ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год девятнадцатый

№ 1 (73)

январь - март 2015 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта "Научно-просветительский клуб «Ломоносов»"
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 1 (73), 2015 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2015 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.03.2015 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (73), январь – март 2015 г.

Содержание

Многочлены с одним неизвестным

А. Р. Рязановский

Предлагаем вниманию читателей статью о многочленах с одной переменной, доступную учащимся профильных физико-математических классов. Автор использует этот материал как теоретические сведения сначала в 8-х математических классах[1] (ознакомление), затем в 10-х классах как закрепление тем, изученных ранее. Дети самостоятельно изучают написанный текст, а затем учитель отвечает на их вопросы. Кроме этого, они выполняют специально разработанные для них практические задания. Изучаемый учащимися текст специально адаптирован для их возраста. В 10-м классе текст может быть приближен к математическому, если уровень учеников класса позволяет ввести абстрактное понятие алгебраического кольца. Статья печатается с продолжением.

1. Простейшие понятия

Многочленом степени n от одного неизвестного x называется выражение вида

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

где действительные числа $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ — *коэффициенты* многочлена, причём $a_n \neq 0$, а остальные являются произвольными числами; n — целое неотрицательное число. Коэффициент a_n называется *старшим коэффициентом* многочлена; коэффициент a_0 — *свободным членом многочлена*; число n — *степенью многочлена*, при этом пишут $\deg p(x) = n$; одночлен $a_n x^n$ — *старшим членом многочлена.*

Например, $p(x) = 6x^5 - 5x^3 + 1{,}2x^2 + x - 12$ есть многочлен (или *целая рациональная функция*) пятой степени от x с коэффициентами $a_5 = 6$, $a_4 = 0$, $a_3 = -5$, $a_2 = 1$, $a_0 = -12$.

Отличное от нуля число является многочленом нулевой степени. Число 0 является многочленом, для которого степень не определяется.

Отметим, что многочлены от одного неизвестного иногда называют *многочленами с одной переменной.*

Запись многочлена в форме (1) называется *стандартным видом многочлена.* В этой записи на первом месте находится старший член многочлена, а остальные члены расположены по убывающим степеням неизвестного. Иногда стандартным видом многочлена называют такую его запись, в которой на первом месте находится свободный член, а остальные члены расположены по возрастающим степеням неизвестного:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \tag{2}$$

Эти записи (1) и (2) имеют соответствующие названия: *запись по возрастающим степеням* и *запись по убывающим степеням* неизвестного.

Пусть, например, дан многочлен $p(x) = 1 + 2x - 7x^3 + x^4$. Заменим в этом равенстве всюду неизвестное x числом 2. Получим $p(2) = 1 + 2 \cdot 2 - 7 \cdot 2^3 + 2^4 = -35$. Полученное число -35 называется *значением многочлена в точке* 2.

Или, например, для многочлена (2) значение $p(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$ равно сумме всех его коэффициентов.

Два многочлена $p(x)$ и $q(x)$ от одного неизвестного называются *равными* (*тождественно равными*), если их значения при любых значениях неизвестного одинаковы, то есть равны между собой.

[1] Школы № 179 г. Москвы

Тождественное равенство двух многочленов обозначается знаком $\equiv$: $p(x) \equiv q(x)$.

Например, значения многочлена $p(x) = 1 + 2x - 7x^3 + x^4$ в точке 2 равно $p(2) = -35$ и значение многочлена $q(x) = -45 + 5x$ в точке 2, то есть $q(2) = -45 + 5 \cdot 2 = -35$ одинаковы, но в точке 0 имеем $p(0) = 1 + 2 \cdot 0 - 7 \cdot 0^3 + 0^4 = 1$, а $q(0) = -45 + 5 \cdot 0 = -45$, то есть многочлены $p(x) = 1+2x-7x^3+x^4$ и $q(x) = -45+5x$ тождественно не равны. Мы можем написать$p(x) \not\equiv q(x)$.

Теорема. *Два многочлена* $p(x)$ и $q(x)$ *от одной переменной равны тогда и только тогда, когда их*

1)*степени равны* и

2)*коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного одинаковы.*

Для доказательства теоремы применим следующее вспомогательное утверждение: *если многочлен тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю* (докажите его самостоятельно).

Доказательство. Пусть $p(x) \equiv q(x)$ и $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, $a_n \neq 0$; $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$, $b_m \neq 0$, и предположим, что $n < m$. Запишем тождество

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \equiv b_0 + b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m \qquad (*)$$

и положим в нём $x = 0$ (мы имеем право выбрать любое значение переменной). Получим

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + \cdots + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + a_n \cdot 0^n = b_0 + b_1 \cdot 0 + \cdots + b_{m-1} \cdot 0^{m-1} + b_m \cdot 0^m.$$

Отсюда получим $a_0 = b_0$.

Теперь равенство $(*)$ принимает вид

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \equiv a_0 + b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m.$$

Отсюда

$$a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \equiv b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$$

и, деля обе части полученного равенства на x, получаем

$$a_1 + \cdots + a_{n-1}x^{n-2} + a_nx^{n-1} \equiv b_1 + \cdots + b_{m-1}x^{m-2} + b_mx^{m-1}. \qquad (**)$$

Из $(**)$ аналогично найдём, что $a_1 = b_1$.

Если будем поступать аналогично, то последовательно получим

$$a_2 = b_2,\ \ a_3 = b_3,\ \ a_4 = b_4, \ldots, a_m = b_m.$$

Учитывая эти равенства, из $(*)$ получаем

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \equiv a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_mx^m,$$

откуда

$$0 \equiv b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_mx^m.$$

Тогда

$$0 \equiv x^{n+1}(b_{n+1}+\cdots+b_mx^{m-n-1}) \Leftrightarrow 0 \equiv b_{n+1}+b_{n+2}x\cdots+b_mx^{m-n-1} \Leftrightarrow b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = b_m = 0 \ (?!)$$

Получили противоречие. Значит, неравенство $n < m$ не верно. Аналогично, не верно и $n > m$. Следовательно, $n = m$, то есть *степени тождественно равных многочленов равны и, следовательно, повторяя рассуждения для случая* $n = m$, найдём, что $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …; $a_n = b_n$, то есть коэффициенты тождественно равных многочленов при одинаковых степенях неизвестного равны, ч.т.д.

Пример. Найти числа A, B и C, если известно, что многочлены

$$p(x) = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1) \text{ и } q(x) = x^2 + 3x + 2$$

равны при любых значениях x.

Решение. 1 способ. Запишем многочлен $p(x)$ в стандартном виде по убывающим степеням x. Для этого раскроем скобки и приведём подобные члены. В результате получим

$$p(x) = (A + B)x^2 + (A + B + C)x + (A + C).$$

По условию $p(x) \equiv q(x)$. Значит,

$$(A + B)x^2 + (A + B + C)x + (A + C) \equiv x^2 + 3x + 2.$$

Отсюда следует, что коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ при одинаковых степенях x равны. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A + B + C = 3, \\ A + C = 2. \end{cases}$$

Если во втором уравнении учесть первое равенство, то найдём $C = 2$. Теперь из третьего уравнения находим $A = 0$. Наконец, из первого уравнения получаем $B = 1$. Итак, $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$.

2 способ. Поскольку по условию $p(x) \equiv q(x)$, то их равенство соблюдается при любых значениях x. Запишем равенство $p(x) = q(x)$ в точках $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. В результате получим

x	$A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1) \equiv$	$x^2 + 3x + 2$
-1	$A((-1)^2 + (-1) + 1) + (B(-1) + C)((-1) + 1) =$	$(-1)^2 + 3(-1) + 2$
0	$A(0^2 + 0 + 1) + (B \cdot 0 + C)(0 + 1) =$	$0^2 + 3 \cdot 0 + 2$
1	$A(1^2 + 1 + 1) + (B \cdot 1 + C)(1 + 1) =$	$1^2 + 3 \cdot 1 + 2$

Для нахождения искомых чисел A, B и C получили систему трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} A = 0, \\ A + C = 2, \\ 3A + (B + C) \cdot 2 = 6. \end{cases}$$

Решением системы является набор из трёх чисел $A = 0,\ B = 1,\ C = 2$. Получили тот же самый результат.

Отметим, что второй способ решения использует следующий *важный факт*:

Два многочлена степени $n \geq 0$ тождественно равны тогда и только тогда, когда их значения совпадают в $n + 1$ точках.

Другими словами, через $n+1$ точку координатной плоскости (с попарно различными абсциссами) проходит график единственного многочлена степени n.

2. Сложение и вычитание многочленов

Суммой двух многочленов называется многочлен, полученный сложением всех одночленов, входящих в эти многочлены. Степень суммы многочленов не выше большей из степеней многочленов-слагаемых.

Например,

$$(x^3 + 6x - 2) + (-x^3 - 2x^2 + x + 7) = -2x^2 + 7x + 5.$$

В частном случае, когда коэффициенты многочленов противоположны, их сумма тождественно равна нулю: $(4x - 2) + (-4x + 2) \equiv 0$.

Результат вычитания двух многочленов называется их *разностью*. Разность двух многочленов $p(x)$ и $q(x)$ определяется следующим равенством:

$$p(x) - q(x) = p(x) + (-1) \cdot q(x).$$

При этом $p(x)$ называется *многочленом-уменьшаемым*, $q(x)$ — *многочленом-вычитаемым*.

Отметим, что сложение и вычитание многочленов можно выполнять «столбиком» подобно сложению и вычитанию целых чисел. Записанные «столбиком» многочлены должны быть расположены по убывающим (или по возрастающим) степеням неизвестного, причём в этой записи должны присутствовать все коэффициенты многочленов, включая нулевые.

Например, пусть заданы многочлены

$$p(x) = 3x^4 + x^2 - 6x + 2 \quad \text{и} \quad q(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 12x - 5.$$

Рассмотрим примеры сложения и вычитания многочленов «столбиком»:

$$1)\quad \begin{array}{r} 3x^4 + 0x^3 + 1x^2 - 6x + 2 \\ +\;\underline{2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 12x - 5} \\ 5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 18x - 3 \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{r} 3x^4 + 0x^3 + 1x^2 - 6x + 2 \\ -\;\underline{2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 12x - 5} \\ x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x + 7 \end{array}$$

При сложении (вычитании) двух многочленов, когда сложно перепутать подобные одночлены многочленов, их можно записывать более кратко, опуская одночлены с нулевыми коэффициентами. Например:

$$3)\quad \begin{array}{r} x^5 - x^4 + x - 5 \\ +\;\underline{x^4 - x^2 + x + 6} \\ x^5 - x^2 + 2x + 1 \end{array} \qquad 4)\quad \begin{array}{r} x^5 - x^4 + x - 5 \\ -\;\underline{x^4 - x^2 + x + 6} \\ x^5 - 2x^4 + x^2 - 11 \end{array}$$

При такой «беспорядочной» форме записи многочленов для их сложения и вычитания требуется повышенное внимание.

3. Умножение многочленов

Произведением двух многочленов называется многочлен, равный сумме произведений каждого одночлена одного многочлена на каждый из одночленов другого многочлена.

Другими словами, при умножении многочленов используется распределительный закон умножения относительно сложения. Например,

$$(x^3 - 1)(x^3 + 2x + 1) = x^6 + 2x^4 + x^3 - x^3 - 2x - 1 = x^6 + 2x^4 - 2x - 1.$$

Степень произведения многочленов равна сумме степеней многочленов-сомножителей.

Два многочлена можно умножать «столбиком», подписывая многочлены-сомножители один под другим, подобно тому, как умножают целые числа, причём начинают умножать со старшего члена множителя. При таком способе умножения удобнее приводить подобные члены. Например,

$$\begin{array}{rrrrrrr} \times\; x^4 + 0\cdot x^3 & + 0\cdot x^2 & + 2x & + 1 & & & \\ x^2 - 3x & + 2 & & & & & \\ \hline x^6 + 0\cdot x^5 & + 0x^4 & + 2x^3 & + x^2 & & & \\ + \quad - 3x^5 & + 0x^4 & + 0x^3 & - 6x^2 & - 3x & & \\ & 2x^4 & + 0x^3 & + 0x^2 & + 4x & + 2 & \\ \hline x^6 - 3x^5 & + 2x^4 & + 2x^3 & - 5x^2 & + x & + 2 & \end{array}$$

Конечно, указанный способ — громоздкий, но иногда его применение оказывается полезным.

4. Деление многочленов

Пусть $p(x)$ и $q(x)$ — два произвольных многочлена. Многочлен $p(x)$ *делится на многочлен* $q(x)$тогда и только тогда, когда существует такой многочлен $t(x)$, что при любых значениях переменной x выполняется равенство $p(x) = q(x) \cdot t(x)$. В этом случае многочлен $t(x)$ называется *частным* от деления $p(x)$ на $q(x)$. Многочлен $q(x)$ называется *делителем* многочлена $p(x)$, а многочлен $p(x)$ — *делимым.*

Если $p(x)$ делится на $q(x)$, то пишут $p(x) \vdots q(x)$.

При этом, в силу правила умножения многочленов, степень частного $t(x)$ равна разности степеней делимого и делителя: $p_n(x) = q_m(x) \cdot t_{n-m}(x)$, причём $n - m \geq 0$. Отсюда следует, что если $p(x)$ делится на $q(x)$, то степень $p(x)$ не меньше степени $q(x)$.

Например, многочлен $p(x) = x^3 - 1$ делится на многочлен $q(x) = x^2 + x + 1$, так как равенство $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$ выполняется при любом x.

С другой стороны, многочлен $p(x) = 5x + 6$ не делится на многочлен $q(x) = 2x^2 + 1$, так как степень $p(x)$ меньше степени $q(x)$.

Мы видим, что деление многочленов не всегда возможно.

Важное замечание. Отметим важный частный случай деления многочлена $p(x)$ степени n, $n \geq 0$, на многочлен $q(x) = c$, $c \neq 0$ нулевой степени, то есть на число, не равное нулю.

Например, если $p(x) = 2x - 5$ и $q(x) = 7$, $p(x) \vdots q(x)$, поскольку справедливо равенство $2x - 5 \equiv 7 \cdot \left(\frac{2}{7}x - \frac{5}{7}\right)$, то есть частное заданных многочленов есть многочлен $\frac{2}{7}x - \frac{5}{7}$.

Рассмотрим, ещё один пример. Пусть $p(x) = -5$ и $q(x) = 7$. В этом случае опять $p(x) \vdots q(x)$, поскольку $-5 \equiv 7 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)$. Сложность приведённого примера в том, что как целые числа число (-5) на 7 *не делится*. Однако, рассматривая эти же числа как многочлены, получаем, что многочлен (-5) делится на многочлен, равный 7, *без остатка*! Мы видим, что любой многочлен степени n, $n \geq 0$, всегда делится на любой многочлен нулевой степени.

5. Деление многочленов с остатком

Теорема. *Для любых двух многочленов $p_n(x)$ и $q_m(x)$, где $q_m(x)$ не равен тождественно нулю, существуют и единственны многочлены $t_{n-m}(x)$ и $r_s(x)$ такие, что для всех значений x выполняется равенство*

$$p_n(x) = q_m(x)t_{n-m}(x) + r_s(x), \tag{3}$$

где $n, m, n - m, s$ — степени соответствующих многочленов, причём если $r_s(x) \neq 0$, то $s < m$.

Многочлен $r_s(x)$ называется *остатком от деления* $p_n(x)$ *на* $q_m(x)$. Если остаток не является нулевым многочленом, то многочлен $t_{n-m}(x)$ называется *неполным частным* от деления $p_n(x)$ на $q_m(x)$. Если же $r_s(x) \equiv 0$, то $p_n(x) \vdots q_m(x)$.

Прочтите внимательно! Если степень n многочлена $p_n(x)$ не меньше степени многочлена $q_m(x)$, то степень частного многочлена $t_{n-m}(x)$ равна $n - m \geq 0$. Если же степень n меньше степени m, то неполное частное есть нулевой многочлен, его степень не определена, а остаток $r(x) \equiv p(x)$.

Например, при делении многочлена $5x + 6$ на $2x^2 + 1$ с остатком получим неполное частное, равное нулю, и остаток, равный $5x + 6$. Его степень равна 1 и она меньше степени делителя, равной 2.

Равенство (3) в данном случае будет выполнено и имеет вид

$$5x + 6 = (2x^2 + 1) \cdot 0 + (5x + 6).$$

Деление двух многочленов с остатком является аналогом соответствующей операции над целыми числами.

Если многочлен $p_n(x)$ при делении на $q_m(x)$ даёт остаток $r_s(x)$, то при делении $p_n(x)$ на многочлен $c{\cdot}q_m(x)$, $c \neq 0$, остаток $r_s(x)$*не изменяется*. Это объясняется следующим тождеством: $p_n(x) = (c \cdot q_m(x))\frac{t_{n-m}(x)}{c} + r_s(x)$

Поэтому иногда говорят, что деление многочленов определено с точностью до постоянной.

6. Деление многочленов «уголком»

Деление многочленов «уголком» есть алгоритмический способ нахождения частного (или неполного частного и остатка), похожий на метод деления «уголком» натуральных чисел и конечных десятичных дробей.

Для выполнения алгоритма делимое $p(x)$ и делитель $q(x)$ записывают в стандартном виде по *убывающим степеням переменной* и производят деление «уголком».

Пример. Разделить «уголком» многочлен $p(x) = 4x^5 - 2x^3 - x^2 + x + 1$ на многочлен $q(x) = 2x^3 + x^2 + 1$.

Решение.

I шаг. Находим первый член частного. Для этого делим старший член делимого $4x^5$ на старший член делителя $2x^3$. Получаем $2x^2$, который подписываем под делителем:

$$\begin{array}{r|l} 4x^5 - 2x^3 - x^2 + x + 1 & 2x^3 + x^2 + 1 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

II шаг. Находим второй член частного. Для этого сначала найдём произведение $2x^2$ и делителя, и это произведение подпишем под делимым. Затем полученное произведение вычитаем из делимого $4x^5 - 2x^3 - x^2 + x + 1$ «столбиком» (при этом подписывать друг под другом подобные одночлены необязательно). Эта разность есть первый остаток:

$$\begin{array}{rr|l} - & 4x^5 \qquad\quad - 2x^3 \;\; - x^2 + x + 1 & 2x^3 + x^2 + 1 \\ \cline{3-3} & 4x^5 + 2x^4 \qquad\quad + 2x^2 \qquad\qquad & 2x^2 \\ \cline{2-2} \text{первый остаток:} & -2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x + 1 & \end{array}$$

В результате мы «вернулись» к I шагу, так как имеются два многочлена, расположенные по убывающим степеням x. Разделив старший член $(-2x^4)$ найденного многочлена $(-2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x + 1)$ на старший член $2x^3$ делителя, получим второй член частного: $-x$. Его записываем рядом с найденным ранее первым членом:

$$\begin{array}{rr|l} - & 4x^5 \qquad\quad - 2x^3 \;\; - x^2 + x + 1 & 2x^3 + x^2 + 1 \\ \cline{3-3} & 4x^5 + 2x^4 \qquad\quad + 2x^2 \qquad\qquad & 2x^2 \;\; - x \\ \cline{2-2} & -2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x + 1 & \end{array}$$

III шаг. Находим третий член частного. Для этого повторяем те же операции, которые были описаны во II шаге, а именно: найденный второй член частного $(-x)$ умножаем на делитель и подписываем полученное произведение $(-2x^4 - x^3 - x)$ под первым остатком, равным $-2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x + 1$. Вычитая «столбиком», находим второй остаток $(-x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$. Затем делим старший член второго остатка на старший член делителя. В результате будет найден третий член частного (–0,5):

$$\begin{array}{rr|l} - & 4x^5 \qquad\quad - 2x^3 \;\; - x^2 \;\; + x + 1 & 2x^3 + x^2 \;\; + 1 \\ \cline{3-3} & 4x^5 + 2x^4 \qquad\quad + 2x^2 \qquad\qquad\quad & 2x^2 \;\; - x - 0{,}5 \\ \cline{2-2} - & -2x^4 - 2x^3 - 3x^2 \;\; + x + 1 & \\ & -2x^4 \;\; - x^3 \qquad\qquad\;\; - x \qquad & \\ \cline{2-2} \text{второй остаток:} & -x^3 - 3x^2 + 2x + 1 & \end{array}$$

Мы видим, что степени получаемых остатков убывают. Поэтому наступит такой момент, когда степень очередного остатка окажется меньше степени делителя $q(x)$. Этот последний остаток и будет остатком $r(x)$ от деления $p(x)$ на $q(x)$. Если же последний остаток равен нулю, то говорят, что произошло деление нацело. Завершим алгоритм деления в рассматриваемом примере:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
- & 4x^5 & & -2x^3 & -x^2 & +x & +1 & 2x^3+x^2+1 \\
 & 4x^5 & +2x^4 & & +2x^2 & & & \overline{2x^2-x-0{,}5} \\
\hline
- & & -2x^4 & -2x^3 & -3x^2 & +x & +1 & \\
 & & -2x^4 & -x^3 & & -x & & \\
\hline
- & & & -x^3 & -3x^2 & +2x & +1 & \\
 & & & -x^3 & -0,5x^2 & & -0,5 & \\
\hline
 & & & & -2{,}5x^2 & +2x & +1{,}5 &
\end{array}
$$

Здесь $2x^2 - x - 0{,}5$ — неполное частное, $r(x) = -2{,}5x^2 + 2x + 1{,}5$ — остаток от деления $p(x)$ на $q(x)$.

Результат деления можно записать и так:

$$4x^5 - 2x^3 - x^2 + x + 1 = (2x^3 + x^2 + 1) \cdot (2x^2 - x - 0,5) + (-2,5x^2 + 2x + 1,5).$$

Или так:

$$\frac{4x^5 - 2x^3 - x^2 + x + 1}{2x^3 + x^2 + 1} = 2x^2 - x - 0,5 + \frac{-2,5x^2 + 2x + 1,5}{2x^3 + x^2 + 1}.$$

Алгоритм деления «уголком» иногда называют правилом деления «старший на старший». Это название оправдано описанием алгоритма, приведённым выше.

7. Деление многочленов методом неопределённых коэффициентов

Деление многочленов с остатком можно выполнить также с помощью *метода неопределённых коэффициентов*. Этот метод широко применяется для нахождения многочленов или других функций, обладающих заданным (определенным в условии) свойством. Его сущность проиллюстрируем примером.

Пусть требуется разделить $p(x) = x^3 + x + 4$ на $q(x) = x^2 + x - 2$. Из теоремы о делении двух многочленов с остатком следует, что степень частного равна 1.

Зная общий вид многочлена первой степени, запишем теорему о делении многочленов с остатком в следующей форме:

$$x^3 + x + 4 \equiv (x^2 + x - 2)(ax + b) + (cx + d), \tag{4}$$

где частное $ax+b$ и остаток $cx+d$ записаны с неопределёнными (пока) коэффициентами a, b, c, d, которые нужно найти.

Отметим, что, употребив символ $\equiv$, мы хотели подчеркнуть, что написанное равенство (4) является тождеством, то есть равенством, верным при любых значениях x. Нахождение неопределённых коэффициентов a, b, c, d можно вести разными способами. Опишем их.

Первый способ. Раскроем скобки в правой части равенства и приведём подобные члены:

$$x^3 + x + 4 \equiv ax^3 + (a + b)x^2 + (-2a + b + c)x + (-2b + d).$$

Но два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравнивая коэффициенты многочленов слева и справа от знака равенства при одинаковых степенях x, получаем

при x^3:	$1 = a$;
при x^2:	$0 = a + b$;
при x^1:	$1 = -2a + b + c$;
при x^0:	$4 = -2b + d$.

Из этой системы легко определить искомые коэффициенты: $a = 1$, $b = -1$, $c = 4$, $d = 2$. Теперь можем написать и результат деления:

$$x^3 + x + 4 = (x^2 + x - 2)(x - 1) + 4x + 2,$$

где $x - 1$ — неполное частное; $4x + 2$ — остаток от деления многочлена $x^3 + x + 4$ на многочлен $x^2 + x - 2$.

Второй способ. Подставляя в тождество (4) вместо переменной x произвольные числа, будем получать равенства, содержащие неопределённые коэффициенты a, b, c, d. Обычно в качестве значений x выбирают такие, при которых будут получаться наиболее простые соотношения между a, b, c, d. Отметим, что для нахождения четырёх коэффициентов требуется четыре уравнения. Следовательно, нужно выбрать четыре значения x. Заметим, что $x = 1$ и $x = -2$ – корни квадратного трёхчлена $x^2 + x - 2$. Поэтому выбираем следующие значения x: 0, 1, –2, –1. Тогда из тождества (4) получаем:

при $x = 0$:	$4 = 2b + d$;
при $x = 1$:	$6 = c + d$;
при $x = -2$:	$-6 = -2c + d$;
при $x = -1$:	$2 = -2(-a + b) + (-c + d)$.

Это система из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными, при решение которой должны получиться те же самые значения неопределённых коэффициентов $a = 1$, $b = -1$, $c = 4$, $d = 2$.

На вопрос о том, какой из способов использовать лучше, ответим так: нужно владеть обоими способами и действовать по ситуации.

8. Наибольший общий делитель двух многочленов

Пусть даны два многочлена $p(x)$ и $q(x)$. *Общим делителем* этих многочленов называется такой многочлен $d(x)$, который является делителем $p(x)$ и $q(x)$. *Наибольшим общим делителем* двух многочленов $p(x)$ и $q(x)$ называется тот их общий делитель $D(x)$, который делится на любой другой общий делитель многочленов $p(x)$ и $q(x)$. При этом используется обозначение $D(x) = \text{НОД}(p(x); q(x))$.

Из этого определения и из определения делимости многочленов следует, что:
1) наибольший общий делитель — это тот общий делитель, который имеет наибольшую степень;
2) наибольший общий делитель многочленов $p(x)$ и $q(x)$ является единственным с точностью до числового множителя, отличного от нуля (с точностью до многочлена нулевой степени).

Чтобы найти наибольший общий делитель многочленов $p(x)$ и $q(x)$, можно разложить их на множители.

Пример 1. Найти наибольший общий делитель двух многочленов

$$p(x) = x^3 - 4x^2 - 5x \quad \text{и} \quad q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2.$$

Решение. Разложив данные многочлены на множители, получим

$$p(x) = x(x + 1)(x - 5); \quad q(x) = x^2(x + 1)(2x - 3).$$

Из этого разложения видно, что одним из наибольших общих делителей многочленов $p(x)$ и $q(x)$ служит многочлен $D(x) = x(x + 1)$, так как он является общим делителем данных многочленов, имеющим наибольшую степень.

Кроме найденного наибольшего общего делителя $D(x)$, можно указать другой наибольший общий делитель тех же многочленов $p(x)$ и $q(x)$, например, $D_1(x) = -x(x + 1)$, или $D_2(x) = 0{,}5x(x + 1)$. Все три наибольших общих делителя $D(x)$, $D_1(x)$, $D_2(x)$ отличаются только числовыми множителями, не равными нулю. Обычно выбирают тот наибольший общий делитель, коэффициенты которого взаимно просты, то есть не имеют общего делителя, отличного от 1. В данном случае $D(x) = x(x+1)$.

Если многочлены $p(x)$ и $q(x)$ разложить на множители не удаётся, то их наибольший общий делитель *всегда* можно найти с помощью *алгоритма Евклида для многочленов*.

Этот способ аналогичен алгоритму Евклида для нахождения НОД двух натуральных чисел и основан на теореме о делении двух многочленов с остатком. Алгоритм Евклида для многочленов $p(x)$ и $q(x)$ можно записать в виде следующей цепочки равенств:

$p(x) = q(x)t_1(x) + r_1(x)$,	
$q(x) = r_1(x)t_2(x) + r_2(x)$,	
$r_1(x) = r_2(x)t_3(x) + r_3(x)$,	
....	
$r_{s-2}(x) = r_{s-1}(x)t_s(x) + r_s(x)$,	НОД$(p(x); q(x)) = r_s(x)$.
$r_{s-1}(x) = r_s(x)t_{s+1}(x)$;	

Пример 2. Найти наибольший общий делитель двух многочленов

$$p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2 \quad \text{и} \quad q(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1.$$

Решение. Степень многочлена $p(x)$ не меньше степени многочлена $q(x)$. Разделим $p(x)$ на $q(x)$ «уголком», при этом мы будем изменять коэффициенты так, чтобы в процессе деления не возникало дробных коэффициентов. Это не отразится на НОД, так как он определяется с точностью до числового множителя, не равного нулю. Итак, умножим все коэффициенты многочлена $p(x)$ на 2 и начнём деление:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 2x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4 \\ 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + x \end{array} & \begin{array}{l} 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \\ \hline x \end{array} \\
\hline
-x^4 + 3x^3 + 4x^2 - x + 4 &
\end{array}$$

Теперь, чтобы при дальнейшем делении не появлялись дробные коэффициенты, умножим все члены полученной разности $-x^4 + 3x^3 + 4x^2 - x + 4$ на 2 и продолжим деление:

$$\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} -2x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 2x + 8 \\ -2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x - 1 \end{array} & \begin{array}{l} 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \\ \hline -1 \end{array} \\
\hline
9x^3 + 9x^2 + 9 &
\end{array}$$

Мы получили первый остаток $r_1(x) = 9x^3 + 9x^2 + 9$. Разделим все его коэффициенты на 9 (полученный в результате многочлен снова обозначим $r_1(x)$), а затем, используя алгоритм Евклида, разделим $q(x)$ на $r_1(x)$:

$$\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \\ 2x^4 + 2x^3 + 2x \end{array} & \begin{array}{l} x^3 + x^2 + 1 \\ \hline 2x + 1 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{l} x^3 + x^2 + 1 \\ x^3 + x^2 + 1 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Деление завершено, так как получился остаток, равный нулю. Следовательно, согласно алгоритму Евклида, последний ненулевой остаток есть наибольший общий делитель. Итак НОД$(p(x), q(x)) = x^3 + x^2 + 1$. Напомним, что НОД определяется с точностью до числового множителя, не равного нулю.

Заметим, что если один из двух многочленов равен нулю, то для такой пары понятие НОД не определено.

Пример 3. Сократите дробь $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{5x^3 + 6x - 11}$.

Решение. Найдём НОД$(x^2+4x-5; 5x^3+6x-11)$, воспользовавшись алгоритмом Евклида. Имеем

$$\begin{array}{l|l} 5x^3+6x-11 & \underline{x^2+4x-5} \\ \underline{5x^3+20x^2-25x} & 5x-20 \\ \quad -20x^2+31x-11 & \\ \quad \underline{-20x^2-80x+100} & \\ \qquad\qquad 111x-111 & \end{array}$$

Получили первый остаток $111x-111$. Разделим его на 111 и продолжим алгоритм.

$$\begin{array}{l|l} x^2+4x-5 & \underline{x-1} \\ \underline{x^2-x} & x+5 \\ \quad 5x-5 & \\ \quad \underline{5x-5} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Получен остаток, равный нулю. Деление завершено. Следовательно, разделив последний остаток на 5, получим:

$$\text{НОД}(x^2+4x-5; 5x^3+6x-11) = x-1.$$

Разделим на $x-1$ числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x^2+4x-5}{5x^3+6x-11}$. Воспользуемся *схемой Горнера*[2] для многочлена x^2+4x-5.

$x=1$	1	4	-5
	1	5	0

Значит, $x^2+4x-5=(x-1)(x+5)$. Теперь проделаем то же для многочлена $5x^3+6x-11$.

