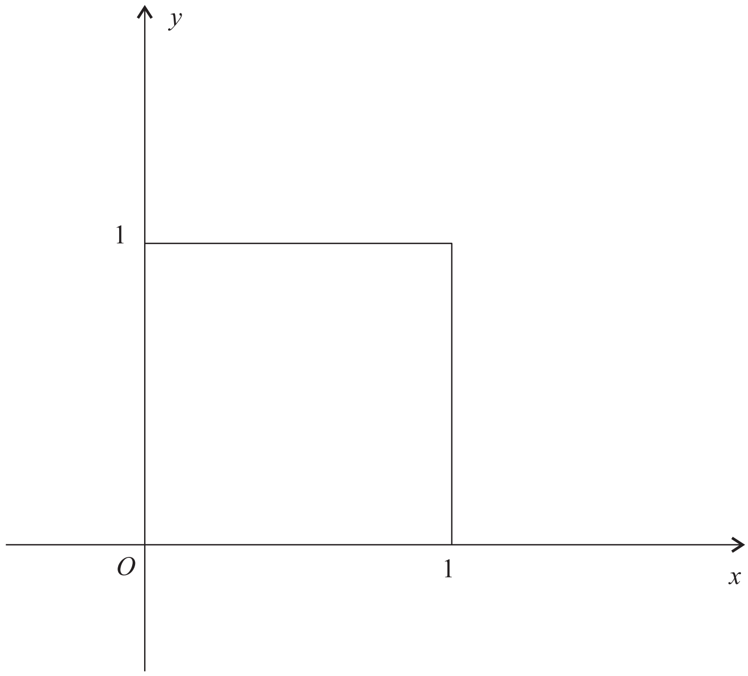


Рис. 8

Тогда, по интегральной формуле, площадь квадрата равна

$$S = \int\limits_0^1 1\,dx = x|_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

Однако систему координат можно выбрать и по-другому, например, как на рис. 9.

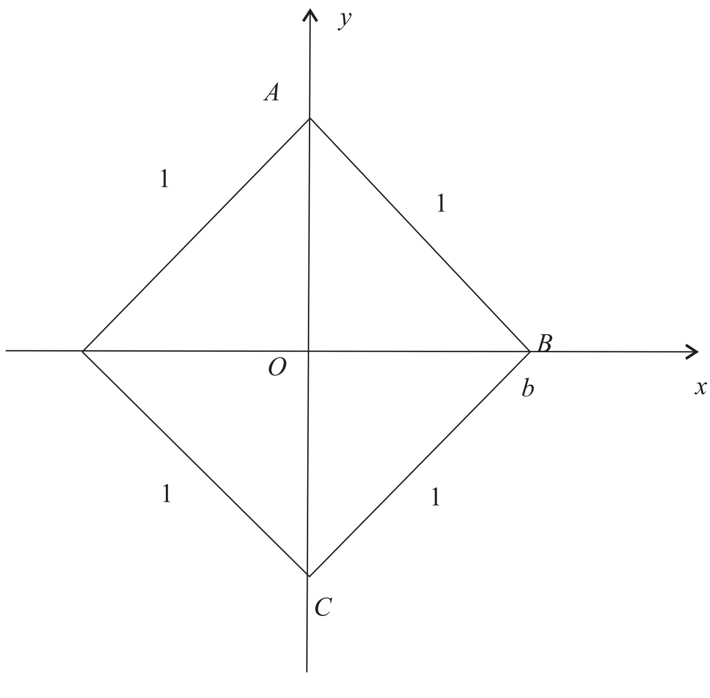


Рис. 9

В этом случае площадь квадрата S равна удвоенной площади треугольника ABC, которую мы вычислим по интегральной формуле:

$$S_{ABC} = \int\limits_0^b l(x)\,dx,$$

где b — правый предел интегрирования. Он равен половине диагонали квадрата, т.е. $\sqrt{2}/2$. Чтобы найти $l(x)$, надо написать уравнения прямых AB и BC. Эти уравнения: $y = \sqrt{2}/2 - x$ и $y = x - \sqrt{2}/2$. Тогда $l(x) = \sqrt{2}/2 - x - (x - \sqrt{2}/2) = \sqrt{2} - 2x$. Вычисляем:

$$S_{ABC} = \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} (\sqrt{2} - 2x)dx = (\sqrt{2}x - x^2)|_0^{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}/2 - 1/2 = 1 - 1/2 = 1/2.$$

Тогда $S = 1$, что совпадает с предыдущим результатом. В общем случае инвариантность относительно системы координат также является теоремой (довольно сложной) интегрального исчисления.

Далее мы рассматриваем принцип Кавальери как следствие интегрального определения, а как следствие принципа Кавльери — конструкцию Архимеда, связывающую простым числовым отношением объемы цилиндра, конуса и шара. Рассматриваем также частные случаи интегральных формул: объемы тел вращения и площади поверхностей вращения.

Еще раз отметим: главная идея в том, что всегда возникает конструкция интегральной суммы, по которой пишется требуемый интеграл, а техническое обеспечение вычислений берет на себя математический анализ.

Факультативно можно рассмотреть еще один вариант общего подхода к понятию площади поверхности в пространстве — площадь поверхности по Минковскому, см. [3].

Заключение

Подчеркнем, что представленный блок направлен не столько на отработку технических навыков вычисления расстояний, площадей и объемов (хотя это тоже нужно ввиду прагматической цели сдачи экзамена), сколько на выявление и осознание учащимися единого комплекса важных идей данной тематики. Эти идеи связали, в ходе истории развития математики, различные ее разделы (алгебру, анализ, геометрию), причем, по мнению автора, они имеют общекультурное значение, а некоторые идеи и факты — также достаточно ярко выраженную эстетическую сторону (например, конструкция Архимеда или известное доказательство теоремы Пифагора методом площадей).

Приложение. Об авторстве экспериментального курса

Опыт автора (в активе которого несколько экспериментальных курсов, часть из которых опубликована, см., например, [5]) показывает, что когда курс читается впервые, то его (активные) слушатели могут в большой мере считаться *соавторами*. Во-первых, вдумчивые учащиеся могут отчетливо выразить *непонимание* определенных моментов курса, что заставляет разработчика углублять собственное понимание и улучшать изложение. Во-вторых, вопросы учащихся часто оказываются принципиальными и глубокими, что также способствует улучшению курса. Наконец, решение и совместный разбор задач, помогает отработать материал для самостоятельной работы и домашних заданий, без чего курс нельзя считать полным.

Напомним, что курс был апробирован в 11 В классе ГОУ СОШ № 261 г. Москвы в 2013/14 учебном году. Это был небольшой класс (10 человек) лингвистического профиля, все учащиеся имели хорошую общематематическую подготовку и активно способствовали улучшению курса по указанным выше направлениям. Поэтому хотелось бы выразить им всем благодарность и представить как полноправных соавторов (в настоящее время все они студенты первого года обучения):

Гнатюк Ксения
МГУ им. М. В. Ломоносова,
факультет политологии

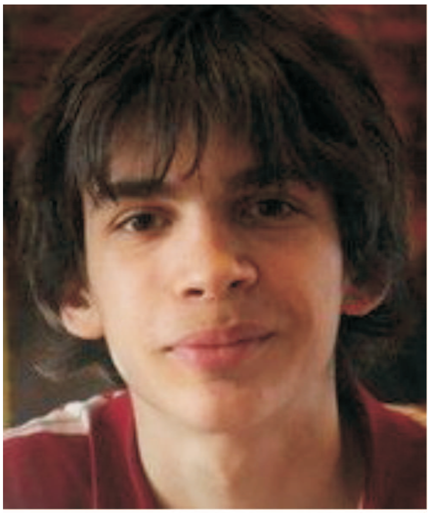
Дворшак Катарина
Московский Гуманитарный Университет,
факультет государственного и
муниципального управления

Карпова Алина
Литературный институт им. Горького,
факультет литературного мастерства, проза

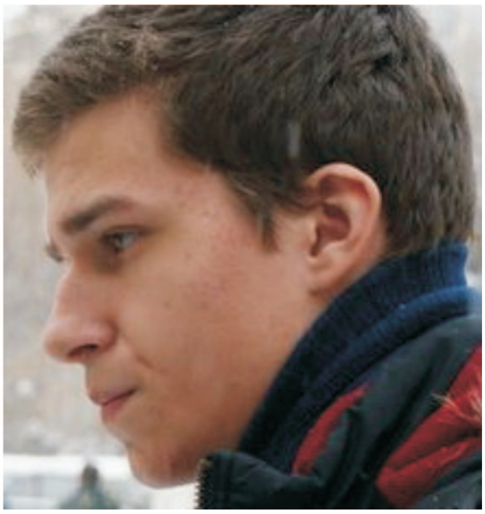
Ларина Юлия
МГУ им. М. В. Ломоносова,
факультет глобальных процессов

Лебедева Елизавета
Sussex Coast College Hastigs
(Великобритания), программа A-level

Репина Ксения
Филологический факультет МГУ,
кафедра германской и кельтской филологии



Симóн Вадим
РАНХиГС, институт
государственной службы и управления



Теплов Виталий
МГУ им. М. В. Ломоносова,
юридический факультет

Филяева Мария
РГГУ, Филологический факультет

Шляхта Дарья
МГУ им. М. В. Ломоносова,
исторический факультет

Литература

1. Архимед. Сочинения. / Перевод, вступительная статья и комментарии И. Н. Веселовского. Перевод арабских текстов Б. А. Розенфельда. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры (Физматгиз), 1962. - 640 с.