$x=1$	5	0	6	-11
	5	5	11	0

Значит, $5x^3+6x-11=(x-1)(5x^2+5x+11)$.

Теперь получаем $\dfrac{x^2+4x-5}{5x^3+6x-11} = \dfrac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(5x^2+5x+11)} = \dfrac{x+5}{5x^2+5x+11}$. Полученная дробь не сократима.

Рязановский Андрей Рафаилович,
доцент кафедры математического анализа
и методики преподавания математики
Московского городского педагогического университета
(Институт математики и информатики);
кандидат технических наук,
учитель математики высшей категории,
Лауреат Гранта Правительства Москвы в сфере образования.

E-mail: riazanovskiy@mail.ru

[2] Схема Горнера — краткий способ записи коэффициентов неполного частного и остатка при делении некоторого многочлена на двучлен первой степени вида $x-a$; остаток при этом будет либо нулевым, либо многочленом нулевой степени, т.е. ненулевым числом. Проделайте несколько делений уголком различных многочленов на $x-a$, понаблюдайте за коэффициентами неполного частного и остатка и сообразите, как заполнять таблицу схемы Горнера.

Тригонометрические многочлены

Е. З. Скворцова

Предлагаем вниманию читателей статью на тему, которой уделяется не так уж много внимания в школьной программе, в том числе и для профильных классов — тригонометрические многочлены. Автор последовательно развивает теорию и приводит обширный список задач, многие из которых, например, решение тригонометрических уравнений высоких степеней, можно рассматривать как задачи повышенной трудности по отношению к программе профильных классов. Статья печатается с продолжением.

Предисловие

Однажды автор этой статьи решил попробовать решать тригонометрические уравнения угадыванием корней (т.е. сначала угадывать корни, а потом доказывать, что других нет).

В отличие от обычных многочленов, если рассматривать тригонометрические многочлены, т.е. многочлены от синуса и косинуса x, или, что то же самое, суммы $f(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots + a_0$, то, угадав один корень, непонятно, как понизить степень. Сначала я думала, что для ответа на возникшие у меня вопросы достаточно заглянуть в какой нибудь справочник. Мне удалось найти дома однотомную энциклопедию, но там ничего по этому поводу не было. Тогда я стала думать сама. В результате получилась эта статья. Мне кажется, она будет интересна тем, кто немного знаком с обычными многочленами. Например, по книге С. Л. Табачникова[1].

Глава 1. Что такое тригонометрический многочлен?

Тригонометрический многочлен (сокращенно ТМ) — это функция, которую можно получить из обычного многочлена от двух переменных $f(y, z)$, заменив y на $\cos x$, а z на $\sin x$.

Как обычно, многочлен от одной переменной можно рассматривать как частный случай многочлена с двумя переменными. Поэтому частные случаи ТМ — многочлены от $\cos x$ (КМ) и многочлены от $\sin x$ (СМ).

Примеры ТМ: $\sin(x + \pi/6)$; $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Из формул

$$\cos(n+1)x = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x; \quad \sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x$$

следует, что при всех натуральных n функции $\cos nx$ и $\sin nx$ — ТМ.

В книге Табачникова объясняется, что такое *стандартная форма многочлена.* Стандартная форма хороша тем, что есть стандартная процедура (алгоритм) упрощения любой записи многочлена, которая всегда приводит к его стандартной форме. И, например, чтобы узнать, $(x+1)(x+2)$ и $(x+1)^2 + 1$ — записи одного многочлена или разных, достаточно привести оба многочлена к стандартной форме и сравнить результаты.

Так как, например, $\sin^3 x + \cos^2 x \sin x$ и $\sin x$ — записи одного и того же ТМ, то нельзя определять стандартную форму ТМ как результат замены y на $\cos x$, а z на $\sin x$ в стандартной форме многочлена от двух переменных. Но зато главный претендент на роль стандартной формы — запись ТМ в виде

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx + a_{n-1} \cos(n-1)x + b_{n-1} \sin(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a.$$

Пользуясь формулами преобразования произведений синусов и косинусов в суммы, можно привести к такому виду любой ТМ. Но пока у нас еще нет достаточных оснований считать эту форму стандартной. Ведь мы еще не выяснили, единственно ли представление каждого ТМ в

[1] Многочлены. Библиотека “Ступени знаний”, серия “Математика”, М.: ФАЗИС, 2000. - С.200.

таком виде. То, что единственность выполняется, каждый студент, немного знающий математический анализ, легко докажет с помощью производных. Но мы дадим другое поучительное доказательство, использующее сравнение периодов.

Сформулируем два утверждения:

Утверждение 1 (о единственности). *Если*

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a \equiv 0,$$

то $a_n = b_n = \cdots = a = 0$.

Утверждение 2 (о периодах). *Пусть T — один из периодов ТМ*

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \cdots + a$$

и хотя бы один из коэффициентов a_i и b_i не равен 0 ($i > 0$). Тогда T — период и для $a_i \cos ix + b_i \sin ix$ (то есть $T = (2k/i)\pi$, где k — целое число, отличное от 0).

Допустим, что мы уже доказали Утверждение 1. И пусть T — период для

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \cdots + a,$$

то есть при всех x

$$a_n \cos n(x+T) + b_n \sin n(x+T) + a_{n-1}\cos(n-1)(x+T) + b_{n-1}\sin(n-1)(x+T) + \cdots + a =$$
$$= a_n \cos nx + b_n \sin nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \cdots + a.$$

Преобразуем $a_i \cos i(x+T) + b_i \sin i(x+T)$ к виду $c_i \cos ix + d_i \sin ix$:

$$c_i \cos ix + d_i \sin ix \equiv a_i(\cos ix \cos iT - \sin ix \sin iT) + b_i(\sin ix \cos iT + \cos ix \sin iT) \equiv$$
$$\equiv (a_i \cos iT + b_i \sin iT)\cos ix + (b_i \cos iT - a_i \sin iT)\sin ix.$$

Получаем, что

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \cdots + a \equiv$$
$$\equiv c_n \cos nx + d_n \sin nx + c_{n-1}\cos(n-1)x + d_{n-1}\sin(n-1)x + \cdots + a.$$

Если считать утверждение о единственности доказанным, то отсюда следует, что при всех i верно равенство $a_i = c_i$; $b_i = d_i$, а значит, при всех 1 от 1 до n

$$a_i \cos i(x+T) + b_i \sin i(x+T) \equiv c_i \cos ix + d_i \sin ix \equiv a_i \cos ix + b_i \sin ix,$$

то есть T — период для $a_i \cos ix + b_i \sin ix$.

Теперь допустим, что мы уже доказали Утверждение 2 (но еще не доказали Утверждение 1). И пусть известно, что

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a \equiv 0.$$

Тогда

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx \equiv -(a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a).$$

Но для левой части $(2/n)\pi$ — период. Значит из Утверждения 2 следует, что в правой части все коэффициенты, кроме, быть может, свободного члена, равны 0. Иначе $(2/n)\pi$ было бы периодом для $a_i \cos ix + b_i \sin ix$. Получаем, что $a_n \cos nx + b_n \sin nx \equiv a$. Тогда и $a_n \cos y + b_n \sin y \equiv a$ (так как каждое число y можно представить в виде nx). Следовательно a, a_n и b_n тоже равны 0.

У нас получился как бы замкнутый круг: если бы мы умели доказывать Утверждение 1, то смогли бы доказать Утверждение 2, и наоборот. Но если присмотреться, то оказывается, что этот круг можно разомкнуть и превратить в цепочку. Дело в том, что когда мы доказывали единственность для $a_n \cos nx + b_n \sin nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \dots + a$, мы пользовались утверждением о периодах только для $a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \dots + a$. Эти соображения легко превратить в строгое доказательство методом математической индукции.

Итак, будем доказывать одновременно оба утверждения.

База индукции. При $n = 1$, то есть для $a_1 \cos x + b_1 \sin x + a$, оба утверждения следуют из того, что мы умеем представлять $a_1 \cos x + b_1 \sin x$ в виде $c\cos(x+\varphi)$, где $c^2 = a_1^2 + b_1^2$, а φ — вспомогательный угол.

Шаг индукции. Пусть нам уже известно, что оба утверждения верны при $n = k-1$. Докажем их при $n = k$.

Но для этого достаточно повторить сначала наше доказательство Утверждения 1 в предположении что уже доказано Утверждение 2 (с заменой n на k) , а потом Утверждения 2 в предположении, что уже доказано Утверждение 1 (тоже с заменой n на k). При этом доказательство Утверждения 1 при $n = k$ опирается только на допущение индукции, а доказательство Утверждения 2 при $n = k$ — на предшествующее ему доказательство Утверждения 1 при $n = k$.

Теперь у нас есть все основания называть *стандартной формой* (СФ) ТМ, не равного тождественно 0, запись

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \dots + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a,$$

где хотя бы одно из чисел a_n и b_n не равно 0. Стандартная форма ТМ, тождественно равного 0, — это 0.

Попробуем дать определение *степени* ТМ. Хотелось бы, чтобы она не менялась при тождественных преобразованиях. Можно определить степень ТМ $f(x)$ как наименьшую из степеней многочленов $g(x,y)$ таких, что $f(x) \equiv g(\cos x, \sin x)$. Недостаток такого определения в том, что, если, например, дан ТМ $\sin^3 x + \cos^3 x$, то сразу мы не можем сказать, какую он имеет степень. Можем только сказать, что она не выше трех. Но теперь мы можем определить степень более конструктивно. Пусть СФ ТМ

$$f(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \dots + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a.$$

Тогда если $f(x)$ не равен тождественно 0, то его степень — n.

Степень ТМ, тождественно равного 0, не определена. Будем считать, что у СФ ТМ ненулевой степени два старших члена (один из них может быть равен 0).

Упражнения к главе 1

1.1. Запишите в СФ ТМ $\cos^n x$ и $\sin^n x$ для n от 1 до 6.

1.2. Найдите степени и старшие члены СФ для ТМ $\cos^n x + \sin^n x$ при n от 1 до 6.

1.3. Всегда ли по старшим членам СФ двух ТМ можно определить старшие члены их произведения? Если да, то как?

1.4. Найдите степень и старшие члены СФ ТМ $\sin kx \sin lx \sin mx$.

1.5. При каких a, b, c, d, e и натуральных k, l, m равенство

$$a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x + d \sin 4x + e \sin 5x = 4 \sin kx \sin lx \sin mx$$

является тождеством?

1.6. Найдите все периоды функции $f(x) = 2\sin 6x + 5\cos 6x - \sin 2x - 3\cos 2x + 1$.

1.7. Найдите все периоды функции $f(x) = 2\sin(x/2) + 3\sin(x/3) + 4\cos(x/5)$.

1.8. Найдите все периоды функции $f(x) = 2\sin(3x/\pi) + 3\cos(2x/\pi)$.

1.9. Является ли периодической функция $f(x) = 2\cos(\pi x) + 3\sin(2\pi x) + 4\cos x + 5\sin x$?

1.10. Какому условию должны удовлетворять числа α_n, чтобы утверждения 1 и 2 остались справедливыми при замене $\cos(nx)$ и $\sin(nx)$ на $\cos(\alpha_n x)$ и $\sin(\alpha_n x)$?

1.11. Является ли периодической функция $f(x) = 2\cos(\sqrt{2}x) + 3\sin(\sqrt{3}x) + 5\cos(\sqrt{5}x)$?

Глава 2. Четные и нечетные тригонометрические многочлены

Известно, что каждую функцию $f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, можно представить, причем единственным образом, в виде суммы четной и нечетной функции. Эти слагаемые равны соответственно $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ и $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ и их называют четной и нечетной частью функции $f(x)$ ($f_{\text{чет}}(x)$ и $f_{\text{нечет}}(x)$).

Заметим, что если $f(x)$ — ТМ, то и его четная и нечетная части — ТМ. С другой стороны, пользуясь тем. Что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, можно представить каждый ТМ в виде суммы слагаемых вида $a\cos^k x \sin^l x$, где l равно либо 0, либо 1. Группируя отдельно члены с $l = 0$ и отдельно с $l = 1$, мы получим представление каждого ТМ в виде $f(x) = f_1(\cos x) + \sin x f_2(\cos x)$, где f_1 и f_2 — многочлены с одной переменной. Так как $f_1(\cos x)$ — четная функция, а $\sin x f_2(\cos x)$ — нечетная, то ТМ $f_1(\cos x)$ и $\sin x f_2(\cos x)$ определены однозначно. А однозначно ли определены многочлены f_1 и f_2 (как функции)? Мы знаем, что для равенства двух многочленов с одной переменной достаточно, чтобы их значения совпадали в бесконечном числе точек. Так как $\cos x$ принимает бесконечно много значений, то f_1 определен однозначно, а так как среди значений $\cos x$ бесконечно много таких, для которых $\sin x$ отлично от 0, то и f_2 определен однозначно. Вывод: представив многочлены f_1 и f_2 в стандартной форме, мы получим еще один вариант стандартной формы ТМ — СФ2. Стандартную форму, определенную в первой главе, иногда будем называть СФ, а иногда — СФ1.

Для ТМ $f_1(\cos x) + \sin x f_2(\cos x)$ можно определить *степень*-2 как максимум степеней многочленов $f_1(x)$ и $xf_2(x)$, если степени обоих этих многочленов определены. Если оба многочлена тождественно равны 0, степень ТМ не определена. Если только первый тождественно равен 0, то степень ТМ на единицу больше степени второго. Если только второй тождественно равен 0, то степень ТМ равна степени первого многочлена.

Выясним, совпадает ли понятие степени ТМ, определенное в первой главе (степень-1) с понятием степени-2. Начнем со сравнения поведения степеней 1 и 2 при сложении и умножении ТМ. Докажем, что оба вида степеней ТМ обладают обычными свойствами степеней.

Утверждение 2.1. *Степень суммы ТМ не превосходит большей из степеней слагаемых. Если степени слагаемых различны, степень суммы равна большей из них.*

Доказательство. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — два ТМ и их степени -2 равны соответственно n и m, причем $n \geq m$. Это значит, что $f_1(x) = (a_n \cos^n x + \cdots + a) + \sin x(b_{n-1}\cos^{n-1} x + \cdots + b)$, где хотя бы одно из чисел a_n и b_{n-1} не равно 0 (если $n = 0$, то a_n не равно 0); $f_2(x) = (c_m \cos^m x + \cdots + c) + \sin x(d_{m-1}\cos^{m-1} x + \cdots + d)$. Тогда при $n = m$

$$f_1(x) + f_2(x) = ((a_n + c_n)\cos^n x + \cdots) + \sin x((b_{n-1} + d_{n-1})\cos^{n-1} x + \cdots),$$

значит, если степень-2 определена, то она не выше n. А при $n > m$

$$f_1(x) + f_2(x) = (a_n \cos^n x + \cdots) + \sin x(b_{n-1}\cos^{n-1} x + \cdots),$$

где в первой скобке $\ldots$ — сумма одночленов степеней, меньших n, а во второй — меньших $n-1$. А так как хотя бы одно из чисел a_n и b_{n-1} не 0, то степень-2 суммы определена и равна n.

Теперь пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — два ТМ и их степени-1 равны соответственно n и m, причем $n \geq m$. Это значит, что

$$f_1(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a,$$

где хотя бы одно из чисел a_n и b_n не равно 0, и

$$f_2(x) = c_m \cos mx + d_m \sin mx + \cdots + c.$$

Тогда при $n = m$ имеем

$$f_1(x) + f_2(x) = ((a_n + c_n) \cos nx + (b_n + d_n) \sin nx + \cdots),$$

значит, если степень-2 определена, то она не выше n. А при $n > m$ очевидно, что старшими членами $f_1(x) + f_2(x)$ будут $a_n \cos nx$ и $b_n \sin nx$. Значит степень суммы равна n.

Утверждение 2.2. *При умножении ТМ как степени-1, так и степени-2 складываются.*

Доказательство. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — два ТМ и их степени-2 равны соответственно n и m. Это значит, что

$$f_1(x) = (a_n \cos^n x + \cdots + a) + \sin x(b_{n-1} \cos^{n-1} x + \cdots + b)$$

и

$$f_2(x) = (c_m \cos^m x + \cdots + c) + \sin x(d_{m-1} \cos^{m-1} x + \cdots + d),$$

где хотя бы одно из чисел a_n и b_{n-1} и хотя бы одно из чисел c_m и d_{m-1} не равно 0. Тогда

$$\begin{aligned} f_1(x)f_2(x) = ((a_n \cos^n x + \ldots) \times \\ \times (c_m \cos^m x + \cdots + c) + (1 - \cos^2 x)(b_{n-1} \cos^{n-1} x + \cdots + b)(d_{m-1} \cos^{m-1} x + \cdots + d)) = \\ = (a_n c_m \cos^{n+m} x - b_{n-1} d_{m-1} \cos^{n+m} x + \cdots) + \sin x(b_{n-1} c_m \cos^{m+n-1} x + \\ + a_n d_{m-1} \cos^{m+n-1} x + \cdots). \end{aligned}$$

Остается доказать, что хотя бы одно из чисел $a_n c_m b_{n-1} d_{m-1}$ и $b_{n-1} c_m + a_n d_{m-1}$ отлично от 0. Но

$$\begin{aligned} (a_n c_m b_{n-1} d_{m-1})^2 + (b_{n-1} c_m + a_n d_{m-1})^2 = \\ = a_n^2 c_m^2 - 2a_n c_m b_{n-1} d_{m-1} + b_{n-1}^2 d_{m-1}^2 + b_{n-1}^2 c_m^2 + 2b_{n-1} c_m a_n d_{m-1} + a_n^2 d_{m-1}^2 = \\ = a_n^2 c_m^2 + b_{n-1}^2 d_{m-1}^2 + b_{n-1}^2 c_m^2 + a_n^2 d_{m-1}^2 = (a_n^2 + b_{n-1}^2)(c_m^2 + d_{m-1}^2). \end{aligned}$$

Так как оба множителя не 0, то и произведение не 0. А если бы $a_n c_m b_{n-1} d_{m-1}$ и $b_{n-1} c_m + a_n d_{m-1}$ оба были равны 0, то и $(a_n c_m b_{n-1} d_{m-1})^2 + (b_{n-1} c_m + a_n d_{m-1})^2$ было бы равно 0.

Теперь пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — два ТМ и их степени-1 равны соответственно n и m. Это значит, что

$$f_1(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a, \quad f_2(x) = c_m \cos mx + d_m \sin mx + \cdots + c,$$

где $a_n^2 + b_{n-1}^2 \neq 0$ и $c_m^2 + d_{m-1}^2 \neq 0$; первое $\ldots$ заменяет сумму членов $a_k \cos kx$ и $b_k \sin kx$ с $k < n$, а второе — сумму членов $c_l \cos lx$ и $d_l \sin lx$ с $l < m$. Значит

$$f_1(x)f_2(x) = (a_n \cos nx + b_n \sin nx)(c_m \cos mx + d_m \sin mx) + \cdots,$$

где $\ldots$ заменяет сумму членов вида $a_k c_l \cos kx \cos lx$; $a_k d_l \cos kx \sin lx$; $b_k d_l \sin kx \sin lx$ таких, что оба числа k и l не превосходят соответственно n и m и хотя бы одно из них строго меньше соответственно n или m, и значит $k+l<n+m$. Применяя к ... формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, получаем, что ... преобразуется в сумму членов вида $a\cos ix$ и $b\sin ix$ таких, что $I<n+m$, и значит его степень-1 меньше $n+m$. Поэтому остается доказать, что степень-1 многочлена

$$(a_n\cos nx+b_n\sin nx)(c_m\cos mx+d_m\sin mx)$$

равна $n+m$. Проверяем:

$$\begin{gathered}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)(c_m\cos mx+d_m\sin mx)=\\ =a_nc_m\cos nx\cos mx+b_nc_m\sin nx\cos mx+a_nd_m\cos nx\sin mx+b_nd_m\sin nx\sin mx=\\ =(1/2)a_nc_m(\cos(n+m)x+\cos(n-m)x)+(1/2)b_nd_m(-\cos(n+m)x+\\ +\cos(n-m)x)+(1/2)b_nc_m(\sin(n+m)x+\sin(n-m)x)+(\sin(n+m)x+\sin(n-m)x)=\\ =(1/2)(a_nc_m-b_nd_m)\cos(n+m)x+\\ +(1/2)(b_nc_m+a_nd_m)\sin(n+m)x+(1/2)(a_nc_m+b_nd_m)\cos(n-m)x+\\ +(b_nc_m-a_nd_m)\sin(n-m)x.\end{gathered}$$

Выражения $a_nc_m+b_nd_m$ и $b_nc_m-a_nd_m$ очень похожи на $a_nc_mb_{n-1}d_{m-1}$ и $b_{n-1}c_m+a_nd_{m-1}$ из той части доказательства, которая относилась к степеням-2. Доказательство опять сводится к использованию тождества

$$(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Заметим, что раз утверждения о степенях суммы и произведения верны для двух ТМ, то они верны и для любого большего числа слагаемых (множителей). Это следует из того, что $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$ — то же самое, что $(f_1(x)+f_2(x))+f_3(x)$ и аналогично для умножения.

После того, как мы разобрались со степенью произведения, становится очень просто доказать, что степени 1 и 2 совпадают для тригонометрических одночленов вида $\cos^n x\sin^m x$. Заметим, что для $y=\cos x$ и $y=\sin x$ как степень-1, так и степень-2 равны 1. А степени 1 и 2 ТМ $y=\cos^0 x\equiv 1$ и $y=\sin^0 x\equiv 1$ равны 0. Остается вспомнить, что при $n>1$ величина a^n — это произведение n множителей, равных a.

Теперь докажем, что степени 1 и 2 совпадают для ТМ вида a $\cos^n x+b\cos^{n-1}x\sin x$. Если $a=b=0$, то как степень-1, так и степень-2 не определены. Если же хотя бы одно из чисел a и b не 0, то степень-2 нашего ТМ по определению равна n. А степень-1 найдем так:

$$a\cos^n x+b\cos^{n-1}x\sin x=\cos^{n-1}x(a\cos x+b\sin x) —$$

произведение двух ТМ, степени которых равны $n-1$ и 1.

Наконец, докажем, что для каждого ТМ степени 1 и 2 либо обе не определены, либо обе определены и равны друг другу.

Действительно, если степень-2 ТМ $f(x)$ не определена, то $f(x)\equiv 0$ и степень-1 тоже не определена. Если степень-2 равна 0, то $f(x)\equiv a$, где $a\neq 0$. Степень-1 тоже равна 0. Пусть теперь степень-2 равна n, причем $n>0$. Тогда $f(x)$ представляет собой ТМ вида $a_n\cos^n x+b_{n-1}\cos^{n-1}x\sin x$, где $a_n^2+b_{n-1}^2\neq 0$ или сумму такого ТМ и одного или нескольких ТМ $a_k\cos^k x+b_k\cos^{k-1}x\sin x$ таких, что $k<n$ и $a_k^2+b_{k-1}^2\neq 0$. Но тогда степень каждого такого двучлена равна k. И, согласно утверждению о степени суммы нескольких ТМ, степени которых попарно различны, степень суммы равна n.

Отметим также, что степени ТМ $f(\cos x)$ и $f(\sin x)$ совпадают со степенью многочлена f.

Так как. функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют период 2π, то уравнение вида $f(\cos x,\sin x)=0$ либо не имеет решений, либо имеет их бесконечно много. Но если подсчитывать только число пар $(\cos x,\sin x)$ таких, что x — корень, то их может быть и конечное число. СФ 2 позволяет свести вопрос об оценке сверху числа таких пар к верхней оценке числа корней обычного многочлена.

А именно, к тому, что число корней многочлена n-ой степени не больше, чем n. Отсюда сразу получаем, что уравнения $f(\cos x) = 0$ и $f(\sin x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен n-ой степени, имеют не больше n корней в промежутках $[0;\pi]$ и $[-\pi/2;\pi/2]$ соответственно. Поэтому уравнение $f(\cos x) = 0$ имеет не больше $2n$ корней в промежутке $[-\pi;\pi]$, а $f(\sin x) = 0$ — в промежутке $[-\pi/2;(3\pi)/2]$. А как быть с уравнениями вида $f(\cos x, \sin x) = 0$, где $f(y,z)$ — многочлен с двумя переменными? Попробуем установить некоторую связь между такими уравнениями и уравнениями $g(\cos x) = 0$, где $g(y)$ — многочлен с одной переменной. По любой функции $y = f(x)$ с областью определения, симметричной относительно 0, построим функцию $y = f(x)f(-x)$. Назовем её *зачетом функции* $f(x)$ и будем обозначать $f_{\text{зач}}$. Видим, что функция $f_{\text{зач}}$ всегда четна и x — корень уравнения $f_{\text{зач}}(x) = 0$ в том и только в том случае, если хотя бы одно из чисел x и $-x$ — корень уравнения $f(x) = 0$. Понятно, что зачет ТМ сам всегда будет ТМ, а так как он является четной функцией, то его СФ 2 будет иметь вид $g(\cos x)$, где $g(y)$ — многочлен. Поскольку степень произведения равна сумме степеней, то степень $f_{\text{зач}}$, а значит и степень g, равна $2n$. Следовательно мы доказали, что ТМ степени n имеет не больше $4n$ корней в промежутке $[-\pi;\pi]$, причем $\cos x$ для корней этого ТМ принимает не больше $2n$ значений. Но если посмотреть внимательнее, то мы увидим, что оценку числа корней $4n$ можно уточнить в два раза.

Утверждение 2.3. *ТМ степени n имеет не больше $2n$ корней в промежутке* $]-\pi;\pi]$.

Действительно, заметим, что для $f(x) = f_1(\cos x) + \sin x f_2(\cos x)$ будет $f(-x) = f_1(\cos x) - \sin x f_2(\cos x)$;

$$f_{\text{зач}}(x) = f(x)f(-x) = (f_1(\cos x) + \sin x f_2(\cos x))(f_1(\cos x) - \sin x f_2(\cos x)) = \\ = f_1^2(\cos x) - f_2^2(\cos x)(1-\cos^2 x).$$

Пусть $f(x)$ имеет в $[0;\pi]$ k таких корней a, отличных от 0 и π, что $-a$ тоже корень. Тогда из равенств $f_1(\cos a) + \sin a f_2(\cos a) = 0$ и $f_1(\cos a) + \sin a f_2(\cos a) = 0$ следует $f_1(\cos a) = \sin a f_2(\cos a) = 0$, а так как $\sin a$ не равен 0, то $f_1(\cos a) = f_2(\cos a) = 0$. Поскольку $f_{\text{зач}}(x) = g(\cos x) = f_1^2(\cos x) - f_2^2(\cos x)(1-\cos^2 x)$, то корни $\cos a$ для $g(y)$ кратные. Поэтому остальных корней у этого многочлена не больше, чем $2n-2k$. Значит, у $f_{\text{зач}}(x)$ остальных корней в $[0;\pi]$ не больше, чем $2n-2k$. Но остальные корни — это такие b, что b равно π или ровно одно из чисел b и $-b$ — корень $f(x)$.Значит, их у $f(x)$ в $]-\pi;\pi]$ столько же, сколько у $f_{\text{зач}}(x)$ в $[0;\pi]$. Значит всего у $f(x)$ в $]-\pi;\pi]$ не больше, чем $2k + (2n-2k) = 2n$ корней.

Упражнения к главе 2

2.1. При каких a, b, c, d ТМ $y = a\cos^3 x + b\cos^2 x \sin x + c\cos x \sin^2 x + d\sin^3 x$ является четной функцией? Нечетной?

Вспомним, что в главе 1 у нас возникал еще один вариант определения степени ТМ: как наименьшей из степеней многочленов $f(y;z)$ таких, что $f(\cos x;\sin x)$ — одна из записей нашего ТМ. Назовем эту степень степенью-0. (Будем считать, что если ТМ тождественно равен 0, то есть 0 — одна из его записей, то его степень-0, как и степени 1 и 2, не определена.

2.2. Исходя из определения найдите степени-0 ТМ: 1; $\cos x$; $\cos^2 x$; $\cos^2 x + \sin^2 x$; $\cos^3 x + \sin^3 x$.

2.3. Пусть $f(y,z)$ — многочлен степени n с двумя переменными. Может ли степень-2 ТМ $f(\cos x;\sin x)$ быть больше n?

2.4. Может ли степень-0 некоторого ТМ быть меньше его степени-2?

2.5. Может ли степень-0 некоторого ТМ быть больше его степени-2?

2.6. Найдите СФ 2 и степень для ТМ $\cos^n x$, $\sin^n x$ и $\cos^n x + \sin^n x$ при n от 1 до 6.

2.7. Верно ли, что степень ТМ $\cos^n x + \sin^n x$ всегда равна n? А если n нечетно?

2.8. Пусть $a_n(x) = \cos^n x + \sin^n x$. Найдите рекуррентное соотношение, выражающее $a_{n+1}(x)$ через $a_n(x)$ и $a_{n-1}(x)$. *Подсказка:* воспользуйтесь тем, что

$$y^{n+1} + z^{n+1} = (y^n + z^n)(y + z) - yz(y^{n-1} + z^{n-1}).$$

2.9. Найдите степень ТМ $\cos^{2n} x + \sin^{2n} x$. *Подсказка:* рассмотрите отдельно случаи четного и нечетного n.

2.10. Решите уравнение с параметром $\sin^6 x + \cos^6 x = a$.

2.11. Найдите зачет ТМ $3\cos^5 x + \sin^5 x - \sin x$. Решите уравнение $3\cos^5 x + \sin^5 x - \sin x = 0$.

2.12. Пусть область определения функции $y = f(x)$ симметрична относительно 0 и пусть $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$, где функция f_1 четная, а f_2 — нечетная. Верно ли, что если $f(x)$ периодическая и T — один из ее периодов, то T обязан быть периодом для обоих слагаемых?

2.13. Найдите наименьший положительный период функции $y = \cos^n x + \sin^m x$, если n, m — целые положительные числа и m нечетно.

2.14. Найдите наименьший положительный период функции

$$y = 2\cos 3x + 3\operatorname{tg} 5x + 5/(\sin 7x).$$

2.15. Есть ли вертикальные оси симметрии у графика ТМ

$$y = f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x + (1/2)\sin 2x - 1\,?$$

Если да, то решите уравнение $\cos^3 x + \sin^3 x + (1/2)\sin 2x - 1 = 0$, сделав замену $x = y + \varphi$.

2.16. Есть ли вертикальные оси симметрии у графика ТМ

$$y = f(x) = \sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12\,?$$

Решите уравнение $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$.

2.17. Что вы можете сказать о СФ ТМ, если известно, что прямая $x = \varphi$ — вертикальная ось симметрии для графика этого ТМ?

2.18. Верно ли, что прямая $x = (1/4)\pi$ является осью симметрии ТМ в том и только в том случае, когда этот ТМ можно представить в виде $g(\cos(x - 1/4)\pi)$ или $h(\cos x + \sin x)$, где g и h — многочлены с одной переменной?

2.19. Верно ли, что прямая $x = -(1/4)\pi$ является осью симметрии ТМ в том и только в том случае, когда этот ТМ можно представить в виде $g(\cos(x + 1/4)\pi)$ или $h(\cos x \sin x)$, где g и h — многочлены с одной переменной?

Глава 3. Умеете ли вы делить тригонометрические многочлены?