2. Башмакова И.Г. Дифференциальные методы у Архимеда // Историко-математические исследования.- М.: ГИТТЛ, 1953.- № 6.- С.609-658.

3. Дубровский В.Н. Площадь поверхности по Минковскому. // Квант. - 1979. - № 4. - С.33-36.

4. Земляков А.Н. Тезисы по алгебре // Математическое образование. - 2001. - № 2(17). - С.2-23.

5. Имайкин В.М. Из опыта изучения элементов теории групп в непрофильных старших классах средней школы // Математическое образование. - 2009. - № 3(51). - С.17-26.

6. Прасолов В.В. Три классические задачи на построение. Удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. - М.: Наука, 1992. - 80 с. Серия “Популярные лекции по математике”, выпуск 62.

Имайкин Валерий Марсович,
главный редактор журнала
“Математическое образование”,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: ivm61@mail.ru

Библиографические материалы к юбилейным датам 2015 года. I полугодие

Р. З. Гушель

Календарь юбилейных дат первой половины 2015 г., связанных с именами известных деятелей в области математики и математического образования, а также с важнейшими событиями в этой сфере. После краткой информации о человеке или событии приводится небольшой список литературы.

08 января — 100 лет со дня рождения отечественного математика, академика АН СССР (с 1964), лауреата Ленинской премии (1970) **Юрия Владимировича Линника** (умер 30 июня 1972). Занимался вопросами теории чисел, теории вероятностей, математической статистики. В 1959-1965 гг. — президент Ленинградского математического общества.

1) Ибрагимов И.И. и др. Юрий Владимирович Линник (к 50-летию со дня рождения) // УМН. - 1965. - Т. 20. - Вып. 2. - С.221-236.

2) Линник Юрий Владимирович (1915-1972). Некролог // УМН. - 1973. - Т. 28. - Вып. 2. - С.197-213.

3) Фурса Т.Г. Академик Ю. В. Линник. - Л., 1975.- 76 с.

4) Линник Ю.В. Избранные труды. - Л., 1979-1981. - Т. 1, 2.

5) Линник Ю.В. Кватернионы и числа Кэли; некоторые приложения арифметики кватернионов // УМН. - 1949. - Т. 4. - Вып. 5. - С.49-98.

6) Линник Ю.В. Разложения вероятностных законов. - Л., 1960. - 263 с.

7) Линник Ю.В. Эргодические свойства алгебраических полей. - Л., 1967. - 208с.

09 января — 125 лет со дня рождения известного отечественного педагога-математика, кавалера ордена Ленина и медали К. Д. Ушинского, профессора **Елизаветы Савельевны Березанской** (умерла 13 декабря 1969).

1) Больсен Е.М. Елизавета Савельевна Березанская // МШ. - 1961. - № 2. - С.75-76.

2) Чернецов М.М. Жизнь в школе и для школы (к 80-летию Е. С. Березанской) // МШ. - 1969. - № 6. - С.83.

3) Березанская Е.С. Вопросы стереометрии в курсе математики восьмилетней школы. - М., 1964.

4) Березанская Е.С. Из воспоминаний (1920-1935) // МШ. - 1966. - № 6. - С.6-10.

5) Березанская Е.С. Методика арифметики. - М.-Л., 1934.

6) Березанская Е.С. Сборник задач по арифметике. - М.-Л., 1933.

12 января — 260 лет со времени открытия **Московского университета** (ныне — Московский государственный университет М. В. Ломоносова). На основании устава в университете было три факультета: юридический, медицинский и философский. Математиков готовило II отделение философского факультета. Кафедра математики появилась в 1858 г.

1) Александров П.С., Яновская С.А. Математика в Московском университете в первой половине XX века // ИМИ. - 1955. - Вып. 8. - С.9-54.

2) Выгодский М.Я. Математика и её деятели в Московском университете во второй половине XIX века // ИМИ. - 1948. - Вып. 1. - С.141-183.

3) Московский университет в воспоминаниях современников. - М., 1989.

4) Шевырев С. История Московского университета. - М., 1855.

5) Юшкевич А.П. Математика в Московском университете за первые сто лет его существования // ИМИ. - 1948. - Вып. 1. - С.43-140.

15 января — 110 лет со дня рождения отечественного математика, специалиста в области топологии, теории чисел, вариационного исчисления, чл.-кор. АН СССР (с 1933) **Льва Генриховича Шнирельмана** (умер 24 сентября 1938).

1) Соколов Н.Г. Памяти Льва Генриховича Шнирельмана // Вопросы элементарной и высшей математики. - 1952. - Вып. 1. - С.15-23.

2) Тихомиров В.М. Лев Генрихович Шнирельман // ИМИ. - 2005. - Вып. 10(45). - С.20-28.

3) Л. Г. Шнирельман. Некролог.// Матем. сб. - 1938. - Т. 4. - Вып. 1. - С.I-III.

4) Шнирельман Л.Г. Топологические методы в анализе // Математика в СССР за 15 лет. - М.-Л., 1932. - С.143-156.

5) Шнирельман Л.Г. О равномерных приближениях // Изв. АН СССР. - Сер. математ. - 1938. - Т. 2. - С.53-59.

6) Шнирельман Л.Г. Об аддитивных свойствах чисел // УМН. - 1939. - Т. 6. - С.9-25.

29 января — 260 лет со дня рождения академика Петербургской АН, известного отечественного ученого и педагога, автора школьных учебников **Николая Ивановича** Фусса (умер 23 декабря 1825).

1) Лысенко В.И. Николай Иванович Фусс. - М., 1975.

2) Ожигова Е.П. Математика в Петербургской АН в конце XVIII - первой половине XIX века. - Л., 1980.

3) Прудников В.Е. Русские педагоги-математики 18-19 веков. - М., 1956.

4) Фусс Н.И. Начальные основания алгебры, выбранные из алгебры Леонара Эйлера. - СПб., 1798.

5) Фусс Н.И. Начальные основания чистой математики. - СПб., 1810-1913. - Ч. 1-4.

13 февраля — 210 лет со дня рождения немецкого математика, члена Берлинской АН, профессора Геттингенского университета (с 1855), чл.-кор. Петербургской АН (с 1837) **Петера Густава Лежена Дирихле** (умер 05 мая 1859). Исследования его относились к теории чисел, математическому анализу, теории уравнений математической физики.

1) Кох Х.К. К 175-летию со дня рождения П. Г. Лежена Дирихле // ИМИ. - 1983. - Вып. 20. - С.179-189.

2) Медведев Ф.А. Об определении понятия функции у Лобачевского и Дирихле // ИМИ. - 1975. - Вып. 20. - С.232-245.

3) Дирихле П.Г. Лежен. Лекции по теории чисел. - М.-Л., 1936.

4) Лежен Дирихле П.Г. Об устойчивости равновесия // Лагранж Ж.Б. Аналитическая механика. - М., 1950. - Изд.2.

5) Лежен Дирихле П.Г. Теория чисел (со сборником упражнений и задач). - СПб., 1899. - Вып. 1.

24 февраля — 75 лет со дня рождения отечественного математика, чл.-кор. РАН (с 1997), известного специалиста в области алгебраической геометрии, ученика академика РАН И. Р. Шафаревича **Андрея Николаевича Тюрина** (умер 27 октября 2002).

1) Андрей Николаевич Тюрин (Некролог) // УМН. - 2003. - Т. 58. - Вып. 3. - С.176-182.

2) Шафаревич И.Р. и др. Предисловие к сборнику, посвященному памяти Андрея Николаевича Тюрина // Труды МИРАН. - 2004. - Т. 246. - С.7-9.

3) Тюрин А.Н. Геометрия модулей векторных расслоений // УМН. - 1974. - Т.29. - № 6. - С.59-88.

4) Тюрин А.Н. Локальный инвариант риманова многообразия // Изв. АН СССР. - Сер. математ. - 1981. - Т. 45. - № 4. - С.824-851.

5) Тюрин А.Н. Неабелевы аналоги теоремы Абеля // Изв. РАН. - Сер. математ. - 2001. - Т. 65. - Вып. 1. - С.133-196.

3 марта — 170 лет со дня рождения немецкого математика, основоположника теории множеств, основателя и первого президента Германского математического общества (1890-1893) **Георга Кантора** (умер 06 января 1918).

1) Гендрихсон Н.Н. О некоторых работах Г. Кантора по теории чисел // ИМЕН. - 1970. - Вып. IX. - С.190-198.

2) Калужнин Л.А. К 100-летию теории множеств Георга Кантора // Квант. - 1973. - № 12. - С.3-8.

3) Медведев Ф.А. О канторовской теории действительных чисел // ИМИ. - 1978. - Вып. 23. - С.56-70.

4) Пуркерт В., Угльгаудс Х. Георг Кантор. - Харьков, 1991. - 128 с.

5) Синкевич Г.И. Георг Кантор и польская школа теории множеств. - СПб. - 2012. - 347 с.

6) Кантор Г. Труды по теории множеств. - М., 1985. - 431 с.

7) Флоренский П.А. О символах бесконечности (очерк идей Г. Кантора) // Новый путь. - 1904. - № 2. - С.173-223.

11 марта — 170 лет со дня рождения профессора Киевского университета (с 1877), чл.-кор. Петербургской АН, издателя "Журнала элементарной математики" (1884-1886) в Киеве **Василия Петровича Ермакова** (умер 16 марта 1922).

1) Букреев Б.Я. В. П. Ермаков (некролог) // Киев. унив. известия. - 1922.

2) Грацианская Л.Н. Василий Петрович Ермаков // ИМИ. - 1956. - Вып. IX. - С.667-690.

3) Добровольский В.А. Василий Петрович Ермаков (1845-1922). - М., 1981.

4) Ермаков В.П. Круговое преобразование // Мат. сб. - 1889. - Т. 14. - Вып. 3. - С.410-426.

5) Ермаков В.П. Полином, наименее уклоняющийся от нуля в данных пределах // Мат. сб. - 1918. - Т. 30. - Вып. 4. - С.511-520.

6) Ермаков В.П. Роль памяти в математике // ПС. - 1894. - № 5. - С.460-466.

7) Ермаков В.П. Теория абелевых функций. - Киев, 1897. - 120 с.

15 марта — 125 лет со дня рождения ученика профессора Д. А. Граве, профессора (с 1926) Ленинградского университета, с 1932 г. работавшего в МИАН СССР, чл.-кор. АН СССР (с 1929), крупного специалиста в области алгебры, теории чисел и истории математики **Бориса Николаевича Делоне** (умер 17.07.1980).

1) Епифанова А.П. Борис Николаевич Делоне. - М., 1967. - 55 с.

2) Фаддеев Д.К. Борис Николаевич Делоне // УМН. - 1950. - Т. 5. - Вып. 6. - С.159-163.

3) Шафаревич И.Р. Борис Николаевич Делоне (к 70-летию со дня рождения) // УМН. - 1961. - Т. 16. - Вып. 3 (99). - С.239-244.

4) Делоне Б.Н. Локальный метод в геометрии чисел // Изв. АН. - Сер. мат. - 1945. - Т. 9. - С.241-256.

5) Делоне Б.Н. Петербургская школа теории чисел. - М.-Л., 1947. - 419 с.

6) Делоне Б.Н. Работы Гаусса по теории чисел // Сб. "Карл Фридрих Гаусс". - М., 1956. - С.11-112.

7) Делоне Б.Н. Теория планигонов // Изв. АН СССР. - Сер. мат. - 1959. - Т. 23. - № 3. - С.365-386.

18 марта — 325 лет со дня рождения академика Петербургской АН (с 1725), специалиста в теории чисел, теории дифференциальных уравнений и геометрии **Христиана Гольдбаха** (умер 01 декабря 1764).

1) Делоне Б.Н. Петербургская школа теории чисел. - М.-Л., 1947. - 419 с.

2) Мельников И.Г. О некоторых вопросах теории чисел в переписке Эйлера с Гольдбахом // ИМЕН. - 1966. - Вып. V. - С.15-30.

3) Ожигова Е.П. Развитие теории чисел в России. - Л., 1972.

4) Чудаков Н.Г. О проблеме Гольдбаха // УМН. - 1938. - Т.4. - С.14-33.

5) Юшкевич А.П., Копелевич Ю.Х. Христиан Гольдбах. - М., 1983. - 247 с.

23 апреля — 110 лет со дня рождения профессора (с 1962) Казанского университета, директора НИИ математики и механики Казанского университета, лауреата премии имени П. Л. Чебышева, специалиста в области дифференциальной геометрии и механики *Бориса Лукича Лаптева* (умер 15.01.1989).

1) Норден А.П., Шануков Б.Н. Лаптев Борис Лукич (к 70-летию со дня рождения) // УМН. - 1976. - Т. 31. - Вып. 1. - С.269-272.

2) Шануков Б.Н. Борис Лукич Лаптев. - Казань, 2001.

3) Лаптев Б.Л. Аффинная связность в пространстве тензорных опорных элементов // Изв. Каз. ФМО. - Казань, 1949. - Т. 14. - С.187-216.

4) Лаптев Б.Л. Геометрия Лобачевского, ее история и значение. - М., 1976. - 63 с.

5) Лаптев Б.Л. Математика в Казанском университете за 40 лет (1917-1957) // ИМИ. - 1959. - Вып. XII. - С.11-58.

6) Лаптев Б.Л. Теория параллельных прямых в ранних работах Н. И. Лобачевского // ИМИ. - 1951. - Вып. IV. - С.201-229.

26 апреля — 90 лет со дня рождения чл.-кор. АПН СССР (с 1965), лауреата Ленинской премии (1962), специалиста в области комбинаторной геометрии, топологии и методики преподавания математики **Владимира Григорьевича Болтянского**.

1) Волович М.Б., Левитас Г.Г. Владимир Григорьевич Болтянский // МШ. - 1975. - № 1. - С.90.

2) Воронов А.А. и др. В поисках нового (о В. Г. Болтянском) // МШ. - 1985. - № 2. - С.90.

3) Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. - М., 1966. - 307 с.

4) Болтянский В.Г. Новая геометрическая характеристика урысоновской размерности // Мат. сб. - 1951. - Т. 29(71). - Вып. 3. - С.603-614.

5) Болтянский В.Г. О понятиях площади и объема // Квант. - 1977. - № 5. - С.2-9.

6) Болтянский В.Г. Третья проблема Гильберта. - М., 1977. - 208 с.

7) Болтянский В.Г., Яглом И.М. Преобразования. Векторы. - М., 1964.

28 апреля — 250 лет со дня рождения французского математика, академика, руководителя комиссии по реорганизации образования во Франции **Сильвестра Франсуа Лакруа** (умер 24 мая 1843).

1) История математики / Под ред. А. П. Юшкевича. - М., 1972. - Т. 3. - Математика XVIII столетия.

2) Лакруа С.Ф. Курс математики. - СПб., 1822-1826. - ч. 1-7.

3) Лакруа С.Ф. Основания арифметики. - СПб., 1826.- 130 с.

4) Лакруа С.Ф. Основания геометрии. - М., 1835.- 272 с.

5) Лакруа С.Ф. Начальные основания прямолинейной и сферической тригонометрии и приложения алгебры к геометрии. - СПб., 1822.- 235 с.

30 апреля — 110 лет со дня рождения отечественного математика, академика (с 1972), крупного специалиста в функциональном анализе, теории приближения функций и др., лауреата Государственных премий и премии имени П. Л. Чебышева (1972), ученика академика А. Н. Колмогорова **Сергея Михайловича Никольского** (умер 9 ноября 2012).

1) Дзядык В.К. и др. Никольский Сергей Михайлович (к 70-летию со дня рождения) // УМН. - 1975. - Т. 30. - Вып. 4. - С.271-281.

2) Колмогоров А.Н., Стечкин С.Б. Сергей Михайлович Никольский (к 50-летию со дня рождения) // УМН. - 1956. - Т. 11. - Вып. 2. - С.239-244.

3) Сергей Михайлович Никольский (к 100-летию со дня рождения) // МШ. - 2005. - № 3. - С.2-5.

4) Никольский С.М. Вариационная задача Гильберта // Изв. АН СССР. - Сер. мат. - 1958. - Т. 22. - Вып. 5. - С.599-630.

5) Никольский С.М. О преподавании предмета алгебры в школе // УМН. - 1985. - Т. 40. - Вып. 4. - С.77-78.

6) Никольский С.М. Приближения функций многих переменных и теоремы вложения. - М., 1977. - Изд. 2.

7) Никольский С.М. Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях // Матем. сб. - 1983. - Т. 33(75). - С.261-326.

1 мая — 150 лет со времени учреждения **Новороссийского университета** в Одессе, созданного на базе Ришельевского лицея по инициативе попечителя Одесского учебного округа Н. И. Пирогова. Наиболее известными учеными-математиками университета в конце XIX - начале XX века были И. В. Слешинский, И. Ю. Тимченко, В. Ф. Каган и С. О. Шатуновский. В советское время наиболее крупным математиком здесь был М. Г. Крейн.

1) Бутягин А.С., Салтанов Ю.А. Университетское образование в СССР. - М., 1957. - С.188-193.

2) Киро С.Н. Математика в Одесском (Новороссийском) университете (1865-1955) // Науч. ежегод. Одесского ун-та за 1956. - Одесса, 1957. - С.121-126.

3) Лейбман Э.Б. Математическое отделение Новороссийского общества естествоиспытателей (1876-1928) // ИМИ. - 1961. - Вып. 14. - С.393-440.

4) Маркевич А.И. Двадцатилетие Императорского Новороссийского университета. - Одесса, 1890. - 736 с.

4 мая — 170 лет со дня рождения английского математика, одного из основоположников векторного исчисления, развившего также алгебру бикватернионов **Уильяма Кингдона Клиффорда** (умер 03 марта 1879).

1) Кулишер А.Р. Вильям Клиффорд и грассмановы линейные алгебры // Труды II Всесоюзн. Математич. съезда. - Л., 1936. - Т. 2. - С.449-456.

2) Клиффорд В. Здравый смысл точных наук. Начала учения о числе и пространстве. - Пг., 1922. - Изд. 2. - 222 с.

8 мая — 110 лет со дня рождения польского математика, члена Польской АН (с 1952), директора математического института Польской АН (1952-1964) **Кароля Борсука** (умер 24 января 1982). Основные исследования относятся к топологии и геометрии.

1) Болтянский В.Г., Гохберг И.И. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. - М., 1965.

2) Синкевич Г.И. Георг Кантор и польская школа теории множеств. - СПб., 2012.

3) Скопенков А.Б. n-мерный куб, многочлены и решение проблемы Борсука // МПр. - 1999. - Вып. 9. - С.184-188.

4) Борсук К. Теория ретрактов. - М., 1971. - 291 с.

5) Борсук К. Теория шейпов. - М., 1976. - 187 с.

8 июня — 90 лет со дня рождения отечественного академика (с 1968) и Президента АН СССР (1986-1991), лауреата Ленинской (1961) и Государственной (1979) премии **Гурия Ивановича Марчука** (умер 24 марта 2013). Занимался вопросами прикладной математики, вычислительными методами и их приложением к расчетам ядерных реакторов.