Мы предполагаем, что вы уже умеете делить с остатком один обычный многочлен с одной переменной на другой. Процедура деления уголком состоит из отдельных шагов. На каждом шаге мы находим промежуточное частное и промежуточный остаток. Если степень промежуточного остатка оказывается меньше степени делителя, деление заканчивается. Если нет, то на следующем шаге в качестве делимого берется промежуточный остаток, полученный на предыдущем шаге. При этом промежуточное частное всегда является одночленом вида $a_k x^k$. Он подбирается так, чтобы степень промежуточного остатка оказалась меньше степени делимого, то есть чтобы уничтожить старший член делимого. В результате на каждом следующем шаге делимое имеет меньшую степень, чем на предыдущем.

Таким образом, при делении уголком важную роль играет понятие старшего члена. При делении ТМ старших членов может быть несколько. А, как известно, за двумя зайцами погонишься — ни одного не поймаешь. Поэтому нам потребуется понятие *ступени.* Чтобы определить деление уголком сразу для разных видов ступеней, подумаем о том, какими свойствами для этого должны обладать ступени.

Прежде всего, ступени должны принадлежать тому же множеству, элементы которого мы хотим делить друг на друга. (Нас будут интересовать только множества, элементы которых — функции с одной или несколькими переменными.) Во вторых, одна и та же ступень не должна быть одновременно n-ступенью и m-ступенью при $n \neq m$. То единственное n, для которого f — n-ступень, будем называть *степенью* ступени f. В-третьих, если f — k-ступень и a — число, отличное от 0, то af — тоже k-ступень. В-четвертых, сумма ступеней одной и той же степени всегда либо тоже ступень, либо тождественно равна 0.

И, наконец, самое главное: каждая функция из данного множества должна быть представима, причем единственным образом, в виде суммы ступеней попарно различных степеней. (Заметим, что из единственности такого представления следует, что сумма двух или нескольких ступеней попарно различных степеней не может быть тождественно равна 0.)

Пусть у нас есть некоторое множество всюду определенных функций от одной или нескольких переменных, содержащее все функции-константы и замкнутое относительно сложения и умножения (то есть результат сложения или умножения двух функций из этого множества всегда является функцией из этого же множества. Тогда мы можем определить степень любой функции из этого множества, не равной тождественно 0, как степень её старшей ступени. Покажем, что обычные свойства степени суммы вытекают из тех свойств ступеней, выполнения которых мы уже потребовали.

Действительно, мы знаем, что сумма двух ступеней одной и той же степени — либо нулевая функция, либо ступень. Покажем, что в последнем случае это ступень той же степени n, что и слагаемые f_1 и f_2. Допустим противное. Тогда $f_1 + f_2 = f_3$, где f_3 — ступень степени, отличной от n. Отсюда $f_1 = (-1)f_2 + f_3$. Так как $(-1)f_2$ — ступень степени n, то получаем два разных представления ступени f_1 в виде суммы ступеней попарно различных степеней.

Только что доказанное свойство означает, что в суммах ступеней $f_1 + \cdots + f_m$ мы всегда можем "приводить подобные члены" — группировать ступени одной степени и заменять их либо нулем, либо одной ступенью той же степени. В результате каждая такая сумма может быть приведена к виду $h_1 + \cdots + h_k$ — суммы ступеней попарно различных степеней. Причем степени ступеней h_i могут быть только такими, которые встречались среди степеней ступеней $f_1, \ldots, f_m$. А если f_1 было единственным слагаемым степени n, то оно сохранится как слагаемое в сумме $h_1 + \cdots + h_k$.

Пусть теперь f имеет степень n, g — степень m и $n \geq m$. Тогда $f = f_1 + \cdots + f_k$, где f_1 — ступень степени n, $f_2, \ldots, f_k$ — ступени степеней, меньших n; $g = g_1 + \cdots + g_l$, где g_1 — ступень степени m, $g_2, \ldots, g_l$ — ступени степеней, меньших m. Сложив $f = f_1 + \cdots + f_k$ и $g = g_1 + \cdots + g_l$ и приведя подобные, получим сумму ступеней попарно различных степеней, не превосходящих n. Значит, степень $f + g$ не больше n. Причем если $n > m$, то полученная после приведения подобных сумма содержит ступень f_1. Значит, её степень равна n. Мы доказали, что степень суммы не превосходит большей из степеней слагаемых и если степени слагаемых различны, то степень суммы равна большей из них.

А для того, чтобы выполнялось обычное свойство степени произведения, то есть чтобы степень произведения ненулевых множителей была равна сумме степеней множителей, придется потребовать, чтобы степень произведения двух ступеней всегда была равна сумме степеней этих ступеней. Если ступени обладают этим свойством, то степень произведения равна сумме степеней множителей для любых ненулевых функций из данного множества функций.

Действительно, пусть f имеет степень n, g — степень m. Тогда $f = f_1 + \cdots + f_k$, где f_1 — ступень степени n, $f_2, \ldots, f_k$ — ступени степеней, меньших n; $g = g_1 + \cdots + g_l$, где g_1 — ступень степени $m, g_2, \ldots, g_l$ — ступени степеней, меньших m. Имеем: fg — сумма произведений $f_i g_j$. Так как степень произведения ступеней равна сумме степеней множителей, то степень $f_1 g_1$ равна $m+n$, а степени остальных произведений $f_i g_j$ меньше $m+n$. Тогда, по свойству степени суммы, степень всей суммы, то есть степень fg, равна степени $f_1 g_1$, то есть $m+n$.

Теперь перейдем к делению. Деление с остатком определяем обычным образом. Для этого нужны непосредственно только степени, а не ступени. Будем говорить, что f можно разделить с остатком на g, не равную тождественно 0, если в рассматриваемом множестве функций существуют такие функции h и r, что $f = gh + r$ и $r \equiv 0$ или степень r меньше степени g. Если такие h и r есть, то h будем называть частным, а r — остатком. Делимость без остатка — то же, что делимость с остатком, равным 0.

Докажем, что частное и остаток при фиксированном определении степени определены однозначно.

Допустим, что g не равна тождественно 0 и $gh_1 + r_1 \equiv gh_2 + r_2$; каждая из функций r_1 и r_2 либо нулевая,либо имеет степень меньшую, чем g. Тогда $g(h_1 h_2) \equiv r_2 - r_1$. Но левая часть — либо нулевая функция (если $h_1 h_2 \equiv 0$), либо имеет степень большую, чем g, а правая — либо нулевая функция, либо имеет степень меньшую, чем g. Значит $g(h_1 h_2) \equiv r_2 - r_1$ только в том случае, когда $h_1 h_2 \equiv 0$ и $r_2 - r_1 \equiv 0$.

Теперь займемся делением уголком. Для этого уже потребуются не только степени, но и ступени. Причем мы будем предполагать, что мы умеем по любым двум ступеням f и g из рассматриваемого множества определять, существует ли такая ступень h, что старшая ступень gh совпадает со старшей ступенью f, и если существует, то умеем такую ступень находить. (Заметим, что если такая h существует, то она единственна, так как если старшие ступени произведений gh_1 и gh_2 совпадают, то $gh_1 - gh_2$ либо тождественно равно 0, либо имеет степень меньше. чем gh_1 и gh_2. Но $gh_1 - gh_2 = g(h_1 - h_2)$, где степень $h_1 - h_2$ не совпадает ни с одной из степеней. h_1 и h_2 только если $h_1 - h_2$ тождественно равно 0. Значит, либо $h_1 - h_2 \equiv 0$, либо степень $g(h_1 - h_2)$ совпадает со степенью gh_1 или gh_2. Противоречие.)

Главное назначение деления уголком (или, на научном языке, алгоритма деления) — узнавать, делится ли одна функция на другую без остатка. Существенное отличие нашего деления для общего случая от деления целых чисел и многочленов с одной переменной — то, что деление даже с остатком будет не всегда возможно. Поэтому на каждом шаге деления уголком возможных результатов не 2, а 3: кроме

1) деление свелось к делению нового делителя, степени меньшей, чем у предыдущего;

и

2) деление закончено, так как получился остаток 0 или степени меньшей, чем делитель;

возможно

3) делимое нельзя разделить, даже с остатком, на данный делитель.

Хотя последний вариант несколько разочаровывает (мы как бы заходим в тупик), зато сразу получаем ответ на основной вопрос: делимое не делится на делитель.

На самом деле огорчает еще то, что в случаях, когда деление с остатком не всегда осуществимо, не получается доказать для данного множества функций аналоги обычных теорем о НОК, НОД и взаимно простых множителях, включая основную теорему арифметики.

Итак, пусть даны две функции f и g, делимое и делитель, степень f не меньше степени g. Шагом деления будем называть нахождение такой ступени h, что $f = gh + s$, где s тождественно равно 0 либо имеет степень меньшую, чем f. То есть требуется найти такую ступень h, что старшая ступень gh совпадает со старшей ступенью f. Если такая h существует, то она и есть искомая, а $s = f - gh$. А если не существует, то шаг деления невыполним. И тем более невозможно разделить f на g с остатком.

Чтобы разделить f на g уголком, последовательно выполняем шаги деления. Делитель на всех шагах один и тот же — g. Делимое на первом шаге — f. Пусть первые n шагов удалось выполнить и на n-ом шаге по делимому f_n найдены h_n и s_n. Тогда на $(n+1)$-ом шаге делимое — s_n. Шаги выполняем до тех пор, пока либо какой-то шаг окажется невыполнимым (тогда делаем вывод, что f нельзя разделить на g даже с остатком), либо не окажется, что на некотором шаге m получается, что s_m тождественно равно 0 или имеет степень, меньшую степени делителя. Тогда делаем вывод, что нам удалось разделить f на g с остатком. Остаток равен s_m, а частное — $h_1 + h_2 + \cdots + h_m$.

Перейдем к конкретным примерам. Сначала рассмотрим только четные ТМ, то есть КМ. Заметим, что если два КМ представлены в виде $f_1(\cos x)$ и $f_2(\cos x)$, где f_1 и f_2 — многочлены, то $f_1(\cos x)$ делится без остатка на $f_2(\cos x)$ во множестве всех ТМ, то есть $f_1(\cos x) = f_1(\cos x)g(\cos x; \sin x)$, в том и только в том случае, когда $f_1(\cos x)$ делится без остатка на $f_2(\cos x)$ во множестве всех КМ и в том и только в том случае, когда f_1 делится без остатка на f_2. Но если КМ записаны в СФ, то есть в виде $a_n \cos nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + a$, то удобно исходить из определения n-ступени как КМ вида $c \cos nx$, где c не равно 0. Заметим, что если старшие ступени КМ $f(x)$ и $g(x)$ — это $a_n \cos nx$ и $b_m \cos mx$ соответственно, то старшая ступень произведения $f(x)g(x)$ — это старшая ступень

$$a_n b_m \cos nx \cos mx = (a_n b_m/2)(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x).$$

То есть если n и m не 0, то эта старшая ступень — $(a_n b_m/2)\cos(n+m)x$. Поэтому по двум ступеням $a_n \cos nx$ и $b_m \cos mx$, где $n \geq m$, всегда можно найти такую ступень $c_k \cos kx$, что старшая ступень $(b_m \cos mx)(c_k \cos kx)$ есть $a_n \cos nx$. А именно: если m не 0, то $k = n - m$; $c_k = 2(a_n/b_m)$; если $m = 0$, то $k = n$; $c_k = a_n/b_m$.

Заметим, что деление с остатком будет давать те же частное и остаток, что при ступенях а $\cos^n x$, то есть как многочленов от одной переменной (с точностью до того, что это будут разные записи одних и тех же КМ). Ведь мы знаем, что степени будут те же самые.

Пример деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\ 2\cos 3x - 3\cos 2x + 5\cos x & \cos 2x + 2\cos x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{2\cos 3x + 2\cos x + 4(\cos 2x + 1) + 4\cos x} & 4\cos x - 7 \\ -\ -7\cos 2x - \cos x - 4 & \\ \underline{-7\cos 2x - 14\cos x - 7} & \\ 13\cos x + 3 & \end{array}$$

Итак, частное равно $4\cos x - 7$, а остаток — $13\cos x + 3$.

Теперь рассмотрим произвольные ТМ. В первых двух главах мы рассмотрели два вида СФ. Каждому из них соответствуют свои ступени (приводящие к одному и тому же понятию степени).

СФ 2 соответствуют n-ступени $\cos^{n-1} x(a\cos x + b\sin x)$, где $a^2 + b^2 \neq 0$ при $n > 0$ и 0-ступени — константы, отличные от 0. Существование и единственность представления каждого ТМ в СФ 2 означает существование и единственность разложения каждого ненулевого ТМ на ступени попарно различных степеней. Выкладки показывают, что нахождение по двум данным ступеням $\cos^{n-1} x(a\cos x + b\sin x)$ и $\cos^{m-1} x(c\cos x + d\sin x)$, где $n \geq m$, ступени h такой, что старшая степень произведения $\cos^{m-1} x(c\cos x + d\sin x)h(x)$ совпадает с $\cos^{n-1} x(a\cos x + b\sin x)$, при $n > m$ сводится к решению системы с неизвестными e и f, состоящей из уравнений $ec - fd = a$ и $ed + fc = b$. Эта система линейная и её определитель равен $c^2 + d^2$. А так как $c^2 + d^2 \neq 0$, то решение этой системы существует и единственно. При $n = m$ ступень $h(x)$ должна быть константой. То есть $h(x)$ — это такое e, отличное от 0, что

$$\cos^{n-1} x(a\cos x + b\sin x) \equiv e\cos^{n-1} x(c\cos x + d\sin x),$$

откуда $c = ea$; $d = eb$. Такое е может и не существовать, но если уж оно существует, то при $a^2 + b^2 \neq 0$ оно единственно. Поэтому наши ступени позволяют выполнять деление уголком, причем шаг деления уголком может оказаться невыполнимым только если степень делимого на этом шаге равна степени делителя.

Пример. Пусть делимое

$$f(x) = 2\cos^3 x - 3\cos^2 x \sin x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = \\ = \cos^2 x(2\cos x - \sin x) + \cos x(\cos x - 2\sin x);$$

делитель

$$g(x) = 3\cos^2 x + \sin x \cos x - \cos x + \sin x - 1 = \cos x(3\cos x + \sin x) + (-\cos x + \sin x) - 1.$$

Выполним деление уголком.

Первый шаг. Нужно подобрать e и f так, чтобы старшая ступень многочлена $(3\cos x + {}$ $+ \sin x)(e\cos x + f\sin x)$ совпадала с $\cos x(2\cos x - \sin x)$. Как мы знаем, эти e и f — решения системы, состоящей из уравнений $3e - f = 2$; $e + 3f = -1$. Значит, $e = 1/2$; $f = -(1/2)$. Умножаем делитель на $(1/2)(\cos x - \sin x)$. Получаем

$$\cos^2 x(2\cos x - \sin x) + (1/2)(1 - 4\sin x \cos x) - (1/2)(\cos x - \sin x).$$

Вычитаем полученный результат из делимого. Получаем промежуточный остаток $\cos^2 x + (1/2)(\cos x - \sin x) + (1/2)$. Он имеет степень, равную степени делителя, причем коэффициенты их старших ступеней не пропорциональны.

Теперь рассмотрим ступени, соответствующие СФ 1. То есть n-ступени при $n > 0$ — $a\cos nx + b\sin nx$, причем $a^2 + b^2$ не равно 0, а 0-ступени — все отличные от 0 константы.

Выясним, как по заданным ступеням a $\cos nx + b\sin nx$ и $c\cos mx + d\sin mx$ с $a^2 + b^2 \neq 0$ и $c^2 + d^2 \neq 0$ найти такую ступень h, чтобы старшая ступень $(c\cos mx + d\sin mx)h(x)$ совпадала с ac. При $m = n$, как и для предыдущего вида ступеней, получаем, что h обязана быть константой, $h(x) \equiv e$, удовлетворяющей равенствам $a = ce$; $b = de$. При $n > m$ ищем такие e и f, чтобы старшая ступень произведения

$$(c\cos mx + d\sin mx)(e\cos(n-m)x + f\sin(n-m)x)$$

совпадала с $a\cos nx + b\sin nx$. Имеем

$$\begin{aligned}(c\cos mx + d\sin mx)&(e\cos(n-m)x + f\sin(n-m)x) \equiv \\ &\equiv ce\cos mx\cos(n-m)x + df\sin mx\sin(n-m)x + \\ &+ de\sin nx\cos(n-m)x + cf\cos mx\sin(n-m)x \equiv \\ &\equiv (1/2)ce(\cos nx + \cos(n-2m)x) + (1/2)df(-\cos nx + \cos(n-2m)x) + \\ &+ (1/2)de(\sin nx + \sin(2m-n)x) + (1/2)cf(\sin nx - \sin(2m-n)x).\end{aligned}$$

Старшая ступень этого ТМ — $(1/2)(ce - fd)\cos nx + (1/2)(ed + fc)\sin nx$. Получаем для нахождения e и f такую же систему, как для ступеней предыдущего вида, только правые части уравнений $2a$ и $2b$, а не a и b. Значит, мы всегда можем найти такие e и f.

Мы уже говорили, что деление с остатком зависит только от степеней. А не от ступеней. Поэтому при делении уголком ТМ от выбора ступеней будет зависеть только то, в каком виде мы получим результаты.

Упражнения к главе 3

3.1. Можно ли разделить с остатком x^4y на x^2y^2 а) если n-ступени — однородные многочлены n-ой степени? б) если n-ступени — многочлены вида $x^n f(y)$, где $f(y)$ — произвольный ненулевой многочлен?

3.2. Разделите многочлен x^4-1 на $x+1$. Как теперь можно сразу написать частное от деления x^4-y^4 на $x+y$?

3.3. Разделите с остатком $\cos 5x$ на $\cos 3x$ (n-ступени — $a\cos nx$).

3.4. Разделите с остатком $\cos nx$ на $\cos mx$.

3.5. Разделите $\cos 5x$ на $\sin 3x$ (n-ступени — $a\cos nx+b\sin nx$).

3.6. Разделите с остатком $\cos nx$ на $\sin mx$.

3.7. Разделите $\cos 2x$ на $\cos x+\sin x$.

3.8. При каких n и m можно разделить с остатком $\cos nx$ и $\sin nx$ на $\cos mx+\sin mx$?

3.9. При каком a ТМ $\sin 2x+a$ делится без остатка на $\cos x+\sin x$?

3.10. Существует ли у $\cos 2x$ и $\sin 2x$ НОД — такой общий делитель, который делится без остатка на любой другой общий делитель?

3.11. Известно, что $f_1^2+f_2^2\equiv 1$ (f_1 и f_2 — ТМ). Что вы можете сказать об общих делителях f_1 и f_2?

3.12. Найдите НОД для а) $\cos nx$ и $\sin nx$; б) $\cos nx+a\sin nx$ и $\cos nx-a\sin nx$, где a — некоторое число.

3.13. Найдите все ТМ второй степени, которые делятся одновременно на $\cos x$ и $\sin x$.

3.14. Приведите пример двух ТМ второй степени, у которых нет НОД.

Глава 4. Однородные тригонометрические многочлены

Напомним, что обычные многочлены с несколькими переменными называют *однородными*, если в их представлении в виде суммы одночленов попарно различных степеней все одночлены имеют одну и ту же степень. По аналогии с многочленами определяют понятие однородной функции для произвольных функций от нескольких переменных. Всюду определенная функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется *однородной*, если для некоторого натурального числа k при всех $t; x_1,\ldots,x_n$ выполняется равенство $f(tx_1,\ldots,tx_n)=t^kf(x_1,\ldots,x_n)$.

Если ТМ $f(x)$ представим в виде $g(\cos x;\sin x)$, где g — однородный многочлен, то $g(\cos x;\sin x)$ будем называть *однородным видом* этого ТМ, а сам $f(x)$ будем называть *однородным* ТМ.

На самом деле однородные тригонометрические многочлены следовало бы называть тригонометрическими многочленами, приводимыми к однородному виду, так как они не являются однородными функциями. Среди ненулевых ТМ вообще нет однородных функций. Если бы даже не при всех t, а только при $t=2$ выполнялось $f(\cos tx;\sin tx)\equiv t^kf(\cos x;\sin x)$, то это противоречило бы тому, что степень ТМ $f(\cos 2x;\sin 2x)$ в два раза больше степени $2^kf(\cos x;\sin x)$.

Практически во всех пособиях по решению тригонометрических уравнений говорится о том, что $\sin^2 x$; $\cos^2 x$; $\sin 2x$; $\cos 2x$ и 1 — однородные ТМ (1 является однородным ТМ потому, что $1\equiv\sin^2 x+\cos^2 x$).

Докажем, что на самом деле верно следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *ТМ можно представить в однородном виде в том и только в том случае, если его можно представить в виде суммы одночленов $a\cos^k x\sin^l x$, где все числа $k+l$ имеют одинаковую четность.*

Необходимость нашего условия вытекает непосредственно из определения однородного вида. Действительно, если $f(x)=g(\cos x;\sin x)$, где g — однородный многочлен, то есть все его одночлены имеют одну и ту же степень n, то $g(\cos x;\sin x)$ — сумма одночленов вида $a\cos^k x\sin^l x$, где все числа $k+l$ равны n, и значит, имеют одну и ту же четность — ту же, что четность степени $g(x;y)$. (Заметим, что степень g не обязана быть степенью ТМ $f(x)$, но четности этих степеней всегда совпадают.)

Докажем достаточность. Пусть $f(x)$ представлен в виде суммы одночленов $a\cos^k x\sin^l x$, наибольшая из сумм $k+l$ равна n и все числа $k+l$ имеют ту же четность, что n. Тогда домножим каждый одночлен $a\cos^k x\sin^l x$, у которого $k+l<n$, на $(\sin^2 x+\cos^2 x)^m$, где $m=(1/2)(n-(k+l))$. Тогда $a\cos^k x\sin^l x(\sin^2 x+\cos^2 x)^m = h(\cos x;\sin x)$, где $h(y;z) = ay^kz^l(y^2+z^2)^m$ — однородный многочлен степени $k+l+2m=n$. После раскрытия скобок и приведения подобных он будет состоять из одночленов одной и той же степени n.

Следствие. *ТМ $f(x)$ является однородным в том и только в том случае, если в его СФ $a_n\cos nx + a_{n-1}\cos(n-1)x+\dots+a_1\cos x+a$ все k, для которых $a_k^2+b_k^2$ не равно 0, имеют одну и ту же четность. (а мы при этом рассматриваем как $a\cos 0x+b\sin 0x$.)*

Заметим теперь, что любой ТМ

$$f(x) = a_n\cos nx + a_{n-1}\cos(n-1)x+\dots+a_1\cos x+a$$

легко превратить в ТМ $g(y)$, представление которого в виде суммы слагаемых $c_k\cos kx+d_k\sin kx$ содержит только слагаемые с четными k, заменой $x=2y$.

Теперь об уравнениях. Вы, наверное, знаете (из пособия С. Львовского «Тригонометрия»[2] или из других источников), что уравнение вида $f(g(x);\ h(x))=0$, где f — однородный многочлен от двух переменных, сводится к решению уравнений $f(0;y)=0$ и $f(1;y)=0$. Причем, так как многочлен f однородный, то решения $f(0;y)=0$ — это либо все числа, либо только $y=0$. А именно, в случае $g(x)\neq 0$ решения $f(g(x);h(x))=0$ — это все решения уравнений $(h(x)/g(x)) = a_i$, где $a_1,\dots,a_n$ — корни $f(1;y)=0$. В случае $g(x)=0$ решения $(g(x);h(x))=0$ — это решения $g(x)=h(x)=0$, если $f(0;y)=0$ только при $y=0$ и все решения $g(x)=0$, если $f(0;y)=0$ при всех y. В частности, если $h(x)=\sin x$, а $g(x)=\cos x$, то $h(x)/g(x)$ — это $\operatorname{tg} x$.

Из тех же источников известно, что уравнение a $\cos^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x+d=0$ сводится к однородному заменой свободного члена d на $d(\sin^2 x+\cos^2 x)$. Теперь мы знаем, что та же идея позволяет свести к однородному любое уравнение $f(g(x);h(x))=0$, где $f(y;z)$ — многочлен, степени всех одночленов которого имеют одну и ту же четность. Причем степень соответствующего однородного многочлена $g(y;z)$ не выше степени $f(y;z)$. Что же касается произвольного ТМ, то, сделав предварительно замену $x=2y$, мы можем привести $f(\cos 2y;\sin 2y)=0$ к однородному виду. Но, как мы знаем, замена x на $2y$ означает увеличение степени ТМ в 2 раза.

Итак, мы умеем превращать ТМ $f(\cos x;\sin x)$ в $g(\cos(x/2);\sin(x/2))$, где g — однородный многочлен. Соответственно решение уравнения $f(\cos x;\sin x)=0$ сводится к решению уравнения $g(\cos(x/2);\sin(x/2))=0$ или $g(1;tg(x/2))=0$. Это близко к тому, что предлагается обычно делать с помощью универсальной подстановки $\sin x = 2tg(x/2)/(1+tg^2(x/2)$; $\cos x = (1-\operatorname{tg}^2(x/2))/(1+tg^2(x/2))$. Поскольку замена x на $x/2$ повышает степень ТМ, то понятно, что переходить от $\cos x$ и $\sin x$ к $\operatorname{tg}(x/2)$ имеет смысл, только если нельзя перейти просто к $\operatorname{tg} x$, то есть если уравнение имеет вид $f(\cos x;\sin x)=0$, где $f(y;z)$ содержит одночлены x^ky^l и с четным $k+l$, и с нечетным.

Мы видим, что сведение уравнения к однородному с последующей заменой $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ на $\operatorname{tg} x$ и сведение уравнения к рациональному уравнению относительно $\operatorname{tg}(x/2)$ — не такие разрозненные приемы, как может показаться с первого взгляда. В некотором смысле прием сведения к однородному уравнению оказывается не менее универсальным, чем применение универсальной подстановки.

Рассмотрим теперь один вопрос, ответ на который нам пригодится в следующей главе. Мы знаем, что если f и g — два многочлена с двумя переменными и $f(\cos x;\sin x) \equiv$

[2]Гельфанд И.М., Львовский С.Л., Тоом А.Л. Тригонометрия. - М.: МЦНМО. АО "Московские учебники", 2002. - С. 199.

$\equiv g(\cos x; \sin x)$, то есть $f(\cos x; \sin x)$ и $g(\cos x; \sin x)$ — один и тот же ТМ, то совсем не обязательно $f(y; z)$ и $g(y; z)$ — один и тот же многочлен. А если многочлены f и g однородны? В общем случае по-прежнему не обязательно, чтобы $f(y; z) \equiv g(y; z)$. Пример: $\sin^2 x + \cos^2 x$ и 1. Докажем следующее

Утверждение 4.2. *Если потребовать, чтобы f и g не только были однородными, но и имели одну и ту же степень, то из $f(\cos x; \sin x) \equiv g(\cos x; \sin x)$ будет следовать $f(y; z) \equiv g(y; z)$.*

Действительно, если f и g однородны, то для того, чтобы $f(y; z) \equiv g(y; z)$, достаточно, чтобы для каждой пары $(a; b)$ с $a^2 + b^2 \neq 0$ нашлась такая пропорциональная ей пара $(ka; kb)$ с $k \neq 0$, что $f(ka; kb) = g(ka; kb)$. (Тогда $f(a; b) = (1/k^n)f(ka; kb) = (1/k^n)g(ka; kb) = g(a; b)$, где n — степень многочленов f и g.) В качестве такой пары $(ka; kb)$ мы всегда можем взять $(\cos\varphi; \sin\varphi)$, где φ — угол из промежутка $[0; 2\pi[$ с $\cos\varphi = a/(a^2 + b^2)^{1/2}$; $\sin\varphi = b/(a^2 + b^2)^{1/2}$.

Упражнения к главе 4

4.1. Решите уравнение $x^4 - 3x^2(x + 1) + 2(x + 1)^2 = 0$, используя однородное уравнение $y^2 - 3yz + 2z^2 = 0$.

4.2. Решите уравнение $\sin^4 x - 3\sin^2 x \cos x + 2\cos^2 x = 0$.

4.3. Решите уравнение $\sin^4 x - 3\sin^2 x(\cos x + 1) + 2(\cos x + 1)^2 = 0$.

4.4. Преобразуйте к однородному виду ТМ $cos^4 x + \sin^4 x + a(\cos^2 x - \sin^2 x) + b$ и решите уравнение $cos^4 x + \sin^4 x + a(\cos^2 x - \sin^2 x) + b = 0$.

4.5. Преобразуйте к однородному виду ТМ

$$3\sin^3 x + 4\cos x \sin^2 x - 2\cos^2 x \sin x - 3\cos^3 x \sin x + 2\cos x$$

и решите уравнение $sin^3 x + 4\cos x \sin^2 x - 2\cos^2 x \sin x - 3\cos^3 x \sin x + 2\cos x = 0$.

4.6. Преобразуйте ТМ $f(x) = 3\sin 2x + 2(\sin x - \cos x) - 2$ к однородному виду, предварительно сделав замену $x = 2y$.

4.7. Верно ли, что если $f(y; z)$ и $g(y; z)$ однородные многочлены степеней m и n соответственно, где $m < n$, то из тождества $f(\cos x; \sin x) \equiv g(\cos x; \sin x)$ следует, что $n - m$ четно и $f(y; z) \equiv (y^2 + z^2)^{(n-m)/2} g(y; z)$?

4.8. Какое самое меньшее число осей симметрии $x = \varphi$ в промежутке $[0; 2\pi[$ может иметь график однородного ТМ второй степени? Верно ли, что тригонометрический многочлен второй степени является однородным в том и только в том случае, если его график имеет не меньше двух вертикальных осей симметрии в промежутке $[0; 2\pi[$?

Скворцова Елена Зеликовна,
преподаватель отделения математики
Всероссийской заочной
многопредметной школы (ВЗМШ).

E-mail: cskvorcova@math-vzms.org

Метод масс в задачах

А. Ю. Эвнин

Ещё Архимед использовал свойства центра масс системы материальных точек для доказательства геометрических фактов. Всесторонне этот метод (его называют также *барицентрическим*) изучен в замечательной книге [1]. Дополнительную информацию о барицентрическом методе можно найти в книгах [8] и [11].

В статье [2] показано, как метод масс используется при решении некоторых типовых задач на вычисление отношения, в каком точка делит отрезок. Особый акцент в этой статье сделан на *расщеплении масс* (ситуации, когда удобно в одну точку поместить одновременно несколько масс).

Коллекция задач, предлагаемая читателю в настоящей статье, содержит наряду с широко известными классическими задачами, в которых потрясающе эффективно работает метод масс, совсем новые задачи, предлагавшиеся на олимпиадах последних лет. Задачи взяты, в основном, из книг [1-10], а также материалов различных олимпиад.

Эта подборка задач может служить основой нескольких занятий математического кружка (как школьного, так и студенческого). Приводятся решения всех задач, но при этом в некоторых случаях изложение максимально лаконично.

Если точке A сопоставлено число (*масса*) m, будем говорить, что задана материальная точка (м. т.) mA (при этом число m не обязательно положительно).

Центром масс системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2, $\ldots$, m_nA_n называется такая точка M, для которой выполнено векторное равенство

$$m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{MA_n} = \mathbf{0}. \qquad (1)$$

Например, в случае двух точек A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2 их центр масс делит отрезок A_1A_2 в отношении $m_2 : m_1$ (**правило рычага**).

Задачи

1. *Для любой системы материальных точек с ненулевой суммарной массой центр масс существует и определяется этими точками однозначно.* Докажите.