1) Боголюбов Н.Н. и др. Марчук Гурий Иванович (к 60-летию со дня рождения) // УМН. - 1985. - Т. 40. - Вып. 5. - С.3-17.

2) Гурий Иванович Марчук (некролог) // Исследование Земли из космоса. - 2013. - С.95-96.

3) Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М., 1980. - 535 с. - Изд. 2.

4) Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. - М., 1992.

5) Марчук Г.И. Численные методы расчета ядерных реакторов. - М., 1958.- 381 с.

6) Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных систем. - М., 1979. - 319 с.

13 июня — 200 лет со дня рождения отечественного математика и механика, академика Петербургской АН (с 1862) **Осипа Ивановича Сомова** (умер 08 мая 1876).

1) Крамар Ф.Д. Иосиф Иванович Сомов (педагог и математик) // МШ. - 1952. - № 4. - С.10-19.

2) Крамар Ф.Д., Тюлина И.А. Иосиф Иванович Сомов // Вестник МГУ. - Сер. математ. и мех. - 1965. - № 5. - С.40-47.

3) Сомов А.И. Осип Иванович Сомов. - СПб., 1876.

4) Сомов О.И. Теория определенных алгебраических уравнений высших степеней. - М., 1838.

5) Сомов О.И. Основания теории эллиптических функций. - СПб., 1850.

28 июня — 140 лет со дня рождения французского математика, члена Парижской АН (с 1922), известного специалиста в теории функций **Анри Леона Лебега** (умер 26 июля 1941). Он был чл.-кор. АН СССР (с 1929), иностранным членом Лондонского Королевского общества (с 1930) и многих других академий мира.

1. Банах С. Интеграл Лебега в абстрактном пространстве // Сакс С. Теория интеграла. - М., 1949. - С.463-477.

2. Виленкин Н.Я. Анри Лебег // Квант. - 1975. - № 8. - С.2-10.

3. Тумаков И.М. Анри Леон Лебег. - М., 1975. - 120 с.

4. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций. - М.-Л., 1934.

5. Лебег А. Об измерении величин. - М. - 1960., 240 с. - Изд. 2.

Список сокращений

Изв. АН СССР — Известия Академии наук. Журнал.

Изв. Каз. ФМО — Известия Казанского физико-математического общества. Журнал.

ИМИ — Историко-математические исследования. Сборник статей.

ИМЕН — История и методология естественных наук. Сборник статей, издававшийся в МГУ.

МИРАН — Математический институт Российской Академии Наук.

МПр — Математическое просвещение. Сборники статей, выходившие в 1934-1938 и 1957-1961 гг. В 1995 г. издание возобновлено.

МШ — Математика в школе. Журнал.

ПС — Педагогический сборник. Журнал, выходивший в 1864-1917 гг.

УМН — Успехи математических наук. Журнал.

Гушель Ревекка Залмановна,
г. Ярославль, научный сотрудник отдела
Истории математики и математического образования
Научно-практического центра
“Математическое просвещение”.

E-mail: gushelr@yandex.ru

Цукерман Виталий Владимирович (27.04.1927 - 09.10.2014). Краткая биография

От редакции

Профессор кафедры высшей математики Московского государственного гуманитарного университета имени М. А. Шолохова (в штате вуза с 1958 г.). Член Российского философского общества.

Кандидат физико-математических наук. Автор более 70 опубликованных научных и научно-методических работ. В том числе три книги и десять работ философского характера, посвященных проблеме совместимости детерминизма и свободы человеческого выбора.

Участник ряда международных и российских конгрессов и конференций: Международный конгресс по математическому образованию (Квебек, Канада, 1992 г.), конференция по математическому образованию скандинавских стран "Norma" (Лахти, Финляндия, 1994 г.), 19-й и

20-й Всемирные философские конгрессы (Москва, 1993 г.; Бостон, США, 1998 г.), Второй и Четвертый российские философские конгрессы (Екатеринбург, 1999 г.; Москва, 2005 г.).

Жизненный путь

Родился 27 апреля 1927 г. в Москве.

В 1948 г. принят на заочное отделение мехмата МГУ.

С 1951 г. начал работать в школе, преподавал математику и физику.

В 1957 г. окончил с отличием Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова.

С 1958 г. начинает работу в Московском государственном заочном педагогическом институте (МГЗПИ) (ныне Московский государственный гуманитарный университет имени М. А. Шолохова (МГГУ им. М. А. Шолохова)).

В 1967 г. защитил кандидатскую диссертацию под руководством Н. Я. Виленкина по тематике "представление групп".

Последняя работа по высшей математике вышла в 1974 г. Далее стал заниматься вопросами совершенствования доказательств в вузовском курсе математики и совершенствования подготовки учителей математики.

Работы

По разным направлениям математики опубликовано более 40 работ, в том числе книги:

"Задачник-практикум по математической теории поля" в соавторстве с В. И. Семянистым (1976 г.);

"Ряды" в соавторстве с Н. Я. Виленкиным (1982 г. Учебное пособие для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. В основу книги легли лекции, неоднократно прочитанные автором студентам МГЗПИ);

"Действительные числа и основные элементарные функции" (2010 г.).

Главное направление работы

Поднимал проблему ликвидации в средней школе (за редким исключением) доказательной математики. Говорил о том, что такое положение дел приведет к гибели фундаментальной науки в России. Неоднократно выступал по этому поводу на семинарах в МГУ и писал об этом в министерство образования.

Подчеркивая важность доказательного изложения теории, выдвигал идею минимального расширения школьной программы. Так, в помощь учителям и ученикам написал книгу "Действительные числа и основные элементарные функции", в которой подробно и доказательно рассмотрел материал, заявленный в ее названии. Содержание книги способно играть роль несущего остова школьного курса алгебры и начал анализа и служить хорошей базой изучения математики в высшей школе.

Друзья и студенты о нём

"Во всем мне хочется дойти до самой сути" — пожалуй, эти несколько слов из стихотворения Б. Пастернака очень подходят для характеристики Виталия Владимировича. Это был человек-трудяга, который искал и находил пути решения математических и методических задач, философских вопросов.

Любил свое дело. Видел красоту в математических доказательствах. Для него было очень важным, чтобы студенты его понимали. Любил, чтобы на лекциях, семинарах ему задавали вопросы. Вел активную работу, направленную на улучшение качества образования.

Требовательный, но не жесткий, гениальный, но при этом без капли высокомерия. "Камертон честности" — так говорили о нём друзья. Он для многих был и останется примером для подражания в плане человеческих и профессиональных качеств.

Публикации В.В.Цукермана в журнале "Математическое образование"

Виталий Владимирович был постоянным автором нашего журнала. Приводим список его публикаций:

1) Методы математической физики. Набла-исчисление (два варианта изложения). - № 4(19). - 2001. - С. 38-48.

2) Методы математической физики. Набла-исчисление (два варианта изложения). Окончание. - № 1(20). - 2002. - С. 42-52.

3) (С Е. В. Гераськиной) Интеграл и общее среднее образование: проблема и вариант ее решения. - № 4(23). - 2002. - С. 76-89.

4) О построении теории основных элементарных функций / Анонс книги для учителя. - № 2(50). - 2009. - С. 51-54.

5) О выходе книги В. В. Цукермана. - № 1(53). - 2010. - С. 78.

6) К понятию действительного числа. - № 3-4(55-56). - 2010. - С. 22-27.

7) Теоремы о гранях ограниченного числового множества как выражение непрерывности множества действительных чисел. - № 2(58). - 2011. - С. 14-16.

8) (С Е. В. Гераськиной) Теорема Лагранжа — мощный инструмент исследования функций. - № 3-4(59-60). - 2011. - С. 24-33.

9) К разработке концепции математического образования. - № 1(69). - 2014. - С. 2-8.

10) (С М. Г. Морозкиной) Измерение отрезков. Координатная прямая и свойства абсолютных величин. - № 2(70). - 2014. - С. 36-55.

В. В. Цукерман — ветеран отечественного математического образования, активный участник научно-методического семинара “Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом”

Т. И. Кузнецова

Всё стоящее уже давно придумано, надо только не бояться попробовать перепридумать это ещё раз.
Иоганн Вольфганг Гёте

Виталий Владимирович (Вульфович) Цукерман — ветеран математического образования, отдавший всю свою жизнь пропаганде передовых идей в преподавании математики в нашей стране.

В. В. Цукерман окончил механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, аспирантуру, под руководством Н. Я. Виленкина написал и защитил диссертацию, получив степень кандидата физико-математических наук. Всю жизнь преподавал математику в Московском государственном гуманитарном университете (МГГУ) имени М. А. Шолохова, является автором более 70 научных и научно-методических трудов, учебников по математическому анализу. За большие научные и педагогические заслуги ему было присвоено звание профессора.

Виталий Владимирович — один из старейших участников семинара “Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом”, образованного при АПН СССР в 1959 году по инициативе и под руководством И. К. Андронова, входил в его ядро. В составе делегаций от семинара В. В. Цукерман представлял его на многих мероприятиях, организованных педагогической общественностью (см. фотографии, приведённые ниже).

Участие Виталия Владимировича в семинаре отражено в книге В. А. Садчикова “Во славу лет, не прожитых напрасно. О профессоре И. К. Андронове, талантливом педагоге, ученом, просветителе” (М.: ПЕР СЭ, 2009), большая часть которой посвящена описанию становления и функционирования семинара. В. В. Цукерман неоднократно выступал на семинаре с докладами. В книге это отмечено особо:

“В. В. Цукерман – г. Москва, выпускник МГУ, имеющий богатый опыт проведения курсов и спецкурсов по матанализу. Участник международных конгрессов и конференций по Математическому образованию, проходивших в Квебеке (Канада) 1992 г. и в г. Лахти (Финляндия) 1994 г. Сделал 6 оригинальных содержательных докладов по преподаванию математического анализа и его приложений в школьной математике”. Из этих докладов удалось найти информацию только о двух (аннотации в журнале “Математика в школе”):

“11 января 1979 г. было с интересом выслушано сообщение В. В. Цукермана (Москва) на тему «Длина дуги окружности и радианная мера угла». Докладчик дал упрощённый вариант вполне строгого изложения этого вопроса, доступный учащимся VIII-X классов на факультативных и кружковых занятиях” (1979, № 6, с. 72).

“10 ноября [1983 г.] собравшиеся выслушали доклад В. В. Цукермана (Москва) «Проблемы изучения «Начал анализа» в средней школе», в котором был показан вариант изложения данной темы на факультативе в форме спецкурса из 8 лекций” (1984, № 6, с. 75).

Как можно заметить по последнему докладу, в течение трёх десятилетий (по крайней мере) Виталий Владимирович уделял большое внимание преподаванию начал математического анализа в отечественной средней школе. Он очень сильно, можно сказать, даже трагически, переживал неудачи реформы А. Н. Колмогорова, много сил отдал исследованию их причин. Результатом этого исследования стала разработка уникального труда — книги “Действительные числа и основные элементарные функции” (М.: Издательство “Икар”, 2010). По словам Виталия Владимировича, книга была задумана ещё в кризисном для реформы 1978 году — как участие в её учебном и методическом обеспечении.

Цель этой книги — предоставить студентам педагогических вузов, обучающихся по специальности “Учитель математики”, доказательную базу, которая необходима для грамотного преподавания математики в школе. Конкретно, в книге излагается теория действительных чисел, вводимых как бесконечные десятичные дроби. На этой основе определяются и подробно исследуются основные элементарные функции. Главное достоинство книги в том, что в ней даётся доказательное построение теории действительных чисел и основных элементарных функций, при этом доказательства книги по своей сложности не превышают уровня трудности разбора олимпиадных задач и вполне доступны интересующимся школьникам профильного обучения.

После выхода в свет книги Виталию Владимировичу удалось несколько лет преподавать по ней студентам МГГУ имени М. А. Шолохова, будущим учителям математики. Пропаганде этого труда были посвящены его доклады на Всероссийском съезде учителей математики в МГУ (29 октября 2010 г., тема: “Определения и доказательства при изучении основных элементарных функций в средней школе”), в библиотеке имени К. Д. Ушинского (13 января 2012 г., тема: “Презентация книги В. В. Цукермана «Действительные числа и основные элементарные функции»”, см. фото), на нашем семинаре (13 сентября 2012 г.) и на научном семинаре по физико-математическим проблемам фундаментальной и прикладной науки МГГУ имени М. А. Шолохова (24 сентября 2012 г.). Последние два доклада назывались одинаково (с точностью до моей маленькой редакторской правки в нашем варианте). При этом Виталий Владимирович называл доклад у нас репетицией перед докладом в МГГУ имени М. А. Шолохова. В отчёте о работе семинара в 2012/2013 учебном году, опубликованном в журнале “Математика в школе”, даётся следующая аннотация этого доклада:

“На первом заседании 13 сентября 2012 года был заслушан доклад В. В. Цукермана (Москва) “Почему не удалась реформа школьного математического образования А. Н. Колмогорова (60-70-е годы XX века). Есть ли у неё перспектива сегодня?” По мнению докладчика, главной трудностью проведения реформы стала неподготовленность учителей к успешному преподаванию новых предметов. Он также представил программу методического обеспечения доказательной линии изложения курса «Алгебра и начала анализа»” (2013, № 6, с. 79).

Краткость этой аннотации объясняется ограничениями на объём отчёта. Первоначальный, авторский, вариант аннотации этого доклада, предоставленный В. В. Цукерманом автору настоящих строк, следующий:

“Реформой была, по сути, поставлена грандиозная задача повышения математической культуры населения страны в целях её успешного развития. В частности, задача содержательного ознакомления с “ньютоновской концепцией математического естествознания” — базой взрывного развития науки, технологии, промышленности за последние три столетия.

Проведение реформы столкнулось со многими трудностями, главной из которых, по мнению докладчика, являлась неподготовленность учителей к успешному обучению новым предметам. Обширная программа высшей математики в педвузах была направлена на повышение общей математической культуры студентов, но не на умение конкретно передавать важнейшие идеи анализа школьникам.

Постепенное выхолащивание содержания курса “Алгебра и начала анализа” фактически, за редкими исключениями, привело ныне к ликвидации доказательной математики в средней школе. Не научившись доказывать в школе, студенты не умеют проводить доказательства в вузе, не умеют анализировать учебный материал. Такие выпускники вузов, если и смогут, по мнению докладчика, работать по уже существующим правилам, но открывать новое знание они не смогут.

В докладе предложена для обсуждения программа методического обеспечения доказательной линии изложения Алгебры и начал анализа, а также приведены примеры такого изложения. Подробнее об этом см. в http://old.gnpbu.ru/index.php?file=event2012-1.htm ”.

Последняя ссылка — на сайт Научной педагогической библиотеки имени К. Д. Ушинского РАО, точнее, на материалы отмеченного выше доклада, сохранённые библиотекой в электронном виде. Там сделаны ссылки на две очень важные работы Виталия Владимировича, положенные в основу доклада: “Математический анализ и общее среднее образование” (“Математика в школе”, 1996, № 3) и “К вопросу о профессиональной компетентности учителя математики” (“Математика” (Первое сентября), 2012, № 1, см. Приложения на CD-диске).

В конце 2012 года, после докладов на нашем семинаре и на семинаре МГГУ имени М. А. Шолохова, Виталий Владимирович планировал продолжить обсуждение разрабатываемой им темы на второй научно-методической конференции “Новые образовательные программы МГУ и школьное образование” (17 ноября 2012 г.), подав соответствующие тезисы под названием “Реформа А. Н. Колмогорова и школьное математическое образование сегодня”. Однако редакционная коллегия, опубликовав этот доклад в материалах конференции, не сочла возможным включить его в программу конференции, чем очень огорчила его автора. В результате на следующий год, т.е. на третью конференцию “Новые образовательные программы МГУ и школьное образование” (16 ноября 2013 г.), Виталий Владимирович заявку на доклад не подавал, хотя присутствовал на ней (см. фото).

Под конец жизни Виталий Владимирович сетовал на то, что ему не удалось донести до умов учительства и организаторов образования очевидные для него положения совершенствования отечественного математического образования. На это он получил от меня обнадёживающее заявление о том, что всему своё время, и оно придёт. Будем надеяться, что будет так.

В заключение приведём выдержку из письма А. Н. Колмогорова В. И. Арнольду, которая позволяет представить В. В. Цукермана, радетеля о воспитании полноценных членов человеческого сообщества, продолжателем дела, начатого нашим великим математиком с целью совершенствования отечественного математического образования: “Я знал, что мне не дадут это сделать, но я также был убеждён, что этим необходимо заниматься”.

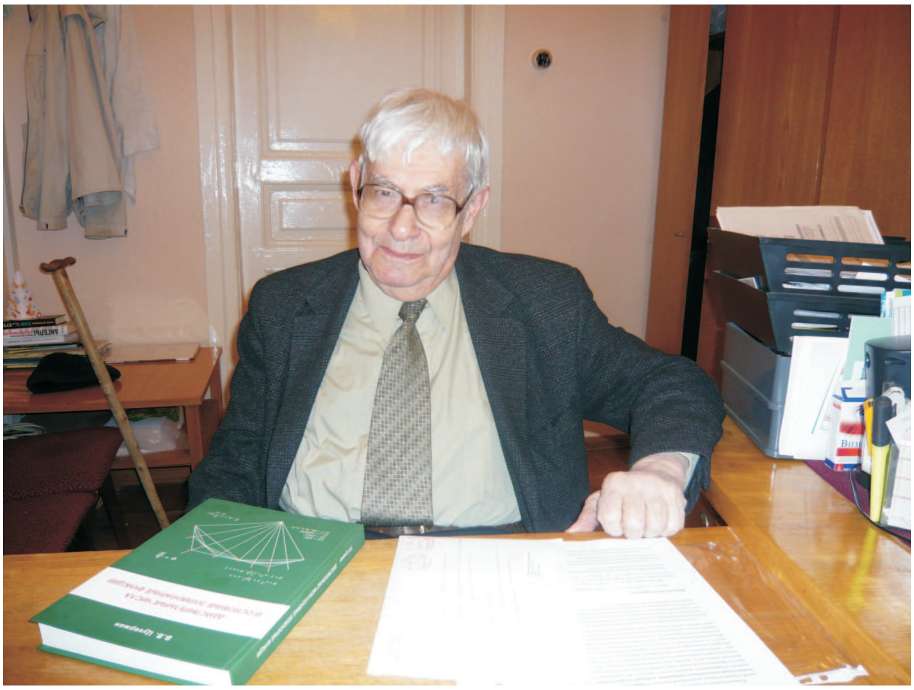
Фотоматериалы

Часть из приведённых ниже фотографий сделана автором и её учениками, одна фотография сделана Сергеем Романчуком, одна взята с веб-сайта НПБ имени К. Д. Ушинского РАО.

В. В. Цукерман на заседании семинара памяти О. В. Мантурова 8 сентября 2011 г.