В дальнейшем вместо (1) мы будем использовать записи

$$M = c(m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n)$$

и

$$m_1A_1 + m_2A_2 + \cdots + m_nA_n = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)M.$$

2. Пусть $M = c(m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n)$. Докажите, что для любой точки O

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)\overrightarrow{OM} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OA_n}. \qquad (2)$$

3. Теорема о группировке масс. *Если часть материальных точек заменить точкой, расположенной в их центре масс и имеющей ненулевую массу, равную сумме масс этих точек, то центр масс всех точек не изменится.* Докажите.

4. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, делятся точкой пересечения пополам; причём эта точка является серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей четырёхугольника.

5. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

6. Докажите, что высоты правильного тетраэдра пересекаются в одной точке и каждая высота делится этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершины.

7. [Формула Ван-Обеля.] Внутри треугольника ABC выбрана точка M. Лучи AM, BM, CM пересекают стороны BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Известно, что $AC_1 : C_1B = p$, $AB_1 : B_1C = q$. Докажите, что $AM : MA_1 = p + q$.

8. Даны три точки: A, B, C. Можно взять любой отрезок, соединяющий две из них, и повернуть на любой угол вокруг его середины. При этом возникнет новая конфигурация трёх точек. После нескольких таких операций точка A перешла в исходное положение точки B, а точка B не попала в исходное положение точки C. Может ли при этом точка C оказаться в исходном положении точки A?

9. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон BC, CA, AB соответственно в точках A', B', C'. Докажите, что отрезки AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

10. Сфера касается всех рёбер тетраэдра. Для каждой пары скрещивающихся рёбер проведём прямую, проходящую через точки касания. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.

11. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = 3 : 5$, $BN : NC = 1 : 4$. Прямые CM и AN пересекаются в точке O. Найдите отношения $AO : ON$ и $CO : OM$.

12. В треугольнике ABC на сторонах BC и CA выбраны соответственно точки A_1 и B_1, делящие их в отношениях $AB_1 : B_1C = a_1 : a_2$ и $BA_1 : A_1C = b_1 : b_2$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите, в каком отношении точка O делит отрезки AA_1 и BB_1.

13. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка E так, что

$$AE : EB = CF : FE = k,$$

где F — точка пересечения отрезка CE и медианы AD. Найдите k.

14. Дан треугольник ABC. На стороне AC отмечена точка D, для которой $AD : DC = 2$, а на стороне BC выбраны точки E и F так, что $BE = EF = FC$. Отрезок BD пересекает отрезки AE и AF соответственно в точках K и N. Найдите площадь четырёхугольника $KEFN$, если $S_{ABC} = 42$.

15. На сторонах BC и CA треугольника ABC взяты точки K и L; O — точка пересечения отрезков AK и BL. Найдите площадь исходного треугольника, если площади треугольников OLA, OAB, OBK равны соответственно 5, 6 и 7.

16. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N и K так, что $AM : MB = 2 : 3$, $AK : KC = 2 : 1$, $BN : NC = 1 : 2$. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN?

17. В треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB выбраны соответственно точки A_1, B_1 и C_1, делящие их в отношениях $CA_1 : A_1B = a_1 : a_2$, $AB_1 : B_1C = b_1 : b_2$ и $BC_1 : C_1A = c_1 : c_2$. Отрезки AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке O. Найдите, в каком отношении точка O делит отрезки AA_1 и B_1C_1.

18. В треугольнике ABC точка N — середина CB, точка Q делит сторону AC в отношении $AQ : QC = 3 : 5$, точки M и P делят сторону AB на три равные части. Отрезки NM и PQ пересекаются в точке O. Найдите отношение $MO : ON$.

19. В треугольнике ABC на его сторонах выбраны точки M, N, P и Q, такие что $CN : NB = a_1 : a_2$, $BM : MA = d_1 : d_2$, $BP : PA = c_1 : c_2$, $AQ : QC = b_1 : b_2$. Прямые MN и PQ пересекаются в точке $O \notin AB$. Найдите массы m_1, m_2, m_3, для которых $O = c(m_1A, m_2B, m_3C)$.

20. Дан треугольник ABC. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC, прямая, проходящая через середины сторон AB и BC, и биссектриса угла ACB пересекаются в одной точке.

21. Докажите теорему Чевы. *На сторонах треугольника ABC выбраны точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in BA$. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда*

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1.$$

22. Докажите теорему Менелая. *Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 делят его стороны CB, AC и BA в отношениях α, β и γ соответственно (т. е. имеют место векторные равенства $\overrightarrow{CA_1} = \alpha\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{AB_1} = \beta\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{BC_1} = \gamma\overrightarrow{C_1A}$). Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\alpha\beta\gamma = -1$.*

23. Докажите обобщённую теорему Шлёмильха. *Прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих чевиан данной точки, имеют общую точку.* (У самого Шлёмильха в качестве чевиан были высоты. В 1860 г. Шлёмильх доказал, что в этом случае соответствующие прямые пересекаются в точке Лемуана — точке пересечения симедиан[1]).

24. Дан треугольник ABC; на продолжении его медианы BM за точку M выбрана точка N, через которую проведена прямая, пересекающая отрезки AM и AB в точках P и Q соответственно. Прямые QM и NC пересекаются в точке R, а прямые RB и AC — в точке S. Докажите равенство $PM = MS$.

25. [Теорема Жергона.] Пусть $ABCD$ — произвольная треугольная пирамида, а O — точка внутри этой пирамиды. Лучи AO, BO, CO, DO пересекают противоположные грани в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что

$$\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} + \frac{DO}{DD_1} = 3.$$

26. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$, причём $AK : KB = DM : MC = \alpha$; $BL : LC = AN : ND = \beta$. Пусть O — точка пересечения отрезков KM и LN. Докажите, что $NO : OL = \alpha$, $KO : OM = \beta$.

27. На рёбрах тетраэдра $ABCD$ взяты точки $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$, причём $AK : KB = DM : MC = \alpha$ и $BL : LC = AN : ND = \beta$. Докажите, что отрезки KM и LN пересекаются в одной точке O, причём $NO : OL = \alpha$, $KO : OM = \beta$.

28. Докажите, что шары, построенные на рёбрах тетраэдра как на диаметрах, покрывают полностью этот тетраэдр.

29. Около окружности описан четырёхугольник $ABCD$, касающийся окружности в точках $K \in AB, L \in BC, M \in CD, N \in DA$. Отрезки KM и LN пересекаются в точке Z. Найдите, в каком отношении точка Z делит отрезок KM, если $AK = a, BL = b$, $CM = c, DN = d$.

30. Через вершину D параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, отсекающая $1/n$-ю часть от стороны AB, считая от вершины A. Какую часть от диагонали AC отсекает та же прямая?

31. $ABCD$ — вписанный четырёхугольник; Q — середина стороны CD; M — точка пересечения диагоналей $ABCD$; прямая QM пересекает сторону AB в точке K. Найдите отношение $AK : KB$, если $AD = a$, $BC = b$.

32. Каждая сторона выпуклого четырёхугольника разделена на три равные части. Соответствующие точки деления противоположных сторон соединены отрезками, в результате чего

[1]Симедиана — чевиана треугольника, луч которой симметричен лучу медианы относительно биссектрисы, выходящей из той же вершины — *Прим. ред.*

четырёхугольник разделён на девять клеток. Докажите, что площадь средней клетки составляет девятую часть площади исходного четырёхугольника.

33. $ABCD$ — трапеция, точки M и N — середины оснований BC и AD, O — точка пересечения диагоналей, E — точка пересечения продолжений боковых сторон. Докажите, что точки M, N, O и E лежат на одной прямой.

34. Дан треугольник ABC. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке T, а продолжений сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Отрезки QB и PC пересекаются в точке M. Докажите, что точки A, T и M лежат на одной прямой.

35. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α пересекает боковые рёбра SA, SB, SC и SD соответственно в точках A_1, B_1, C_1 и D_1. Известно, что $SA_1 : SA = 1 : a$, $SB_1 : SB = 1 : b$, $SC_1 : SC = 1 : c$. Найдите отношение $SD_1 : SD$.

36. В углы треугольника вписали три окружности так, что они касаются друг друга попарно внешним образом. Из каждой вершины провели прямую через точку касания окружностей, вписанных в два других угла. Докажите, что это прямые пересекаются в одной точки.

Указание. Придумайте, какие массы разместить в центрах окружностей, вписанных в углы, а также в центре вписанной окружности.

Пусть дан треугольник ABC. Пусть $M = c(x_1A, x_2B, x_3C)$, причём $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Тогда говорят, что точка M имеет барицентрические координаты (БСК) x_1, x_2, x_3 (относительно треугольника ABC). Аналогично определяются барицентрические координаты точки в пространстве относительно тетраэдра. Несложно убедиться в том, что точка лежит внутри треугольника (тетраэдра) тогда и только тогда, когда все её барицентрические координаты положительные.

37. Найдите барицентрические координаты центра окружности, вписанной в треугольник.

38. Найдите барицентрические координаты центра вневписанной окружности треугольника.

39. Пусть точка O лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что для её барицентрических координат справедливо: $x_1 : x_2 : x_3 = S_{OBC} : S_{OCA} : S_{OAB}$.

40. Докажите, что в барицентрической системе координат относительно треугольника ABC уравнение прямой — линейное однородное:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

где неверно, что $a = b = c$.

41. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, в котором $BC \neq AB$; D — точка касания этой окружности со стороной AC; B_1 — середина AC. Докажите, что прямая B_1I делит отрезок BD пополам.

42. Докажите, что уравнение окружности, описанной вокруг ABC, в БСК имеет вид $a^2x_2x_3 + b^2x_3x_1 + c^2x_1x_2 = 0$, где $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

43. На сторонах треугольника ABC отмечены точки $A_1 \in BC$, $A_2 \in A_1C$, $B_1 \in CA$, $B_2 \in B_1A$, $C_1 \in AB$, $C_2 \in C_1B$, для которых

$$\frac{CA_1}{a} = \frac{CB_2}{b} = \frac{a+b}{a+b+c}; \quad \frac{AB_1}{b} = \frac{AC_2}{c} = \frac{b+c}{a+b+c}; \quad \frac{BC_1}{c} = \frac{BA_2}{a} = \frac{c+a}{a+b+c}.$$

Докажите, что точки пересечения прямых A_1C_2, C_1B_2 и B_1A_2 лежат на описанной окружности треугольника ABC.

44. Найдите уравнение сферы, описанной вокруг тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ в БСК относительно данного тетраэра.

Ориентированным объёмом V_{ABCD} тетраэдра $ABCD$ называют смешанное произведение[2] векторов $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. По абсолютной величине ориентированный объём совпадает с обыч-

[2]Смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — это $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, где точка обозначает скалярное произведение, а крестик — векторное произведение — *Прим. ред.*

ным объёмом, а знак определяется ориентацией тройки векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Тройки векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}$ ориентированы одинаково тогда и только тогда, когда точки M и D лежат по одну сторону от плоскости ABC. Заметим также, что при циклической перестановке вершин ориентированный объём не меняется, а если поменять местами две соседние вершины, то сменится его знак.

45. Докажите, что барицентрические координаты точки $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ относительно тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ вычисляются по формулам

$$x_1 = \frac{V_{MA_2A_3A_4}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}, \quad x_2 = \frac{V_{A_1MA_3A_4}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}, \quad x_3 = \frac{V_{A_1A_2MA_4}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}, \quad x_4 = \frac{V_{A_1A_2A_3M}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}.$$

46. Дан тетраэдр $ABCD$. Известны площади граней: $S_{BCD} = S_1$, $S_{ACD} = S_2$,$S_{ABD} = S_3$, $S_{ABC} = S_4$. Найдите барицентрические координаты центров вписанной и вневписанных сфер.

47. [Олимпиада 239-й школы СПб, 2011.] Докажите, что из четырёх центров вневписанных сфер тетраэдра либо хотя бы один лежит вне описанной сферы и хотя бы один внутри, либо все четыре лежат на описанной сфере.

48. Докажите, что для равногранного тетраэдра центр любой вневписанной сферы лежит на описанной сфере.

49. [Теорема о плоском еже.] Каждой стороне выпуклого многоугольника сопоставим вектор, по длине равный этой стороне и направленный вовне многоугольника перпендикулярно этой стороне. Докажите, что сумма этих векторов равна нулю.

50. Докажите теорему Ньютона. *В описанном четырёхугольнике середины двух диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.*

51. [Теорема о пространственном еже.] Каждой грани выпуклого многогранника сопоставим вектор, по длине равный площади этой грани и направленный вовне многогранника перпендикулярно этой грани. Докажите, что сумма этих векторов равна нулю.

52. Докажите, что на рёбрах любого описанного многогранника можно расставить такие числа, что площадь любой грани этого многогранника численно равна сумме чисел, расставленных на рёбрах, ограничивающих эту грань.

53. [ММО, 2014, второй день, 11-5.] Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где $i, j, k = 1, 2$. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трёх отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.

Ответы

8. Нет. **11.** $AO : ON = 3 : 4$; $CO : OM = 32 : 3$. **12.** $AO : OA_1 = a_1(b_1 + b_2) : a_2b_1$; $BO : OB_1 = b_1(a_1 + a_2) : a_1b_2$. **13.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **14.** 5. **15.** 858. **16.** 6 : 7. **17.** $AO : OA_1 = (a_1 + a_2)b_1c_2 : (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)$; $B_1O : OC_1 = a_1b_1(c_1 + c_2) : a_2c_2(b_1 + b_2)$. **18.** $MO : ON = 6 : 13$. **19.** $m_1 = \frac{a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_1}{c_2d_1 - c_1d_2}$; $m_2 = \frac{a_1b_1c_2d_1 + a_2b_2c_2d_2}{c_2d_1 - c_1d_2}$; $m_3 = a_2b_1$. **29.** $KZ : ZM = ab(c + d) : cd(a + b)$. **30.** $\frac{1}{n+1}$. **31.** $\frac{a^2}{b^2}$. **35.** $\frac{1}{a-b+c}$. **37.** a/P, b/P, c/P, где a, b, c — длины сторон, P — периметр. **38.** Для вневписанной окружности, касающейся стороны длиной a, барицентрические координаты пропорциональны $(-a)$, b, c. **44.** $\sum A_iA_j^2x_ix_j = 0$. **46.** Для центра вписанной сферы $x_i = S_i/S$, где S — площадь полной поверхности. Для центра вневписанной сферы соответствующая координата меняет знак и осуществляется перенормировка координат.

Решения

1. Будем рассматривать радиус-векторы интересующих нас точек относительно фиксированной точки O. Пусть $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ и $\boldsymbol{r_i} = \overrightarrow{OM_i}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\sum m_i \overrightarrow{MA_i} = \sum m_i(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{r} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r_i}}{\sum m_i}.$$

Таким образом, при ненулевой суммарной массе материальных точек радиус-вектор точки M существует и определяется однозначно системой м. т.

2. Утверждение непосредственно извлекается из решения предыдущей задачи.

3. В равенстве (2) группировка масс сводится к замене слагаемых, отвечающих группируемым массам, их суммой (как слева от знака равенства, так и справа).

4. Пусть $ABCD$ — заданный четырёхугольник, E, F, G, H, K, N — соответственно середины отрезков AB, BC, CD, DA, AC, BD. Разместим в точках A, B, C, D единичные массы и будем группировать их всеми возможными способами по две м. т. Если точка M — общий центр масс, то

$$M = c(1A, 1B, 1C, 1D) = c(2E, 2G) = c(2F, 2H) = c(2K, 2N).$$

Поскольку после группировки в точках E и G, F и H, K и N расположены равные массы, точка M будет серединой каждого из отрезков EG, FH и KN.

5. В решении предыдущей задачи никак не использовалось, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости. Поэтому оно применимо и к случаю, когда A, B, C, D — вершины тетраэдра.

6. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр, точка A_1 — центр грани BCD. Разместим в вершинах тетраэдра единичные массы. Тогда $1B + 1C + 1D = 3A_1$ и $M = c(1A, 1B, 1C, 1D) = c(1A, 3A_1)$. Значит центр масс делит высоту AA_1 в отношении $3 : 1$, считая от вершины A. Но то же верно и для других трёх высот!

7. Заметим, что $C_1 = c(1A, pB)$, а $B_1 = c(1A, qC)$. Тогда центр системы м. т. $(1A, pB, qC)$ одновременно принадлежит отрезкам AA_1 и BB_1. Это означает, что $M = c(1A, pB, qC)$. Отсюда $pB + qC = (p + q)A_1$ и $M = c(1A, (p + q)A_1)$.

8. При указанных преобразованиях не меняется положение центра масс. Если же две точки сохранились, а третья поменяла положение, то центр масс сдвинулся.

9. Введём обозначения для длин отрезков касательных: $x = AB' = AC'$, $y = BA' = BC'$, $z = CB' = CA'$. Пусть $M = c(yzA, zxB, xyC)$. Тогда $M = c(y(x + z)B', zxB) \in BB'$. Точно так же доказывается, что точка M принадлежит отрезкам AA' и CC'.

Замечание. Эта точка M называется точкой Жергона.

10. Пусть отрезки касательных к сфере, проведённые из вершин A, B, C и D равны соответственно a, b, c и d. Тогда для распределения масс $\left(\frac{1}{a}A, \frac{1}{b}B, \frac{1}{c}C, \frac{1}{d}D\right)$ получится, что центр масс концов каждого ребра тетраэдра расположен в точке касания этого ребра и сферы. Значит, центр масс принадлежит отрезку, соединяющему точки касания любой пары скрещивающихся рёбер.

11. Поместим в точку B произвольную массу $m_2 \neq 0$. Массы m_1 и m_3 определим из условий $N = c(m_2B, m_3C)$ и $M = c(m_1A, m_2B)$. Правило рычага диктует равенства $m_2 = 4m_3$ и $3m_1 = 5m_2$.

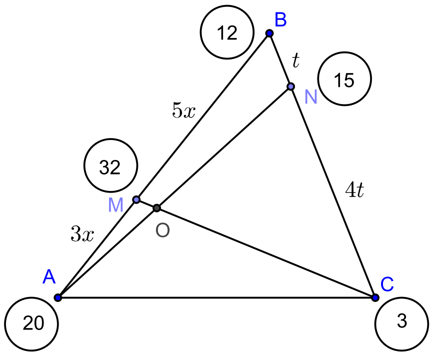


Рис. 1.

Удобно положить $m_2 = 12$. Тогда $m_3 = 3$, $m_1 = 20$. Теперь $O = c(20A, 15N)$, откуда $AO : ON = 15 : 20 = 3 : 4$. Одновременно имеем $O = c(3C, 32M)$. Значит, $CO : OM = 32 : 3$. На рис. 1 массы — числа в кружочках.

12. Разместим в вершинах треугольника такие массы, чтобы их центр масс располагался в точке O. Вот как этого достичь. Если окажется, что

$$B_1 = c(m_1A, m_3C), \tag{3}$$

то, заменив материальные точки m_1A и m_3C их центром масс, мы получим вместо исходных трёх две м. т. m_2B и $(m_1 + m_3)B_1$ с тем же центром масс, который должен лежать на прямой BB_1. Точно так же, если

$$c(m_2B, m_3C) = A_1, \tag{4}$$

то $c(m_1A, m_2B, m_3C) \in AA_1$. Поскольку $O = AA_1 \cap BB_1$, получим, что $O = c(m_1A, m_2B, m_3C)$. Условия (3) и (4), по правилу рычага, можно записать в виде

$$m_1a_1 = m_3a_2; \quad m_2b_1 = m_3b_2. \tag{5}$$

Ясно, что при умножении всех масс на одно и то же ненулевое число положение центра масс не меняется. Поэтому можно в качестве m_3 выбрать любое ненулевое число, после чего из равенств (5) две другие массы определятся однозначно. Удобно положить $m_3 = a_1b_1$. Тогда $m_1 = a_2b_1$ и $m_2 = a_1b_2$.

После того, как искомое распределение масс найдено, легко ответить на вопросы задачи. Поскольку $O = c(a_1b_2B, (a_2b_1 + a_1b_1)B_1)$, по правилу рычага имеем $BO : OB_1 = b_1(a_1 + a_2) : a_1b_2$. Аналогично находим, что $AO : OA_1 = a_1(b_1 + b_2) : a_2b_1$.

13. Разместим в вершинах треугольника такие массы, чтобы их центр масс был в точке F. Для этого необходимо и достаточно, чтобы центр масс, расположенных в точках A и B, был в точке E, а в точках C и B — в точке D. Поскольку $AE : EB = k$, масса в вершине B должна быть в k раз больше, чем в точке A. Так же получаем равенство масс в точках C и K. Итак, $F = c(1A, kB, kC) = c((1 + k)E, kC)$. Теперь из условия $CF : FE = k$, согласно правилу рычага, получаем $k^2 = k + 1$, откуда и находится k. Таким образом, ответом к задаче служит отношение золотого сечения.

14. Для того, чтобы вычислить искомую площадь, достаточно найти, в каком отношении точки K и N делят отрезки AE и AF, поскольку

$$S_{KEFN} = \left(1 - \frac{AK}{AE} \cdot \frac{AN}{AF}\right) S_{AEF}; \quad S_{AEF} = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

Заметим, что $N = c(1A, 2C, 1B) = c(1A, 3F)$. Отсюда $AN = \frac{3}{4}AF$. С другой стороны, $K = c(1A, 2C, 4B) = c(1A, 6E)$ и $AK = \frac{6}{7}AE$.

15. Заметим сначала, что $BO : OL = S_{BOA} : S_{OLA} = 6 : 5$ и $AO : OK = S_{AOB} : S_{KOB} = 6 : 7$. Подберём такие массы x, y и z, чтобы $O = c(xA, yB, zC)$. Необходимо и достаточно, чтобы $L = c(xA, zC)$ и $K = c(yB, zC)$. Поскольку $O = c(yB, (x+z)L)$ и $BO : OL = 6 : 5$, имеем $6y = 5(x+z)$. А из соотношений $O = c(xA, (y+z)K)$ и $AO : OK = 6 : 7$ получаем $6x = 7(y+z)$. Из найденных уравнений находим, что $x = 77z$ и $y = 65z$. Отсюда $CL = 77LA$, $S_{BCL} = 77S_{ALB}$, $S_{ABC} = 78S_{ALB} = 78 \cdot 11 = 858$.

16. Найдём такие массы, что $O = c(m_1A, m_2B, m_3C)$. Заметим, что $O \in AN \iff N = c(m_2B, m_3C)$. Значит, $m_2 = 2m_3$. Чтобы добиться попадания центра масс на отрезок KM, расщепим массу m_1 на две части m_1' и m_1'' так, что $M = c(m_1'A, m_2B)$ и $K = c(m_1'', m_3C)$. Отсюда $2m_1' = 3m_2$ и $2m_1'' = m_3$. Положим $m_3 = 2$. Тогда $m_2 = 4$, $m_1' = 6$, $m_1'' = 1$. Полученное распределение масс показано на рис. 2. Оно гарантирует попадание центра масс в O — точку пересечения AN и KM.

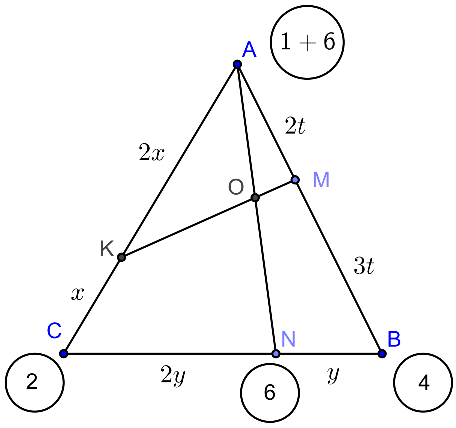


Рис. 2.

Имеем $O = c(7A, 6N)$. Значит, $AO : ON = 6 : 7$.

17. Повторим решение предыдущей задачи в общем виде.

Разместим в вершинах треугольника такие массы, чтобы их центр масс оказался в точке O. Массы в вершинах B и C выбираются из условия

$$A_1 = c(m_2B, m_3C). \tag{6}$$

Этим условием обеспечивается попадание центра масс на прямую AA_1. А вот для того, чтобы центр масс одновременно принадлежал и прямой B_1C_1, расщепим массу в вершине A, т. е. будем считать, что в данной вершине расположены такие две материальные точки $m_1'A$ и $m_1''A$, для которых в результате группировки

$$B_1 = c(m_1''A, m_3C); \quad C_1 = c(m_1'A, m_2B). \tag{7}$$

Из (6) и (7) с помощью правила рычага выводим равенства

$$m_2a_2 = m_3a_1; \quad m_1'c_2 = m_2c_1; \quad m_1''b_1 = m_3b_2.$$

Удобно взять $m_2 = a_1b_1c_2$. Тогда $m_3 = a_2b_1c_2$, $m_1' = a_1b_1c_1$, $m_1'' = a_2b_2c_2$. Поскольку

$$O = c((m_1' + m_1'')A_1, m_2B + m_3C) = c((a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)A, (a_1b_1c_2 + a_2b_1c_2)A_1),$$

получаем

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{(a_1 + a_2)b_1c_2}{a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2}.$$

Точно так же из группировки масс

$$O = c(m_1'A + m_2B, m_1''A + m_3C) = c((a_1b_1c_1 + a_1b_1c_2)C_1, (a_2b_2c_2A + a_2b_1c_2)B_1)$$

находим отношение

$$\frac{B_1O}{OC_1} = \frac{a_1b_1(c_1 + c_2)}{a_2c_2(b_1 + b_2)}.$$

18. Найдём сначала распределение масс (xA, yB, zC), центр которого будет в точке O (рис. 3).

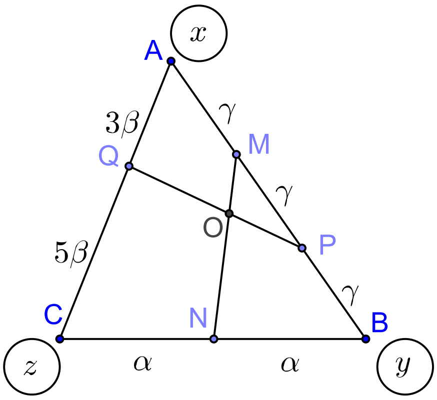


Рис. 3.

Расщепим массу в вершине A $(x = x_1 + x_2)$ так, чтобы $Q = c(x_1A, zC)$ и $P = c(x_2A, yB)$. По данному в условии отношению интересующих нас отрезков находим, что $x_1 = \frac{5}{3}z$ и $x_2 = \frac{1}{2}y$.

Теперь расщепим массу в вершине B $(y = y_1 + y_2)$ так, чтобы $M = c(y_1B, xA)$ и $N = c(y_2B, zC)$. Отсюда $y_1 = \frac{1}{2}x$ и $y_2 = z$. Имеем систему уравнений

$$x = \frac{5}{3}z + \frac{1}{2}y; \quad y = \frac{1}{2}x + z.$$

Пусть $z = 3$. Тогда $x = \frac{26}{3}$, $y = \frac{22}{3}$. Для нахождения отношения, в каком точка O делит MN, нам интересны массы, возникающие в результате группировок $y_1B + xA$ и $y_2B + zC$. Поскольку $y_1 = \frac{x}{2} = \frac{13}{3}$, а $y_2 = z = 3$, получаем

$$\frac{13}{3}B + \frac{26}{3}A = 13M; \quad 3B + 3C = 6N.$$

Таким образом, $O = c(13M, 6N)$. Значит, $MO : ON = 6 : 13$.

19. Пусть искомое распределение масс (xA, yB, zC).

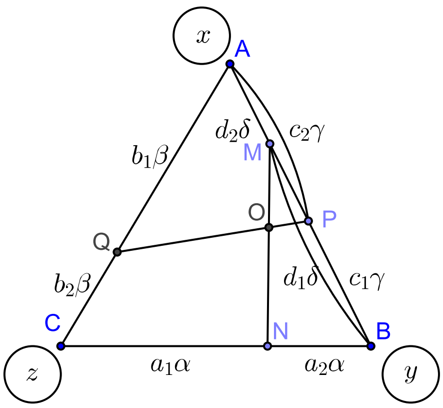


Рис. 4.

Расщепим массу $x = x_1 + x_2$ так, чтобы $P = c(x_1A, yB)$ и $Q = c(x_2A, zC)$. Для этого должны выполняться равенства $x_1c_2 = yc_1$ и $x_2b_1 = zb_2$. При этом общий центр масс попадёт на прямую PQ. А для попадания его на прямую MN будем расщеплять массу в вершине B:

$$y = y_1 + y_2; \quad c(y_1B, xA) = M; \quad c(y_2B, zC) = N; \quad y_1d_1 = xd_2; \quad y_2a_2 = za_1.$$

С учётом предыдущих соотношений получаем:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{c_1}{c_2}y + \frac{b_2}{b_1}z; \quad y = y_1 + y_2 = \frac{d_2}{d_1}x + \frac{a_1}{a_2}z.$$

Ничто не мешает нам взять $z = a_2b_1$ (ведь все массы, напомним, определяются с точностью до постоянного множителя). Тогда возникнет система двух линейных уравнений в двумя неизвестными:

$$x = \frac{c_1}{c_2}y + a_2b_2; \quad y = \frac{d_2}{d_1}x + a_1b_1. \tag{8}$$

Из условия задачи следует, что точки M и P не совпадают. Поэтому они делят сторону BA в разных отношениях: $\frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$. Легко проверить, что при этом система (8) имеет единственное решение

$$x = \frac{a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_1}{c_2d_1 - c_1d_2}; \quad y = \frac{a_1b_1c_2d_1 + a_2b_2c_2d_2}{c_2d_1 - c_1d_2}.$$

Замечание. Как показано в [2], для найденных масс справедливо следующее: $x + y + x = 0 \iff MN \parallel PQ$. Значит, условие задачи гарантирует, что суммарная масса будет ненулевой.

20. План доказательства очень простой: найдём такое распределение масс в вершинах треугольника, чтобы их центр принадлежал двум из указанных прямых, после чего убедимся, что он лежит и на третьей прямой.

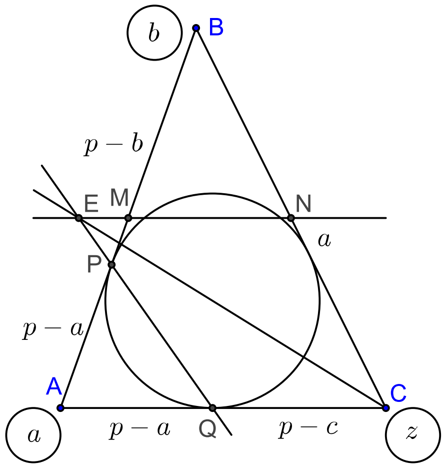


Рис. 5.

Пусть, как обычно, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Мы знаем, что биссектриса l угла C делит сторону AB в отношении $b : a$, считая от вершины A. Поэтому если поместить в вершину A массу a, а в вершину B массу b, то при любом z центр масс $c(aA, bB, zC)$ лежит на l. Чтобы этот центр лежал на прямой MN, где M и N — середины AB и AC, масса b должна допускать расщепление $b = a + z$, откуда $z = b - a$. Значит, если $E = l \cap MN$, то $E = c(aA, bB, (b - a)C)$.

Пусть P и Q — точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC (рис. 5). Как известно, $AP = AQ = p - a$, $BP = p - b$, $CP = p - c$, где p — полупериметр треугольника ABC. Чтобы центр масс E лежал на прямой PQ, масса a должна быть представима в виде такой суммы $a = a_1 + a_2$, что $c(a_1A, bB) = P$ и $c(a_2A, (b - a)C) = Q$. По правилу рычага имеем

$$a_2(p - a) = b(p - b); \quad a_1(p - a) = (b - a)(p - c).$$

Значит, должно выполняться равенство

$$a = \frac{p-b}{p-a} \cdot b + \frac{p-c}{p-a} \cdot (b-a).$$

И оно, как показывают простейшие выкладки, действительно выполняется.