В. В. Цукерман на заседании семинара, посвящённого 80-летию В. Н. Шапкиной, 12 января 2012 г. (во втором ряду первый слева)

В. В. Цукерман в группе участников заседания семинара 11 апреля 2013 г. (во втором ряду четвёртый слева). После доклада В. С. Секованова, посвященного 110-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова



Из материалов, предоставленных В. В. Цукерманом к докладу в Научной педагогической библиотеке имени К. Д. Ушинского: Виталий Владимирович со своей книгой. См

http://old.gnpbu.ru/index.php?file=event2012-1.htm

На этом фото (автор Сергей Романчук) В. В. Цукерман на Торжественном заседании Клуба выпускников ФМШ А. Н. Колмогорова в Российской государственной библиотеке, посвящённом 110-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова, 24 апреля 2013 г.

На этих двух фото В. В. Цукерман на третьей научно-методической конференции “Новые образовательные программы МГУ и школьное образование” 16 ноября 2013 г.

Кузнецова Татьяна Ивановна,
профессор кафедры общетеоретических предметов
Института русского языка и культуры
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доктор педагогических наук, доцент.

Руководитель семинара
“Передовые идеи в преподавании
математики в России и за рубежом”.

E-mail: kuzti45@gmail.com

Последний романтик

Игорь Рейф

В. В. Цукерман. Фото 1970-х годов[1]

Это был редкий человеческий экземпляр, или, как выражался Паниковский, “человек с раньшего времени”. Таких, наверное, почти уже не осталось, и боюсь, что скоро не будет совсем.

Война прошлась по его семье катком. И хотя никто в ней не воевал, но в 1942 г. в эвакуации, заразившись сыпным тифом, умирает его мать, а в 1943 г., уже в Москве, во время разгрузки эшелона с ранеными подхватывает тиф и он сам. Болел долго, больше полугода провалялся в Боткинской больнице в “палате смертников” с самым тяжелым из всех возможных осложнений — тифозным энцефалитом, выжил чудом. А потом был механический техникум и заочное отделение мехмата МГУ. После смерти отца в 1949 г. остался один, перебивался случайными заработками, главным образом частными уроками. В результате учеба в МГУ растянулась на 9 лет. В 1951 г. начал работать учителем математики и физики и с тех пор навсегда связал себя со школой.

Его воспитал отец да, может быть, вот эта трудная сиротская юность. Об отце, пожалуй, стоит сказать особо. Врач старой, дореволюционной закваски, получивший диплом не то в Цюрихе, не то в Женеве, он был, по-видимому, человеком не совсем обыкновенным, с самого начала прекрасно понимавшим природу и характер установившегося после революции режима (еще бы, ведь он успел изучить большевистских лидеров еще в бытность в Швейцарии, а в 1923 году недолгое время проработал на посту начальника медицинского снабжения Кремля), и это знание он передал своему сыну. Так что никаких иллюзий в отношении обещанного всем светлого будущего и прочей большевистской демагогии Виталий Владимирович не питал еще с юности.

Но этот трезвый взгляд не мешал ему оставаться в душе романтиком, бесконечно преданным главному делу своей жизни — воспитанию школьных учителей. А еще замечательным другом. Те, кто однажды попал в орбиту этой дружбы, хорошо знали, что это такое. Одну такую трогательную юношескую дружбу он пронес через всю жизнь. Хотелось бы рассказать о ней подробней, да не позволяет место. Но если кому интересно, он может прочитать об этом в Интернете: Гении и таланты // Не отступаясь от лица. Примечания к судьбе физика.

[1]Из книги Игоря Рейфа “Гении и таланты”, М.: Права человека, 2007.

Но вернемся к профессиональной деятельности. В 1958 г. он зачисляется на кафедру высшей математики Московского заочного педагогического института (преобразованного впоследствии в МГГУ), с которым больше уже не расставался. И все эти полвека он держит руку на пульсе математического школьного образования, вникает, сравнивает, пристально следит за реформой, которую в 1960-х гг. пытался осуществить А. Н. Колмогоров, изучает систему заочной подготовки учителей в СССР 1920-30 годов (кстати, совсем недурную) и пишет на эту тему большую капитальную работу. Думаю, немного найдется людей, которые так глубоко понимали бы проблематику математического школьного образования в советской и постсоветской России.

Я по образованию гуманитарий, но слушать его рассказы о математике было для меня истинным наслаждением. Может потому, что в эти минуты во всем блеске раскрывался его уникальный лекторский дар. Ну а мне, неспециалисту, все это было интересно вдвойне, потому что он умел красиво и изящно, в нескольких словах передать самую суть — изюминку проблемы. Ведь очень немногие люди обладают способностью мыслить на уровне идей, и В. В. был одним из них. Скажу больше: в этой стихии он чувствовал себя как-то особенно свободно и непринужденно, о чем бы ни заходил разговор — об истории ли науки, узловых вопросах естествознания или политической злобе дня. А о своем родном предмете и великих математиках прошлого — от Ньютона и Лейбница до Колмогорова и Арнольда — он мог рассказывать без конца и был с ними, можно сказать, "на ты", настолько глубоко постигал он все, что касалось их научного вклада или характерологических особенностей личности.

Вероятно, студенты должны были смотреть ему в рот, ведь он был, как говорят, лектор милостью божией. Но как это было на самом деле, сказать не могу, хотя по некоторым оброненным им фразам чувствовал, как не хватает ему вдумчивой, понимающей аудитории и как он от этого страдает. Особенно в последние два десятилетия, когда всем все стало ни до чего и в вуз пошли не за знаниями, а за дипломами. И хотя это зависело уже не от него, но все-таки грустно, что так мало было у него учеников.

Конечно, к своей последней, итоговой книге "Действительные числа и основные элементарные функции" он приступил слишком поздно, когда силы были уже не те, да и времени оставалось совсем мало. Что мешало ему взяться за нее лет на 10-15 раньше, сказать не берусь, потому что идеи эти созрели у него уже давно, и он придавал им очень большое значение. А неизменным ориентиром и камертоном в этой области служил для него Андрей Николаевич Колмогоров.

Между прочим, именно от В. В. услышал я впервые историю о том, как в 1970-е годы Колмогоров задумал читать в МГУ свой факультативный курс, кажется, по теории вероятностей. Лектор он был неважный и слушать его было трудно, тем не менее аудитория набивалась битком. Приходили не только студенты, но и остепененные доктора и кандидаты наук. И вот однажды, в конце первого часа одной из лекций, ему был задан вопрос по поводу доказательной базы какой-то предложенной им теоремы или задачи. Колмогоров задумался, а потом объявил, что сможет ответить на этот вопрос только после перерыва. Но после перерыва он в аудитории больше не появился и вообще отказался от дальнейшего чтения курса. Конечно, такое мог себе позволить только Колмогоров, но он чувствовал себя не вправе выступать перед слушателями, если хоть в чем-нибудь был не уверен.

Привожу этот штрих не только в связи с тем, что он по-своему характеризует Колмогорова, но и потому, что дает некоторое представление о подходе к предмету самого В. В. Ведь он в этом смысле тоже был до крайности щепетилен и требователен к самому себе, и уже имея за плечами 30-ти и 40-летний опыт, продолжал тщательно готовиться к каждой лекции, хотя вполне мог позволить себе и расслабиться. А когда был помоложе и, как и многие его коллеги, занимался репетиторством (а без этого содержать семью было в те годы практически невозможно), он брался готовить абитуриентов только по физике, но не по математике. Казалось бы, вузовский преподаватель, чего ему было бояться? Но он объяснял это так: "Я не могу рисковать, а вдруг мне встретится задача, которую я не сумею решить". "Ну и что же, встретилась?" — поинтересовался я однажды. "Нет, до сих пор, слава Богу, нет". И все-таки, когда жизнь заставила, своего пасынка он подготовил на физфак МГУ и по физике, и по математике, куда тот уверенно и поступил, несмотря на огромный конкурс. "И как же это ему удалось? — спросил я Виталия Владимировича. — Ведь никакими выдающимися способностями он вроде бы не обладал". "Ну, да ведь и я чего-нибудь да стою", — заметил он с лукавой усмешкой.

Но вернусь к монографии "Действительные числа и основные элементарные функции". Ее значение по-настоящему можно оценить лишь в свете идей А. Н. Колмогорова, положенных им в основу реформы математического школьного образования 1960-х годов, закончившейся, увы, провалом. Вот как объясняет это сам Виталий Владимирович: "Гениальный математик выдвинул грандиозную задачу ознакомления выпускников средней школы с математикой Нового времени, ставшей фундаментом взрывного развития науки, промышленности, технологии за последние три столетия. Это было время первого спутника Земли и полета Юрия Гагарина. Ставилась задача усиления роли математики в целях успешного развития страны путем приобщения оканчивающих школу к идеям математического анализа. ... Но учителя, в своей массе, оказались не подготовленными для успешного преподавания нового предмета в средней школе. При этом оказалось невозможным доступное проведение в школьном учебнике доказательной линии изложения курса "Алгебра и начала анализа" [2].

Вот этот пробел и задумал восполнить своей монографией Виталий Цукерман. А о том, какое значение имеют идеи математического анализа в контексте мировой культуры и почему его элементы следует вводить в содержание среднего, в том числе и гуманитарного, образования, лучше всего сказал он сам в докладе на конференции "Norma-94", прошедшей в сентябре 1994 г. в г. Лахти (Финляндия). "Гигантское ускорение развития науки и техники за последние 300 лет неотделимо от продуктивного использования идей и методов математического анализа. ... Они напрямую связаны с универсальными проблемами движения, развития, поисками характеристик сложных объектов, прогнозированием будущего. Вспомним: более столетия назад Лев Толстой в "Войне и мире" говорил о "дифференциале истории", "интеграле истории". Великий писатель и мыслитель интуитивно уловил глубинную сущность анализа как обобщенную возможность получения локальных и глобальных характеристик текущих процессов"[3].

Но что же стоит на пути освоения этого материка знаний, столь необходимых каждому культурному человеку? Проблема, по Цукерману, состоит в отсутствии доказательной базы, выпавшей из школьных программ и учебников, вне которой невозможно сколько-нибудь успешное преподавание этого предмета. "В нашей средней школе, — пишет он, — за редкими исключениями, фактически произошла ликвидация доказательной математики. Думаю, это беда с далеко идущими последствиями. Не приучившись доказывать в школе, студенты не умеют, как правило, проводить доказательства и в ВУЗе. Не умеют анализировать учебный материал. Такие выпускники ВУЗов, если и смогут работать по уже установленным правилам и алгоритмам, то открывать новое знание они не смогут. Если такое положение не изменится, то весьма вероятно, что лет через 20 в России не останется фундаментальной науки" [4].

Таким образом, его монография — это, по сути, инструмент, позволяющий учителю математики овладеть доказательным обоснованием преподаваемого им материала, а также, при наличии соответствующей потребности, приобщать к нему учащихся. При этом строгость доказательной базы потребовала от автора лишь минимального расширения школьной программы, поскольку содержащийся в книге материал удалось изложить гораздо более скупыми средствами — по сравнению с педвузовским курсом математического анализа, как утверждает Цукерман, разница более чем на порядок.

Станет ли книга "Действительные числа и основные элементарные функции" настольной для учителя математики? Трудно пока ответить на этот вопрос, хотя очень бы этого хотелось. Но она вышла в не лучшее для нее время, когда школьное образование переживает черную полосу. Говорят, что книги имеют свою судьбу. Да, все так, но судьба эта зависит от человеческого

[2]Из статьи "К разработке концепции математического образования" // Математическое образование, № 1(69), 2014, с. 2.

[3]Цитируется по: *Математика в школе*, 1996, № 3, С.33-34.

[4]См. сноску 2.

равнодушия и неравнодушия, от умной и понимающей читательской аудитории. А с уходом из жизни ее автора, который лучше, чем кто-либо другой, отдавал отчет в значении своего труда и прилагал усилия для его продвижения и популяризации, она, можно сказать, повисла на волоске. Будем же надеяться, что она все-таки будет оценена и понята. Ведь слишком многое здесь поставлено на карту.

Краткая биографическая справка об авторе

Рейф Игорь Евгеньевич, 1938 года рождения, по образованию врач, последние 20 лет занимается журналистикой. Печатался в журналах "Наука и жизнь", "Звезда", "Вестник Европы". Автор книг "Гении и таланты", "Перед главным вызовом цивилизации" и др. С 1998 г. живет в Германии.

E-mail: igor.reyf@gmail.com

Интересные факты о математике и математиках

Музей фактов

Математика как учебный предмет и наука требует при изучении значительных умственных усилий и концентрации внимания. Однако в повседневной жизни с математикой и ее творцами связано немало забавных и поучительных историй. Предлагаем вниманию читателей несколько таких историй, собранных в интернет-музее фактов

http://muzey-factov.ru/tag/mathematics

В конце каждой истории приведена ссылка на оригинальный источник.

Математики, исследовавшие картины Ван Гога, пришли к выводу, что завихрения на некоторых его полотнах довольно точно описывают невидимые для глаза турбулентные потоки воздуха. Это выражается в том, что большая или меньшая яркость точек на картинах пропорциональна скоростям точек потока в соответствующих координатах при математическом моделировании турбулентности. Учёные также отмечают, что подобные картины, в том числе знаменитая "Звёздная ночь", писались Ван Гогом в периоды психической нестабильности.

Источник: www.gazeta.ru

В начале 1980-х годов сеть ресторанов быстрого питания A& W запустила масштабную рекламную кампанию своего гамбургера. В отличие от похожего сэндвича в 1/4 фунта из McDonald's, гамбургер A& W весил 1/3 фунта и стоил чуть дешевле, а покупатели говорили, что он вкуснее. Несмотря на всё это, кампания провалилась. Позже A& W провела исследование и выявила причину: многие клиенты не понимали истинного значения дробных чисел. Предложение казалось им невыгодным, так как 3 меньше 4.

Источник: www.nytimes.com

Знаменитый датский физик Нильс Бор увлекался футболом и был вратарём клуба "Академиск". Его брат Харальд также был доктором наук —он специализировался в математике — и выступал в том же клубе, но привлекался ещё и в сборную Дании. Харальд Бор был настолько популярен у публики, что на защите его диссертации присутствовало больше футбольных болельщиков, чем математиков.

Источник: en.wikipedia.org

Соцветия капусты сорта Романеско представляют собой фракталы. Бутоны растения описываются логарифмической спиралью и состоят из более мелких бутонов, тоже закрученных подобным образом. Эта самоподобная структура повторяется несколько раз.

Источник: ru.wikipedia.org

Леонид Канторович, единственный отечественный обладатель Нобелевской премии по экономике, в конце 1940-х годов предложил Ленинградскому вагоностроительному заводу с помощью математических методов оптимизировать раскрой стальных листов. После их внедрения производство продукции значительно увеличилось, однако вскоре руководство завода получило партийный выговор и прекратило сотрудничество с математиками. Оказалось, что, во-первых, из-за резкого уменьшения стальных отходов завод не выполнил план по сдаче металлолома. Во-вторых, план по выпуску на следующий год вышестоящие инстанции ещё увеличили, но завод не смог обеспечить этот прирост вследствие уже состоявшейся полной оптимизации процесса.

Источник: lab7.ipu.ru:8081

Расположение чисел на числовой оси равномерно — это приобретённая способность человека, обусловленная воспитанием и образованием, в то время как врождённо-интуитивным подходом является расположение чисел по логарифмической шкале. Такие выводы сделаны на основании работы с индейцами племени мундуруку, живущими в бассейне Амазонки, большинство из которых не имеют никакого образования. Им показывали некоторое количество точек или проигрывали несколько одинаковых звуков, а затем просили показать это число на оси от 1 до 10 или от 10 до 100. Чем меньше было число, тем больше пространства отводили для него испытуемые, что как раз соответствует логарифмической шкале. Сходные результаты демонстрировали и маленькие дети из США, ещё не умеющие считать, а вот взрослые американцы и образованные мундуруку были склонны располагать числа более равномерно.

Источник: www.sciencedaily.com

Во многих источниках, зачастую с целью ободрения плохо успевающих учеников, встречается утверждение, что Эйнштейн завалил в школе математику или, более того, вообще учился из рук вон плохо по всем предметам. На самом деле всё обстояло не так: Альберт ещё в раннем возрасте начал проявлять талант в математике и знал её далеко за пределами школьной программы. Позднее Эйнштейн не смог поступить в Швейцарскую высшую политехническую школу Цюриха, показав высшие результаты по физике и математике, но не добрав нужное количество баллов в других дисциплинах. Подтянув эти предметы, он через год в возрасте 17 лет стал студентом данного заведения.

Источник: en.wikipedia.org

Каждый раз, когда вы перемешиваете колоду, вы создаёте последовательность карт, которая с очень высокой степенью вероятности никогда не существовала во Вселенной. Количество комбинаций в стандартной игральной колоде равно 52!, или $8 \cdot 10^{6}7$. Чтобы достичь хотя бы 50% вероятности получить комбинацию второй раз, нужно сделать $9 \cdot 10^{3}3$ перемешиваний. А если гипотетически заставить всё население планеты за последние 500 лет непрерывно мешать карты и каждую секунду получать новую колоду, в итоге получится не более $10^{2}0$ разных последовательностей.

Источник: nowiknow.com

Используемая нами десятичная система счисления возникла по причине того, что у человека на руках 10 пальцев. Способность к абстрактному счёту появилась у людей не сразу, а использовать для счёта именно пальцы оказалось удобнее всего. Цивилизация майя и независимо от них чукчи исторически использовали двадцатиричную систему счисления, применяя пальцы не только рук, но и ног. В основе распространённых в древних Шумере и Вавилоне двенадцатиричной и шестидесятиричной систем тоже было использование рук: большим пальцем отсчитывались фаланги других пальцев ладони, число которых равно 12.

Источник: ru.wikipedia.org

Леонардо да Винчи вывел правило, согласно которому квадрат диаметра ствола дерева равен сумме квадратов диаметров ветвей, взятых на общей фиксированной высоте. Более поздние исследования подтвердили его с одним лишь отличием — степень в формуле необязательно равняется 2, а лежит в пределах от $1,8$ до $2,3$. Традиционно считалось, что эта закономерность объясняется тем, что у дерева с такой структурой оптимальный механизм снабжения веток питательными веществами. Однако в 2010 году американский физик Кристоф Эллой нашёл более простое механическое объяснение феномену: если рассматривать дерево как фрактал, то закон Леонардо минимизирует вероятность слома веток под воздействием ветра.

Источник: lenta.ru

Листья на ветке растения всегда располагаются в строгом порядке, отстоя друг от друга на определённый угол по или против часовой стрелки. Величина угла разная у различных растений, но её всегда можно описать дробью, в числителе и знаменателе которой — числа из ряда

Фибоначчи. Например, у бука этот угол равен 1/3, или 120 градусов, у дуба и абрикоса — 2/5, у груши и тополя — 3/8, у ивы и миндаля — 5/13 и т.д. Такое расположение позволяет листьям наиболее эффективно получать влагу и солнечный свет.