Итак, намеченный план осуществлён. Утверждение доказано.

21. Пусть $O = CC_1 \cap AA_1$. Разместим в вершинах треугольника ABC такие массы, что их центр масс окажется в точке O. Обозначим $a_1 = AB_1$, $a_2 = B_1C$, $b_1 = BC_1$, $b_2 = C_1A$, $c_1 = AB_1$, $c_2 = B_1C$. Легко проверить, что подходящими будет распределение масс $(a_1b_1A, a_1b_2B, a_2b_2C)$ (рис. 6).

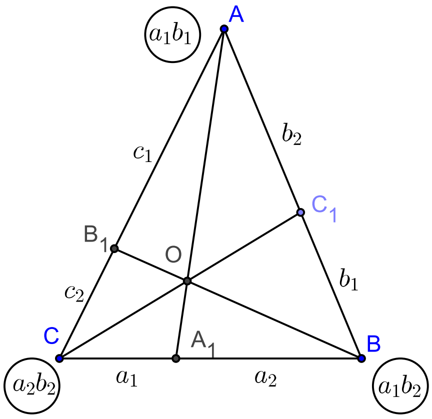


Рис. 6.

Если выполнено равенство

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1, \tag{9}$$

то $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$ и $c(a_1b_1A, a_2b_2C) = B_1$. Но тогда центр масс O должен лежать на прямой BB_1, другими словами, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Обратно, если прямая BB_1 проходит через точку O, то $B_1 = c(a_1b_1A, a_2b_2C)$, что вновь даёт равенство $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$, равносильное (9).

22. Если массу z можно расщепить на массы z_1 и z_2 так, что $c(z_1C, xA) = B_1$ и $c(z_2C, yB) = A_1$, то $c(xA, yB, zC) \in A_1B_1$.

Верно и обратное. Пусть $D = c(xA, yB, zC) \in A_1B_1$. Тогда найдутся такие массы m' и m'', что $D = c(m'A_1, m''B_1)$ и $m' + m'' = x + y + z$. Теперь по x и y определим массы z_1 и z_2, такие что $c(z_1C, xA) = B_1$ и $c(z_2C, yB) = A_1$. При этом $z_1 + x = m''$, $z_2 + y = m'$, откуда с учётом предыдущего выводим, что $z = z_1 + z_2$.

Итак, центр системы материальных точек (xA, yB, zC) принадлежит прямой A_1B_1 тогда и только тогда, когда существует расщепление масс $z = z_1 + z_2$, для которого $c(z_1C, xA) = B_1$ и $c(z_2C, yB) = A_1$, или

$$z_1\overrightarrow{B_1C} + x\overrightarrow{B_1A} = \mathbf{0}; \quad z_2\overrightarrow{A_1C} + y\overrightarrow{A_1B} = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Если вспомнить соотношения $\overrightarrow{AB_1} = \beta\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{CA_1} = \alpha\overrightarrow{A_1B}$, получим, что условия (10) можно записать в виде $z_1 = \alpha x$ и $z_2 = \frac{y}{\beta}$. Итог проведённых выкладок:

$$c(xA, yB, zC) \in A_1B_1 \iff z = \alpha x + \frac{y}{\beta}. \tag{11}$$

Аналогично получается утверждение:

$$c(xA, yB, zC) \in B_1C_1 \iff x = \gamma y + \frac{z}{\alpha}. \tag{12}$$

Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда совпадают прямые A_1B_1 и B_1C_1, то есть, согласно (11)–(12), когда одновременно выполняются равенства

$$z = \alpha x + \frac{y}{\beta}; \quad x = \gamma y + \frac{z}{\alpha}.$$

Отсюда $z = \alpha(\gamma y + \frac{z}{\alpha}) + \frac{y}{\beta} = \alpha\gamma y + z + \frac{y}{\beta}$, что означает $\alpha\gamma + \frac{1}{\beta} = 0$, или $\alpha\beta\gamma = -1$, что и требовалось доказать.

23. Пусть M — точка пересечения чевиан AA_1, BB_1 и CC_1 и числа m_1, m_2, m_3 выбраны так, что $M = c(m_1A, m_2B, m_3C)$. Пусть также A_2, B_2, C_2 — соответственно середины сторон BC, CA, AB, а A_3, B_3, C_3 — середины соответствующих чевиан. Положим $O = c(m_1(m_2 + m_3)A, m_2(m_1 + m_3)B, m_3(m_1 + m_2)C)$. Заметим, что

$$m_1(m_2 + m_3)A + m_2(m_1 + m_3)B + m_3(m_1 + m_2)C =$$

$$= m_1(m_2 + m_3)A + m_1(m_2B + m_3C) + m_2m_3(1B + 1C) =$$

$$= m_1(m_2 + m_3)A + m_1(m_2 + m_3)A_1 + 2m_2m_3A_2 =$$

$$= 2m_1(m_2 + m_3)A_3 + 2m_2m_3A_2.$$

Значит, точка O лежит на прямой A_2A_3. Аналогично доказывается, что O лежит и на прямых B_2B_3 и C_2C_3.

24. Поместим в точки A и C единичные массы, а в точки B и N такие массы x и y, что $Q = c(1A, xB)$ и $M = c(xB, yN)$ (рис. 7).

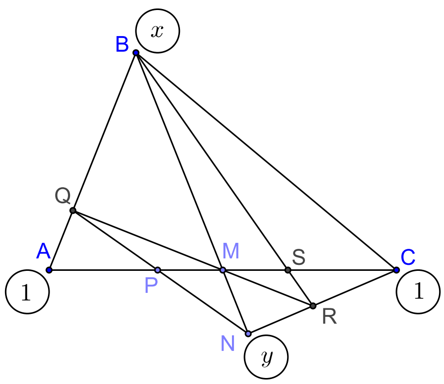


Рис. 7.

Поскольку также $M = c(1A, 1C)$, имеем теперь

$$M = c(1A, xB, 1C, yN) = c((1 + x)Q, 1C, yN).$$

Отсюда $R = c(1C, yN)$. По-разному группируя массы в точках A, B и N, получаем

$$c(1A, xB, yN) = c((1 + x)Q, yN) \in QN, \quad c(1A, xB, yN) = c(1A, (x + y)M) \in AM,$$

откуда $c(1A, xB, yN) = QN \cap AM = P$. А разные способы группировки масс $(1C, xB, yN)$ приводят к соотношениям

$$c(1C, xB, yN) = c((1 + y)R, xB) \in BR, \quad c(1C, xB, yN) = c(1C, (x + y)M) \in CM,$$

откуда $c(1C, xB, yN) = BR \cap CM = S$. Наконец, по-разному будем группировать массы $(1A, 1C, 2xB, 2yN)$. С одной стороны, $M = c(1A, 1C)$ и $M = c(2xB, 2yN)$, откуда $M = c(1A, 1C, 2xB, 2yN)$. С другой стороны, $1A + xB + yN = (1 + x + y)P$ и $1C + xB + yN = (1 + x + y)S$. Значит, $M = c\big((1 + x + y)P,$

$(1+x+y)S)$. Получилось, что центр двух одинаковых масс в точках P и S расположен в точке M. Поэтому M — середина отрезка PS.

25. Пусть $O = c(m_1A, m_2B, m_3C, m_4D)$, причём $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1$. Очевидно, что при этом точки A_1, B_1, C_1, D_1 должны быть центрами масс граней тетраэдра, в которых они лежат. Например,

$$m_2B + m_3C + m_4D = (m_2 + m_3 + m_4)A_1 = (1 - m_1)A_1.$$

Поскольку $O = c(m_1A, (1 - m_1)A_1)$, по правилу рычага имеем

$$m_1 \cdot AO = (1 - m_1) \cdot OA_1,$$

или $m_1 \cdot AO = (1 - m_1) \cdot (AA_1 - AO)$, откуда $\frac{AO}{AA_1} = 1 - m_1$. Сложив это и три аналогичных ему равенства, имеем

$$\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} + \frac{DO}{DD_1} = 1 - m_1 + 1 - m_2 + 1 - m_3 + 1 - m_4 = 4 - 1 = 3.$$

26. Из соотношений $c(1A, \alpha B) = K, \quad c(\beta D, \alpha\beta C) = M$ следует, что

$$c(1A, \alpha B, \alpha\beta C, \beta D) \in KM.$$

Аналогично, $c(1A, \alpha B, \alpha\beta C, \beta D) \in LN$. Значит,

$$O = c(1A, \alpha B, \alpha\beta C, \beta D) = c((1+\alpha)K, \beta(1+\alpha)M) = c((1+\beta)N, \alpha(1+\beta)L).$$

Отсюда $KO : OM = \beta$, $NO : OL = \alpha$.

27. В решении предыдущей задачи никак не использовалось, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости. Поэтому оно применимо и к случаю, когда A, B, C, D — вершины тетраэдра.

28. Доказательство от противного. Пусть O — точка тетраэдра, не покрытая шарами. Тогда все рёбра тетраэдра видны из этой точки под острыми углами. Обозначим через $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$, $\boldsymbol{r_3}$, $\boldsymbol{r_4}$ векторы, идущие от точки O к вершинам тетраэдра. Попарные углы между этими векторами острые; стало быть, попарные скалярные произведения векторов положительны. Разместим в вершинах тетраэдра такие (положительные) массы m_1, m_2, m_3, m_4, чтобы точка O стала центром масс. Тогда $\quad m_1\boldsymbol{r_1} + m_2\boldsymbol{r_2} + m_3\boldsymbol{r_3} + m_4\boldsymbol{r_4} = \boldsymbol{0}$. Умножение обеих частей полученного векторного равенства скалярно на вектор $\boldsymbol{r_1}$ приводит к противоречию (левая часть положительна, а правая равна нулю).

29. Поместим в каждую вершину массу, обратную по величине соответствующему отрезку касательной к окружности. Тогда

$$Z = c\left(\frac{1}{a}A, \frac{1}{b}B, \frac{1}{c}C, \frac{1}{d}D\right) = \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)K, \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)M\right).$$

Отсюда

$$\frac{KZ}{ZM} = \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab(c+d)}{cd(a+b)}.$$

30. Пусть прямая из условия задачи пересекает сторону AB в точке K, а диагональ AC — в точке N. Пусть также O — центр параллелограмма. Заметим, что $N = c((n-1)A, 1B, 1D) = c((n-1)A, 2O)$. Отсюда $AN : AO = 2 : (n+1)$ и $AN : AC = 1 : (n+1)$.

31. Обозначим $MD = x$, $MA = z$, $MB = y$, $MC = t$. Из подобия треугольников ADM и BCM имеем $x : t = z : y = a : b$. Разумно найти такое распределение масс в вершинах четырёхугольника, чтобы его центр масс был в точке M и при этом массы в точках C и D были равны друг другу. Имеем $M = c(yzC, ytA) = c(yzD, xzB)$. Отсюда $K = c(ytA, xzB)$ и

$$\frac{AK}{KB} = \frac{xz}{yt} = \frac{x}{t}\cdot\frac{z}{y} = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}.$$

32. Пусть точки деления сторон $A_1, A_2, \ldots, D_3, D_4$ (рис. 8).

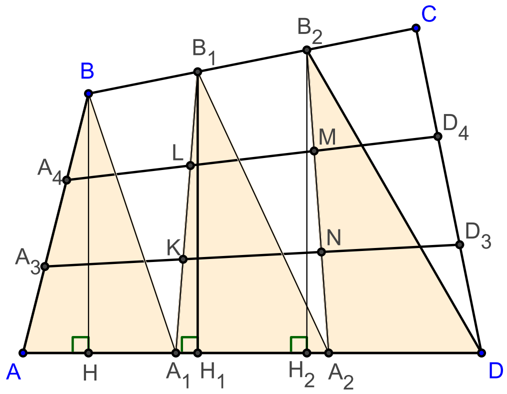


Рис. 8.

Сначала докажем, что $S_{A_1B_1B_2A_2} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$.

Пусть H, H_1, H_2 — основания перпендикуляров, опущенных из точек B, B_1 и B_2 на прямую AD. Тогда H_2HBB_2 — прямоугольная трапеция, а H_1B_1 — её средняя линия. Отсюда $B_1H_1 = \frac{1}{2}(BH + B_2H_2)$ и $S_{A_1B_1A_2} = \frac{1}{2}(S_{ABA_1} + S_{A_2B_2D})$. Так же и $S_{A_2B_1B_2} = \frac{1}{2}(S_{A_1BB_1} + S_{DB_2C})$. Сложив эти равенства, получим $S_{A_1B_1B_2A_2} = \frac{1}{2}(S_{ABB_1A_1} + S_{B_2CDA_2})$, что равносильно требуемому.

Из задачи 26 следует, что точки пересечения соответствующих отрезков K и L, N и M делят отрезки A_1B_1 и A_2B_2 на равные части. Поэтому

$$S_{KLMN} = \frac{1}{3}S_{A_1B_1B_2A_2} = \frac{1}{9}S_{ABCD}.$$

33. Пусть длины оснований трапеции $a = AD$, $b = BC$. Из подобия треугольников BOC и DOA имеем $O = c(aC, bA) = c(aB, bD)$. Отсюда

$$O = c(bA, aB, aC, bD) = c(2aM, 2bN) \in MN.$$

С другой стороны, $E = c(-aB, bA) = c(-aC, bD)$ и

$$E = c(bA, -aB, -aC, bD) = c(-2aM, 2bN) \in MN.$$

34. Обозначим $a = AP = AQ$, $b = BP = BT$, $c = CQ = CT$. Тогда $AB = a - b$, $AC = a - c$. Нетрудно найти распределение масс в точках A, P, Q, центр которого будет в точке M. Имеем $c(bcA, c(a-b)P) = B$, $c(bcA, b(a-c)Q) = C$. Поэтому $c(bcA, c(a-b)P, b(a-c)Q) = QB \cap PC = M$. При этом $bcA + c(a-b)P + b(a-c)Q = (ab+ac-bc)M$. С другой стороны, $bcA + c(a-b)P = acB$, $bcA + b(a-c)Q = abC$, $acB + abC = a(b+c)T$. Поэтому, по-разному группируя массы, имеем

$$2bcA + c(a-b)P + b(a-c)Q = bcA + (ab+ac-bc)M = a(b+c)T.$$

Получилось, что центр некоторых (положительных) масс в точках A и M расположен в точке T. Это и означает, что точка T лежит на отрезке AM.

35. По условию,

$$1A + (a-1)S = aA_1; \quad 1B + (b-1)S = bB_1; \quad 1C + (c-1)S = cC_1.$$

Кроме того, поскольку $ABCD$ — параллелограмм, $1A + (-1)B + 1C = 1D$. Пусть $M = c(aA_1, -bB_1, cC_1)$. Тогда $M \in \alpha$. С другой стороны,

$$(a-b+c)M = 1A + (a-1)S - (1B + (b-1)S) + 1C + (c-1)S =$$

$$= (1A - 1B + 1C) + (a-b+c-1)S = 1D + (a-b+c-1)S.$$

Значит, точка M лежит на прямой DS. Получается, что $M = \alpha \cap DS = D_1$. Поскольку $D_1 = c(1D, (a-b+c-1)S)$, справедливо равенство $\dfrac{SD_1}{D_1D} = \dfrac{1}{a-b+c-1}$, откуда $\dfrac{SD_1}{SD} = \dfrac{1}{a-b+c}$.

36. Пусть $A_1A_2A_3$ — данный треугольник. Рассмотрим точку

$$M = c\left(-\frac{1}{r}I, \frac{1}{r_1}I_1, \frac{1}{r_2}I_2, \frac{1}{r_3}I_3\right),$$

где I и r — центр и радиус вписанной окружности, I_i и r_i — центр и радиус окружности, вписанной в i-й угол треугольника ($i = 1, 2, 3$). Обозначим через B_i точку касания окружностей, вписанных в углы, отличные от i-го угла. Тогда, например, $B_1 = c\left(\frac{1}{r_2}I_2, \frac{1}{r_3}I_3\right)$. Несложно вывести, что $A_1 = c\left(-\frac{1}{r_1}I_1, \frac{1}{r}I\right)$. Значит, M — центр двух масс, сосредоточенных в точках A_1 и B_1. Следовательно, $M \in A_1B_1$. Точно так же доказывается, что точка M принадлежит прямым A_2B_2 и A_3B_3.

37. Пусть ABC — данный треугольник с длинами сторон $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Центр вписанной окружности I лежит на биссектрисе AA_1. Поэтому если $I = c(xA, yB, zC)$, то $A_1 = c(yB, zC)$. По теореме о биссектрисе получаем $y : z = b : c$. Аналогичное рассуждение для другой биссектрисы приводит к пропорции $x : y = a : b$. Таким образом, барицентрические координаты центра вписанной окружности пропорциональны длинам сторон треугольника.

38. Пусть I и I_1 — соответственно центры вписанной окружности и вневписанной, касающейся стороны BC; а r и r_1 — радиусы этих окружностей. Хорошо известно, что $\frac{r}{r_1} = \dfrac{b+c-a}{a+b+c}$, где $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Как мы уже знаем, $I = c(aA, bB, cC)$, откуда

$$(a+b+c)\overrightarrow{AI} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}.$$

Поскольку точка I_1 лежит на биссектрисе угла A, существует такое число x, что $I_1 = c(xA, bB, cC)$. При этом

$$(x+b+c)\overrightarrow{AI_1} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}.$$

Значит,

$$(a+b+c)\overrightarrow{AI} = (x+b+c)\overrightarrow{AI_1}. \tag{13}$$

Если опустить из точек I и I_1 перпендикуляры на прямую AB, получим подобные прямоугольные треугольники, откуда $AI : AI_1 = r : r_1$, т.е. $r_1\overrightarrow{AI} = r\overrightarrow{AI_1}$, или (учитывая выражение для отношения радиусов $\frac{r_1}{r}$)

$$(a+b+c)\overrightarrow{AI} = (b+c-a)\overrightarrow{AI_1}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что $x = -a$.

39. Пусть O — точка пересечения чевиан AA', BB', CC'. Заметим, что

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OBC}} = \frac{S_{B'AB}}{S_{B'BC}} = \frac{d_A}{d_C} = \frac{AB'}{B'C},$$

где d_A и d_C — длины перпендикуляров, опущенных из точек A и C на прямую BB'. Если $O = c(xA, yB, zC)$, то $B' = c(xA, zC)$. Отсюда $x : z = B'C : AB' = S_{OBC} : S_{OAB}$. Аналогичное рассуждение для другой чевианы приводит к пропорции

$$x : y = S_{OBC} : S_{OCA}.$$

40. Рассмотрим сначала точки вида $M(x_1, x_2, x_3)$, барицентрические координаты которых удовлетворяют уравнению $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. Хотя бы два коэффициента при неизвестных не равны друг другу. Пусть $b \neq c$. Тогда, учитывая, что $x_3 = 1 - x_1 - x_2$, получим уравнение

$$(a-c)x_1 + (b-c)x_2 + c = 0,$$

из которого выводим линейную зависимость x_2 от x_1:

$$x_2 = l_1x_1 + m_1.$$

Имеем также $x_3 = 1-x_1-x_2 = l_2x_1+m_2$. Условие $M = c(x_1A, x_2B, x_3C)$ равносильно векторному равенству

$$\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{OA} + x_2\overrightarrow{OB} + x_3\overrightarrow{OC}.$$

С учётом найденных соотношений,

$$\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{OA} + (l_1x_1 + m_1)\overrightarrow{OB} + (l_2x_1 + m_2)\overrightarrow{OC} = x_1\boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{s},$$

где $\boldsymbol{r_0}$ и $\boldsymbol{s}$ — некоторые фиксированные векторы. Получили запись уравнения прямой в векторном виде.

Обратно. Найдётся вершина, через которую не проходит заданная прямая l. Пусть это точка A, а l пересекает прямые AB и AC в двух разных точках K и N. Если $M \in l$, то для некоторых масс z_1 и z_2 справедливо $M = c(z_1K, z_2N)$. По z_1 и z_2 однозначно определяются массы x_1', x_2, x_1'', x_3, для которых $z_1K = x_2B + x_1'A$ и $z_2N = x_3C + x_1''A$, причём $x_1' = k_1x_2$, $x_1'' = k_2x_3$, где коэффиценты k_1 и k_2 определяются отношениями, в которых точки K и N делят соответственно отрезки AB и AC. Полезно заметить, что $k_1 \neq -1$ и $k_2 \neq -1$, Значит, $M = c((x_1'+x_2'')A, x_2B, x_3C)$ и $x_1 = x_1' + x_1'' = k_1x_2 + k_2x_3$, т. е. барицентрические координаты точки связаны линейным однородным уравнением

$$x_1 - k_1x_2 - k_2x_3 = 0,$$

в котором коэффицент при x_1 отличен, например, от коэффициента при x_2.

41. Будем рассматривать барицентрические координаты точек относительно базисного треугольника ABC. Запись $M(x_1, x_2, x_3)$ будет означать, что $M = c(x_1A, x_2B, x_3C)$ и $x_1+x_2+x_3 = 1$. Имеем следующие координаты точек из условия задачи:

$$A(1,0,0),\ B(0,1,0),\ C(0,0,1),\ B_1\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),\ I\left(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p}\right),\ D\left(\frac{p-c}{b}, 0, \frac{p-a}{b}\right),$$

где, как обычно, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Уравнение прямой BD:

$$(p-a)x_1 = (p-c)x_3. \tag{15}$$

Пусть $\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3 = 0$ — уравнение прямой B_1I. Определим коэффициенты при неизвестных. Подставив в указанное уравнение координаты точек B_1 и I, получим

$$\alpha + \gamma = 0; \quad \alpha a + \beta b + \gamma c = 0.$$

Отсюда $\alpha(a-c) + \beta b = 0$ и можно положить $\alpha = b$, $\beta = c - a$ и $\gamma = -b$. Итак, уравнение прямой B_1I:

$$bx_1 + (c-a)x_2 - bx_3 = 0. \tag{16}$$

Кроме того,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \tag{17}$$

Решив систему трёх линейных уравнений (15)–(17) с тремя неизвестными, найдём барицентрические координаты точки пересечения прямых BD и B_1I: $x_1 = \dfrac{p-c}{2b}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{p-a}{2b}$. Равенство $x_2 = \dfrac{1}{2}$ и говорит о том, что эта точка делит пополам отрезок BD.

42. Введём векторы $\boldsymbol{r_1} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{r_2} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{r_3} = \overrightarrow{OC}$, где O — центр описанной окружности. Заметим, что длины этих векторов равны R — радиусу окружности. Выразим через барицентрические координаты x_1, x_2, x_3 точки M и стороны треугольника расстояние от M до центра окружности. Для этого части векторного равенства $\overrightarrow{OM} = x_1\boldsymbol{r_1}+x_2\boldsymbol{r_2}+x_3\boldsymbol{r_3}$ возведём в квадрат:

$$\overrightarrow{OM}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)R^2 + 2x_1x_2\boldsymbol{r_1}\cdot\boldsymbol{r_2} + 2x_2x_3\boldsymbol{r_2}\cdot\boldsymbol{r_3} + 2x_3x_1\boldsymbol{r_3}\cdot\boldsymbol{r_1}.$$

Заметим, что

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 1 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1).$$

Поэтому

$$\overrightarrow{OM}^2 = R^2 - (2R^2 - 2\boldsymbol{r_1}\cdot\boldsymbol{r_2})x_1x_2 - (2R^2 - 2\boldsymbol{r_2}\cdot\boldsymbol{r_3})x_2x_3 - (2R^2 - 2\boldsymbol{r_3}\cdot\boldsymbol{r_1})x_2x_3. \qquad (18)$$

Между тем, $c = |\overrightarrow{AB}| = |\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|$, откуда $c^2 = (\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1})^2 = 2R^2 - 2\boldsymbol{r_2}\cdot\boldsymbol{r_1}$. Аналогично получаются равенства $a^2 = 2R^2 - 2\boldsymbol{r_3}\cdot\boldsymbol{r_2}$ и $b^2 = 2R^2 - 2\boldsymbol{r_1}\cdot\boldsymbol{r_3}$. Теперь (18) можно переписать в виде

$$OM^2 = R^2 - (c^2x_1x_2 + a^2x_2x_3 + b^2x_3x_1).$$

Значит, точка $M(x_1, x_2, x_3)$ принадлежит описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда

$$c^2x_1x_2 + a^2x_2x_3 + b^2x_3x_1 = 0.$$

43. Уравнение окружности, описанной вокруг треугольника, в барицентрических координатах имеет вид

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0. \qquad (19)$$

Пусть $O = B_2C_1 \cap A_1C_2$ (рис. 9).

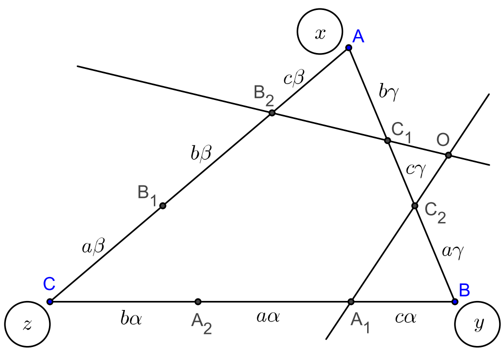


Рис. 9.

Расщепим массу $x = x_1 + x_2$ так, что $c(x_1A, yB) = C_1$ и $c(x_2A, zC) = B_2$, а массу $y = y_1 + y_2$ так, что $c(y_1B, xA) = C_2$ и $c(y_2B, zC) = A_1$. Этим будет гарантировано, что точка O одновременно принадлежит прямым B_2C_1 и A_1C_2. Используя правило рычага, имеем:

$$x = \frac{a+b}{c}z + \frac{a+c}{b}y; \quad y = \frac{a+b}{c}z + \frac{b+c}{a}x. \qquad (20)$$

Если взять $z = c^2$, то, решив систему (20), получим $x = -a(a+b)$, $y = -b(a+b)$. Непосредственная подстановка найденных значений x, y и z в (19) показывает, что (19) действительно выполняется.

Ситуация для двух других пар прямых аналогична, поскольку прямые переходят друг в друга в результате циклической перестановки вершин.

44. Повторяя выкладки из решения задачи 42, получим выражение для квадрата расстояния от точки $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до центра описанной сферы:

$$OM^2 = R^2 - \sum_{i<j} A_iA_j^2 x_i x_j,$$

где O — центр сферы, R — её радиус. Значит, уравнение описанной сферы таково:

$$\sum_{i<j} A_iA_j^2 x_i x_j = 0.$$

45. Для любой точки O выполняется векторное равенство $\overrightarrow{OM} = \sum\limits_{i=1}^{4} x_i \overrightarrow{OA_i}$. Если взять в качестве O точку A_4, получим, что

$$\overrightarrow{A_4M} = \sum_{i=1}^{3} x_i \overrightarrow{A_4A_i}.$$

Умножим скалярно обе части равенства на вектор $\overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3}$:

$$(\overrightarrow{A_4M}, \overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4A_3}) = x_1(\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4A_3}).$$

Отсюда $x_1 = \frac{V_{MA_2A_3A_4}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}$. Аналогично выводятся формулы для x_2, x_3, x_4.

46. Рассмотрим тетраэдры $OBCD$, $AOCD$, $ABOD$ и $ABCO$, где O — центр вписанной сферы. Во-первых, ориентированный объём любого из них имеет тот же знак, что и ориентированный объём тетраэдра $ABCD$ (здесь важно лишь то, что точка O внутри тетраэдра). Во-вторых, высоты этих тетраэдров, проведённые из точки O, равны радиусу вписанной сферы. Поэтому отношение объёмов, значит, и барицентрических координат равно отношению площадей соответствующих граней.

Пусть теперь O_1 — центр вневписанной сферы, касающейся грани BCD. Тогда ориентированный объём тетраэдра O_1BCD отличается по знаку от чисел V_{AO_1CD}, V_{ABO_1D} и V_{ABCO_1}. Учитывая также равенство высот, проведённых в указанных тетраэдрах из точки O_1, получим $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -S_1 : S_2 : S_3 : S_4$. Аналогичные результаты — для трёх других центров вневписанных сфер.

47. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — данный тетраэдр, а Q — описанная вокруг него сфера. Для каждого ребра A_iA_j обозначим его длину через a_{ij}. Для каждой вершины A_i пусть S_i — площадь противоположной грани, а O_i — центр вневписанной сферы, касающейся этой грани. Если точка $O_k(x_1, x_2, x_2, x_4)$ лежит внутри Q, то, как показывает решение задачи 44, $\sum\limits_{i<j} x_i x_j a_{ij}^2 > 0$. Для O_1 имеем $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -S_1 : S_2 : S_3 : S_4$, поэтому предыдущее неравенство можно переписать в виде

$$-S_1S_2a_{12}^2 - S_1S_3a_{13}^2 - S_1S_4a_{14}^2 + S_2S_3a_{23}^2 + S_2S_4a_{24}^2 + S_3S_4a_{34}^2 > 0. \tag{21}$$

Если O_2, O_3 и O_4 также лежат внутри Q, то имеют место ещё три неравенства, аналогичные (21). Сложим все четыре неравенства. Несложно видеть, что для любых i и j слагаемое $S_iS_ja_{ij}^2$ встретится два раза с плюсом и два раза с минусом. Значит, получим $0 > 0$ — противоречие. К противоречию придём и в случае, когда нет точек O_i вне описанной сферы и хотя бы одна из них лежит внутри этой сферы. Аналогичные рассуждения проводятся относительно возможности расположения центров вневписанных сфер вне Q (во всех неравенствах знак $>$ меняется на знак $<$). Таким образом, если не все точки O_i лежат на Q, то хотя бы одна из них лежит внутри Q и хотя бы одна снаружи.

48. В обозначениях решения предыдущей задачи имеем для равногранного тетраэдра $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$, $a_{12} = a_{34}$, $a_{13} = a_{24}$, $a_{14} = a_{23}$. Отсюда левая часть неравенства (21) равна нулю, что говорит о принадлежности точки O_1 сфере Q. Аналогично обстоит дело и с остальными точками O_i.

Замечание. Имеет место и обратное утверждение: если центры вневписанных сфер лежат на описанной сфере, то тетраэдр равногранный. Доказательство можно найти в [10].

49. Пусть $\boldsymbol{s}$ — сумма данных векторов. Если повернуть все векторы на 90° против часовой стрелки, то их можно расположить на сторонах многоугольника, из чего видно, что вектор $\boldsymbol{s}$, повёрнутый на 90°, равен нулевому вектору. Значит, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$.

50. Обозначим вершины четырёхугольника, точки касания, середины диагоналей и центр вписанной окружности так, как показано на рис. 10.

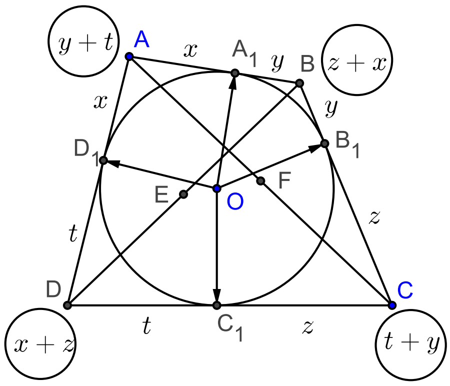


Рис. 10.

На этом рисунке также указаны длины отрезков касательных и массы, которые удобно разместить в вершинах. Покажем, что при этом центр масс окажется в точке O. Действительно,

$$(y+t)A + (z+x)B + (t+y)C + (x+z)D = (yA + xB) + (zB + yC) + (tC + zD) + (xD + tA) =$$

$$= (x+y)A_1 + (y+z)B_1 + (z+t)C_1 + (t+x)D_1,$$

но по теореме о плоском еже

$$(x+y)\overrightarrow{OA_1} + (y+z)\overrightarrow{OB_1} + (z+t)\overrightarrow{OC_1} + (t+x)\overrightarrow{OD_1} = \boldsymbol{0}.$$

Значит, центр заданной системы материальных точек располагается в центре вписанной окружности. Заметим также, что $E = c((x+z)B, (x+z)D)$; $F = c((y+t)A, (y+t)C)$, откуда

$$O = c(2(x+z)E, 2(y+t)F) \in EF.$$

Замечание. Совсем другое решение приводится в [1], с. 39.

51. С физической точки зрения, утверждение теоремы довольно очевидно: сумма векторов пропорциональна силе, с которой газ, находящийся внутри полого многогранника, действует на его поверхность. Приведём, тем не менее, два способа доказать эту теорему не прибегая к физической аргументации.

1-й способ. Докажем сначала теорему для тетраэдра. Для тетраэдра $ABCD$ рассмотрим векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{DA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{DB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{DC}$. Тогда векторные произведения $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ перпендикулярны граням тетраэдра, одинаково ориентированы относительно него (например, направлены вовне тетраэдра), а по величине равны удвоенным площадям соответствующих граней. Используя свойства векторного произведения, легко убедиться в том, что

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}.$$

Рассмотрим теперь произвольный выпуклый многогранник. Если взять точку внутри него и соединить её с вершинами, получим разбиение многогранника на пирамиды. А пирамиду легко разбить на тетраэдры. Таким образом, многогранник разбивается на тетраэдры. Применим уже доказанное утверждение к каждому из тетраэдров разбиения и сложим полученные векторные равенства. Ясно, что векторы, соответствующие перегородкам (граням тетраэдров, лежащим внутри исходного многогранника), при сложении взаимно уничтожаются. Векторы, соответствующие внешним граням, при сложении дадут векторы, перпендикулярные граням и численно равные их площадям, а сумма этих векторов равна нулю.

2-й способ. Пусть Q — данный выпуклый многогранник, V — его объём. Пусть также для каждого i в i-й грани зафиксирована точка M_i, $\boldsymbol{n_i}$ — единичный вектор, перпендикулярный i-й грани и направленный вовне многогранника, S_i — площадь i-й грани. Обозначим $\boldsymbol{s} = \sum S_i\boldsymbol{n_i}$.

Растояние от произвольной точки X внутри Q до его i-й грани можно найти как скалярное произведение векторов $\overrightarrow{XM_i} \cdot \boldsymbol{n_i}$. Соединив точку X с вершинами многогранника, разобьём его на пирамиды. Объём пирамиды, основанием которого служит i-я грань, равен $\frac{1}{3}S_i\overrightarrow{XM_i} \cdot \boldsymbol{n_i}$. Поэтому

$$3V = \sum S_i\overrightarrow{XM_i} \cdot \boldsymbol{n_i} = \sum S_i(\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YM_i}) \cdot \boldsymbol{n_i} =$$

$$= \overrightarrow{XY} \cdot \sum S_i\boldsymbol{n_i} + \sum S_i\overrightarrow{YM_i} \cdot \boldsymbol{n_i} = \overrightarrow{XY} \cdot \boldsymbol{s} + 3V,$$

где X и Y — произвольные точки внутри Q. Отсюда $\overrightarrow{XY} \cdot \boldsymbol{s} = 0$. Если $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$, выбором отличных друг от друга точек X и Y можно добиться коллинеарности векторов $\overrightarrow{XY}$ и $\boldsymbol{s}$, что противоречит равенству $\overrightarrow{XY} \cdot \boldsymbol{s} = 0$.

Замечание. Другие доказательства можно найти в [10] и [12].

52. Пусть точка O — центр вписанной сферы. Рассмотрим две смежные грани. Пусть их общее ребро — AB, а K и M — точки касания этих граней и сферы. Тогда $AK = AM$, $BK = BM$ (отрезки касательных, проведённых от точки к сфере до точек касания, равны между собой). Значит, треугольники ABK и ABM — равные (по трём сторонам).

Для каждой грани соединим отрезками точку касания этой грани и вписанной сферы с вершинами грани. Грани будут разбиты на треугольники. При этом, как показано выше, треугольники, у которых ребро многогранника является общей стороной, равны. Значит, в качестве числа, приписанного ребру, можно взять площадь примыкающего к нему треугольника.

53. Для каждой грани соединим точку касания с вершинами грани, при этом грань разобьётся на три треугольника, будем называть их *маленькими*. Поместим в каждую вершину четыре массы, равные соответственно площадям четырёх маленьких треугольников, противолежащих данной вершине, в гранях, выходящих из данной вершины. Если группировать массы, отвечающие граням, то, согласно задаче 37, их центры масс расположатся в точках касания, причём новые массы будут равны площадям соответствующих граней. Это означает, по теореме о пространственном еже, что общий центр масс — в центре вписанной сферы.

С другой стороны, из решения предыдущей задачи мы знаем, что площади двух маленьких треугольников, примыкающих к одному ребру многогранника в смежных гранях, равны. Значит, в противоположных вершинах многогранника сосредоточены одинаковые массы. Поэтому исходные 24 массы можно заменить тремя массами, расположенными в серединах отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2. Отсюда и следует, что точка O, где находится общий центр масс, принадлежит плоскости, проходящей через эти три точки.

Замечание. Обсудим, как можно было догадаться до приведённого выше решения. Естественно искать такое распределение масс в вершинах многогранника, для которого центр масс находится в центре вписанной сферы. Так будет, если (после группировки) в точках касания расположены массы, равные площадям граней. Каждую такую массу можно заменить тремя массами, равными площадям маленьких треугольников и расположенными в вершинах грани. Отсюда и получаются 24 массы, с которых начиналось изложенное решение. Разумеется, чтобы прийти к такому решению, нужно заранее знать фундаментальные факты, сформулированные в задачах 37 и 51 (и важный штрих решения — равенство маленьких треугольников, примыкающих к одному ребру).

Литература

[1] *Балк М.Б., Болтянский В.Г.* Геометрия масс. – М.: Наука, 1987. – 160 с.

[2] *Эвнин А.Ю.* Метод масс в геометрии треугольника // Математика в школе. – 2014. – № 8. – С. 59–67.

[3] *Шарыгин И.Ф.* Геометрия: 9–11 кл. — М.: Дрофа, 1996. – 400 с.

[4] *Эвнин А.Ю.* Практикум по математике. — Челябинск: Взгляд, 2009. – 256 с.

[5] *Эвнин А.Ю.* Математический конкурс в ЮУрГУ. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. – 86 с.

[6] *Эвнин А.Ю.* 150 красивых задач для будущих математиков. М.: КРАСАНД, 2014. – 224 с.

[7] *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: В 3 т. – Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. — М.: МЦНМО, 2006. – 256 с.

[8] *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: В 3 т. – Т. 3: Треугольники и тетраэдры. — М.: МЦНМО, 2009. – 192 с.

[9] *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии: Ч. 2. — М.: Наука, 1990. – 240 с.

[10] *Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф.* Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989. – 288 с.

[11] *Мякишев А.Г.* Элементы геометрии треугольника. — М.: МЦНМО, 2002. – 32 с.

[12] *Долбилин Н.* Теорема Минковского о многогранниках // Квант. – 2006. – № 4. – С. 2–8.

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики
Южно-Уральского государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

Об одном представлении выборочных распределений

В. В. Ивлев

Рассматривается проблема построения распределений положительной случайной величины по данным полученной выборки. Предлагается аналитическая форма представления в виде ряда Фурье по ортогональным многочленам Лагерра. Дается оптимальный метод определения параметров многочленов. Доказывается ряд свойств многочленов Лагерра.

1. Общие положения

В прикладных дисциплинах, таких как теория массового обслуживания, надежности, математическая статистика и других, важную роль играют непрерывные на $[0, \infty)$ случайные величины, имеющие показательное или гамма-распределение. Весовая функция ортогональных многочленов Лагерра с точностью до множителя соответствует гамма-распределению. Этим и объясняется выбор такого класса многочленов.

Напомним:

1. Обобщенные многочлены Лагерра $L_k^{(\alpha)}(x)$ порядка k степени α определяются формулой Родрига

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^\alpha}{k!} \frac{d^k}{dx^k}(x^{k+\alpha}e^{-x}). \tag{1}$$

Последовательное применение (1) дает

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{k} C_{k+\alpha}^{k-i} \frac{(-x)^i}{i!}, \quad \alpha > -1. \tag{2}$$

2. Условие ортогональности многочленов Лагерра имеет вид

$$\int_0^\infty \rho(x) \left[L_k^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx = \mathit{\Gamma}(\alpha+1) C_{k+\alpha}^{\alpha}, \quad \rho(x) = x^\alpha e^{-x}. \tag{3}$$

3. Пусть некоторая плотность $f(x)$ представлена рядом Фурье по многочленам Лагерра:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k^{(\alpha)}(x) \tag{4}$$

Тогда

$$a_k = \frac{\int_0^\infty \rho(x) f(x) L_k^{(\alpha)}(x) dx}{\int_0^\infty \rho(x) \left[L_k^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx}. \tag{5}$$

Нашей целью является построение плотности распределения $f(x)$ по результатам выборки $(x_1, ..., x_n)$ положительной на $[0, \infty)$ непрерывной случайной величины X. Необходимо, следовательно, по данной выборке получить выборочные начальные моменты

$$\tilde{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k \tag{6}$$

и “внедрить” их в коэффициенты a_k.

Поступим следующим образом [1], [2]. Рассмотрим ряд Фурье функции

$$\bar{f}(x) = [\rho(x)]^{-1} f(x)$$

Тогда для коэффициентов Фурье имеем

$$\bar{a}_k = \frac{\int_0^\infty \rho(x)\rho(x)^{-1} f(x) L_k^{(\alpha)}(x)dx}{\int_0^\infty \rho(x)\left[L_k^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx} = \frac{\int_0^\infty f(x) L_k^{(\alpha)}(x)dx}{\int_0^\infty \rho(x)\left[L_k^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx}. \tag{7}$$

Подставим в (7) $L_k^{(\alpha)}(x)$ из (2) и используем (3):

$$\bar{a}_k = \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} C_{k+\alpha}^{k-i}(i)^{-1}\int_0^\infty x_i^k f(x)dx}{\Gamma(\alpha+1)C_{k+\alpha}^{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} C_{k+\alpha}^{k-i}\frac{m_i}{i!}(-1)^i}{\Gamma(\alpha+1)C_{k+\alpha}^{\alpha}}. \tag{8}$$

Теоретические моменты m_i в $\overline{a_k}$ заменим выборочными, т.е.

$$m_k = \int_0^\infty x^k f(x)dx \ \text{ заменим на } \ \tilde{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} x_i^k.$$

Окончательно, для $f(x)$, с учетом масштабного коэффициента, λ получим:

$$f(\lambda x) = \lambda(\lambda x)^\alpha e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{n} a_k(\alpha,\lambda)L_k^{(\alpha)}(\lambda x), \ \text{ где} \tag{9}$$

$$L_k^{(\alpha)}(\lambda x) = \sum_{i=0}^{k} C_{k+\alpha}^{k-i}\frac{(-\lambda x)^i}{i!}, \tag{10}$$

$$a_k(\alpha,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)C_{k+\alpha}^{\alpha}}\sum_{i=0}^{k} C_{k+\alpha}^{k-i}\frac{(-\lambda)^i\overline{m_i}}{i!}. \tag{11}$$

Впредь черту в $\bar{m}_i$ опустим, т.е. будем писать m_i вместо $\bar{m}_i$.

Отметим, что множитель λ имеет смысл интенсивности событий (отказов, вызовов, ...) в единицу времени.

2. Оптимизация параметров α и λ

Из (9) видно, что ряд Фурье приближает функцию $f(x)$ при любых допустимых α и λ с точностью, зависящей от числа членов a_k. При $k = n$ учитывается n выборочных начальных моментов.

Есть возможность, тем не менее, выбрать более оптимальные значения α и λ.

В силу конечности числа членов, среднеквадратическое отклонение $f(x)$ от ее приближения равно, с учетом (3):

$$Y_n = \int_0^\infty \rho(x)\left[\overline{f}(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(\alpha,\lambda)L_k^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2(\alpha,\lambda)\Gamma(\alpha+1)C_{k+\alpha}^{\alpha}. \tag{12}$$

Естественно оптимальные значения α и λ искать из условий

$$\frac{\partial Y_n}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial Y_n}{\partial\lambda} = 0.$$

Пусть фиксировано $n = n_0$. Поскольку значимость коэффициентов a_{n_0+3}, a_{n_0+4}, ... падает по сравнению с a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, сохраним в (12) лишь два первых слагаемых

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[a^2_{n_0+1}(\alpha,\lambda)C^\alpha_{n_0+1+\alpha} + a^2_{n_0+2}(\alpha,\lambda)C^\alpha_{n_0+2+\alpha}\right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[a^2_{n_0+1}(\alpha,\lambda) + a^2_{n_0+2}(\alpha,\lambda)\right] = 0. \end{cases} \tag{13}$$

В (13) опущен сомножитель $\Gamma(\alpha+1)$, не влияющий на точки экстремума. Решением (13) являются условия

$$a_{n_0+1}(\alpha,\lambda) = 0, \quad a_{n_0+2}(\alpha,\lambda) = 0 \tag{14}$$

Полученные из (4) значения α_0 и λ_0, таким образом, учитывают дополнительно моменты m_{n_0+1}, m_{n_0+2}, а число членов a_k сокращено на два.

Перейдем к вычислению α_0 и λ_0. Удобно ввести относительные переменные

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda m_1}{\alpha}, \quad b_i(\alpha) = \frac{m_1(\alpha+1)^i}{m_1^i(\alpha+1)...(\alpha+i)}, \quad i \geq 2, \quad b_0 = b_1 = 1 \tag{15}$$

Цель такой замены будет ясна ниже. В этих переменных имеем для (14)

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n_0+1} C^i_{n_0+1}(-\overline{\lambda})^i b_i(\alpha) = 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{n_0+2} C^i_{n_0+2}(-\overline{\lambda})^i b_i(\alpha) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

В (16) опущен сомножитель $\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Читатель видит, что решение (16) довольно затруднительно, даже при малых n_0 порядка 2-4. Покажем далее, что этого делать и не нужно.

Предварительно рассмотрим (16) при $n_0 = 0$. Имеем удивительно простое решение.

$$\begin{cases} 1 - \overline{\lambda} = 0 \\ 1 - 2\overline{\lambda} + \lambda^2 b_2 = 0 \end{cases}$$

Отсюда $\overline{\lambda}_0 = 1$, $b_2 = 1$. Возвращаясь к α и λ получим из (15)

$$\lambda_0 = \frac{m_1}{m_2 - m_1^2}, \quad \alpha_0 = \frac{2m_1^2 - m_2}{m_2 - m_1^2}. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь два способа построения плотности (9).

1. Пусть $n_0 \geq 1$. Решение (16) существенно усложняется; далее первые члены a_1, a_2, ... уже не равны нулю; общее число членов $n_0 + 1$.

2. Используем (17) при $n_0 = 0$. При необходимости учета старших моментов m_3, m_4, ... легко считаются $a_3(\alpha_0,\lambda_0)$, $a_4(\alpha_0,\lambda_0)$, ... по формулам (16) ($\overline{\lambda}_0 = 1$):

$$a_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)}(1 - b_3(\alpha_0,\lambda_0)), \quad a_4 = \frac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)}(3 + 4b_3(\alpha_0,\lambda_0) + b_4(\alpha_0,\lambda_0)), \ \ldots$$

$b_3(\alpha_0,\lambda_0)$, $b_4(\alpha_0,\lambda_0)$ находятся по (15).

Важно, что при добавлении новых членов в ряд (9), выполненные ранее расчеты сохраняются. Число членов ряда при втором способе на два меньше, чем в первом.

Существенно проще считаются коэффициенты a_k т.к. $\overline{\lambda} = 1$.

Ниже рассмотрим в виде теорем два утверждения.

Теорема 1. *Пусть неизвестное выборочное распределение относится к классу гамма-распределений. Тогда выбор оптимальных значений α_0 и λ_0 приводит в (9) к точному гамма-распределению.*

Доказательство. Пусть в соответствии с данными выборки $(x_1,...,x_2)$ начальные моменты m_k соответствуют гамма-распределению с параметрами α^* и λ^*, т.е.

$$m_i = \frac{(\alpha^*+i)!}{\alpha^*!(\lambda^*)^i}, \quad i \geq 1, \quad m_0 = 1.$$

Подставим эти выражения для m_i в (15):

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda^*}{\alpha^*+1}\left(\frac{\lambda}{\alpha+1}\right)^{-1}, \quad b_i = \frac{(\alpha^*+1)^i}{(\alpha^*+1)...(\alpha^*+i)}\left(\frac{(\alpha_0+1)^i}{(\alpha_0+1)...(\alpha_0+i)}\right)^{-1}.$$

Так как при оптимальных α_0 и λ_0

$$\overline{\lambda} = 1, \quad b_2 = 1, \text{ то } \alpha^* = \alpha_0 \text{ и } \lambda^* = \lambda_0.$$

Это же верно и для $i > 2$, так как $b_i = 1$, $i = \overline{3,n}$. Но при этом выражения для a_k при $k \geq 3$ представляют собой бином Ньютона

$$a_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)}(1-\overline{\lambda})^k = 0, \quad \overline{\lambda} = 1$$

и равны нулю. Ряд Фурье вырождается в одночлен

$$f(\lambda x) = \lambda_0(\lambda_0 x)^{\alpha} e^{-\lambda_0 x} a_0 L_0^{\alpha}(\lambda x) = \frac{\lambda_0(\lambda_0 x)^{\alpha_0} e^{-\lambda_0 x}}{\alpha_0!}$$

так как $a_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha_0+1)}$, $L_0^{(\alpha)}(\lambda x) = 1$. □

Теорема 2. *Пусть $f(\lambda x)$ — плотность распределения на $[0,\infty)$ случайной величины X и имеет разложение (9). Тогда $f(\lambda x)$ может быть представлена в виде дискретной смеси гамма-распределений*

$$f(\lambda x) = \sum_{k=0}^{n} p_k f_k(\alpha,\lambda,x), \quad \sum_{k=0}^{n} p_k = 1, \quad p_k \geq 0.$$

Доказательство. Имеем

$$L_k^{(\alpha)}(\lambda x) = \sum_{i=0}^{k} C_{k+\alpha}^{k-i}\frac{(-\lambda x)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{k}\frac{(\lambda x)^i}{(\alpha+i)!}C_{k+\alpha}^{k-i}\frac{(\alpha+i)!}{i!}(-1)^i.$$

Тогда (9) примет вид

$$f(\lambda x) = \lambda(\lambda x)^{\alpha} e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{n} a_k(\alpha,\lambda)\sum_{i=0}^{k}\frac{(\lambda x)^i}{(\alpha+i)!}C_{k+\alpha}^{k-i}\frac{(\alpha+i)!}{i!}(-1)^i. \tag{18}$$

В (18) изменим порядок суммирования:

$$f(\lambda x) = e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha+i}}{(\alpha+i)!}\sum_{k=i}^{n} a_k(\alpha,\lambda)(-1)^i C_{k+\alpha}^{\alpha}\frac{(\alpha+i)!}{i!}. \tag{19}$$

В (19) с учетом $e^{-\lambda x}$ сомножитель под первой суммой есть

$$f_i(\lambda x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha+i} e^{-\lambda x}}{(\alpha+i)!} \text{ гамма} - \text{распределение с параметрами } \alpha+i \text{ и } \lambda.$$

Вторую сумму в (19) положим равной p_i, т.е.

$$p_i = \sum_{k=i}^{n} a_k(\alpha,\lambda)(-1)^i C_{k+\alpha}^{\alpha} \frac{(\alpha+i)!}{i!}, \text{ тогда } f(\lambda x) = \sum_{i=0}^{n} p_i f_i(\lambda x).$$

Покажем, что $\sum\limits_{i=0}^{n} p_i = 1$. Имеем $\sum\limits_{i=0}^{n} p_i = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=i}^{n} a_k(\alpha,\lambda)(-1)^i C_{k+\alpha}^{k-i}\frac{(\alpha+i)!}{i!}$. Изменим порядок суммирования:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} a_k(\alpha,\lambda) \sum_{i=0}^{k} C_{k+\alpha}^{k-i}(-1)^i \frac{(\alpha+i)!}{i!}.$$

Рассмотрим вторую сумму в последнем выражении:

$$\sum_{i=0}^{k} C_{k+\alpha}^{k-i}(-1)^i \frac{(\alpha+i)!}{i!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(k+\alpha)!(\alpha+i)!k!}{(k-i)!(\alpha+i)!i!k!}(-1)^i = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!(-1)^i(k+\alpha)!}{i!(k-i)!k!} = \frac{(k+\alpha)!}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i(-1)^i.$$

При $k = \overline{1,n}$ эта сумма равна нулю. Остается член с $a_0(\alpha,\lambda)$ при $k = 0$.

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \alpha! a_0(\alpha,\lambda) = 1, \quad \text{т.к.} \quad a_0(\lambda,\alpha) = \frac{1}{\alpha!}.$$

Наконец, если хотя бы одно $p_i < 0$, то это равносильно перемене знака функции $f(\lambda x)$ при некоторых x, что невозможно, так как $f(\lambda x)$ — плотность распределения и, следовательно, $f(\lambda x) \geq 0$. $\square$

С помощью теоремы легко показать, что $\int_0^\infty f(\lambda x)dx = 1$ при любом n. Действительно,

$$\int_0^\infty f(\lambda x)dx = \int\limits_0^\infty \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(\lambda x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty p_i f(\lambda x)dx = \sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^\infty f(\lambda x)dx = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

В заключение отметим:

1) Экстремумы (моды) распределений $f_i(\lambda x)$ расположены в точках

$$x_{i\max} = \frac{\alpha+i}{\lambda!}, \quad i = \overline{0,n}$$

и следуют по оси OX с интервалом $\frac{1}{\lambda}$.

2) Значения конкретной функции $f_k(\lambda x)$ в точке $x_{k\max}$ и некоторой её окрестности — наибольшее среди значений других функций в этой окрестности.

3) "Хвост" последнего распределения $f_n(\lambda x)$ на интервале $(x_{n\max};\infty)$ является верхней границей для хвостов других распределений.

Литература

1. Ивлев В.В. Определение параметров обобщенных полиномов Лагерра в задачах надежности // Известия АН СССР. - М.: Техническая кибернетика. - № 6. - 1981.

2. Ивлев В.В. О свойствах выборочных распределений, аппроксимируемых полиномами Лагерра / Сборник научных трудов. - М.: МГОПУ, 1995.

Ивлев Валерий Васильевич,
профессор кафедры математики и информатики
Московского Государственного Гуманитарного Университета
им. М.А. Шолохова, доктор технических наук.

E-mail: vvivlev@yandex.ru

Разное сложение разных величин

Е. Н. Петрова, С. А. Пирогов

Авторы показывают, что привычное еще со школы понятие сложения величин может приводить к разным операциям в разных математических и механических теориях (например, различное сложение скоростей в классической и релятивистской механике), а также выявлять взаимосвязи между, казалось бы, далекими областями математики (пифагровы треугольники, комплексная экспонента, числа Клиффорда и т.п.).

Ещё в древности математики умели складывать однотипные геометрические величины — длины, площади, углы. В некоторых случаях (длины, площади) сложение величин сводится к сложению вещественных чисел. Сложение углов имеет несколько иную природу — это сложение вещественных чисел "с точностью до $2\pi n$", где n — целое число. Или же его можно реализовать как умножение — умножение комплексных чисел, равных 1 по абсолютной величине. Механика также дает примеры сложения величин. При этом вещественные числа можно складывать, $w = u + v$, и можно перемножать, $w = uv$. Эти два действия связаны между собой с помощью операции "логарифмирования": $\log(uv) = \log u + \log v$. (Имеются в виду десятичные логарифмы положительных чисел, или логарифмы по любому другому основанию.) Алгебраисты говорят, что логарифм — это *изоморфизм мультипликативной группы положительных вещественных чисел* и *аддитивной группы всех вещественных чисел* [Lyub].

В механике скорости движения по прямой (которые представляются вещественными числами) тоже можно складывать. Но — двумя способами. Первый способ, $w = u + v$, — по Галилею-Ньютону (классическая механика). Второй способ, $w = (u + v)/(1 + uv/c^2)$, — по Лоренцу-Эйнштейну (релятивистская механика). Второй способ сложения скоростей можно свести к умножению положительных чисел, если ввести функцию $k(v) = (c + v)/(c - v)$. Теперь формула $k(w) = k(u)k(v)$ эквивалентна формуле сложения скоростей по Лоренцу-Эйнштейну. Величина $k(v)$ положительна, поскольку предполагается, что скорость v меньше, чем "c" по абсолютной величине (свет догнать невозможно!). Величина $k(v)$ имеет простой кинематический смысл. Пусть неподвижный источник света ("маяк") каждую секунду излучает импульс света, который отражается от движущегося со скоростью v объекта и возвращается к маяку. Тогда отраженные импульсы возвращаются к маяку через интервалы времени, равные $k(v)$ секунд. (Это так называемый *двойной эффект Доплера.* При решении этой задачи нужно иметь в виду, что и излучённый, и отраженный свет движется с одной и той же скоростью c.) Если взять логарифм от коэффициента $k(v)$, то получим $\log k(w) = \log k(u) + \log k(v)$, в том случае, когда w есть "сумма" u и v по Лоренцу-Эйнштейну. Величина $\log k(v)$ называется (с точностью до коэффициента) "быстротой" движения (таким образом, "быстрота" и "скорость" — разные величины). Формула сложения скоростей по Лоренцу-Эйнштейну имеет интересную аналогию с формулой сложения для тангенса

$$\operatorname{tg}(a + b) = (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)/(1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b).$$

Эта аналогия делается более явной, если положить $k(a) = (1 + i \operatorname{tg} a)/(1 - i \operatorname{tg} a)$ — теперь это комплексное число. Если взять натуральный логарифм Ln комплексной величины $k(a)$ [Lyub], то оказывается, что $\mathrm{Ln}\ k(a) = 2ia$. Это следует из знаменитой формулы Эйлера $\mathrm{Exp}(ia) = \cos a + i \sin a$. (Здесь через Exp обозначена функция, обратная к Ln [Lyub]. Её основное свойство: $\mathrm{Exp}(a+b) = \mathrm{Exp}(a) \cdot \mathrm{Exp}(b)$. В отличие от Ln, функция $\mathrm{Exp}\, a$ определена при всех a и однозначна. Из формулы Эйлера, в частности, следуют теоремы сложения для тригонометрических функций cos и sin.) Таким образом, $k(a) = \mathrm{Exp}(2ia)$, а из формулы Эйлера и из определения $k(a)$ видно, что $\cos 2a = (1 - \operatorname{tg}^2 a)/(1 + \operatorname{tg}^2 a)$ и $\sin 2a = 2 \operatorname{tg} a/(1 + \operatorname{tg}^2 a)$ ("формулы двойного угла"). Обратно, $\operatorname{tg} a = \sin 2a/(1 + \cos 2a)$.

С точки зрения алгебры, эти формулы определяют *бирациональное* (т.е. определённое рациональными — прямой и обратной — функциями [Шаф]) соответствие между окружностью с координатами $x = \cos 2a$, $y = \sin 2a$ и числовой прямой с координатой $t = \operatorname{tg} a$. А с точки зрения теории чисел, они содержат в себе формулы для сторон a, b, c *пифагорова* треугольника (прямоугольного треугольника с целочисленными взаимно простыми, т.е. не имеющими общего делителя, сторонами):

$$a = n^2 - m^2, \;\; b = 2nm, \;\; c = n^2 + m^2.$$

Например, если взять $n = 2$, $m = 1$, то получим “египетский треугольник”, с помощью которого при строительстве пирамид отмеряли прямые углы: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

Те же самые формулы для сторон пифагорова треугольника можно получить и из бирационального соответствия между гиперболой $x^2 - y^2 = 1$ и прямой. При этом вместо тригонометрических функций надо использовать *гиперболические*:

косинус гиперболический $\quad \operatorname{Cosh} a := (\operatorname{Exp} a + \operatorname{Exp}(-a))/2,$

синус гиперболический $\quad \operatorname{Sinh} a := (\operatorname{Exp} a - \operatorname{Exp}(-a)/2,$

тангенс гиперболический $\quad \tanh a := \operatorname{Sinh} a/\operatorname{Cosh} a.$

Возвращаясь к сложению скоростей по Лоренцу-Эйнштейну, теперь можно написать $k(v) = (1+\tanh a)/(1-\tanh a)$, где $\tanh a = v/c$, $a = (\ln k(v))/2$ — та самая “быстрота”, которая является аналогом величины угла (радианной меры угла) в тригонометрии.

Как следует из формулы Эйлера, гиперболические функции тесно связаны с тригонометрическими:

$$\operatorname{Cosh}(ia) = \cos a, \;\; \operatorname{Sinh}(ia) = i \sin a, \;\; \tanh(ia) = i \operatorname{tg} a.$$

Это и не удивительно, поскольку гипербола $x^2 - y^2 = 1$ превращается в окружность после замены y на чисто мнимое число iy.

Существует и аналог формулы Эйлера для гиперболических функций. Но, чтобы его получить, надо перейти в область так называемых *двойных чисел Клиффорда*, т.е. “чисел” вида $a + be$, где $e^2 = 1$ ([Яг]). (Двойные числа похожи на комплексные числа, но отличаются от них в одном отношении : для комплексных чисел действие деления всегда выполнимо и однозначно (если делитель — не ноль). Для двойных чисел это не так. Например, число 1 нельзя разделить ни на $(1 + e)$, ни на $(1 - e)$.) Теперь

$$\operatorname{Exp}(ea) = \operatorname{Cosh} a + e \operatorname{Sinh} a$$

в полной аналогии с обычной формулой Эйлера. (Можно считать эту формулу *определением* экспоненты для “чисто мнимого” показателя ea. Свойства такой экспоненты аналогичны свойствам обычной.) Если теперь ввести “двойной” коэффициент двойного эффекта Доплера (а слово “двойной” здесь использовано в двух разных смыслах!) по формуле $k(v) = (c + ev)/(c - ev)$, где e — то самое “число” Клиффорда, для которого $e^2 = 1$, то равенство $k(w) = k(u)k(v)$ снова равносильно релятивистской формуле сложения (коллинеарных) скоростей и $k(v) = \exp(2ea)$, где a — это “быстрота”.

Литература

[Шаф] Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. - М.: Наука, 1972.
[Lyub] Любецкий В.А. Основные понятия элементарной математики. - М.: Айрис-пресс, 2004.
[Яг] Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии. - М.: Физматгиз, 1963.

Петрова Елена Николаевна,
старший научный сотрудник
Института проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: petrova@iitp.ru

Пирогов Сергей Анатольевич,
главный научный сотрудник
Института проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН,
доктор физ.-мат.наук.

E-mail: s.a.pirogov@bk.ru

Что такое вектор?

К. Лезан

Вопрос о содержании курса геометрии, о наполнении его теми или иными геометрическими понятиями, о методике изложения этих понятий для школьников остается актуальным для отечественного школьного математического образования. В этом вопросе при формировании и утверждении школьных программ допускались различные крайности.

Одну из них мы наблюдаем сейчас — это практически полное вымывание доказательности из базового школьного курса, как можно видеть по заданиям базового варианта ЕГЭ по математике.

К противоположной крайности можно отнести слишком абстрактный курс геометрии в колмогоровской программе 1970-х годов; по этой теме имеются многочисленные материалы, в частности, на страницах некоторых выпусков нашего журнала.

Много критики в этом курсе вызывало предельно абстрактное понятие вектора как параллельного переноса плоскости. Ряд методистов считают, что в таком виде оно совершенно не воспринималось учащимися (не имея в их мышлении никаких наглядных и интуитивных опор) и, соответственно, не могло быть успешно освоено.

Настоящая заметка, опубликованная еще в 1913 году (журнал “Вестник опытной физики и элементарной математики”, № 588, стр. 334-338)[1], показывает, что уже в то время создавались научные и методические предпосылки такой эволюции понятия вектора, которая привела к форме понятия, зафиксированной в колмогоровском курсе.

Эта заметка публикуется с целью вызвать дискуссию и еще раз обсудить вопрос о понятийном наполнении школьного курса геометрии и методике изложения необходимых понятий.

Для мнений всех участников дискуссии будут предоставлены страницы нашего журнала.

Материал представлен научным сотрудником Отдела истории математики и математического образования Научно-Практического Центра Математического Просвещения Ревеккой Залмановной Гушель.

Исчисление векторов является в науке весьма важным вспомогательным средством. В частности, применение этого исчисления к геометрии и механике дает возможность достичь важных упрощений и значительно большей ясности. Оно не только весьма заметным образом сокращает письмо, но представляет из себя аналитический метод, который дает наглядное представление о предметах, подлежащих исследованию, между тем как при употреблении координат объекты исследования слишком часто теряются из виду.

Долголетнее применение исчисления векторов — в особенности, в Великобритании — позволило раскрыть все выгодные стороны его, и большие, усилия прилагались к тому, чтобы обратить на них всеобщее внимание. Во Франции термин “вектор” не без труда получил признание в преподавании. Он фигурирует в очень большом числе программ, а также в большей части современных классических сочинений.

[1] Журнал имеется в свободном доступе на сайте vofem.ru — *прим. ред.*

Что такое векторъ?

К. Лезана.

Исчисленіе векторовъ является въ наукѣ весьма важнымъ вспомогательнымъ средствомъ. Въ частности, примѣненіе этого исчисленія къ геометріи и механикѣ даетъ возможность достичь важныхъ упрощеній и значительно большей ясности. Оно не только весьма замѣтнымъ образомъ сокращаетъ письмо, но представляетъ изъ себя аналитическій методъ, который даетъ наглядное представленіе о предметахъ, подлежащихъ изслѣдованію, между тѣмъ какъ при употребленіи координатъ объекты изслѣдованія слишкомъ часто теряются изъ виду.

Я делаю ударение на слове **термин**, ибо совсем иначе обстоит дело с самим понятием. Термином пользуются, я мог бы даже сказать — им злоупотребляют. Понятие же пребывает, так сказать, в таинственном полумраке. Невероятным кажется тот факт, что почти нигде — даже в превосходнейших сочинениях или в лекциях самых выдающихся профессоров — нельзя найти точного определения вектора. Я ни разу не встречал, ни одного учащегося, который сумел бы ответить на вопрос "что такое вектор?"; а между тем уже в течение четверти часа, по крайней мере, он излагал мне очень много соображений относительно векторов и удачно справлялся с весьма обширными выкладками, относящимися к их теории. Я всегда снисходительно относился к этому недостатку в ответе учащихся, ибо вина за это падает не на них, а всецело на дурное изложение, против которого необходимо было бы бороться. Недостаточная точность всегда влечет за собою весьма вредные последствия в деле преподавания.

Яснее всего обнаружилось это смешение понятий, на которое я здесь указываю и против которого восстаю, в элементарной статике, ибо в этой именно области, пожалуй, сильнее всего сказались вредные последствия такого рода смешения. Раньше **силу**, приложенную в точке A, изображали **отрезком** AB, при чем длина AB этого отрезка измеряла напряжение силы, а неопределенная полупрямая AB, указывавшая положение в пространстве и направление силы, называлась **линией действия** её; кроме того, принимали в качестве постулата, что силу можно перемещать, куда угодно, вдоль её линии действия.

Но против этой терминологии было выдвинуто то возражение, что a priori нельзя установить тождественности между таким образом трактуемыми силами и силами динамики. Правда, вполне основательно указывали на то, что элементарная статика представляет из себя, в сущности, лишь особую ветвь геометрии, служащую подготовительной ступенью к механике; но вместе с тем совершенно напрасно полагали, что для того, чтобы выйти из затруднения, стоит только заменить термин **сила** термином **вектор**; и зло тем более велико, что эту замену произвели, не оговаривая её. Замечательно, что **вектором** называли то, что не было вектором ни на языке их изобретателей, ни на языке геометров, которые пользовались этим новым способом геометрических вычислений.

Символ AB допускает три толкования. Во-первых, это геометрический отрезок; начало A и конец B его фиксированы; при этом некоторый отрезок CB только тогда равен отрезку AB, когда C совпадает с A, а D — с B. Во-вторых, можно рассматривать отрезок AB, подчиняющийся такому условию: для существования равенства $AB = CB$ необходимо, чтобы оба отрезка AB и CD имели одинаковую длину и одинаковое направление, и чтобы оба они лежали на одной и той же прямой AB; объекту, получив ему такое определение, можно было бы, как мне кажется, без особых затруднений и даже с некоторым удобством, дать название "**геометрическая сила**", которое устраняет какие бы то ни было недоразумения; во всяком случае, повторяю, и этот объект не есть вектор. Наконец, **вектор** AB определяется своей длиной, своим положением в пространстве и своим направлением, — иначе говоря, $AB = CD$, если два отрезка AB

и CD параллельны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину; при этом совершенно безразлично, где расположена точка C.

Гамильтон (Hamilton), сказал, что вектор есть символ **переносного движения**; **Грассманн** (Grassmann) смотрел на вектор, как на разность между двумя точками[2]. Оба эти способа выражения одинаково правильны и удачно передают сущность понятия. При переносном движении все точки тела описывают тождественные векторы. Но если $AB = CB$, то геометрическая разность точек B и A, действительно, равна геометрической разности точек D и C, — подобно тому, как

$$3 = 7 - 4 = 20 - 17 = (12 + 2i) - (9 + 2i).$$

Неправильное употребление термина "вектор" и применение его к геометрическим силам привели к следующему чудовищному выражению, получившему, так сказать, классическую известность: "равнодействующий момент системы векторов". Говорят также об "эквивалентных системах векторов", что имеет не больше смысла. Как бы нарочно допустили такое смешение терминов и, преследуя единственную цель — освободиться от слова "сила", достигли как раз противоположных результатов. Это тем более печально, что именно в статике вектор дает вполне точное представление о **паре**.

Истинное различие между отрезком, геометрической силой и вектором состоит в том, что отрезок определяется шестью условиями или, лучше сказать, двумя группами условий (координаты начальной и конечной точки), по три в каждой, геометрическая сила — пятью условиями (четырьмя элементами определяется положение прямой в пространстве; к этому присоединяется длина отрезка), а вектор — лишь тремя условиями (тремя проекциями или слагающими).

Исчисление векторов служит источником ежедневно появляющихся интересных работ и имеет полезные применения.

Будем ли мы пользоваться методом кватернионов **Гамильтона** или следовать **Грассману**, мы можем встретить затруднения, лежащие в самой природе вещей; так, например, многих привела в уныние некоммутативность произведения, хотя это свойство лишь служит выражением почти очевидной геометрической истины. Быть может, можно будет внести в теорию векторов какие-либо упрощения или усовершенствования, и это даже весьма вероятно. Уже в течение нескольких лет прилагаются усилия к тому, чтобы по мере возможности согласовать обозначения. Но я твердо убежден в том, что никто не предлагал сознательно привести в полный беспорядок терминологию, и при том столь произвольным образом; а между тем именно это произошло во Франции вследствие какого-то рокового произвола[3]. Я полагаю, что еще не поздно попытаться вступить в борьбу с этим, и это именно побудило меня забить тревогу.

Я надеюсь, мне позволено будет воспользоваться настоящим случаем, чтобы, оставляя в стороне применения векторов к геометрии, механике или физике, указать на возможность расширения понятия о числе, которое вполне естественно вытекает из только-что указанных методов и которого, однако, я до сих пор нигде не встречал; впрочем, последнее не может служить ручательством его новизны. Но мне кажется, что оно заключает в себе некоторый интерес с точки зрения философии.

Это понятие лучше всего можно было бы охарактеризовать, назвав его **положением** числа. Оно мне было, подсказано упомянутым выше определением **Грассмана**. Первоначально изучали числа, сперва целые, затем рациональные и, наконец, иррациональные; затем оказалось необходимым ввести отрицательные числа; теория мнимых чисел привела к рассмотрению направленных чисел в плоскости. Открытия **Грассмана** и **Гамильтона** позволили выйти из плоскости и придти к направленным числам в пространстве.

[2]Очень изящное современное изложение векториального анализа с этой точки зрения можно найти в прекрасной книге, которую цитируем во французском переводе — C. Bourali-Forti et R. Marcolongo, "Éléments de calcul vectoriel". *Ред.*

[3]И далеко не только во Франции. *Ред.*

Во всех этих последовательных обобщениях число все время сохраняет — по крайней мере, неявно — постоянное начало, а именно нуль. Быть может, имело бы смысл различать числа также и в зависимости от того начала, от которого их отсчитывают. Даже в чистой арифметике можно не отождествлять числа 3, отсчитываемого от 0 до 3, с тем же числом, отсчитываемым от 1000 до 1003. При таком порядке идей число, фиксированное по величине, направлению и положению, оказалось бы охарактеризованным системою двух векторов a и α и могло бы быть обозначено, например, символом a_α, при чем за общее начало этих векторов можно было бы условиться принять нуль.

По-видимому, вполне возможно установить систему определений элементарных операций над этими числами, которые, очевидно, представляются отрезками. Например, для чисел **компланарных**, т.е. для всех чисел, расположенных в одной плоскости, можно полагать, что, прибегая к посредству операций над мнимыми числами в алгебре, это было бы сравнительно легко выполнить. Что же касается чисел самого общего вида, то, вероятно, пришлось бы прибегнуть к исчислению кватернионов, при чем здесь следовало бы ожидать выводов, аналогичных тем, с которыми мы уже знакомы.

Вместе с тем подобного рода исчисление, в виду вышеуказанного способа изображения его элементов, было бы исчислением геометрических отрезков. У меня нет (и, вероятно, не будет) возможности продолжать ни изучение этого вопроса ни более глубокое исследование его. Я желал бы только, чтобы оно привлекло внимание кого-нибудь из наших молодых собратьев; лишь на это я надеялся, когда решился выступить с предлагаемой беглой заметкой.

Дело И. К. Андронова живо: Семинару «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» — 55. Его основателю И. К. Андронову — 120

Т. И. Кузнецова

Статья написана по докладу, сделанному 12 марта 2015 года на семинаре «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» в связи с юбилеями семинара (55 лет) и его основателя — замечательного отечественного педагога-учёного Ивана Козьмича Андронова — 120 лет со дня его рождения исполнилось в июне 2014 г.

Творческие встречи работников математического образования – одна из ценнейших форм его развития и совершенствования. Наиболее доступной по конкретности обсуждения возникающих проблем и их решения следует, наверное, признать семинар. Не случайно в период 60-х годов в Москве плодотворно работало около десяти научно-методических семинаров по преподаванию математики.

Научно-методический семинар «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» был создан в Академии педагогических наук (АПН) СССР в 1959 г. на базе диссертационных исследований, проходивших под руководством заведующего кафедрой высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики МОПИ имени Н. К. Крупской Ивана Козьмича Андронова (см. фото 1).

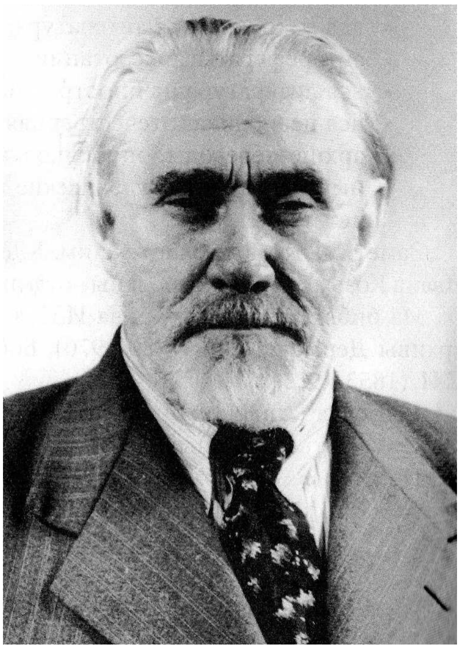


Фото 1. Андронов Иван Козьмич
(02.06.1894–05.11.1975)

И. К. Андронов — выдающийся отечественный учёный-педагог, прошедший путь от учителя начальной школы до профессора, члена-корреспондента АПН СССР, Заслуженного деятеля науки СССР и Отличника Просвещения СССР, кавалера самых высоких государственных и профессиональных наград: ордена Ленина, ордена Трудового Красного знамени, медали за доблестный труд во время 1941–1945 годов, медали К.Д. Ушинского, медалей имени В. И. Ленина, Н. К. Крупской, Л. Эйлера, Иоганна Кеплера (см. Автобиографию в [16, с. 228]).

Велик послужной список Ивана Козьмича Андронова: в течение многих лет Иван Козьмич Андронов был членом экспертных комиссий по математическим и педагогическим наукам при Минвузе СССР, в течение более 15 лет — заместителем председателя учёной комиссии по математике при Главном управлении вузов Министерства просвещения РСФСР, участвовал в работе Учебно-методического совета министерства в качестве рецензента рукописей новых учебников и пособий, был активным деятелем научного общества «Знание», состоял в президиуме правления этого общества по РСФСР. Наконец, порядка 20 лет Иван Козьмич — член экспертных комиссий ВАК СССР по математике и педагогическим наукам.

Более 30 лет И. К. Андронов — член редакционной коллегии журнала «Математика в школе», в течение всей своей научно-методической деятельности принимал живое участие в издании учительских журналов «Математическое образование» и «Народное просвещение».

Иван Козьмич — автор более 135 публикаций. Круг его научных интересов широк, но всё-таки можно выделить геометрию, историю математики и методику её преподавания. Ему принадлежит идея единого курса математики для школ и техникумов, усиления теории в курсе математики начальной школы, мировоззренческой и практической направленности обучения. Он — автор серии учебных пособий, в которых представлена целостная концепция изложения учения о числе [19]. Им написано более 20 учебных пособий — как для студентов педагогических специальностей и преподавателей математики, так и для учащихся техникумов и школ.

На счету И. К. Андронова более 10 программ: по математике для начальной и средней школы, по высшей математике для инженерно-экономических институтов, по методике преподавания и истории математики для педагогических институтов. Выделим только две из них. Первое его выступление по вопросам программ относится к 1918 году, когда на Всероссийском съезде по подготовке новых учителей трудовых школ он выступил в секции преподавателей математики с докладом «Новая программа по курсу методики математики». Проект программы секция приняла. Как отмечает сам Иван Козьмич в своей автобиографии (см. [16, с. 227]), этот доклад сделан по поручению Н. К. Крупской, возглавлявшей в то время отдел реформы школы Наркомпроса, и был опубликован в ближайшем номере журнала «Математика в школе» (1918, № 2). Чтобы обратить внимание читателя на масштабность личности И. К. Андронова, заметим, что именно по этой программе шло преподавание курса методики преподавания математики во всех педвузах и университетах СССР вплоть до 1970-х годов и всё это время она совершенствовалась им.

Вторая программа — это школьная программа по математике, начало разработки которой относится к 1964 году, когда силами двух отечественных академий, Академии наук и Академии педагогических наук, была организована Комиссия по определению содержания среднего образования, математическую секцию которой возглавил академик Андрей Николаевич Колмогоров. Он-то и привлёк Ивана Козьмича Андронова к руководству подсекцией, разработавшей эту новую программу для I–III классов. Она была опубликована в журнале «Математика в школе» (1967, №№ 1, 2).

Под руководством Ивана Козьмича защитили диссертации более 110 человек, многие из которых стали докторами наук, профессорами — преподавателями университетов, педагогических институтов, технических вузов. Под его руководством и при непосредственном участии проводилась большая методическая работа среди учителей и учащихся Москвы и Московской области. Он читал курсы методики математики, методологии математики и истории математики по приглашению всех московских педагогических институтов, а также институтов повышения квалификации и усовершенствования учителей многих городов СССР (Ленинграда, Архангельска, Вологды, Куйбышева, Саратова, Тулы, Курска, Белгорода, Риги, Владимира, Свердловска, Иркутска, Пскова, Казани и др.). Ученик И. К. Андронова Колягин Ю.М. вспоминает: «Те, кому посчастливилось слушать лекции Ивана Козьмича, помнят, каким блестящим лектором он был.

Как артистично читал он лекции по истории математики, имитируя часто голосом и жестом тех или иных исторических личностей, о которых шла речь (Б. Паскаль, И. Кеплер и т.д.), цитируя по памяти целые куски из их сочинений!» [10, с. 180].

Несколько лет И. К. Андронов читал лекции по общей и частной методике высшей математики на механико-математическом факультете Московского университета — для студентов IV–V курсов и для преподавателей СССР, проходивших ускоренную аспирантскую подготовку по математике по специальности втузов. Это примечательно, поскольку вот уже несколько десятилетий студенты мехмата не получают этого предмета, особенно важного для будущих преподавателей. Правда, можно предположить, что в настоящее время восполнить этот недостаток можно на факультете педагогического образования. Не случайно первыми студентами этого факультета, образованного в 1997 году, были именно студенты мехмата и ВМК…

Иван Козьмич вёл переписку с зарубежными учёными, деятелями в области народного образования, поддерживал с ними непосредственные контакты во время поездок в Польшу (Варшава, Краков), Болгарию (София, Варна), Германию (Галле), в период работы XV Международного математического конгресса (Москва, 1966 г.).

Первоначально семинар носил название «Новые идеи в преподавании математики», которое впоследствии варьировалось (об этом подробно см. в [8, с. 735]). Показательна метаморфоза-уточнение его начала: «новые идеи» (1959 г.) → «современные идеи» (с 1960 г.) → «передовые идеи» (с 1976 г.) Последнее название «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» принадлежит семинару с 1991 г.

С самого начала семинар работал в творческом контакте с другими московскими семинарами: семинаром секции средней школы ММО при МГУ имени М. В. Ломоносова и двумя семинарами при АПН СССР – семинаром проф. Н. Ф. Четверухина «Развитие пространственных представлений и графической культуры у учащихся» и семинаром «Основные проблемы преподавания математики в средней школе» при НИИ СиМО АПН СССР.

После кончины И. К. Андронова семинаром, который стали называть Андроновским, руководили (см. фото 2–7):

- член-корреспондент АПН СССР, д.ф.-м.н., проф. ГОИН (Государственного океанологического института имени Н. Н. Зубова) Иван Семёнович Бровиков (1975–1981),

- член-корреспондент АПН СССР / РАО, д.ф.-м.н., проф. Московского университета Иван Яковлевич Верченко (1981–1984),

- Заслуженный деятель науки РФ, д.ф.-м.н., проф. МГОУ (Московского государственного областного университета) Олег Васильевич Мантуров (1981–2009),

- д.ф.-м.н., проф. РУДН (Российского университета дружбы народов), полный профессор университета штата Морелос (Куэрнавака, Мексика) Лев Васильевич Сабинин (1981–2000),

- Заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАО, д.п.н., проф. МГОУ Геннадий Лаврович Луканкин (1992–2006).

В 2009 г. О. В. Мантуров (в связи с болезнью) передал руководство семинаром профессору ЦМО МГУ (Центра международного образования Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова) Татьяне Ивановне Кузнецовой, автору настоящей статьи.

Интересный факт: пятеро из семи руководителей — выпускники механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, четверо — члены-корреспонденты АПН СССР / РАО.

Фото 2. Бровиков Иван Семёнович (1916–14.09.1981)

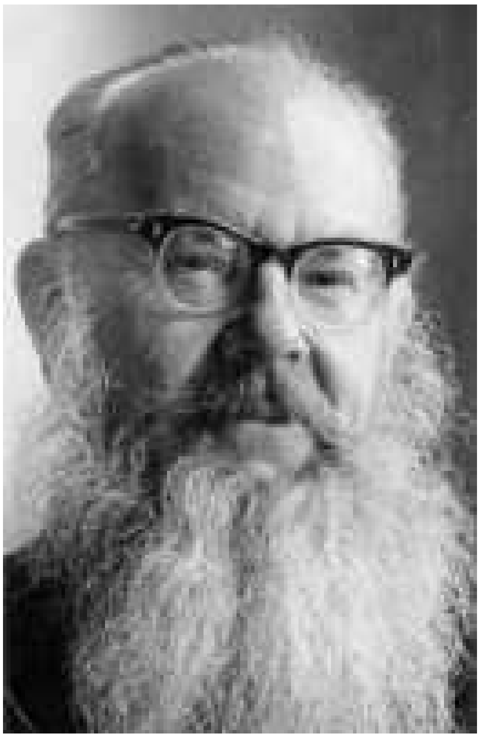


Фото 3. Верченко Иван Яковлевич (11.09.1907–15.11.1995)

Целью семинара всегда было повышение профессиональной культуры учителя математики через выявление передовых идей преподавания математики с учетом международного опыта, их апробирование и пропаганду. Работа семинара проводится в форме заседаний, частота заседаний — один раз в месяц в течение учебного года — с сентября по май. На заседаниях заслушиваются и обсуждаются доклады по различным проблемам преподавания математики. Назовем некоторые из них (подробно см. в [16, с. 117–124]):

1) «Программы по математике для различных уровней среднего образования, программы математических курсов для будущих учителей математики и других дисциплин»;

2) «Рекомендации по улучшению профессиональной подготовки преподавателей математики в пединститутах и университетах»;

3) «История математики и методика её преподавания»;

4) «Философия в связи с историей развития математики и математического образования»;

5) «Обогащение курса школьной математики элементами современной математики»;

6) «Теоретико-методологические и содержательные проблемы школьного математического образования»;

7) «Психологические основы обучения математике, психология математических способностей»;

8) «Изучение традиционных тем курса школьной математики в методически обновленном изложении»;

9) «Реформы математического образования»;

10) «Разработка факультативных курсов, углубляющих или расширяющих программный материал и призванных пробудить у учащихся творческий интерес к математике»;

Фото 4. Мантуров Олег Васильевич (03.07.1936–23.07.2011)

Фото 5. Сабинин Лев Васильевич (21.06.1932–04.06.2004)

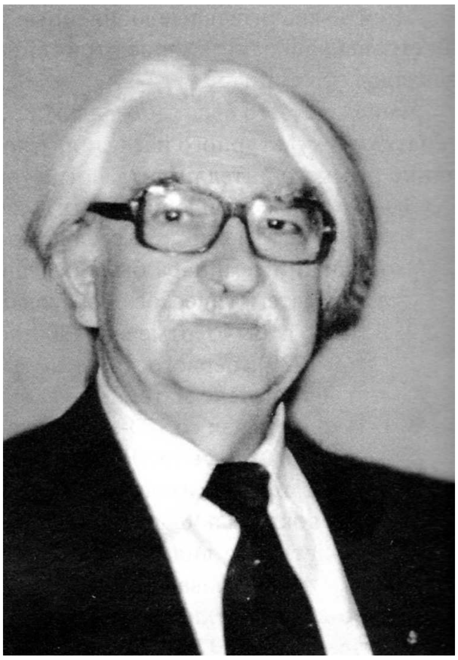


Фото 6. Луканкин Геннадий Лаврович (20.01.1937–24.06.2006)

Фото 7. Кузнецова Татьяна Ивановна (род. 27.04.1945)

11) «Использование компьютеров в обучении математике»;

12) «Дистанционное образование»;

13) «Профильное образование»;

14) «Обучение математике детей-инвалидов и детей с ограниченными возможностями здоровья, в том числе в рамках педагогического и психологического сопровождения подготовки усыновителей таких детей, их опекунов, приёмных родителей»;
15) «Обзоры научно-методических журналов (отечественных и зарубежных)»;
16) «Преподавание математики за рубежом»;
17) «Презентации и обсуждение книг по математике и её преподаванию, созданных отечественными и зарубежными авторами»;
18) «Преподавание математики студентам-иностранцам на русском языке»;
19) «Преподавание информатики в системе среднего и высшего педагогического образования».

Последняя тема разрабатывается на семинаре с 1985 года — в связи с внедрением информатики в среднее образование. Большая заслуга в этом принадлежит одному из корифеев, стоявших у истоков этого внедрения, возглавившему с 1991 года вновь образованную кафедру вычислительной математики и методики преподавания информатики МОПИ имени Н. К. Крупской, профессору Игорю Николаевичу Антипову [12] (см. фото 8).

Фото 8. Антипов Игорь Николаевич
(04.04.1937–10.09.2011)

Семинар стал школой подготовки ученых-методистов и оставался ею все последующие годы, десятки аспирантов и соискателей из числа участников семинара защитили кандидатские и докторские диссертации. Участие в семинаре автора настоящих строк — яркое тому подтверждение: с начала 80-х годов все исследования, которые отражали моё становление как учёного, регулярно представлялись в докладах и сверялись с оценками руководителей семинара и его секретаря В. Н. Шапкиной.

Валентина Николаевна Шапкина — ученица И. К. Андронова, под его научным руководством в 1969 году защитила кандидатскую диссертацию, посвященную математическому образованию в Англии («Движение за реконструкцию современного школьного математического образования в Великобритании»), доцент (см. фото 9).

С 1965 года (т.е. без двух лет полстолетия) В. Н. Шапкина была бессменным секретарем и душой семинара. Благодаря её энергии семинар работал бесперебойно, даже в самые лихие годы, когда многие другие семинары прекращали свою деятельность.

Фото 9. Шапкина Валентина Николаевна (06.01.1932–31.05.2013)

Характерные черты Валентины Николаевны — исключительная преданность делу своего учителя, бескорыстное служение пропаганде передовых идей в преподавании математики в России и за рубежом, внимание и доброжелательность к участникам семинара, материнское покровительство начинающим исследователям, контактность с руководителями семинара.

За 55 лет работы на семинаре было заслушано более 400 докладов. Сам Иван Козьмич за 16 лет руководства семинаром сделал 15 докладов, проведённых в историко-методологическом ключе, которым он владел в совершенстве. На семинаре выступали такие признанные авторитеты, замечательные отечественные математики, педагоги, методисты, психологи, как И. Н. Антипов, И. С. Бровиков, В. А. Гусев, В. А. Далингер, В. А. Ефремович, Д. И. Икрамов, Ю. М. Колягин, В. А. Крутецкий, Г. Л. Луканкин, О. В. Мантуров, А. И. Маркушевич, Г. Г. Маслова, Н. А. Менчинская, В. А. Оганесян, Г. И. Саранцев, З. А. Скопец, А. А. Столяр, П. В. Стратилатов, Н. Г. Федин, А. И. Фетисов, В. В. Цукерман, Р. С. Черкасов, Н. Ф. Четверухин, И. Ф. Шарыгин, П. А. Шеварёв и многие другие.

Добрая традиция интернациональных контактов, начатая И. К. Андроновым, поддерживается на протяжении всей работы семинара. О преподавании математики, о школьных программах в своих странах, о личных педагогических исследованиях на семинаре докладывали Н. Бальтазар (Республика Руанда), Б. Барбоза (Бразилия), А. И. Гончарова (Республика Куба), Л. Гримайо (Республика Бенин), Дубицкий (Югославия), П. Иванов (Болгария), С. Крыговская (Польша), С. Мине (Япония), В. Мохачек (Чехословакия), Ням Нгок Тан (Вьнтнам), Ж. Папи (Бельгия), А. Урбан (Венгрия), К. Фрейтаг (Германия) и другие. Среди этих учёных есть такие, которые защитили кандидатские диссертации в российских диссертационных советах.

Заседания семинара в течение первых 22 лет проходили в МОПИ имени Н. К. Крупской (1959–1981), затем при Московском городском институте усовершенствования учителей (1981–1992). Наконец, в 1992 г. семинар вернулся в МОПИ, где долгое время заседания происходили в Кабинете математики, разработанном и созданном в течение 1979–1980 годов под руководством участника семинара Садчикова Виктора Андреевича — ученика И. К. Андронова. Этот кабинет — памятник великим деяниям семидесятых годов прошлого столетия, появившийся по завету И. К. Андронова: в феврале 1975 года, незадолго до кончины, Иван Козьмич посетил Кабинет математики в московской школе № 299, выполненный тем же коллективом, и назвал его «храмом науки». Тогда-то и появилась идея создания кабинета школьного типа в стенах МОПИ как иллюстрации одного из направлений совершенствования учебно-предметной деятельности по оптимизации школьных предметных кабинетов.

На фото 10 представлен вид на боковую стену Кабинета математики, где закомпонован фриз, включающий в себя барельефы великих математиков, математическую символику, применяемую в средней школе (она служит фоном для портретов), текст: «Подобно тому, как дар слова обогащает нас мнениями других, так и язык математических знаков служит средством ещё более совершенным, более точным и ясным… Н. И. Лобачевский».

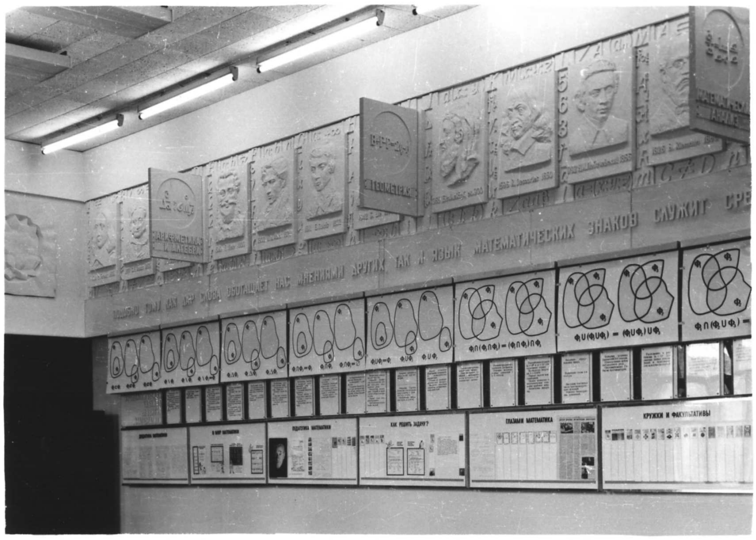


Фото 10. Вид на правую стену Кабинета математики МОПИ им. Н. К. Крупской

Портретный ряд этого фриза исполнен тематически и разделён на шесть частей (теория чисел, арифметика и алгебра, геометрия, математический анализ, теория вероятностей, история перестройки математического образования в СССР). На тыльной стене Кабинета представлена структурная модель «Отображения плоскости на себя».

Этот Кабинет был «принят» самим Андреем Николаевичем Колмогоровым 11 июня 1980 года, который в Книге отзывов написал: «Кабинет производит очень сильное впечатление красивым оформлением. Многие экспонаты удачны по содержанию и заслуживают широкого внедрения в школах». На фото 11 представлена композиция В. А. Садчикова, выполненная с использованием фотографии А. Н. Колмогорова, сделанной на фоне модели «Отображения плоскости на себя».

В 1981 году к 50-летию МОПИ стараниями В. А. Садчикова на второй боковой стене Кабинета (см. фото 12) появились барельефные портреты двух руководителей обновления отечественного школьного математического образования: И. К. Андронова (I–III классы) и А. Н. Колмогорова (IV–XI классы). С этого момента А. Н. Колмогоров и И. К. Андронов стали "соучастниками" заседаний семинара…

Позднее процесс становления Кабинета был описан В. А. Садчиковым в 2006 году в статье [17] и доложен на заседании семинара (15.11.2007). Тогда В. А. Садчиков зачитал акростих, свидетельствующий о понимании потомками благородного самоотверженного порыва этих учёных:

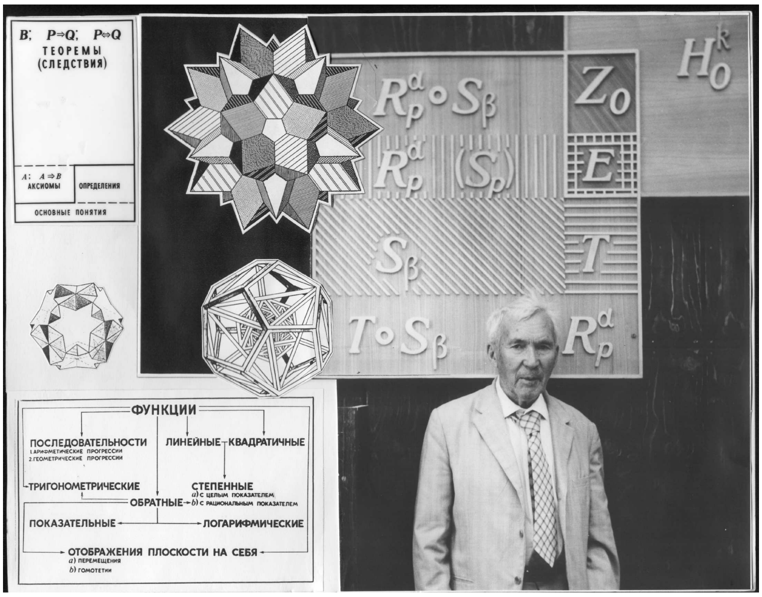


Фото 11. А. Н. Колмогоров в Кабинете математики МОПИ им. Н. К. Крупской (МГОУ) 11.06.1980 (*композиция Садчикова В.А.*)

Фото 12. Барельефные портреты И. К. Андронова и А. Н. Колмогорова

Андронов Иван и **Андрей Колмогоров**
На ярких созвездьях у русской земли!
Дерзнувшим летать, укрощающим норов
Ростки просвещенья взрастили они.
Они различали всевидящим взором
Невежества прыть и в познании высь.
Они развенчали в кругу непокорных
В основах основ
Утаённую

нить.
Их гений сиял на бескрайних просторах.
Во славу России сгорали их дни.
Андронов Иван и **Андрей Колмогоров**
На ярких созвездьях
У русской

земли!
К живым родникам и к твореньям узорным
Они преумножили жизненный бег.
Знал взлёт и провалы поры иллюзорной
Ь их мягким прищуром прославленный век.
Минувших годов: и лихих, и убогих,
Их гений воспринял вселенскую суть.
Честь честью пройдя все капризы природы,
Успели талант, преумножив, вернуть.

Акрострока этого стихотворения отражает посвящение Ивану Козьмичу Андронову. Как это можно трактовать? Наверное, как посвящение, выражающее уважение учителю, любовь чуткому человеку, Учителю учителей, славу замечательному специалисту своего дела! Стихи, вместе с дальнейшим развитием темы, вошли в книги [9; 16].

После кончины Ивана Козьмича остались неопубликованные работы, в том числе и по истории отечественного математического образования. Особенно весомый труд, не утративший актуальности и в настоящее время, — это учебное пособие «Трилогия предмета и метода математики», по которому он читал лекции студентам математических специальностей в пединститутах и в других вузах страны в течение сорока лет. Первая часть вышла в свет ещё при жизни Ивана Козьмича — в 1974 году в МОПИ имени Н. К. Крупской [1], две другие части существовали только в рукописях, хранившихся у его потомков. Секретарь семинара В. Н. Шапкина в память о любимом учителе и с любезного разрешения родственников привела рукопись в порядок и в 2003–2004 годах издала за свой счёт вторую и третью части. Поскольку первая часть к этому времени стала библиографической редкостью и из актива семинара её имел только В. А. Садчиков, по советам участников семинара, в частности, и по моему совету, Валентина Николаевна вскоре переиздала её [2].

В заключении предисловия к этому изданию, подписанного В. Н Шапкиной и В. А. Садчиковым, в знак благодарности за столь самоотверженные деяния Виктор Андреевич представил Шапкину Валентину Николаевну акростихом [2, ч. I, с. II]:

Возродилось **А**ндроново слово,
Луч **е**го **н**а **т**ернистом пути.
И **н**е в том ли **А**ндронова доля –
Наши помыслы к свету вести?

Изысканья откликнуться в **к**ом-то:
Око **л**ет в корень зрит далеко.
А Андронов земные заботы,
Ей же ей, нёс светло и легко.

Вечно душу морочит морока ...
Над землёй закружил новый век,
Ан, забыв о **ш**колярстве высоком,
Авантюрами сбит человек.

Пали **к**руто к мучительной боли.
И глупей не случалось беды.
Не дадим разорвать наши корни.
А они глубоки и чисты.

Издание «Трилогии ...» было приурочено к 110-летию со дня рождения И. К. Андронова и 45-летию семинара и было осуществлено почти через 30 лет после кончины Ивана Козьмича. О ходе этого благородного дела было доложено на заседании семинара 15.01.2004 и затем — на торжественном заседании 9.09.2004, проведённом после посещения могилы И. К. Андронова на Введенском кладбище.

115-летие И. К. Андронова и 50-летие семинара было отмечено выходом в свет книги В. А. Садчикова «Во славу лет, не прожитых напрасно. О профессоре И. К. Андронове, талантливом педагоге, учёном, просветителе» [16] (см. фото 13), изданной при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда и представленной на заседании семинара 10.09.2009.

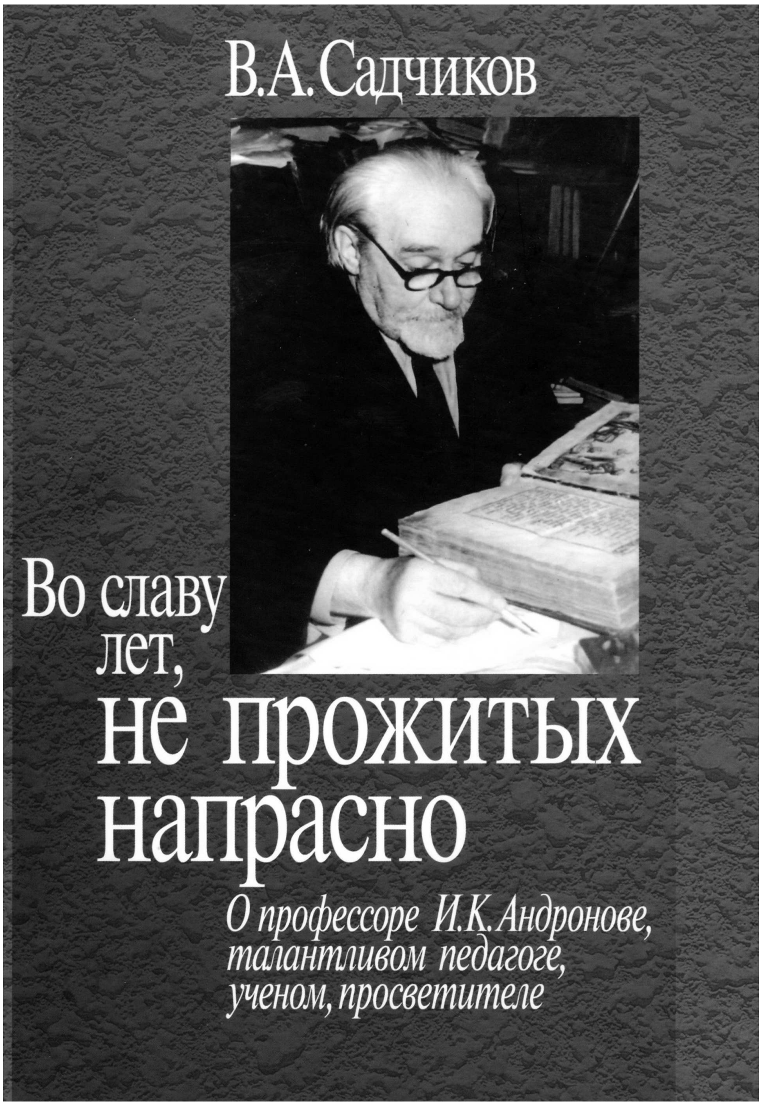


Фото 13. Книга В.А. Садчикова «Во славу лет, не прожитых напрасно...»

Это огромный труд сложной структуры с множеством авторов, созданный при определяющем участии В. Н. Шапкиной. Основополагающая треть книги подана под её фамилией. Ею написаны главы о жизненном и творческом пути И. К. Андронова (гл. 3), о многогранности его личности (гл. 4), о судьбе его библиотеки и о нашем семинаре (гл. 5), о творческих связях Ивана Козьмича с зарубежными коллегами (гл. 6).

И опять – в знак благодарности за самоотверженный труд по подготовке этой книги к публикации — В. А. Садчиков во Введении к книге представил Шапкину Валентину Николаевну очередным акростихом (с. 7):

Шагайте и славьте Россию!
Андронов Иван Козьмич прав:
Печатному слову по силам
Крылатым дать искру в глазах.

Иван — незабвенное имя.
Но он и МОПИ — два крыла.
Андронов трудами своими
Воспел их на все времена!

Андронова долю познаем,
Ликуя, как у родника.
Есть люди из памяти дальней,
Несущие нас сквозь века.

Титанов творенья пробились.
Их светом дышал **н**ебосвод.
Андроново ... **н**е замутнилось
И к свету достойно ведёт.

Как все **о**траженья **л**елеет
Андронова слова родник!
Ей-ей **в** эру **н**овых творений
Андронова дух нас роднит.

В этой книге читатели найдут отзвуки профессорской деятельности И. К. Андронова в воспоминаниях его коллег, друзей, почитателей, учеников, продолжателей его идей: Болгарского Б.В., Базылева В.Т., Бычковой Г.Н., Колягина Ю.М. и Луканкина Г.Л., Малыгина К.А., Ноздрёва В.Ф., Окунева А.К., Петровой М.А., Платоновой М.В. Пуляева А.В., Садчикова В.А., Сафразбекян Р.А., Черкасова Р.С.

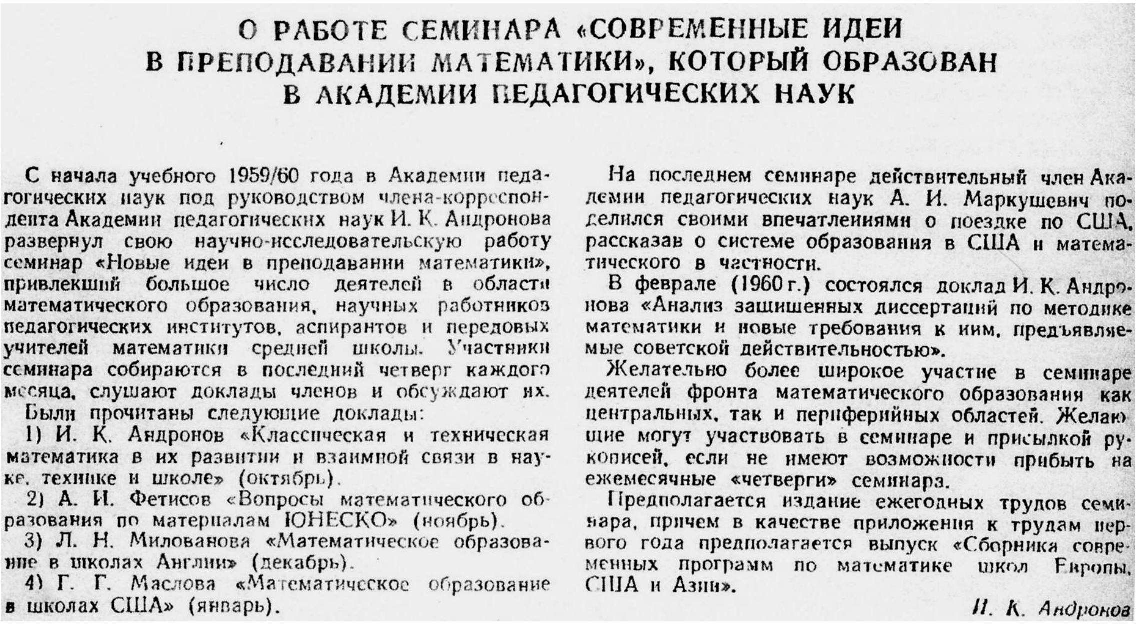
Есть отзыв дочери Ивана Козьмича — Андроновой Веры Ивановны «Мы выросли среди книг», который завершается акростихом, посвящённым жене Ивана Козьмича — Анне Ивановне (с. 74–75).

Среди этих статей особняком стоит моя статья «“Долой Евклида”? — Вперед, к Евклиду!» (с. 206–212), поскольку я не являюсь ученицей Ивана Козьмича, но... так случилось, что моё исследование, посвящённое выявлению подхода к научному образованию математиков высокой квалификации, в «Трилогии ...» И. К. Андронова получило подтверждение весьма радикального вывода, оказав неоценимую авторитетную поддержку и воодушевив на открытое высказывание этого вывода в монографии «Модель выпускника ...» [13] (2005 г.), а затем и в докторской диссертации [15] (2006 г.). Коротко суть проблемы можно описать следующим образом. В противоположность подходам, следовавшим лозунгу «Долой Евклида!», провозглашенному еще в 1959 г. представителем школы Н. Бурбаки Жаном Дьедонне на Международной конференции по вопросам школьного преподавания математики, проходившей в Реймонте (Франция), этот подход в основу изложения математики ставит геометрию Евклида. В работе доказано, что именно геометрия Евклида, которая построена в соответствии с основополагающим принципом единства исторического и логического, препятствует противопоставлению исторического мышления логико-аксиоматическому мышлению. При этом подтвердились удивительно точные, замечательные слова Ивана Козьмича Андронова о том, что именно в геометрии Евклида «***дан синтез интуитивного и логико-аксиоматического мышления***», что «***представляет большую ценность для школьников всех народов и времен***» [2, ч. III, с. 141].

В книге помещён уникальный фотоматериал из архива семьи Андроновых, а также редкие фотографии, такие, как общее фото кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики математики МОПИ им. Н. К. Крупской 1967 г. (с. 61), общее фото слушателей ФПК и преподавателей этой кафедры в мае 1975 г. — за полгода до кончины Ивана Козьмича (с. 63), две фотографии В. Н. Шапкиной — с четой Сойеров на крыльце их дома в Англии в 1996 г. (с. 143) и с японским школьным учителем К. Соримати у могилы И. К. Андронова в 1979 г. (с. 147).

С самого начала функционирования семинара ежегодно в конце учебного года составляется отчет о его работе (о заслушанных докладах), который публикуется в разделе «Хроника» журнала «Математика в школе». Первый такой отчёт был написан самим Иваном Козьмичом [3] и опубликован в № 3 за 1960 г. (см. фото 14).

Журнал «Математика в школе» регулярно публиковал статьи о руководителе семинара И. К. Андронове (по случаям юбилеев и по поводу его книг). Так, в журнале о нём писали И. Я. Депман (1954, № 5), С. И. Новоселов (1964, № 3), В. М. Брадис (1969, № 3; 1974, № 2), Е. С. Ахулкова, М. А. Петрова и Р. А. Сафразбекян (1984, № 5), В. Н. Шапкина (1987, № 4; 2004, № 7), Ю. М. Колягин и О. В. Тарасова (2004, № 5), М. М. Рассудовская и А. Г. Хармац (2004, № 5; 2005, № 2), А. И. Верченко и Н. А. Курдюмова (2004, № 5, 10).



О РАБОТЕ СЕМИНАРА «СОВРЕМЕННЫЕ ИДЕИ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ», КОТОРЫЙ ОБРАЗОВАН В АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК

С начала учебного 1959/60 года в Академии педагогических наук под руководством члена-корреспондента Академии педагогических наук И. К. Андронова развернул свою научно-исследовательскую работу семинар «Новые идеи в преподавании математики», привлекший большое число деятелей в области математического образования, научных работников педагогических институтов, аспирантов и передовых учителей математики средней школы. Участники семинара собираются в последний четверг каждого месяца, слушают доклады членов и обсуждают их.

Были прочитаны следующие доклады:

1) И. К. Андронов «Классическая и техническая математика в их развитии и взаимной связи в науке, технике и школе» (октябрь).

2) А. И. Фетисов «Вопросы математического образования по материалам ЮНЕСКО» (ноябрь).

3) Л. Н. Милованова «Математическое образование в школах Англии» (декабрь).

4) Г. Г. Маслова «Математическое образование в школах США» (январь).

На последнем семинаре действительный член Академии педагогических наук А. И. Маркушевич поделился своими впечатлениями о поездке по США, рассказав о системе образования в США и математического в частности.

В феврале (1960 г.) состоялся доклад И. К. Андронова «Анализ защищенных диссертаций по методике математики и новые требования к ним, предъявляемые советской действительностью».

Желательно более широкое участие в семинаре деятелей фронта математического образования как центральных, так и периферийных областей. Желающие могут участвовать в семинаре и присылкой рукописей, если не имеют возможности прибыть на ежемесячные «четверги» семинара.

Предполагается издание ежегодных трудов семинара, причем в качестве приложения к трудам первого года предполагается выпуск «Сборника современных программ по математике школ Европы, США и Азии».

И. К. Андронов

Фото 14. Первый отчёт о работе семинара

С апреля 2012 года доклады семинара записываются на видео. Последние два года наиболее активные участники семинара награждались сертификатами.

Участники семинара представляли его на многих мероприятиях, организованных педагогической общественностью. Явное свидетельство этому — публикации в педагогических журналах и сборниках, фотографии. За последние 5 лет участники семинара участвовали во Всероссийских съездах учителей математики (В. Н. Шапкина со статьёй о юбилее нашего семинара «Полвека на службе математического просвещения»; О. А. Багишова, Д. Д. Бычкова, Д. В. Жарков, Т. И. Кузнецова и В. В. Цукерман с докладами о преподавании математики [8, с. 33–35, 180–183, 557–559, 629–631, 730–731, 735–736]) и учителей информатики (Д. Д. Бычкова, Д. А. Зверева, Д. В. Жарков, Т. И. Кузнецова, А. А. Павлов, А. В. Пантелеймонова, В. А. Птицын [7, с. 100–101, 106–107, 158–159, 232–233, 592–593, 608–609]). Три года мы в той или иной мере активно участвовали в научно-методической конференции «Новые образовательные программы МГУ и школьное образование» (10.12.2011; 17.11.2012; 16.11.2013). 24 апреля 2013 г. мы побывали на Торжественном заседании в Российской государственной библиотеке, посвящённом 110-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова.

Участники семинара с почитанием относятся к своим юбилярам: 12.01.2012 поздравили с 80-летним юбилеем нашего секретаря В. Н. Шапкину, которая более сорока лет собирала нас всех вместе, 10.10.2013 отметили 80-летие старейшего преподавателя математики, уникального специалиста по истории математики А. Г. Хармаца.

Не забываем и тех, кто покидает этот мир: 8.09.11 провели заседание, посвящённое памяти О. В. Мантурова, который почти 30 лет руководил семинаром, 12.09.2013 почтили память нашего секретаря В. Н. Шапкиной.

Наиболее значимые заседания и события семинара освещаются в газете МГОУ «Народный учитель»: Всероссийские съезды учителей математики и информатики в МГУ [5; 11]; юбилей

В. Н. Шапкиной [4]; заседание 11.04.2013, посвящённое юбилею А. Н. Колмогорова, зафиксированное в статье «К 110-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова» [14], среди авторов которой надо отметить основного докладчика профессора Костромского университета В. С. Секованова — автора эпохального исследования о жизни и творчестве Андрея Николаевича, а также Заслуженного учителя РФ В. А. Садчикова, в своё время связанного с Андреем Николаевичем творческой дружбой; там был помещён некролог В. Н. Шапкиной [6].

Как видно из рассказа об издании «Трилогии...», семинар поддерживает связь с родственниками Ивана Козьмича. Они приглашались на наиболее значимые заседания семинара.

Фото 15. В. Н. Шапкина с Ольгой и Екатериной Андроновыми-Савельевыми

Так, 10.05.2012 на заседании семинара присутствовали внучка и правнучка И. К. Андронова — Ольга и Екатерина Савельевы. После этой встречи остались фотографии (см. фото 15). На заседании 12.09.2013, посвящённом памяти В. Н. Шапкиной, они выступали с воспоминаниями о дружбе, которая связывала их с Валентиной Николаевной долгие годы. И хотя они далеки от математики, зачарованные трудами старейшего преподавателя и участника семинара Анатолия Григорьевича Хармаца, 10.10.2013 участвовали в чествовании его 80-летнего юбилея.

***

В последней части своего обзора я вынуждена сообщить, что несколько месяцев назад, 9 октября 2014 года почил старейший участник нашего семинара Виталий Владимирович (Вульфович) Цукерман (см. фото 16), который в течение трёх десятилетий (по крайней мере) уделял большое внимание преподаванию начал математического анализа в отечественной средней школе. Он очень сильно, можно сказать, даже трагически, переживал неудачи реформы А. Н. Колмогорова, много сил отдал исследованию их причин.

Незадолго до кончины, вызвав меня в больницу, где он лежал, Виталий Владимирович передал своеобразное завещание, которое звучит так:

«Реформой была, по сути, поставлена грандиозная задача повышения математической культуры населения страны в целях её успешного развития. В частности, задача содержательного

Фото 16. Цукерман Виталий Владимирович
(27.04.1927–09.10.2014)

ознакомления с «ньютоновской концепцией математического естествознания» — базой взрывного развития науки, технологии, промышленности за последние три столетия.

Проведение реформы столкнулось со многими трудностями, главной из которых являлась неподготовленность учителей к успешному обучению новым предметам. Обширная программа высшей математики в педвузах была направлена на повышение общей математической культуры студентов, но не на умение конкретно передавать важнейшие идеи анализа школьникам.

Постепенное выхолащивание содержания курса «*Алгебра и начала анализа*» фактически, за редкими исключениями, привело ныне к ликвидации доказательной математики в средней школе. Не научившись доказывать в школе, студенты не умеют проводить доказательства в вузе, не умеют анализировать учебный материал. Такие выпускники вузов, если и смогут работать по уже существующим правилам, но открывать новое знание они не смогут».

Результатом исследования Виталия Владимировича стала разработка и издание в 2010 г. уникального труда — книги «Действительные числа и основные элементарные функции» [18]. Цель этой книги — обеспечить студентов педагогических вузов, обучающихся по специальности «Учитель математики», доказательной базой, которая необходима для грамотного преподавания математики. Поэтому главное достоинство книги состоит в том, что в ней даётся доказательное построение теории действительных чисел и основных элементарных функций, при этом доказательства книги по своей сложности не превышают уровня трудности разбора олимпиадных задач и вполне доступны интересующимся школьникам профильного обучения.

После выхода в свет книги Виталию Владимировичу удалось несколько лет преподавать по ней студентам МГГУ имени М. А. Шолохова, будущим учителям математики. Пропаганде этого труда были посвящены его доклады на Всероссийском съезде учителей математики в МГУ (октябрь 2010 г.), в библиотеке имени К. Д. Ушинского (январь 2012 г.), на нашем семинаре и на семинаре по физико-математическим проблемам фундаментальной и прикладной науки МГГУ имени М. А. Шолохова (сентябрь 2012 г.). Он пытался обсудить свою точку зрения на второй научно-методической конференции «Новые образовательные программы МГУ и школьное образование» (ноябрь 2012 г.). Однако редакционная коллегия, опубликовав этот доклад в материалах конференции, не сочла возможным включить его в программу конференции, чем очень огорчила автора.

Под конец жизни Виталий Владимирович сетовал на то, что ему не удалось донести до умов учительства и организаторов образования очевидные для него положения совершенствования отечественного математического образования. На это он получил от меня обнадёживающее заявление о том, что всему своё время, и оно придёт... Будем надеяться, что это так...

Да, будет так, если мы будем встречаться и обсуждать наши насущные проблемы. А где это можно сделать? Конечно, на регулярном семинаре, которому Иван Козьмич Андронов придавал очень большое значение. Об этом свидетельствует вся его научно-педагогическая деятельность, направленная на воспитание и совершенствование нашего учительства. Дело Андронова живо и будет жить, пока мы будем помнить и передавать потомкам ту вселенскую любовь, которую излучал и излучает со страниц своих книг, с бережно хранимых учениками фотографий — Иван Козьмич Андронов [16, с. 225]:

Андронов соперничал с веком ...
Но, к
Доле людской прикипев,
Расправил крыла человека —
Открыл свой вершинный
Напев.
Он
Выявил
            славные даты
И факты минувших
Веков.
Андронова мысли
Нам
      святы,
Как нити к познанью
Основ!
За
Ь мягким прищуром и словом —
Мышления меткого свет.
И в каждом Учитель Андронов
Честь честью прокладывал след!

Настоящая статья написана по докладу 12.03.2015, посвящённому 120-летию со дня рождения И. К. Андронова и 55-летию его семинара. Пользуясь случаем, приглашаем работников математического образования участвовать в работе семинара в качестве докладчиков и слушателей. Заседания проходят по вторым четвергам каждого месяца (с сентября по май) в Московском государственном областном университете (МГОУ) по адресу: Москва, ул. Радио, д. 10а, а. 82 в 16.00. Проезд: станция метро «Красные ворота», далее троллейбусом № 24 до остановки «Улица Радио». Справки по тел.: (495)438-25-80, 8-916-843-62-63.

Библиографический список

1. *Андронов И.К.* Трилогия предмета и метода математики: Учебное пособие. Часть I / Под ред. И.И. Баврина. — М.: МОПИ им. Н.К. Крупской, 1974. — 206 с.

2. *Андронов И.К.* Трилогия предмета и метода математики. В 3-х частях / Под ред. И. И. Баврина. — М.: МГОУ. Ч. I, 2004 (повторное издание, доп. предисловием — печ. по изданию 1974 г.). — 206 с.; ч. II, 2003. — 196 с.; ч. III, 2004. — 144 с.

3. *Андронов И.К.* О работе семинара «Современные идеи в преподавании математики», который образован в Академии педагогических наук // Математика в школе. - 1960. - № 3, с. 76.

4. *Брянцева Т.* На ниве просвещения: о научном Андроновском семинаре и хранительнице его архивов, бессменном секретаре семинара и юбиляре В.Н. Шапкиной // Народный учитель. - № 2. - 17 февраля 2012 г. — М.: МГОУ, с. 4.

5. *Бычкова Д.Д., Жарков Д.В., Кузнецова Т.И.* О Всероссийском съезде учителей математики в МГУ // Народный учитель. - 2010. - № 8, 24 ноября 2010 г. — М.: МГОУ, с. 3–4.

6. Валентина Николаевна Шапкина: Некролог // Народный учитель. - №№ 5–6, 3 июня 2013 г. — М.: МГОУ, с. 4. — (Подпись: Друзья, коллеги, слушатели семинара).

7. Всероссийский съезд учителей информатики. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 24–26 марта 2011: Тезисы докладов. — М.: Издательство Московского университета, 2011. — 732 с.

8. Всероссийский съезд учителей математики: Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 28–30 октября 2010 г.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс, 2011. — 768 с.

9. *Жилякова Е.В., Садчиков В.А.* Многогранники в творческой деятельности школьников. — М.: «Когито-Центр», 2010. — 432 с.

10. *Колягин Ю.М.* Русская школа и математическое образование. — М.: Просвещение, 2001. — 318Ёс.

11. *Кузнецова Т.И., Бычкова Д.Д., Зверева Д.А., Птицын В.А., Жарков Д.В.* О Всероссийском съезде учителей информатики в МГУ // Народный учитель. - 2011. - № 3, 15 апреля 2011 г. — М.: МГОУ, с. 3–4.

12. *Кузнецова Т.И.* «И в просвещении стать с веком наравне»: Антипов И.Н. — проводник на пути преподавания информатики // Игорь Николаевич Антипов: 50-летию научно-педагогической деятельности / Под общей ред. А.В. Пантелеймоновой. — М.: Изд-во МГОУ, 2011, с. 12–34.

13. *Кузнецова Т.И.* Модель выпускника подготовительного факультета в пространстве предвузовского математического образования: Научное издание. — М.: КомКнига, 2005. — 480 с. (Серия «Психология, педагогика, технология обучения».) (30 п.л.); 2-е изд. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.

14. *Кузнецова Т.И., Секованов В.С., Садчиков В.А.* К 110-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова // Народный учитель. - № 4(1849). - 12 апреля 2013 г. — М.: МГОУ, с. 3.

15. *Кузнецова Т.И.* Формирование единства теории и практики предвузовского математического образования: Диссертация на соискание ученой степени доктора педагогических наук — М., 2006, 476 с.

16. *Садчиков В.А.* Во славу лет, не прожитых напрасно. О профессоре И.К. Андронове, талантливом педагоге, ученом, просветителе. — М.: ПЕР СЭ, 2009. — 400 с.

17. *Садчиков В.А.* История одного барельефа академика Колмогорова Андрея Николаевича / Вестник ЦМО МГУ. Ч. 3, 2006, № 6, с. 153–186.

18. *Цукерман В.В.* Действительные числа и основные элементарные функции. — М.: Издательство «Икар», 2010. — 292 с.

19. *Шапкина В. Н.* И. К. Андронов (1894–1975) // Математика в школе. - 1987. - № 4.

Кузнецова Татьяна Ивановна, профессор
кафедры общетеоретических предметов Института
русского языка и культуры МГУ имени М. В. Ломоносова,
доктор педагогических наук, доцент.

E-mail: kuzti45@gmail.com

О выходе книги “Загадка магнита”

От редакции

Майкл Фарадей — автор многих великих открытий, каждое из которых могло сделать его знаменитым. Он открыл явление электромагнитной индукции, создал первый электродвигатель, первым предсказал электромагнитные волны и заложил основы учения об электромагнитном поле.

О его жизни и научном творчестве рассказывает книга “Загадка магнита”. Её авторы Н. Шаховская и М. Шик. Впервые книга была издана в 1937 году, затем она вышла в 1948 году под названием “Майкл Фарадей”, третье издание 1968 года называлось “Повелитель магнита”.
Новое издание имеет подзаголовок: “Майкл Фарадей. Повесть о жизни и трудах маленького переплётчика, ставшего великим учёным”.

Приобрести книгу можно по адресам:

Книжный магазин МЦНМО: Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.

Издательство: Москва, ул. Авиамоторная, дом 4, строение 1, понедельник-пятница, с 10 до 17 часов (предварительно договориться по телефону (499) 763 61 97).

Выходные данные книги:

М.: “Издательство МАПРО”, 2015. - 232 с.
ISBN 978-5-904696-08-5 УДК 51(091) ББК 22.1

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал “Математическое образование”.

www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанным адресам.
Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2015 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2015 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ) и Российском индексе научного цитирования (РИНЦ).

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138
9 771992 613776