Источник: en.wikipedia.org

Муравьи способны объяснять друг другу путь к пище, умеют считать и выполнять простейшие арифметические действия. Например, когда муравей-разведчик находит еду в специально сконструированном лабиринте, он возвращается и объясняет, как пройти к ней, другим муравьям. Если в это время заменить лабиринт на аналогичный, то есть убрать феромоновый след, сородичи разведчика все равно найдут пищу. В другом эксперименте разведчик ищет в лабиринте из многих одинаковых ответвлений, и после его объяснений другие насекомые сразу бегут к обозначенному ответвлению. А если сначала приучить разведчика к тому, что пища с большей вероятностью будет находиться в 10, 20 и так далее ответвлениях, муравьи принимают их за базовые и начинают ориентироваться, прибавляя или отнимая от них нужное число, то есть используют систему, аналогичную римским цифрам.

Источник: wadappen.livejournal.com

Чтобы получить возможность заниматься наукой, Софье Ковалевской пришлось заключить фиктивный брак и уехать из России. В то время российские университеты просто не принимали женщин, а чтобы эмигрировать, девушка должна была иметь согласие отца или мужа. Так как отец Софьи был категорически против, она вышла замуж за молодого учёного Владимира Ковалевского. Хотя в итоге их брак стал фактическим, и у них родилась дочь.

Источник: ru.wikipedia.org

В феврале 1992 года состоялся розыгрыш лотереи Вирджинии "6 из 44", где джек-пот составлял 27 миллионов долларов. Число всех возможных комбинаций в таком виде лотереи было чуть выше 7 миллионов, а каждый билет стоил 1 доллар. Предприимчивые люди из Австралии создали фонд, собрав по 3 тысячи долларов от 2500 человек, купили нужное число бланков и вручную заполнили их различными комбинациями цифр, получив после выплаты налогов тройную прибыль.

Источник: www.nytimes.com

Стивен Хокинг — один из крупнейших физиков-теоретиков и популяризатор науки. В рассказе о себе Хокинг упомянул, что стал профессором математики, не получая никакого математического образования со времён средней школы. Когда Хокинг начал преподавать математику в Оксфорде, он читал учебник, опережая собственных студентов на две недели.

Источник: ru.wikipedia.org

В конце 1930-х годов Александр Волков, который по образованию был математиком и преподавал эту науку в одном из московских институтов, стал изучать английский язык и для практики решил перевести сказку "Мудрец из страны Оз" американского писателя Фрэнка Баума, чтобы пересказать её своим детям. Им очень понравилось, они стали требовать продолжения, и Волков помимо перевода начал придумывать что-то от себя. Так было положено начало его литературному пути, результатом которого стал "Волшебник Изумрудного города" и много других сказок о Волшебной стране. А "Мудрец из страны Оз" в простом переводе на русский не издавался до 1991 года.

Источник: 80-e.ru

Существует математический закон Бенфорда, который гласит, что распределение первых цифр в числах каких-либо наборов данных из реального мира неравномерно. Цифры от 1 до 4 в таких наборах (а именно статистика рождаемости или смертности, номера домов и т.п.) на первой позиции встречаются гораздо чаще, чем цифры от 5 до 9. Практическое применение этого закона заключается в том, что по нему можно проверять на достоверность бухгалтерские и финансовые данные, результаты выборов и многое другое. В некоторых штатах США несоответствие данных закону Бенфорда даже является формальной уликой в суде.

Источник: www.empatika.com

Одно из самых лаконичных рекомендательных писем из университета получил математик Джон Нэш, прототип героя фильма “Игры разума”. Преподаватель написал в ней одну строчку: “Этот человек — гений!”.

Источник: ru.wikipedia.org

Английский математик Абрахам де Муавр в престарелом возрасте однажды обнаружил, что продолжительность его сна растёт на 15 минут в день. Составив арифметическую прогрессию, он определил дату, когда она достигла бы 24 часов — 27 ноября 1754 года. В этот день он и умер.

Источник: en.wikipedia.org

Известно много притч о том, как один человек предлагает другому расплатиться с ним за некоторую услугу следующим образом: на первую клетку шахматной доски тот положит одно рисовое зёрнышко, на вторую — два и так далее: на каждую следующую клетку вдвое больше, чем на предыдущую. В результате тот, кто расплачивается таким образом, непременно разоряется. Это неудивительно: подсчитано, что общий вес риса составит более 460 миллиардов тонн.

Источник: ru.wikipedia.org

В начале октября каждого года, когда называются лауреаты Нобелевской премии, параллельно происходит вручение пародийной Шнобелевской премии (Ig Nobel Prize) за достижения, которые невозможно воспроизвести или же нет смысла это делать. В 2009 году среди лауреатов были ветеринары, которые доказали, что корова, имеющая какую бы то ни было кличку, даёт больше молока, чем безымянная. Премия по литературе досталась ирландской полиции за выписывание пятидесяти дорожных штрафов некоему Prawo Jazdy, что по-польски означает “водительское удостоверение”. А в 2002 году премии в области экономики удостоилась компания Газпром за применение математической концепции мнимых чисел в сфере бизнеса.

Источник: ru.wikipedia.org

Некоторые математические законы называют по аналогии с ситуациями в реальной жизни. Например, теорема о существовании предела у функции, которая “зажата” между двумя другими функциями, имеющими одинаковый предел, называется теоремой о двух милиционерах. Это объясняется тем, что если два милиционера держат между собой преступника и при этом идут в камеру, то заключённый также вынужден туда идти.

Источник: ru.wikipedia.org

Подлинность купюры евро можно проверить по её серийному номеру, состоящему из буквы и одиннадцати цифр. Нужно заменить букву на её порядковый номер в латинском алфавите, сложить это число с остальными, затем складывать цифры результата, пока не получим одну цифру. Если эта цифра — 8, то купюра подлинная. Ещё один способ проверки заключается в подобном складывании цифр, но без буквы. Результат из одной буквы и цифры должен соответствовать определённой стране, так как евро печатают в разных странах. Например, для Германии это X2.

Источник: money.newsru.com

Вероятность выпадения решаемой комбинации карт в пасьянсе “Свободная ячейка” (или “Солитер”) оценивается более чем в 99,99%.

Источник: ru.wikipedia.org

Треугольник Рёло — это геометрическая фигура, образованная пересечением трёх равных кругов радиуса а с центрами в вершинах равностороннего треугольника со стороной а. Сверло, сделанное на основе треугольника Рёло, позволяет сверлить квадратные отверстия (с неточностью в 2%).

Источник: ru.wikipedia.org

У числа Пи есть два неофициальных праздника. Первый — 14 марта, потому что этот день в Америке записывается как 3.14. Второй — 22 июля, которое в европейском формате записывается 22/7, а значение такой дроби является достаточно популярным приближённым значением числа Пи.

Источник: ru.wikipedia.org

В группе из 23 и более человек скорее всего (т.е. вероятность превышает 50%) найдутся двое, отмечающих день рождения в один и тот же день.

Источник: ru.wikipedia.org

Американский математик Джордж Данциг, будучи аспирантом университета, однажды опоздал на урок и принял написанные на доске уравнения за домашнее задание. Оно показалось ему сложнее обычного, но через несколько дней он смог его выполнить. Оказалось, что он решил две "нерешаемые" проблемы в статистике, над которыми бились многие учёные.

Источник: en.wikipedia.org

Сумма всех чисел на рулетке в казино равняется числу зверя — 666. Из-за этого факта рулетку иногда называют "чёртовым колесом".

Источник: ru.wikipedia.org

Софья Ковалевская познакомилась с высшей математикой в раннем детстве, когда на её комнату не хватило обоев, вместо которых были наклеены листы с лекциями Остроградского о дифференциальном и интегральном исчислении.

Источник: www.internet-school.ru

В штате Индиана в 1897 году был выпущен билль, законодательно устанавливающий значение числа Пи равным 3,2. Данный билль не стал законом благодаря своевременному вмешательству профессора университета.

Источник: ru.wikipedia.org

О деятельности ФМОП в 2014г.

От редакции

В 2014г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся гуманитарных классов ГОУ СОШ № 179, № 1314 (ныне учебный комплекс № 2090) и № 261 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов.
- Выпуск журнала "Математическое образование", учредителем которого ФМОП является; в 2014 г. вышли номера 1(69), 2(70), 3(71), 4(72).
- Приобретение книг для награждения участников педагогической Олимпиады ФПО МГУ, февраль.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников математической олимпиады САММАТ, г. Самара, май.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников регионального тура Всероссийской Олимпиады школьников, г. Королев, май.
- Предоставление изданий Фонда для участников XII Колмогоровских чтений, г. Ярославль, май.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников Космической Олимпиады школьников, г. Королев, октябрь.
- Приобретение учебных пособий, в частности, материалов для подготовки к ЕГЭ для учащихся старших классов нескольких школ г. Москвы.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал "Математическое образование" ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.
- Поддержка некоторых вновь созданных некоммерческих негосударственных организаций в области научных и научно-методических исследований по математике.
- Поддержка издательского проекта Свято-Алексиевской Пустыни в части, касающейся математического образования.

Содержание журнала "Математическое образование" за 2013–2014 гг.

От редакции

№ 1-2 (65-66), январь – июнь 2013 г.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал "Математическое образование".

www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанным адресам.

Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2014 год (включая стоимость пересылки) – 80 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2014 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 70 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ) и Российском индексе научного цитирования (РИНЦ).

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >