ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год девятнадцатый

№ 2 (74)

апрель - июнь 2015 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 2 (74), 2015 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2015 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.06.2015 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (74), апрель – июнь 2015 г.

Содержание

Актуальные вопросы математического образования

И. П. Костенко. 1970 – 1986 гг. Реализация реформы-70, удержание её результатов (статья шестая) 2

Учащимся и учителям средней школы

А. Р. Рязановский. Многочлены с одним неизвестным (окончание) 18

Е. З. Скворцова. Тригонометрические многочлены (продолжение) 27

Студентам и преподавателям математических специальностей

И. Ф. Акулич. От Адама Ризе к Симплекс-методу или Непростые следствия простой задачи 42

Замечательные даты в мире математики и математического образования

Р. З. Гушель. Библиографические материалы к юбилейным датам 2015 года. II полугодие 55

1970 – 1986 гг. Реализация реформы-70, удержание её результатов (статья шестая)

И. П. Костенко

В предыдущей статье (МО, 2014, № 3 (71)) рассматривалось последнее пятилетие перед реформой — организационный этап подготовки. В данной, предпоследней статье цикла мы увидим результаты сорокалетней планомерной работы "реформаторов" (начата работа в 1936 г.). Эти 16 лет (1970–1986 гг.) делятся на два периода: 1970 – 1978 гг. — реализация реформы и 1978 – 1986 гг. — борьба здоровых сил общества с "реформаторами", закончившаяся, как ни прискорбно, победой последних. Победа была предопределена "крышей", которую им удалось создать в структурах высшей государственной власти. Эта победа была решающей на пути разрушения государства, начавшегося после 1986 г.

По плодам их узнаете их.
Мф. 7: 16.

1. 1970–1978 гг. Реализация "реформы"

"Коренная" реформа началась во всех школах в 1970/71 учебном году, — в этом году прокофьевское министерство официально перевело на новые программы и учебники IV классы. Всеобщее внедрение новых программ планировалось уложить в 4 года. Уложили в 7 лет — к 1977 г.

Для нашей темы нет необходимости анализировать ход реформы. Подробное и компетентное его описание можно найти в книге Ю. М. Колягина [1, с. 205-206] — непосредственного и нерядового её участника. Опираясь на его свидетельства, набросаем схематично общую картину.

Первые же шаги "реформы" вызвали обеспокоенность родителей, растерянность и недоумение учителей. Не только дети и родители не понимали учебников, их не понимали учителя. Эту проблему, почему-то совершенно не предусмотренную, прокофьевское Министерство стало лихорадочно решать всевозможными курсами переподготовки, чтением лекций в регионах, выпуском методических пособий и пр. Т.е. стало учить по новым программам и учебникам не школьников, а их учителей. Учителя оказались "необучаемыми", лучшие и опытнейшие из них вынуждены были уйти из школы, посылая проклятия авторам программ и учебников. В российское и союзное министерства беспрерывно шли отчаянные сигналы бедствия. На коллегиях слушались "отчёты" и намечались "меры", не приносящие никаких результатов. Программы ежегодно изменялись, учебники перерабатывались, а курс математики "упрямо не упрощался... Какие только ни принимались меры, чтобы внедрить «невнедряемое!»" [там же, с.199].

В 1975 г., в разгар реформы, ей поются дифирамбы на страницах журнала "Математика в школе". Главный редактор и один из ведущих "реформаторов" Р. С. Черкасов в редакционной статье "Великая победа Ленинской (?) школьной политики КПСС" [2, с. 144-149] восклицает:

> "Решение в исторически сжатые сроки беспрецедентной задачи... В советской школе введены новые программы и новые учебники, содержание которых приведено в соответствие с требованиями (?) развития науки, техники и культуры. Анализ обновленного содержания среднего образования показывает, что его уровень и объём соответствует "мировым стандартам" (?)... Новая программа была принята после длительного её обсуждения (?) в учительских коллективах... Несмотря на трудности... основные идеи и методические принципы новых программ положительно (?)

восприняты учителями и педагогической общественностью... Материалы, полученные из союзных республик, свидетельствуют, что большинство учителей... добиваются удовлетворительных (?) результатов в обучении школьников... Советской школе предстоит закрепить и развить достигнутые ею успехи...” [там же, с. 145-148; 3 (1976, № 1), с. 3-6].

1978 г. Формализм знаний, отсутствие навыков. Свидетельствует Ю. М. Колягин:

> “Всё встало на свои места при первом выпуске (в 1978 г. — И.К.) из средней школы “отреформированной” молодёжи, ... среди учёных-математиков АН СССР и преподавателей вузов началась паника. Было повсеместно отмечено, что математические знания выпускников школ страдают *формализмом*; *навыки* вычислений, элементарных алгебраических преобразований, решения уравнений фактически *отсутствуют*. Абитуриенты оказались практически не подготовленными к изучению математики в вузе” [1, с. 200].

Обратите внимание, — *формализм* знаний и отсутствие *навыков*! Произошло то, что предсказывали учителя в 1950-х гг.

Для полноты картины следует привести конкретный анализ результатов вступительных экзаменов в МЭИ 1977, 1978, 1979 гг., сделанный преподавателем В. И. Прохоренко.

> “1. ... ухудшились *навыки* в проведении *вычислений*.
>
> 2. ... хуже ... овладели техникой *алгебраических преобразований*. Многие из них допускали ошибки, связанные с нарушением порядка действий, *приведением к общему знаменателю*, разложением на множители, ... плохо владеют формулами сокращённого умножения. Большое число ошибок возникало из-за незнания свойств *степенной функции*.
>
> 3. Значительная часть абитуриентов-А не имеет достаточных навыков в решении *уравнений*, в том числе и *квадратных*. ... много ошибок было допущено из-за недостаточно чёткого усвоения свойств показательной и логарифмической *функций*.
>
> 4. Абитуриенты-А часто ошибались при решении ... *простейших неравенств* ...
>
> 5. Абитуриенты-А обнаружили слабые знания *тригонометрического* материала. Утрачены *навыки* тождественных преобразований тригонометрических выражений в решении тригонометрических уравнений. Большое число ошибок допускалось при решении даже простейших тригонометрических уравнений из-за *формального* владения формулами для корней указанных уравнений, незнания свойств тригонометрических и обратных тригонометрических *функций*.
>
> 6. Абитуриенты-А не владеют основными понятиями и формулами *геометрии*, не умеют применять их при решении задач. ... Определение *вектора* основной массой абитуриентов не понято...
>
> 7. Абитуриенты-А, в отличие от абитуриентов прошлых лет, затруднялись в построении *графиков функций*... Большие трудности возникали при построении графика *квадратичной* функции $y = ax^2 + bx + c$ ...
>
> 8. Абитуриенты-А показали слабое знание основных разделов *теоретической* части курса математики. Многие из них не видят разницы между определением, аксиомой, теоремой, не понимают, что значит доказать теорему... Такого рода *логические ошибки* для абитуриентов-А стали *массовым* явлением, в то время как раньше они допускались значительно реже.
>
> Следует также отметить, что вопросы *математического анализа*, включённые в школьный курс математики, школьники усвоили *слабо* и, как правило, *формально*...” [3 (1980, № 3), с. 37-38].

Из весьма содержательного анализа МЭИ, фрагменты которого приведены выше, видно, что все проявившиеся "недостатки" связаны с реформаторскими новациями. Все!

1. Громадная *перегрузка* программ лишила учителей времени на отработку *навыков*[1]. Отсутствуют базовые для математического образования *навыки вычислений* и основанные на них навыки тождественных преобразований алгебраических выражений. Закономерное предсказуемое следствие разрушения учебного предмета арифметики.

2. Абсолютное незнание *тригонометрии* (неспособность решить *простейшее* тригонометрическое уравнение, незнание тригонометрических функций, незнание даже определения синуса, косинуса). Результат ликвидации учебного предмета тригонометрии.

3. Отсутствие фактических знаний о *функциях*, даже показательных, даже квадратичных, неспособность построить *графики* этих функций. А ведь один из основных постулатов реформы — сделать идею функциональной зависимости "стержнем" всего школьного курса математики. Напомним, ещё в 1960 г. учителя обращали внимание на *гипертрофированное* развитие этой идеи в новой программе и на методический абсурд — "исследование функциональной природы фактического материала" без сознательного и прочного овладения этим материалом.

4. Абсолютное непонимание учащимися новых введённых "реформаторами" разделов *высшей математики*. А учителя ведь призывали "реформаторов" ещё в 1960 г. отказаться от введения этих "элементов".

5. Абстрактная *теоретизация* программ и учебников, повышение строгости определений и доказательств закономерно привели к утрате смыслов и *формализму* знаний. И это предвидели учителя, — "худшим видом формализма ... является попытка заставить ученика запомнить логическое доказательство, недоступное его пониманию".

Более того, учителя понимали, что теоретизация "может отрицательно повлиять на развитие *логического* мышления". В результате реформы атрофия логического мышления стала "массовым явлением".

Резкое падение в результате "реформы" качества знаний и навыков учащихся констатировалось и на высшем официальном уровне, но вся величайшая государственная опасность происшедшего не сознавалась нашими номинальными руководителями, как увидим далее. Журнал "Коммунист" в послесловии к статье Л. С. Понтрягина писал в 1980 г.:

> "Как сообщили редакции, опыт приёма нового пополнения в высшие учебные заведения показывает, что за последние годы *резко* понизился уровень математической подготовки в школе. На вступительных экзаменах в вузы в знаниях абитуриентов обнаруживаются *серьёзные пробелы, о которых раньше не было и речи*. За неоправданным избытком отвлечённых теоретико-множественных представлений оказались утраченными многие весьма необходимые знания и навыки (в том числе арифметического счёта, решения алгебраических уравнений и неравенств, тригонометрических и геометрических построений и преобразований и пр.)" [4 (1980, № 14), с. 110].

Здесь надо сделать поправку. Навыки утрачены вовсе не из-за "избытка теоретико-множественных представлений", а из-за того, что в программы добавлено огромное количество нового материала и, тем самым, резко уменьшено время на отработку навыков. Перенос внимания на "теоретико-множественные представления" — ложная цель.

Деградация личности учащихся. Более того, журнал фиксирует начавшийся процесс *деградации личности детей*:

> "На примере сегодняшнего преподавания математики можно видеть, как неправильная постановка умственного воспитания, перегрузка памяти *формальной* информацией (повышение *строгости* — И.К.) вместо активного включения работы мысли

[1] В 1967 г., за 11 лет до 1978 г., учитель П. Е. Непомнящий (Ленинград) предсказал: "Программа настолько перегружена, что учащиеся не приобретут *никаких* необходимых навыков" [3 (1967, № 4), с. 29].

> (причём в ту пору, когда подросток ещё только учится мыслить и рассуждать) приводят к обеднению умственной деятельности школьника, задерживают развитие его способностей, лишают его понимания реальной основы обобщений[2], делают косноязычной речь и обедняют воображение" [там же, с. 111].

Такой анализ мог сделать только серьёзный профессиональный психолог высокого уровня.

Итак, **1978 год следует считать "чёрным" годом отечественного образования, годом национальной катастрофы**.

"Реформа" или "слом"? Строго говоря, термин "реформа" в применении к тому, что сделано со школой в 1970–78 гг., не адекватен. "Реформа (от лат. *reformo* — преобразовываю), — переустройство к.-л. стороны общественной жизни, не уничтожающее основ существующей социальной структуры" [5, с. 1134]. Но "реформаторы"-70 "сломали" дидактические и методические основы обучения в советской школе и заменили их антидидактическими. "Слом" — их термин, который они часто употребляли, когда вели идеологическую обработку общественного сознания: "необходимо сломать многие установившиеся традиции" [2, с. 26].

2. 1978 г. Оценка реформы Академией наук СССР

До 1978 г. Отделение математики АН СССР не принимало осмысленного участия в подготовке и проведении реформы. Оно отрядило на это дело одного из своих лучших представителей А. Н. Колмогорова и не тревожилось [1, с. 197]. Но когда "грянул гром", когда катастрофические результаты деятельности "реформаторов" скрыть за лживыми словами стало невозможно, когда академики воочию увидели, какое пополнение пришло к ним в вузы, они осознали, что произошло при их формальном участии. Лучшие из них, наиболее граждански ответственные (А. Н. Тихонов, Л. С. Понтрягин, В. С. Владимиров, И. М. Виноградов) вступили в открытую и бескомпромиссную борьбу с "реформаторами" и подняли на эту борьбу всё Отделение математики.

Постановление Бюро ОМ АН СССР от 10 мая 1978 г.:

> "1. Признать существующее положение со школьными программами и учебниками по математике неудовлетворительным как вследствие *неприемлемости принципов*, заложенных в основу программ, так и в силу недоброкачественности школьных учебников.
>
> 2. ... принять срочные меры к исправлению...
>
> 3. Ввиду создавшегося критического положения, ... рассмотреть возможность использования некоторых старых учебников..." [1, с. 200-201].

Подчеркнём главную, глубоко верную мысль этого Постановления, — *ложность принципов*, на которых строились новые программы. Выше в нашем исследовании мы, в сущности, подробно и многосторонне обосновывали и иллюстрировали эту мысль.

Правильным логическим следствием этой констатации было бы аннулирование всех идей и деяний "реформаторов" и возврат к старой программе и учебникам Киселёва. Это и было бы той самой "мерой", которая, действительно, "срочно" исправила бы положение. А после этого можно было бы спокойно подумать над настоящим совершенствованием подлинно хорошего образования и постепенно вносить в него глубоко и всесторонне обдуманные, выверенные широкой практикой, понятые и поддержанные учительством изменения. Постановление Бюро открывало такую возможность развития ситуации, — предлагало вернуться к старым учебникам, а значит, и к старой программе (правда, "в качестве временной меры"). Однако ситуация пошла по другому пути — по пути "совершенствования" "неудовлетворительных" программ и "недоброкачественных" учебников.

[2]Таков конечный результат внедрения в обучение маркушевичевского принципа "организации содержания посредством *обобщающих* идей" [3 (1993, № 6), с. 75].

И как же “реформаторам” удалось в такой почти безнадежной ситуации спасти совершенно проигранную партию? Очень тонкой психологической и политической игрой, опиравшейся на фундаментальную, стратегически дальновидную организационную и кадровую подготовку реформы. Проследим за эндшпилем.

Общее собрание ОМ АН СССР (с точки зрения реформатора). По решению Бюро, 5 декабря 1978 г. состоялось Общее собрание Отделения математики АН СССР, посвящённое результатам реформы. На собрание был вынесен вопрос: “О положении с математическим образованием в средней школе”. Представление о том, что происходило на этом собрании, можно составить по записям, которые недавно опубликовал его участник А. М. Абрамов [6, с. 27-44]. Собрание закономерно разделилось на три группы: принципиальные критики реформы, принципиальные защитники и принципиальные “середняки”. Приведём несколько характерных суждений.

> А. Н. Тихонов: “сложилась... критическая ситуация. ... Интерес к математике падает. Экзамен по геометрии из-за трудности курса не проводится. Стереометрия превратилась во второстепенный предмет. ... Но время идёт. Ребят калечат. (!!!) Бездействовать нельзя. *Каждый должен взять на себя смелость принять решение*” [там же, с. 30, 31, 41].
>
> В. С. Владимиров: “Курс пронизан формально-логическими схемами и теоретико-множественными понятиями. ... Курс геометрии хуже, чем курс алгебры. ... Главная трудность — широкое использование групповых представлений. Неудачно определение вектора, да и вообще векторная алгебра не нужна в школе. ... Предложения: 1) *переиздать старые учебники...*” [там же, с. 36-37].
>
> Л. С. Понтрягин: “В учебнике алгебры для VI класса уравнение вводится как предложение с переменными ... То, что написано об отношениях и функции, — *словоблудие*. ... Авторы оказались в плену у принятой идеологии. Ничего кроме *отвращения* все эти вещи вызвать не могут. Это *бедствие* (!). Это уже *политическое* (!) явление. ... Положение критическое” [там же, с. 39-40].
>
> А. В. Бицадзе: “То, что происходит, недопустимо” [там же].
>
> А. Н. Колмогоров: “... разговоры (?) о якобы (?) катастрофическом положении с математикой в средней школе представляются мне необоснованными” [там же, с. 36].
>
> С. Л. Соболев: “Изменения, осуществлённые в школьном курсе математики, — это настоящее крупное достижение (???). ... При этом, конечно, остались погрешности (?), которые во всяком новом деле неизбежны. ... Изменения были необходимы (?). Есть мировой стандарт (?). ... Введение элементов анализа в школу — большое социальное достижение (?). ... наши программы поднялись до мирового уровня” [там же, с. 37-38]. (А что это такое — “мировой стандарт”, “мировой уровень”? — И.К.)
>
> Л. В. Канторович: “Хочу присоединиться к тому, что говорил С. Л. Соболев... Ясно (?), что научно-техническая революция изменила требования к курсу математики. ... Если тянуть назад к Киселёву, то лучше себе (?) мы не сделаем. Проделанная большая работа — это гражданский подвиг (?) А. Н. Колмогорова” [там же, с. 38-39].
>
> С. М. Никольский: “Надо констатировать: 1) содержание школьной математики не менялось три четверти века (это не причина для изменений. — И.К.); 2) школе нужен анализ (зачем? — И.К.). Я читал учебник алгебры и начал анализа для IX класса. Хорошая книга (хороший учебник? — И.К.). Но ... она трудная (трудная, но хорошая? — И.К.). ... Есть большое увлечение множествами... А то, что А. И. Маркушевич написал, — непонятно” [там же].

Эти зарисовки сделаны А. М. Абрамовым[3], помощником А. Н. Колмогорова. Естественно, что он приглушает критику реформы и уравновешивает её выступлениями "реформаторов" и сочувствующих. Дополним картину выдержками из официальной стенограммы [Архив РАН. Ф. 1860. Оп. 1. Ед. хр. 83].

Фрагменты стенограммы:

> "А. В. Бицадзе. С 1972 г. ... я возглавлял Совет по математике для поступающих в вузы. Мне приходилось очень туго. Всё время задавали вопрос — что это происходит со школой, что это такое? Инженер выступает и говорит мне: вот я инженер, вот, пожалуйста, такого раздела я не понимаю. ... Лев Семёнович прав, действительно, очень большое *отвращение* к математике. ... Но игнорировать тот *факт, что от математики болеют дети*, никто не дал нам право это делать. ... Нужно принимать радикальные решения" [там же, л. 106-109].

> "М. И. Шабунин. То, что я собираюсь сказать, это ... *выражение мнения очень большой массы преподавателей*, и не только нашего, но и многих других вузов... они просили сказать, что *положение... критическое*... Мы имеем дело с контингентом поступающих в вуз..., имели возможность наблюдать, как под влиянием тех или иных явлений в школе изменяется облик их. Мы имеем 2-3 тысячи абитуриентов, отнюдь не слабейшую часть выпускников школ, ... новая программа... отличается... наличием многих таких *понятий, которые совершенно недоступны школьнику*... И другое... это формирование... *навыков... они сейчас утрачены огромной массой школьников.* Положение с геометрией особенно тревожное. ... Я присутствовал на совещании в Министерстве просвещения, ... было много учителей, ... и там был задан учителям прямо вопрос, ... если бы вам предложили преподавать сейчас геометрию в 6 классе по Киселёву, или по тому учебнику геометрии, который есть сейчас, что бы вы для себя выбрали? И я полагал, что будет примерно процентов 50. Что же получилось? Из всех учителей 5 человек воздержались, это те, которые не знали учебника Киселёва, все остальные дружно выступили за Киселёва" [там же, л. 89, 91-92].

Уместно припомнить реакцию "реформаторов", — подобные "разговоры" представляются им "необоснованными" (А. Н. Колмогоров).

> "А. Н. Тихонов. ... Товарищи, я не учился в средней школе, я в это время работал, учился вечерами и пользовался книгой Киселёва по геометрии. Всё было ясно, ... не было никаких вопросов. ... Когда я был учителем в средней школе, у нас никаких методических пособий не было, да и нужды в них не было, всё было ясно" [там же, л.123].

> "Г. Д. Беришвили. ... Я выступаю от имени Института психологии. Он пять лет ведёт наблюдения за разными вариантами и методами обучения в средней школе и сравнивает их. ... В начальной школе положение серьёзнее, и ошибки там гораздо труднее исправлять потом. Учитель им пишет $x + 3 = 5$. Дальше $x = 5 - 3$, $x = 2$. Я хочу обратить внимание на то, что обучают процедуре, и дети её очень хорошо запоминают, ... *дети не понимают* этой процедуры... Они не понимают, что уравнение это задача. ... Насчёт анализа... Я точно знаю (опрошено большое количество учеников, окончивших школу) что *ни один из учеников не понимал, что такое предельный переход.* Видимо, этот анализ надо осторожно вводить" [там же, л. 103-104].

[3] **Александр Михайлович Абрамов** (05.06.1946 – 24.05.2015) — в период подготовки реформы (1964-1970) студент МГУ; в 1970-1973 гг. аспирант А. Н. Колмогорова, под руководством которого защитил в 1975 г. диссертацию, "в которой было сделано полное построение геометрии на основе аксиоматики Колмогорова" [6, с. 21]. По его собственному признанию, проверял решения задач в учебнике Колмогорова и придумывал для учебника научное определение ломаной [7 (1994 № 6), с. 13]. При первом "демократическом" министре образования РФ Э. Д. Днепрове, советником которого он был, стал членом-корреспондентом РАО (1992). В последние годы был членом редколлегии журнала "Математика в школе" и боролся с новыми реформами.

Решение общего собрания ОМ АН СССР. Главная борьба развернулась при обсуждении проекта решения, подготовленного Бюро. Точнее по его первому пункту, в котором признавалось "неприемлемость принципов" реформы и "недоброкачественность учебников". Вот "аргументы" второй и третьей групп [там же, л. 106-109]:

> "С. Л. Соболев: Пункт о принципиальной неприемлемости ошибочен. Основные принципы построения школьного курса математики в ходе обсуждения не опровергнуты (опровергнуты жизнью. — И.К.). Например, все поддержали введение элементов анализа. ...
>
> А. Н. Колмогоров: Готов поддержать пункт о создании конкурсной комиссии.
>
> ZZZ: Принять, что существующие программы обладают недостатками, и привести замечания.
>
> А. Д. Александров: Я против теоретико-множественной идеологии, но не нужно резких решений.
>
> Д. К. Фаддеев: Пункт 1 сформулирован слишком сильно.
>
> Л. И. Седов: Надо сказать, что делать.
>
> Л. В. Канторович: Пункт 1 недопустим. Сегодня принципы построения не излагались вообще, но 10 лет назад были Отделением одобрены[4]. : Надо отметить недостатки, но катастрофы нет.
>
> С. М. Никольский: Поддерживаю А. Н. Колмогорова. Некоторые учебники надо заменить. Беспокоюсь, в частности, о своей внучке.
>
> К. К. Марджанишвили: Нужно принять проект решения в основном".

Качество аргументации "сочувствующих" говорит само за себя: "не нужно резких решений", "надо отметить недостатки" и "привести замечания". Вот какова была гражданская позиция большинства советских академиков. Так что Л. С. Понтрягин имел все основания сказать, — академикам не хватает гражданственности [8, с. 70]. Правда, сказал он это позже и в связи с другим обстоятельством, связанным с реформой[5].

---

[4]Это утверждение оказывается, по меньшей мере, сомнительным. В стенограмме: "Л. С. Понтрягин. ... Я утверждаю, что такого решения Отделения математики АН СССР не было, — я не знаю его. ... Л. В. Канторович. Было такое собрание... Я лично выступал на этом собрании. Л. С. Понтрягин: А кто подписал этот документ? Н. Н. Боголюбов (академик-секретарь Отделения. — И.К.). Я лично не помню такого документа. С. Л. Соболев. Мне кажется, мы зря тратим время на обсуждение мелочей. ... Текст был согласован. Я не помню (?), кто подписал и как ... А. Д. Александров. Заседание это было, я на нём выступал..." [там же, л. 17-18]. Обратим внимание, — вспоминают об этом собрании только три конкретных "реформатора", и даже академик-секретарь его не помнит.

[5]17.02.1983 г. в газете "Наука в Сибири", издаваемой Президиумом Сибирского отделения АН, появилась статья проф. Ю. И. Мерзлякова "Право на память", в которой он довёл до сведения общественности малоизвестный факт: "руководитель реформы получил в 1980 году премию в 100 000 долларов от государства, с которым СССР разорвал дипломатические отношения как раз в год начала реформ" (Notices American Mathematic Society. 1981. 28(1)). Добавим, — премия присуждена не за конкретные результаты, а "по совокупности" и — главное — в момент самой жестокой критики Академией наук СССР его реформаторской деятельности. Опубликование этого факта вызвало совершенно неадекватную бурю негодования в московских академических математических кругах, обвинивших автора в клевете, хотя сам факт премии никто не отрицал [6, с. 63-72]. А. Д. Александровым статья квалифицировалась, как "объективно антисоветская, субъективно подлая". Сибирскими академиками, наоборот, как патриотическая. Акад. Л. И. Понтрягин отвёл обвинение в клевете и оценил статью Ю. И. Мерзлякова "в целом положительно, так как она призывает к гражданственности, которой сильно не хватает нашим учёным". В своей книге он повторил: "Нет сомнений, что похвала врагов есть дурной признак. Стоит заметить, что сам А. Н. Колмогоров в это время получил Государственную премию Израиля. Возможно (!), там высоко оценили тот разгром, происходящий в средней школе Советского Союза" [8, с. 16]. Конечно, из данного факта можно делать выводы, которые бросают некоторую тень на имя Колмогорова. Но следует ли отсюда, что этот факт надо скрывать? Факт этот не столько порочит Колмогорова, который не может быть виноват в том, что кто-то присудил ему премию, главное — он, возможно, проявляет силы, которые использовали имя Колмогорова и были заинтересованы в реформе-70 и в сохранении её результатов.

Но результат наших собраний, как мы знаем, определяется не аргументами, а тактической подготовкой заинтересованных групп и председателем. В середине собрания председатель Н. Н. Боголюбов исчезает. Вместо него появляется Ю. В. Прохоров, который объявляет:

> "Уважаемые товарищи! Николай Николаевич Боголюбов пришёл на Общее собрание, будучи больным и просил согласия Отделения поручить председательствование дальше мне, как своему заместителю. Если вы не возражаете, я буду вести дальше заседание. Переходим к прениям" [Архив РАН. Ф. 1860. Оп.1. Ед. хр. 83. Л. 56].

Более корректно было бы перед уходом обратиться к собранию самому Н. Н. Боголюбову. Отметим также, — Ю. В. Прохоров — ученик А. Н. Колмогорова. Уже в первой части заседания он обозначил свою позицию, отмежевавшись от решения Бюро [там же, л. 38]. Став председательствующим, он попытался заблокировать принятие решения:

> "Никаких решений не должно приниматься.
>
> Л. С. Понтрягин. ... Зачем тогда все эти разговоры?" [там же, л. 72].

Была создана редакционная комиссия, которая представила проект, опустив из решения Бюро "использование некоторых старых учебников". В первом пункте в конце была оставлена "неприемлемость принципов". Звучит предложение первый пункт голосовать отдельно. С. Л. Соболев категорично настаивает:

> "выбросить из него последнюю фразу и потом проголосовать" [там же, л. 137].

Ю. В. Прохоров без обсуждения принимает этот наказ и сразу ставит на голосование урезанный первый пункт. Результат: за – 26, против – нет, воздержались – 2 (Колмогоров, Канторович) [там же].

Итак, два самых главных утверждения Постановления Бюро выброшены из Решения. Основные пункты Решения общего собрания Отделения математики АН СССР от 5 декабря 1978 г. следующие:

> "1. Признать существующее положение со школьными программами и учебниками по математике неудовлетворительным (почему? — И.К.).
>
> 2. Считать вновь представленную Министерством просвещения СССР программу по математике для средней школы неудовлетворительной (почему? — И.К.)...
>
> 3. Создать Комиссию...
>
> 4. Одобрить инициативу Министерства просвещения РСФСР по созданию проектов экспериментальных программ...
>
> 5. Рекомендовать Министерству просвещения РСФСР объявить открытый конкурс на написание экспериментальных учебников..." [1, с. 201].

Обратим внимание на то, что в результате реформаторской кастрации первые два пункта решения остались необоснованными (сравните с решением Бюро), мотивировка решения выкинута. Вот как великими математиками может игнорироваться строгость логики, когда им это надо.

Бессилие. Данное решение выглядит сильным. На деле же оно оказалось бессильным, ибо скрыло причину катастрофы, не выбросило из программ все порочные принципы их составления, не пресекло отчаянной активности "реформаторов", не остановило падения качества математического образования[6].

[6] Тот же А. М. Абрамов признаёт: "И качество учебников, и уровень математической подготовки резко снизились. Если бы математическое сообщество сегодня решилось посмотреть правде в глаза и объективно оценить ситуацию, то результаты бы ужаснули" [6, с. 54] (! — верно. — И.К.). Причиной этого падения он называет не реформу, а ... "решение собрания" (??) [там же, с. 53].

“Реформаторы” заставили коллектив Отделения математики АН не касаться принципов реформы, т.е. не вскрывать причины её провала, аннулировали предложение вернуться к учебникам Киселёва (тем самым заблокировали единственный путь реального исправления ситуации) и направили действия по “исправлению” в нужное им русло “совершенствования” принципиально порочных программ и построенных на них порочных учебников. Этим и занялись оба министерства при участии некоторых академиков.

Правильной “мерой” (“принять меры!”) может показаться решение создать новые экспериментальные программы и с помощью конкурса “написать” новые хорошие учебники. Но поскольку порочность реформаторских принципов осталась не осознанной (кроме теоретико-множественного подхода), все новые программы и учебники вольно или невольно продолжали составляться под влиянием ставших привычными требований повышения научности (логическая систематика, общность, строгость и пр.). Тем самым консервировались все негативные результаты реформы.

Решение срочно “написать” учебники, альтернативные реформаторским, тоже было дилетантским. И жизнь скоро это доказала. Проблема учебника не может быть решена бюрократическими “мерами”. Она решается только талантливым педагогом в течение всей его педагогической жизни (А. П. Киселёв). Более того, решается не одним, а несколькими поколениями лучших педагогов, каждое из которых опирается на достижения предыдущих. Киселёв венчает этот титанический труд. На подобный труд не способны современные дипломированные методисты, а тем более профессора и академики математики, да он и невозможен в наших непрерывно изменяемых условиях.

3. 1978-1986. Удержание и закрепление результатов реформы

Восемь лет (1978-1986 гг.) – критические для “реформаторов” годы панического удержания результатов реформы-70 и спасения своих учебников, или, в формулировке Р. С. Черкасова, “закрепления достигнутых успехов”.

Замалчивание и “совершенствование”. Поначалу “реформаторы” пытались замалчивать или обелять результаты своей работы, — педагогическая печать была под их контролем. В частности главный редактор журнала “Математика в школе” Р. С. Черкасов отказал в публикации полного текста Решения ОМ АН СССР академику-секретарю Н. Н. Боголюбову [1, с. 109]. Каково! Знал силу “реформаторов”.

Вместе с тем Черкасов опубликовал частное мнение одного из главных идеологов и защитников реформы, директора Сибирского математического института АН С. Л. Соболева и его подчинённого, Л. В. Канторовича, в котором они “пытались ввести в заблуждение общественность” [там же]. В частности они беззастенчиво утверждали:

> “по общему (?) мнению, окончившие школу по новой программе оказались лучше или, во всяком случае, не хуже подготовленными к восприятию вузовских курсов, чем абитуриенты прошлых лет” [3 (1979, № 4), с. 9].

Обратите внимание, — качество знаний подменяют “подготовленностью к восприятию”. Всегдашняя неопределённость выражений и подмена смыслов! И помните метод “реформаторов”-36, — когда нужно, смело называть чёрное белым и наоборот.

Но массовая пресса полнилась тревожными письмами вузовских преподавателей, учителей, отчаянными письмами родителей, детей. Один пример — письмо учащихся в “Комсомольскую правду”:

> “нам никак не одолеть программу по математике, ... многого не понимаем, зубрёжкой не возьмёшь ... такие заумные учебники...” [9, с. 104].

Тем временем проводники и руководители реформы в Министерстве просвещения СССР подчищали “погрешности” и лечили “болезни роста” — судорожно “совершенствовали” программы, "исправляли" учебники, "переподготавливали" учителей. Персоналии: министр М. А. Прокофьев[7], его заместители — М. И. Кондаков[8], В. М. Коротов[9]. Работа МП СССР шла в тесном контакте с АПН СССР. Ситуация, конечно же, не улучшалась.

Анализ академика Л. С. Понтрягина. В 1980 г. Л. С. Понтрягин попытался апеллировать к высшему руководству страны, и казалось, небезуспешно, — его поддержал орган ЦК журнал "Коммунист" — и опубликовал гневную, глубоко аргументированную статью "О математике и качестве её преподавания" [8, с. 100-110]. В этой статье он высокопрофессионально проанализировал идеологию "реформаторов" и вскрыл коренную причину провала реформы:

> "Современные школьные учебники по математике... несостоятельны по своему существу (!!), поскольку выхолащивают (!) суть математического метода" [там же, с. 105-106].

Реформаторскую программу он назвал "нарочито усложнённой..., вредной по своей сути" [там же]. Его итоговый вывод:

> "главный порок, конечно же, в самом ложном принципе — от более совершенного его исполнения школа не выиграет" [там же, с. 106].

Статья получила огромный резонанс в обществе. "Редакция познакомила с нею многих специалистов. ... Мнение всех сходится: принципиальная оценка Л. С. Понтрягиным сложившегося положения с преподаванием математики в средней школе справедлива" [4 (1980, № 4), с. 99].

Журнал, как было принято в те времена, потребовал от Министерства "в кратчайшие сроки выработать конкретный план мероприятий по решительному улучшению дела... и обеспечить высокую меру ответственности за реализацию его" [там же, с. 112]. Слова, слова... В 1981 г. Министерство просвещения СССР (Ю. Иванов) заверило редакцию в том, что оно "после критических выступлений журнала... сосредоточило внимание на подготовке более доступных для школы учебников математики" [4 (1982, № 2), с. 126].

Статья Л. С. Понтрягина дошла до Политбюро, и в Отчётный доклад Л. И. Брежнева XXVI съезду партии была вставлена фраза: "Качество школьных программ и учебников нуждается в улучшении... . Министерству просвещения, Академии педагогических наук нужно немедля исправлять такое положение" [там же, с. 125]. О том, как они выполняли "поручение" Генерального секретаря и "исправляли положение", расскажем немного позже.

Анализ академика А. А. Логунова. Поддержал Л. С. Понтрягина и вице-президент АН СССР, ректор МГУ, академик-физик А. А. Логунов, — в своём выступлении на сессии Верховного Совета СССР в октябре 1980 г. он дал краткий и глубокий анализ происшедшего:

> "Прежняя система преподавания математики складывалась многими десятилетиями. Она постоянно совершенствовалась и, как мы знаем, дала блестящие плоды. Все выдающиеся научно-технические достижения прошлого и настоящего в большой степени обязаны этой системе преподавания математики. Вместо того, чтобы и далее совершенствовать эту систему с учётом преемственности, вводя в неё новые научно обоснованные педагогические разработки, Министерство просвещения СССР несколько лет назад без достаточно глубокого и всестороннего изучения существа дела

[7]**М. А. Прокофьев** (1910-1999) — учёный-химик; с 1946 г. — сотрудник МГУ; 1951-1966 — зам. министра ВССО СССР, доктор хим. наук (1963); 1966-1984 — министр просвещения СССР, академик АПН (1967), член ЦК (1971).

[8]**М. И. Кондаков** (1920-2012), в 1948-1965 гг. — сотрудник АПН ("научные" труды: "Планирование работы рай(гор)оно", "Инспектирование работы отделов народного образования", и т.п.); в 1965 г. — директор НИИ АПН и член-корр. АПН; с 1967 по 1975 г. — зам. министра просвещения СССР; с 1976 по 1981 г. — вице-президент АПН, с 1981 по 1987 г. — президент АПН.

[9]**В. М. Коротов** (1928-1999) — с 1967 г. работник министерства просвещения СССР, в 1974 г. издал "труд" — "Развитие воспитательных функций коллектива"; с 1977 по 1985 г. — зам. министра просвещения СССР; чл.-корр. АПН (1985).

> осуществило крутой поворот в преподавании математики. Изложение её сейчас идёт абстрактно, оторвано от реальных образов (!), пронизано сплошь наукообразием. А отсюда возникли такие “шедевры”-учебники, изучение которых способно полностью уничтожить не только интерес к математике, но и к точным наукам вообще” [4 (1980, № 18), с. 120].

А. А. Логунов пророчески предрёк то, что мы и получили сегодня. Это выступление слышали все высшие руководители страны. И какой же вывод они сделали? Только тот, что “нужно немедля исправлять” (Л. И. Брежнев). Что исправлять и как, — они не поняли. А ведь А. А. Логунов объяснил им простым и понятным языком, что качественное образование складывается “многими десятилетиями” и поэтому недопустим “крутой поворот”, что “реформаторы” не понимают “существа дела”, что суть их идеологии — “наукообразие” и что закономерное следствие этой идеологии — вредоносные учебники и отвращение учащихся “к точным наукам вообще”.

А. А. Логунов подтвердил, что не было никакой объективной необходимости слома прекрасно работавшей системы, которая в прошлом и в настоящем “дала блестящие плоды”. В сущности, он предложил и меры “исправления” — вернуться к прежней системе преподавания (и, конечно, к учебникам) и неторопливо, осторожно, вдумчиво, подлинно научно обоснованно совершенствовать её.

Наши управленцы-80 выбрали иной путь и не без труда, но преодолели сопротивление академиков с помощью тонкой психологической уловки — предложили им самим писать учебники.

Почему же замолк “Коммунист”? В 1982 г. журнал “Коммунист” вернулся к теме и опубликовал множество очень авторитетных откликов в поддержку позиции Л. С. Понтрягина (всего было получено “около двухсот откликов”) [4 (1982, № 2), с. 125]. И, как ни странно, на этом тема была закрыта.

Почему? Разве принятые министерством “меры” привели к исправлению ситуации? Нет, она ухудшалась. Почему же замолк “Коммунист”? Почему архиважная государственная проблема падения качества образования страны перестала беспокоить ЦК и Политбюро? Очевидно, тема эта была кем-то заблокирована на самом верху.

Внимание ЦК было в 1984 г. искусно переключено на новую реформу. Кем-то была вновь реанимирована дважды провалившаяся идея политехнизации школы. Цель сформулировал в журнале “Коммунист” секретарь ЦК М. В. Зимянин:

> “Важной и, в сущности, новой задачей общеобразовательной школы выступает обеспечение в старших классах сочетания политехнической трудовой подготовки с профессиональной” [4 (1984, № 7), с. 26].

Дважды не достигнутая цель сочетания политехнической подготовки с учебной теперь сочетается ещё и с профессиональной подготовкой. Для “обеспечения” срок учёбы вновь увеличен до 11 лет, а значит, нужно вновь менять учебные планы и программы. Непрерывная дестабилизация, хаотизация — базовый метод разрушения

Совершенствование. Итак, ситуация ухудшалась, и общество к ней привыкало. Привыкли и академики, — энергию их возмущения переключили на совершенствование программ и “написание” учебников. Тем самым был надёжно сохранён ВТУ-принцип реформы (разве могут академики понизить “научно-теоретический уровень”?) и внесён разлад в их отношения. Академики разделились на три конкурирующие группы — группа А. Н. Тихонова, группа А. Н. Колмогорова и группа Л. С. Понтрягина — и ввязались в аппаратные интриги, где ими легко манипулировали скрытые мастера. Этот подтверждает Ю. М. Колягин — педагогический руководитель группы А. Н. Тихонова, непосредственный свидетель этих отношений: “Из-за интриг (увы, скорее политического характера) возникли разногласия между некоторыми академиками-математиками” [1, с. 206].

Силы групп были не равны. Группе А. Н. Колмогорова, естественно, покровительствовал главный официальный “шеф” реформы — член ЦК, министр М. А. Прокофьев. Председателем

Комиссии по математике Учёного методического совета МП СССР (его главные функции — утверждение программ и учебников) был в 1980 г. поставлен вместо А. Н. Колмогорова другой академик, его "защитник" А. Д. Александров, который тоже стал писать свой научный учебник геометрии (естественно, в соавторстве).

Отделение математики АН СССР создало Комиссию по школьному математическому образованию (председатель И. М. Виноградов, затем, после его смерти в 1983 г. — Л. С. Понтрягин). Некоторое представление о работе Комиссии, о противоречиях и борьбе внутри неё даёт материал, опубликованный по требованию Л. С. Понтрягина журналом "Математика в школе" [3 (1984, № 6), с. 72-74]. В нём приведены решения трёх заседаний комиссии 1984 г., посвящённых учебникам. Решения эти нацелены на недопущение в школу учебников, подготовленных группой акад. А. Н. Тихонова. Аргументация чисто реформаторская: "нельзя допустить снижения теоретического уровня" [там же, с. 72].

В итоге, полный контроль над "совершенствованием" сохранили "реформаторы". Сотрудники АПН В. В. Фирсов, А. М. Абрамов, Н. Н. Решетников[10] разработали в 1981 г. проект новой, "компромиссной" программы, убрав теоретико-множественное наполнение и, как они говорят, "выделив инвариантную часть" всех трёх проектов [6, с. 46]. На согласование интересов (учебники!) всех трёх групп ушло ещё 4 (?!) года (а детей тем временем продолжали "калечить", по выражению акад. А. Н. Тихонова). Понадобился ещё один "компромисс" — договорились (?) пользоваться в школах учебниками всех трёх групп ("три вариативные части" [там же]). Таким образом, окончательно уничтожался принцип единого стабильного учебника. После четырёхлетних "переговоров и обсуждений компромисс был достигнут, — программы утверждены" [там же] в 1985 г.

Такую историю рисует А. М. Абрамов. Он представляет нам всё это как добровольный разумный "компромисс". Однако вряд ли Л. С. Понтрягин мог пойти на "компромисс" с "вариативностью" учебников. В решении Комиссии было записано:

> "Необходимо взять курс на стабилизацию учебников математики. После начальной школы учебники математики должны быть едиными по всей стране. Это создаст деловую обстановку работы учителей и обеспечит накопление и развитие педагогического опыта" [3 (1984, № 6), с. 72].

Л. С. Понтрягин предчувствовал, куда "реформаторы" приведут школу, и предупреждал, что наметившаяся в результате реформы-70 "вариативность" разрушит профессиональное взаимодействие учителей, не позволит накапливать опыт и совершенствовать преподавание. Что мы и получили сегодня и, как всегда, в значительно усиленном варианте. Каждый учитель работает по-своему, как хочет, его творческая энергия "раскрепощена". Результат этого спровоцированного массового "творчества" — отвращение детей к учёбе.

Одна компромиссная нелепость повлекла другую управленческую нелепость:

> "школам предлагалось начать работу по этой программе уже в 1985/86 учебном году (через два месяца после её утверждения). Более того, рекомендовалось одновременно обсуждать и корректировать эту программу. Школы вынуждены были к тому же пользоваться "старыми", реформенными учебниками (теми же самыми, подправленными и подлатанными)" [1, с. 206].

Взгляд общественности на всю эту управленческую деятельность по спасению реформаторских учебников ярко отражён газетой "Известия" (26.02.1986):

> "Сейчас, когда учебные программы для 11-летней школы практически утверждены и готовятся соответствующие им учебники, надо полагать, всё пойдёт по старой, хорошо наезженной дороге. Очевидно, в скором времени последует частичная корректировка программ с учётом требований самой жизни, потом вторая корректировка,

[10] Сотрудники лаборатории обучения математике НИИ СиМО АПН СССР — того самого, созданного "реформаторами" в 1944 г.

> а за ней углублённая. Надо ли говорить, что далее начнутся исправления, дополнения учебников... Так возникает обычная суета, суматоха, создающая видимость дела. *И виновных спустя годы не сыщешь.*
>
> Так не настал ли час разобраться в былых ошибках, чтобы не повторять их в будущем? ...Но по непонятным причинам почти все учебники сплошь и рядом создавались в единственном варианте. И то обстоятельство, *что их дорабатывали по 10-15 лет, так и не добившись надлежащего уровня*, никого не останавливало. Мало того, разработана специальная система мер по внедрению и закреплению этих книг в школе.
>
> Среди этих мер предмет гордости Минпроса СССР и республиканских минпросов — *массовая переподготовка учителей* в связи с введением новых учебников. Например, газета украинских учителей "Радяньска освита" от 23.08.85 г. не без энтузиазма сообщает: "за три последних года в республике практически все учителя математики (примерно 50 тысяч) по 2-3 раза побывали на курсах переподготовки (и это только в связи с введением в школу учебника геометрии А. В. Погорелова)". Вникнем, что стоит за упомянутым сообщением. Оказывается, из-за одного лишь учебника 50 тысяч учителей республики на 2-3 месяца были оторваны от своих учеников... Переподготовка учителей нужна, но то, что началось в *семидесятые годы*, и продолжается по сей день, — это не столько повышение квалификации, сколько *меры по приспособлению учителей к учебникам, не выдержавшим испытания школой.* ... Думается, если подсчитать, сколько стоило государству насильственное насаждение учебников, то окажется, что за эти деньги можно было бы дважды создать новые учебники, нужные школе, и напечатать их золотыми буквами".

1986 г. "Компромисс" учебников. В 1986 г. под патронажем РАО объявлен Всесоюзный конкурс на новые школьные учебники математики (председатель жюри — академик РАО Н. И. Шкиль). Результаты этого "конкурса" были предопределены известным компромиссом 1985 г. Через год (?) подведены итоги. Как и обещали сочинители "компромиссной" программы, лауреатами стали учебники всех трёх групп: "подлатанные" реформаторские — Ю. И. Макарычева и К°, проф. Н. Я. Виленкина и К°, акад. А. Н. Колмогорова и К°, акад. А. Д. Александрова и К°; от второй группы — учебники под редакцией акад. А. Н. Тихонова (Ш. А. Алимов, Л. С. Атанасян и др.); от группы Л. С. Понтрягина — учебник геометрии, написанный одним автором, акад. А. В. Погореловым [1, с. 207].

Последний учебник заменил в школе учебники геометрии А. Н. Колмогорова (6-8-е классы) и З. А. Скопеца (9-11-е классы), после которых Министерство вынуждено было отменить экзамен по геометрии. Однако новый учебник сохранил реформаторский принцип строгого аксиоматического изложения. Результат — геометрия стала самым нелюбимым предметом, усваивают её сегодня менее 1% учащихся [3 (2002, № 2), с. 63]. В 2000 г. обновленный состав ФЭС снял с учебника гриф "рекомендовано" и сделал вывод: "нужно отказаться от самой идеи аксиоматического изложения" [3 (2001, № 5), с. 50].

Конечный результат "совершенствования" — тот же, что и планировался изначально, — *"коренное" изменение программ и учебников и "повышение уровня". Все задумки "группы-36", все до одной воплощены в жизнь.* Единственное, чем из своих "достижений" пожертвовали "реформаторы", — это теоретико-множественное наполнение. Но это совсем не главное. Теоретико-множественный "подход" наиболее ярко высветил всё педагогическое уродство реформаторских принципов (достаточно вспомнить замену равенства фигур их "конгруэнтностью") и принял на себя всю энергию общественного возмущения. Отвлёк тем самым внимание от всех других реформаторских пороков.

Ликвидация этой идеи в программах и учебниках создала в педагогических кругах иллюзию "выздоровления нашей школы от теоретико-множественного недуга" [1, с. 205], избавления от кошмаров реформы и удовлетворения от мнимой победы. В то время как все главные принципы реформы остались нетронутыми, сделались привычными и воплотились в новых учебниках. Этот факт с гордостью подтверждают и сами “реформаторы”:

> “принятие программы 1981 года всеми сторонами означало: основные идеи А. Н. Колмогорова в построении школьного курса математики были одобрены. Существующий сегодня (2003 г. — И.К.) курс также сохраняет многое из того, что было сделано в 60-70-е годы, включая многие учебники¿ [6, с. 51-52].

1986 год — великий год для племени “реформаторов”. Реформа, которую они готовили на протяжении всего XX века, которой отдали столько времени и сил, преодолела все препятствия и стала необратимой.

4. Крах аналогичных реформ на Западе

Знаменательно, что ещё раньше, в 50-60-х годах XX в. подобная реформа была проведена в ведущих западных странах (Франция, Англия, Бельгия, США, Канада [1, с. 192]) и окончилась крахом.

> “Так, ещё в 1972 г. Парижская академия наук обнаружила, что такой “современный” подход к школьному обучению математике не только не улучшает результатов обучения, но порождает массу плохих учебников и столь же плохих (нередко ошибочных) методов обучения” [там же, с. 204].

На II Международном конгрессе 1972 г. все идеи модернистов были подвергнуты резкой критике [2, с. 264-274]. На III конгрессе (Карлсруэ, ФРГ, 1976 г.) во всех докладах звучало, что “реформа не оправдала надежд” [там же, с. 287] и следует вернуться к традиционным методам преподавания.

Знаменитый французский математик, автор теории катастроф Рене Том сделал на II конгрессе доклад[11], в котором “со злой иронией” проанализировал идеологию “реформаторов” и доказал её принципиальную порочность, которую не видят “лишь догматические умы (а их среди модернистов хватает)” [2, с. 264]. Его вывод:

> “Наступило время прекратить давать обещания, которые являются простым обманом. (!) Чудес не бывает, и нельзя надеяться на что-либо большее, чем осторожное, маленькими шагами, локальное улучшение существующего положения” [там же, с.274].

Другой крупный математик, финн Ральф Неванлинна раскритиковал международных “реформаторов” ещё раньше, в 1966 г. Его вывод:

> “Несерьёзные попытки “модернизации” преподавания исходили от людей, которые были обуреваемы близоруким восхищением перед всяческими новшествами, но не понимали основных особенностей развития математики за последние годы” [там же, с.238].

Французский математик Жан Лёре назвал ситуацию, сложившуюся после реформ во Франции “извращённой” и констатировал полную *некомпетентность* “реформаторов”, которые проводили реформу “с самонадеянностью, основанной на непонимании, что не могло не привести к катастрофе” [1, с. 204]. Как точно подмечена причина самонадеянности!

---

[11] Текст доклада см.: [2, с. 264-274; 3 (1973, № 1), с. 89-93].

5. Как объяснить?

Наши “реформаторы”-70 знали всё это и тем не менее довели свою реформу до заранее известного результата. После краха их реформы на Западе. Как это можно объяснить?

Более того, после того, как результаты их реформы стали так же очевидны (катастрофическое падение знаний абитуриентов в конце 1970-х гг.), все главные завоевания “реформаторов” были косметически подправлены (под видом “совершенствования” программ и учебников) и сохранены.

Оцените факт: **ни Академия наук, ни даже сам ЦК не смогли исправить положение и предотвратить закрепление результатов реформы в 1980-х. Как это можно понять?** И что за непобедимые силы вели реформу и держали её результаты?

Л. С. Понтрягин сравнил реформу-70 с “огромной общегосударственной диверсией” [8, с. 14].

Знаменитый педагог-новатор В. Ф. Шаталов считал, что

> “Колмогоров уничтожил математику на корню. Если бы я был агентом ЦРУ и получил задание отбить у советских школьников любовь к математике, я поступил бы, как Колмогоров” [7, (1995, № 49), с. 6].

Но В. Ф. Шаталов не знал, что роль А. Н. Колмогорова была здесь далеко не главной.

В связи с проведённым в предыдущих статьях ретроспективным исследованием возникает и общий вопрос: **как объяснить постоянную реанимацию и настойчивое внедрение в наше образование идей, которые ранее проявили на практике свою разрушительную силу?** Отсчёт можно вести с 1951 г., с идеи “политехнизации”. Все такие идеи при своём возрождении чуть-чуть видоизменялись и получали иные названия. Так, принцип 1920-х годов — “учебник не должен быть стабильным” — превратился в принцип “вариативности”, “комплексные программы” — в “интегрированные учебные курсы”, “трудовая школа” в “политехническую”, а затем почти в “профессиональную”, теперь в “профильную”, “измерители знаний”, которые разрабатывал в 1930-х гг. научный сотрудник кабинета математики НИИ средней школы С. Н. Шредер[12], трансформировались в тесты ЕГЭ, и т.д., и т.п.

Как объяснить всегдашнее циничное игнорирование предостережений и протестов опытных методистов и учителей?

Как объяснить игнорирование и даже искажение результатов практического опыта?

> А. Н. Колмогоров в 1960-х гг. утверждал, что его идеи прошли опытную проверку и практика доказала доступность его учебника учащимся: “под моим руководством курс алгебры и начал анализа был в 1966-1968 гг. проработан в девятых и десятых классах 3-й болшевской школы Московской области... Эксперимент... закончился успешно” [2, с. 75].

Как объяснить позицию вышестоящей власти? Как объяснить спокойствие ЦК?

Почему в с е нововведения в наше образование приносили школе только вред? Самый общий и главный вопрос. **Только вред!** Это вывод старых новочеркасских учителей В. К. Совайленко и О. В. Лебедевой, которые были непосредственными свидетелями всех этих инноваций и ощущали на себе и своих учениках все их губительные последствия. Они перечисляют эти вредоносные новации: внедрение в школу “научных” разработок АПН, шельмование учителей-новаторов, усложнение начального обучения, уничтожение классической методики,

[12] Примеры измерителей по теме “Треугольник”: “Закончите фразу: “равными называются фигуры, которые...”. ... Какая прямая называется наклонной по отношению к другой прямой?” (Науч. Арх. РАО. Ф.11. Оп. 1. Ед. хр. 148. Л. 48-68). Отзыв старого методиста Н. Извольского: “Статья тов. Шредера — вредная статья ... для ещё большего развития «зазубривания»” (там же, л. 45).

разрушение системы обучения письму, системы повторения, системы доступного и развивающего обучения, внедрение в школу “бутафорных учебников” [10]. Можно добавлять много другого: замена разноуровневых парт одинаковыми столами, что привело к массовому искривлению позвоночников детей и ухудшению их зрения, введение кабинетной системы, укрупнение школ, и т.д., и т.п.

Непрерывная хаотизация процесса образования всей страны продолжается поныне: демократизация, гуманизация, гуманитаризация, дифференциация, компьютеризация, ЕГЭизация и пр., и пр., и пр.

Вывод академика В. И. Арнольда. После разрушения Союза ССР и последовавших политико-экономических “реформ” ответы, в которые трудно было поверить раньше, становятся всё более очевидными и убедительными. Приведём откровенный вывод академика В. И. Арнольда, сделанный им в 2001 г. после беседы с неодемреформаторами из ясинской ВШЭ об их последних планах реформирования образования:

> “**«антинаучный заговор»** (о котором я раньше не подозревал), действительно, по-видимому, **существует** (и, естественно, что его частью является стремление его скрыть)” [11, с. 41-42]. И далее: “... подготавливается опасное **преступление** против традиционно высокого образовательного и культурного уровня России — реформа, осуществление которой нанесло бы долговременный и трудно поправимый вред могуществу нашей страны — и интеллектуальному, и индустриальному, и военному, т.е. оборонному, а наших потомков всё это реформирование сделало бы несчастными” [там же, с. 44].

Литература

1. Колягин Ю.М. Русская школа и математическое образование. Наша гордость и наша боль. - М.: Просвещение, 2001.

2. На путях обновления школьного курса математики : Сборник статей и материалов / сост.: Маркушевич А.И., Маслова Г.Г., Черкасов Р.С. - М.: Просвещение, 1978.

3. Математика в школе. - 1967, № 4; 1973, № 1; 1976, № 1; 1979, № 4; 1980, № 3; 1984, № 6; 1993, № 6; 2001, № 5; 2002, № 2.

4. Коммунист. - М., 1980, № 4, № 18; 1982, № 2; 1984, № 7.

5. Советский энциклопедический словарь. - М.: СЭ, 1980.

6. Абрамов А.М. О положении с математическим образованием в средней школе (1978-2003). - М.: Фазис, 2003.

7. Учительская газета. - 1994, № 6; 1995, № 49.

8. Понтрягин Л.С. Жизнеописание Льва Семёновича Понтрягина, математика, составленное им самим. Рождения 1908, г. Москва. - М.: ИЧП “Прима В”, 1998.

9. Понтрягин Л.С. О математике и качестве её преподавания // Коммунист, - 1980. - № 14.

10. Совайленко В.К., Лебедева О.В. Школа и дети в опасности // Педагогический вестник. - 1999. - №№ 5-7.

11. Образование, которое мы можем потерять: Сборник / под общ. ред. акад. Садовничего В.А. - М.: МГУ, ИКИ, 2002.

Костенко Игорь Петрович,
г. Краснодар, доцент,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail:kost@kubannet.ru

Многочлены с одним неизвестным (окончание)

А. Р. Рязановский

Окончание статьи о многочленах с одной переменной для учащихся профильных физико-математических классов (начало статьи в предыдущем номере журнала). Автор использует этот материал как теоретические сведения сначала в 8-х математических классах[1] (ознакомление), затем в 10-х классах как закрепление тем, изученных ранее. Дети самостоятельно изучают написанный текст, а затем учитель отвечает на их вопросы. Кроме этого, они выполняют специально разработанные для них практические задания. Изучаемый учащимися текст специально адаптирован для их возраста. В 10-м классе текст может быть приближен к математическому, если уровень учеников класса позволяет ввести абстрактное понятие алгебраического кольца.

9. Взаимно простые многочлены

Два многочлена $p(x)$ и $q(x)$ называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1. Напомним, что НОД двух многочленов определён с точностью до числового множителя, отличного от нуля. Это значит, что если для нахождения НОД двух многочленов $p(x)$ и $q(x)$ был использован алгоритм Евклида и последний ненулевой остаток, полученный в результате применения алгоритма равен числу (многочлену нулевой степени), отличному от нуля, то многочлены $p(x)$ и $q(x)$ взаимно просты.

Если многочлены $p(x)$ и $q(x)$ с действительными коэффициентами разложены на линейные множители или на линейные и квадратичные множители, имеющие отрицательные дискриминанты, то убедиться во взаимной простоте многочленов совсем просто, а именно: в случае, когда в разложенных многочленах $p(x)$ и $q(x)$ нет совпадающих множителей, многочлены $p(x)$ и $q(x)$ взаимно просты.

Приведём примеры взаимно простых многочленов:

1) любая пара многочленов нулевой степени, например, $p(x) = 1,21$ и $q(x) = 120$;

2) x и $2x + 1$;

3) $5x - 1$ и $x^2 - 4x + 5$;

4) $(x - 4)(x^2 + x + 5)$ и $2(x + 2)(x^2 - x + 1)$.

Отметим два свойства взаимно простых многочленов, которые аналогичны свойствам взаимно простых чисел.

1. *Если многочлены $p(x)$ и $q(x)$ взаимно просты, то существуют такие многочлены $f(x)$ и $g(x)$, что для любых действительных x выполняется равенство*

$$p(x) \cdot f(x) + q(x) \cdot g(x) = 1$$

и, наоборот, если для некоторых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ выполняется указанное равенство, то многочлены $p(x)$ и $q(x)$ взаимно просты.

[1] Школы № 179 г. Москвы

Например, для многочленов $p(x) = 1{,}21$ и $q(x) = 120$ имеем $f(x) = 100$ и $g(x) = -1$.

Для многочленов $p(x) = x$ и $q(x) = 2x + 1$ имеем $f(x) = -2$ и $g(x) = 1$.

Пример. Докажите, что многочлены $p(x) = x^2 + 4x + 5$ и $q(x) = x + 1$ взаимно просты.

Доказательство. Запишем тождество $p(x) \cdot A + q(x) \cdot (Dx + C) \equiv 1$, т.е. $(x^2 + 4x + 5) \times \times A + (x + 1) \cdot (Dx + C) \equiv 1$. Приведём многочлен слева к стандартному виду: $(A + D)x^2 + + (4A + D + C)x + (5A + C) \equiv 1$. Из условия равенства многочленов следует равенство коэффициентов этих многочленов при одинаковых степенях переменной x слева и справа. Получим систему

$$\begin{cases} A + D = 0, \\ 4A + D + C = 0, \\ 5A + C = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -A, \\ 4A + (-A) + C = 0, \\ 5A + C = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = -A, \\ 3A + C = 0, \\ 5A + C = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -A, \\ 3A + C = 0, \\ 2A = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -0{,}5, \\ C = -1{,}5, \\ A = 0{,}5. \end{cases}$$

Окончательно получаем $(x^2 + 4x + 5) \cdot 0,5 + (x + 1) \cdot (-0{,}5x - 1{,}5) \equiv 1$. Следовательно, $f(x) = 0{,}5$, $q(x) = -0{,}5x - 1,5$. Значит, многочлены взаимно просты.

2. *Если НОД$(p(x); q(x)) = D(x)$, то многочлены $p_1(x) = \dfrac{p(x)}{D(x)}$; $q_1(x) = \dfrac{q(x)}{D(x)}$ взаимно просты, то есть если каждый из многочленов $p(x)$ и $q(x)$ разделить на их наибольший общий делитель $D(x)$, то полученные в результате многочлены $p_1(x)$ и $q_1(x)$ будут взаимно простыми.*

Понятие НОД$(p(x); q(x))$ используется при сокращении дробей. Сократить дробь — это значит разделить её числитель и знаменатель на их НОД.

10. Наименьшее общее кратное двух многочленов

Наименьшим общим кратным двух многочленов $p(x)$ и $q(x)$ называется многочлен $L(x)$ наименьшей степени, делящийся на каждый из многочленов $p(x)$ и $q(x)$. При этом используется обозначение $L(x) = \text{НОК}[p(x); q(x)]$.

Если многочлены $p(x)$ и $q(x)$ разложены на множители, то найти НОК$[p(x); q(x)]$ особенно просто.

Пример. Найти наименьшее общее кратное многочленов

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + x \quad \text{и} \quad q(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - x - 2).$$

Решение. Разложим данные многочлены на множители:

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = (x^2 - x)^2 = x^2(x - 1)^2;$$
$$q(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)(x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)^2.$$

Возьмём любое из найденных разложений, например $p(x) = x^2(x - 1)^2$, и умножим его на те сомножители многочлена $q(x)$, которых в разложении $p(x)$ не содержится. Таким сомножителями в данном случае являются $(x + 1)$ и $(x - 2)^2$. В результате получим наименьшее общее кратное данных многочленов:

$$\text{НОК}[p(x); q(x)] = x^2(x - 1)^2(x - 2)^2(x + 1).$$

Если разложение на множители получить не удаётся, то для нахождения наименьшего общего кратного используют формулу

$$\text{НОК}[p(x); q(x)] = \frac{p(x) \cdot q(x)}{D(x)},$$

где $D(x)$ — наибольший общий делитель многочленов $p(x)$ и $q(x)$, который можно найти с помощью алгоритма Евклида для многочленов.

Наименьшее общее кратное двух взаимно простых многочленов равно их произведению.

Понятие наименьшего общего кратного многочленов используется в школьном курсе алгебры при выполнении сложения и вычитания рациональных дробей.

11. Теорема Безу

Теорема Безу позволяет найти остаток от деления многочлена $p(x)$ на двучлен $x-\alpha$, где α — произвольное число:

остаток от деления многочлена $p(x)$ на $x-\alpha$ равен значению многочлена при $x=\alpha$.

Иначе говоря, если остаток от деления $p(x)$ на $x-\alpha$ обозначить через r, то теорема Безу утверждает, что $r=p(\alpha)$.

Например, найдем остаток от деления $p(x)=4x^4-5x^3+7x+1$ на $x-1$. В данном случае число $\alpha=1$. Для нахождения остатка r подставим в многочлен вместо x число 1, то есть вычислим значение многочлена в точке 1, а именно: $p(1)$. Получим

$$r=p(1)=4\cdot 1^4-5\cdot 1^3+7\cdot 1+1=7.$$

Пример 1. Многочлен $p(x)$ при делении на $x-2$ даёт остаток, равный 1, а при делении на $x+2$ остаток, равный 5. Найти остаток от деления $p(x)$ на x^2-4.

Решение. Запишем теорему о делении многочлена $p(x)$ на x^2-4 с остатком

$$p(x)=(x^2-4)t(x)+(ax+b). \tag{1}$$

Мы записали остаток в виде многочлена первой степени $(ax+b)$, так как степень остатка должна быть меньше степени делителя x^2-4, которая в данном случае равна 2.

По условию остаток от деления $p(x)$ на $x-2$ равен 1. Значит, по теореме Безу будет $p(2)=1$. Аналогично $p(-2)=5$.

Подставим в тождество (1) вместо x числа 2 и –2:

$$\begin{aligned} p(2)&=(2^2-4)q(2)+a\cdot 2+b=1,\\ p(-2)&=((-2)^2-4)q(-2)+a\cdot(-2)+b=5. \end{aligned}$$

Для определения a и b получили систему уравнений

$$\begin{cases} 2a+b=1,\\ -2a+b=5, \end{cases}$$

из которой находим $a=-1$, $b=3$. Значит, искомый остаток

$$r(x)=ax+b=-x+3.$$

Из теоремы Безу вытекают важные следствия:

1. Многочлен $p(x)$ делится на $x-\alpha$ тогда и только тогда, когда $p(\alpha)=0$.

2. Если $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_k$ — различные числа, то многочлен $p(x)$ делится на произведение $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_k)$ тогда и только тогда, когда $p(\alpha_i)=0$, где $i=1,2,3,\ldots,k$.

Пример 2. При каких значениях a и b многочлен $p(x)=x^6-ax^5+bx^4-x+2$ делится на многочлен x^2-x-2?

Решение. Запишем разложение квадратного трёхчлена на множители:

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2).$$

Согласно следствию 2, данный многочлен $p(x)$ делится на $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ тогда и только тогда, когда $p(-1) = p(2) = 0$. Следовательно,

$$p(-1) = 1 - a + b + 1 + 2 = 0;$$
$$p(2) = 64 + 32a + 16b - 2 + 2 = 0.$$

Для определения a и b получаем систему

$$\begin{cases} -a + b = -4, \\ 32a + 16b = -64. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (-16) и прибавим его ко второму:

$$\begin{cases} -a + b = -4, \\ 48a = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $a = 0$; $b = 4$.

12. Схема Горнера

Схема Горнера позволяет определять коэффициенты частного и остаток от деления произвольного многочлена $p(x)$ на двучлен $x - \alpha$. При этом сама она представляет собой способ расположения коэффициентов делимого и метод вычисления коэффициентов частного и остатка в виде элементов таблицы.

Пусть $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ — данный многочлен. Запишем его коэффициенты, включая нулевые, в верхней строке таблицы, а слева от первой клетки поместим число α:

$x = \alpha$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	r

В нижней части таблицы будем последовательно (с помощью схемы Горнера) получать коэффициенты частного $t(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$, а в правой нижней клетке таблицы — остаток r от деления $p(x)$ на $x - \alpha$. (При практическом использовании схемы Горнера нижнюю строку таблицы в начале процедуры оставляют пустой и заполняют по мере определения коэффициентов частного и остатка.) Коэффициенты частного и остаток находятся по однотипным формулам, которые опишем словесно.

Сначала вписываем значение первого коэффициента частного, который равен первому коэффициенту делимого: $b_{n-1} = a_n$. Для нахождения последующих коэффициентов частного умножаем число α, записанное слева от таблицы, на последний найденный коэффициент и к полученному произведению прибавляем стоящий справа над ним коэффициент делимого. Найденное таким образом число является очередным коэффициентом частного, а последнее число второй строки — остатком.

Например, $\alpha \cdot b_{n-1} + a_{n-1} = b_{n-2}$, $\alpha \cdot b_{n-2} + a_{n-2} = b_{n-3}$, $\dots$

Пример 1. Найти частное и остаток от деления $p(x) = 2x^4 + 5x^3 - 6x - 16$ на $x + 4$.

Решение. В данном случае $\alpha = -4$. Заносим коэффициенты делимого в верхнюю строку таблицы, а число -4 напишем слева от неё:

$x = -4$	2	5	0	-6	-16

В первую клетку нижней строки напишем число 2.

$x = -4$	2	5	0	-6	-16
	2				

Умножим (-4) на 2 и к произведению (-8) прибавим 5. Полученное число (-3) запишем во вторую клетку нижней строки:

$x=-4$	2	5	0	-6	-16
	2	-3			

Теперь умножим (-4) на (-3) и к произведению $(+12)$ прибавим 0. Полученное число запишем в третью клетку нижней строки:

$x=-4$	2	5	0	-6	-16
	2	-3	12		

Аналогично находим два остальных числа:

$$(-4)\cdot 12+(-6)=-54; \quad (-4)\cdot(-54)+(-16)=200.$$

Итак, таблица заполнена:

$x=-4$	2	5	0	-6	-16
	2	-3	12	-54	200

Первые четыре числа нижней строки являются коэффициентами частного, а последнее число равно остатку от деления данного многочлена на $x+4$. Выпишем частное и остаток:

$$t(x)=2x^3-3x^2+2x-54, \quad r=200.$$

Объяснение способа нахождение элементов таблицы можно дать методом неопределённых коэффициентов.

Схема Горнера позволяет также находить значение многочлена $p(x)$ при заданном значении x. Найдём, например, значение многочлена $p(x)=4x^5-3x^4+2x-4$ при $x=2$. По теореме Безу (см. п. 2.34) значение $p(2)$ равно остатку от деление $p(x)$ на $x-2$, а этот остаток, полученный в результате применения схемы Горнера, записан в нижней правой клетке соответствующей таблицы. Приведём её без подробных объяснений:

$x=2$	4	-3	0	0	2	-4
	4	5	10	20	42	80

Записав все действия, в результате которых найдено значение $p(2)=80$, в одну строку, получим следующее выражение:

$$p(2)=((((2\cdot 4+(-3))\cdot 2+0)\cdot 2+0)\cdot 2+2)\cdot 2+(-4)=80.$$

Если использовать буквенные обозначения коэффициентов данного многочлена $a_5=4$, $a_4=-3$, $a_3=0$, $a_2=0$, $a_1=2$, $a_0=-4$, то для произвольного значения x получим

$$p(x)=((((a_5x+a_4)x+a_3)x+a_2)x+a_1)x+a_0.$$

Такая запись многочлена называется *схемой Горнера для определения значения многочлена в точке* x, то есть $p(x)$ в случае произвольного значения x.

Многочлен $p(x)$, записанный в виде

$$p(x)=c_n(x-x_0)^n+c_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\dots+c_1(x-x_0)+c_0, \tag{2}$$

называется *многочленом, записанным по степеням* $x-x_0$, а правая часть равенства (2) называется *разложением многочлена* $p(x)$ *по степеням* $x-x_0$.

Такой вид многочлена также можно получить по схеме Горнера.

Если многочлен $p(x)$ представлен в стандартном виде:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0,$$

то

$$p(x) = c_n(x - x_0)^n + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \dots + c_1(x - x_0) + c_0,$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_n$ являются остатками от деления многочлена $p(x)$ и его последовательных частных на $x - x_0, (x - x_0)^2, \dots, (x - x_0)^{n+1}$ соответственно. Коэффициенты этих последовательных частных находим по схеме Горнера.

Пример 2. Найти разложение многочлена $p(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ по степеням $x - 1$.

Решение. Запишем последовательные строки таблицы схемы Горнера

$x = 1$	2	-1	3	-1	1
	2	1	4	3	4
	2	3	7	10	
	2	5	12		
	2	7			

Таблица содержит пять строк, так как деление было выполнено четырежды. В последних клетках найденных строк записаны числа $4, 10, 12, 7$, которые являются соответственно коэффициентами c_0, c_1, c_2, c_3 при степенях $(x-1)^0, (x-1)^1, (x-1)^2, (x-1)^3$ искомого разложения.

Старший коэффициент c_4 этого разложения всегда равен старшему коэффициенту a_4 данного многочлена $p(x)$ и равен, в данном случае, 2.

Окончательно получаем

$$p(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 = 2(x-1)^4 + 7(x-1)^3 + 12(x-1)^2 + 10(x-1) + 4.$$

Используя разложение многочлена по степеням $(x - x_0)$, которое находится с помощью схемы Горнера, можно найти остаток от деления многочлена $p(x)$ на $(x - x_0)^k$, где $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Например, для многочлена $p(x)$, заданного в примере 2, остаток от деления на $(x-1)^3$ равен $r(x) = 12(x-1)^2 + 10(x-1) + 4$.

Пример 3. Найти остаток от деления многочлена $p(x) = x^3 + x + 2$ на $(x+2)^2$.

Решение. Воспользуемся схемой Горнера дважды. Составим таблицу

$x = -2$	1	0	1	2
	1	-2	5	-8
	1	-4	13	

Из этой таблицы находим остаток $r(x) = -8 + 13(x+2) = 13x + 18$.

13. Корни многочлена

Корнем многочлена

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

называется такое число α, при подстановке которого в многочлен вместо x, значение многочлена равно нулю. Это можно записать так: если α — корень $p(x)$, то $p(\alpha) = 0$.

Пример 1. При каких значениях a число -2 является корнем многочлена

$$p(x) = x^3 - ax^2 + a^2 - a + 6?$$

Решение. Так как число -2 есть корень многочлена $p(x)$, то $p(-2) = 0$. Найдём

$$p(-2) = (-2)^3 - a \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + a^2 + 6 = a^2 - 5a - 6.$$

Следовательно, $a^2 - 5a - 6 = 0$. Решив уравнение, получаем $a = -1$ или $a = 6$.

Графической иллюстрацией корней многочлена $p(x)$ служат точки пересечения графика функции $y = p(x)$ с осью Ox. На рисунке 1 изображён график многочлена $p(x)$, имеющего четыре корня α, β, γ и δ.

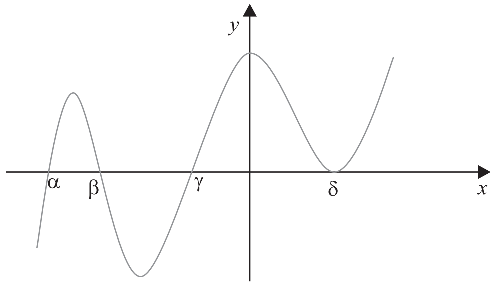

Рис. 1

В силу теоремы Безу (см. п. 11) число α является корнем многочлена $p(x)$ тогда и только тогда, когда остаток от деления многочлена $p(x)$на $x - \alpha$ равен нулю.

Числа α_1, α_2, α_3, …, являются различными корнями многочлена $p(x)$ тогда и только тогда, когда $p(x)$ делится без остатка на произведение

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k).$$

Отсюда следует, что *многочлен степени n не может иметь больше, чем n корней.*

Число действительных корней произвольного многочлена зависит от его коэффициентов и может быть любым неотрицательным целым числом, не большим степени многочлена.

Например, многочлен $x^2 + 1$ не имеет действительных корней.

Любой многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

Многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

все коэффициенты которого — произвольные комплексные числа, $a_n \neq 0$, а число n — нуль или натуральное, имеет ровно n комплексных корней (основная теорема алгебры).

Корни многочлена с действительными коэффициентами на множестве комплексных чисел попарно сопряжены, то есть если все коэффициенты многочлена — действительные числа и он имеет комплексный корень $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, то корнем этого многочлена является также и комплексно-сопряжённое число $\alpha - i\beta$.

Пример 2. При каких значениях a многочлен $p(x) = x^2 + 2x - a^2 - a + 6$ имеет ровно a корней?

Решение. Так как многочлен $p(x) = x^2 + 2x - a^2 - a + 6$ имеет степень 2, то a может быть равно 0, 1 или 2.

Пусть $a = 0$. Получим многочлен $p(x) = x^2 + 2x + 6$. Выделяя полный квадрат, получим $p(x) = x^2 + 2x + 6 = (x^2 + 2x + 1) + 5 = (x+1)^2 + 5 \geq 5$ при всех действительных значениях x. Следовательно, при $a = 0$ многочлен имеет 0 корней и поэтому число $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = 1$. Получим многочлен $p(x) = x^2 + 2x + 4$. Выделяя полный квадрат, получим $p(x) = x^2 + 2x + 4 = (x^2 + 2x + 1) + 3 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$ при всех действительных значениях x. Следовательно, при $a = 1$ многочлен имеет 0 корней и поэтому число $a = 1$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = 2$. Получим многочлен $p(x) = x^2 + 2x$. Раскладывая многочлен на множители, получим $p(x) = x^2 + 2x = x(x+2)$. Отсюда следует, что при $a = 2$ многочлен имеет 2 корня: $x = 0, x = -2$ и поэтому число $a = 2$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 0 и 2.

14. Кратные корни многочлена

Пусть m — натуральное число, а α — корень многочлена $p(x)$. Корень α называется *m-кратным корнем* многочлена $p(x)$, если $p(x)$ делится (без остатка) на $(x-\alpha)^m$ и не делится на $(x-\alpha)^{m+1}$.

Однократные корни ($m = 1$) называются *простыми корнями* многочлена в отличие от корней кратности большей единицы, которые называются *кратными корнями* многочлена.

Например, многочлен $p(x) = 5x^2-10x+5 = 5(x-1)^2$ имеет двукратный корень, равный 1, так как $p(x)$ делится без остатка на $(x-1)^2$, но не делится без остатка на $(x-1)^3$. Подчеркнём, что в данном случае многочлен $p(x) = 5x^2-10x+5$ имеет *один* корень, но его *кратность* равна двум. Иногда то же самое выражают словами: многочлен $p(x) = 5x^2-10x+5$ имеет *два равных корня*. Отметим, что *такая формулировка не точна*. Правильно говорить, что многочлен имеет *один корень и его кратность равна двум.*

Отметим, что если некоторое число β не является корнем многочлена $p(x)$ (то есть $p(\beta) \neq 0$), то можно сказать, что β является корнем $p(x)$ нулевой кратности.

Кратность корня данного многочлена удобно определять по схеме Горнера (см. п. 12).

Пусть α — корень многочлена $p(x)$, тогда многочлен $p(x)$ делится на $x-\alpha$ и выполняется тождество $p(x) = (x-\alpha)q_1(x)$.

В том случае, когда α есть однократный (простой) корень $p(x)$, число α не является корнем $q_1(x)$.

Если же кратность корня α больше 1, то число α — корень многочлена $q_1(x)$ и, значит, $q_1(x) = (x-\alpha)q_2(x)$ и $p(x) = (x-\alpha)^2 q_2(x)$.

Далее, если α — двукратный корень $p(x)$, то α не является корнем $q_2(x)$. В противном случае, если α — корень $p(x)$ кратности большей 2, то число α — корень $q_2(x)$ и т.д.

Коэффициенты $q_1(x)$, $q_2(x)$, ... легко находятся по схеме Горнера, причём их располагают в одной таблице.

Например, определим кратность корня $x = 2$ многочлена

$$p(x) = 2x^5 - 12x^4 + 25x^3 - 22x^2 + 12x - 8.$$

Составим таблицу для схемы Горнера

$x = 2$	2	−12	25	−22	12	−8
	2	−8	9	−4	4	0 (остаток)
	2	−4	1	−2	0 (остаток)	
	2	0	1	0 (остаток)		
	2	4	9 (остаток)			

Из последовательных строк схемы Горнера

$$p(x) = (x-2)(2x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4) = (x-2)^2(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = (x-2)^3(2x^2+1).$$

Значит, число 2 является корнем данного многочлена $p(x)$ кратности 3. Отметим, что данный многочлен *имеет только один действительный корень*, а именно число 2.

15. Разложение многочлена на множители

Пусть многочлен $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ степени n имеет n различных корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Тогда он разлагается на линейные множители:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n).$$

Если среди n корней многочлена $p(x)$ имеются кратные, и кратности корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ равны соответственно $s_1, s_2, s_3, \dots, s_k$, то разложение многочлена на множители имеет вид

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)^{s_1}(x-\alpha_2)^{s_2}(x-\alpha_3)^{s_3}\dots(x-\alpha_k)^{s_k},$$

причём $s_1+s_2+s_3+\dots+s_k=n$.

Например, многочлен $p(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ имеет два действительных корня: –1 и 2, кратность каждого из которых равна 2. Тогда $\alpha_1=-1$; $s_1=2$; $\alpha_2=2$; $s_2=2$ и этот многочлен разлагается на линейные множители:

$$p(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4=(x+1)^2(x-2)^2.$$

Мы видим, что для разложения многочлена на линейные множители требуется знать все корни этого многочлена. Если же корни многочлена неизвестны, то его разложение на линейные множители является сложной задачей. Более того, иногда такое разложение на множестве действительных чисел не существует. Например, квадратный трёхчлен с действительными коэффициентами и с отрицательным дискриминантом не разлагается на линейные множители.

Справедлива *теорема о разложении на множители многочлена с действительными коэффициентами на множестве действительных чисел.*

Произвольный многочлен

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_1x+a_0$$

с действительными коэффициентами можно разложить на линейные и квадратичные множители вида $x-\alpha$ *и* x^2+px+q, *где* α, p, q *— действительные числа, причём дискриминант трёхчлена* $p^2-4q<0$. Это разложение имеет вид

$$p(x)=a_n(x-\alpha_1)^{s_1}(x-\alpha_2)^{s_2}\dots(x-\alpha_k)^{s_k}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}(x^2+p_2x+q_2)^{t_2}\dots$$
$$\dots(x^2+p_mx+q_m)^{t_m}.$$

Указанный вид многочлена называется *каноническим видом многочлена* на множестве действительных чисел. Канонический вид многочлена степени выше второй получить непросто. Часто требуется применение специальных приёмов, один из которых — выделение полного квадрата.

Пример. Найти канонический вид многочлена $p(x)=x^4+x^2+1$.

Решение. Выделим полный квадрат:

$$p(x)=x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2.$$

Применив формулу разности квадратов, находим

$$p(x)=(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

Это канонический вид многочлена $p(x)$, так как оба квадратных трёхчлена имеют отрицательные дискриминанты.

Рязановский Андрей Рафаилович,
доцент кафедры математического анализа
и методики преподавания математики
Московского городского педагогического университета
(Институт математики и информатики);
кандидат технических наук,
учитель математики высшей категории,
Лауреат Гранта Правительства Москвы в сфере образования.

E-mail: riazanovskiy@mail.ru

Тригонометрические многочлены (продолжение)

Е. З. Скворцова

Продолжение статьи о тригонометрических многочленах (начало в предыдущем номере журнала). Автор последовательно развивает теорию и приводит ряд задач, которые можно рассматривать как задачи повышенной трудности по отношению к программе профильных классов.

Глава 5. Разложение тригонометрических многочленов на множители

Напомним, что для обычных многочленов справедливы следующие две важные теоремы:

1) (Аналог основной теоремы арифметики.) Каждый многочлен, имеющий степень, отличную от 0, можно разложить на простые множители (то есть многочлены, не разложимые в произведение двух многочленов меньших степеней). Причем разложение единственно с точностью до порядка множителей и того, что различие между множителями f и cf, где c — константа, отличная от 0, считается несущественным.

2) При рассмотрении обычных многочленов с действительными коэффициентами простыми являются только многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательными дискриминантами.

Таким образом, каждый многочлен ненулевой степени с действительными коэффициентами можно, причем единственным образом, разложить на множители первой степени и множители второй степени с отрицательными дискриминантами. Доказательство этого факта не конструктивно, то есть не объясняет, как конкретно нужно раскладывать. Точнее, оно использует неконструктивное доказательство существования у каждого многочлена ненулевой степени с действительными или комплексными коэффициентами по крайней мере одного комплексного корня. Зная этот корень и теорему Безу (точнее, ее следствие о том, что если многочлен $f(x)$ имеет корень x_0, то $f(x)$ обязан делиться без остатка на $x - x_0$), можно разделить исходный многочлен на $x - x_0$ и тем самым свести задачу к разложению многочлена меньшей степени. (Если многочлен имеет действительные коэффициенты, а корень комплексный, $x_0 = a + ib$, то делить нужно сразу на $(x - a - ib)(x - a + ib) = (x - a)^2 + b^2$.)

Вернемся к ТМ. Непосредственно теоремы об обычных многочленах мы можем применить только к ТМ вида $f(\cos x)$ и $f(\sin x)$, где f — обычный многочлен. Мы знаем, что $f_1(\cos x) \equiv f_2(\cos x)$ в том и только в том случае, если $f_1(y) \equiv f_2(y)$. Поэтому сразу получаем, что каждый КМ единственным образом раскладывается в произведение КМ первой степени и КМ второй степени $a\cos^2 x + b\cos x + c$ таких, что $b^2 - 4ac < 0$.

Отсюда следует, что если a — корень КМ $f(x)$, то этот КМ делится без остатка на $\cos x - \cos a$. Если же a — корень $g(x) = f(\cos x; \sin x)$, то на $\cos x - \cos a$ обязан делиться только $g_{\text{зач}}(x) \equiv g(x)g(-x)$.

Полезные сведения из теорем об обычных многочленах почти сразу извлекаются и для однородных ТМ. Но сначала сформулируем следствия из теорем о многочленах с одной переменной для однородных многочленов с двумя переменными:

Каждый однородный многочлен с двумя переменными x и y, имеющий степень, отличную от 0, можно разложить на простые однородные множители. Причем разложение единственно с точностью до порядка множителей и того, что различие между множителями f и cf, где c — константа, отличная от 0, считается несущественным. При этом простыми являются только однородные многочлены первой степени $ax - by$ и многочлены второй степени $ax^2 + byx + cy^2$ такие, что $D = b^2 - 4ac < 0$.

Получаем, что верно следующее

Утверждение 5.1. *Каждый однородный ТМ, имеющий степень, отличную от 0, можно представить в виде произведения множителей первой степени* $a\cos x - b\sin x$ *(или, что то же самое,* $\sin(x-c)$*) и множителей* $a\cos^2 x + b\cos x\sin x + c\sin^2 x$ *таких, что* $b^2 - 4ac < 0$*, которые имеют именно вторую степень как ТМ.*

(Если в разложение $f(x;y)$ *входит такой множитель* $ax^2+byx+cy^2$*, что* $a\cos^2 x+b\cos x\sin x+c\sin^2 x$ *— ТМ нулевой степени, то его просто заменяем соответствующей константой.)*

Теперь докажем

Утверждение 5.2. *Разложение однородного ТМ на простые множители единственно, если не различать множители* f *и* cf*, где* c *— константа, и не обращать внимания на порядок множителей.*

Прямо из единственности для обычных многочленов единственность для ТМ не следует по той причине, что из $f_1(\cos x;\sin x) \equiv f_2(\cos x;\sin x)$ не следует $f_1(y;z) \equiv f_2(y;z)$ даже для однородных f_1 и f_2. Но мы знаем, что если f_1 и f_2 — два однородных многочлена одной и той же степени, то из $f_1(\cos x;\sin x) \equiv f_2(\cos x;\sin x)$ следует $f_1(y;z) \equiv f_2(y;z)$. Этим мы и воспользуемся.

Пусть даны два разложения одного и того же однородного ТМ на простые однородные ТМ:

$$f_1(\cos x;\sin x)\cdot\ldots\cdot f_n(\cos x;\sin x) \equiv g_1(\cos x;\sin x)\cdot\ldots\cdot g_n(\cos x;\sin x),$$

причем $f_i(x;y)$ и $g_i(x;y)$ — однородные многочлены, степени которых совпадают со степенями ТМ $f_i(\cos x;\sin x)$ и $g_i(\cos x;\sin x)$. (Для простых множителей первой степени $a\cos x - b\sin x$ и $ax - by$ это условие заведомо выполняется, а для $a\cos^2 x + b\cos x\sin x + c\sin^2 x$ и $ax^2+byx+cy^2$ выполняется потому, что мы оставили в нашем разложении только те множители вида $a\cos^2 x + b\cos x\sin x + c\sin^2 x$, которые не являются константами. Значит все они — ТМ второй степени.)

Имеем: $f_1(x;y),\ldots,f_n(x;y)$ и $g_1(x;y),\ldots,g_n(x;y)$ — однородные многочлены тех же степеней, что и $f_1(\cos x;\sin x),\ldots,f_n(\cos x;\sin x)$ и $g_1(\cos x;\sin x),\ldots,g_n(\cos x;\sin x)$ соответственно, а значит, одной и той же степени. Следовательно,

$$f_1(x;y)\cdot\ldots\cdot f_n(x;y) \equiv g_1(x;y)\cdot\ldots\cdot g_n(x;y)$$

и можно воспользоваться единственностью разложения обычного многочлена с двумя переменными на простые множители.

Теперь вспомним, что каждый ТМ можно превратить в однородный, заменив x на $2y$. Получаем

Утверждение 5.3. *Каждый ТМ, не равный тождественно константе, можно представить в виде произведения множителей* $a\cos(x/2) - b\sin(x/2) c a^2+b^2 \neq 0$ *(или, что то же самое, вида* $\sin((x-c)/2)$*) и множителей вида*

$$a\cos^2(x/2) + b\cos(x/2)\sin(x/2) + c\sin^2(x/2)$$

таких, что $b^2 - 4ac < 0$*, являющихся ТМ второй степени от* $x/2$*, то есть не равных тождественно константе. Это разложение единственно, если не различать множители* f *и* cf*, где* c *— константа, отличная от 0, и не обращать внимания на порядок множителей.*

Рассмотрим теперь произвольные ТМ первой степени $a\cos x + b\sin x + c$, не обязательно однородные. Как мы знаем, каждый такой ТМ является однородным ТМ от $x/2$ второй степени:

$$\begin{aligned} &a\cos x + b\sin x + c \equiv \\ &\qquad\equiv a(\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)) + 2b\cos(x/2)\sin(x/2) + c(\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)) \equiv \\ &\qquad\qquad\equiv (a+c)\cos^2(x/2) + 2b\cos(x/2)\sin(x/2) + (c-a)\sin^2(x/2). \end{aligned}$$

Важно, что верно и обратное: каждый однородный ТМ от $x/2$ второй степени

$$a\cos^2(x/2)+b\cos(x/2)\sin(x/2)+c\sin^2(x/2)$$

можно представить в виде $a_1\cos x+b_1\sin x+c_1$:

$$\begin{aligned}&a\cos^2(x/2)+b\cos(x/2)\sin(x/2)+c\sin^2(x/2)\equiv\\&\qquad\equiv a((1+\cos x)/2)+b((\sin x)/2)+c(1-\cos x)/2)\equiv\\&\qquad\qquad\equiv((a-c)/2)\cos x+(b/2)\sin x+((c+a)/2).\end{aligned}$$

При этом уравнение $a\cos x+b\sin x+c=0$ имеет хоть один корень в том и только в том случае, если $(a+c)\cos^2(x/2)+2b\cos(x/2)\sin(x/2)+(c-a)\sin^2(x/2)=0$ имеет хотя бы один корень, то есть когда $b^2-(c^2-a^2)\neq$, то есть когда дискриминант многочлена $(a+c)x^2+2bxy+(c-a)y^2$ отличен от 0.

Итак, если уравнение $a\cos x+b\sin x+c=0$ не имеет корней, то есть $a^2+b^2<c^2$, то $a\cos x+b\sin x+c\equiv g(\cos(x/2);\sin(x/2))$, где g — однородный многочлен второй степени, не раскладывающийся на множители первой степени. Если $a^2+b^2=c^2$, то есть $a\cos x+b\sin x+c\equiv c(\cos(x-d)\pm1)$, то $a\cos x+b\sin x+c\equiv(a_1\cos(x/2)-b_1\sin(x/2))^2$ для некоторых a_1 и b_1 таких, что $a_1^2+b_1^2\neq0$. Если же $a^2+b^2>c^2$, то есть $a\cos x+b\sin x+c\equiv$ $\equiv c(\cos(x-d)-\cos e)$, где $\cos e\neq\pm1$, то $a\cos x+b\sin x+c$ можно представить в виде произведения $(a_1\cos(x/2)-b_1\sin(x/2))(a_2\cos(x/2)-b_2\sin(x/2))$ с непропорциональными $(a_1;b_1)$ и $(a_2;b_2)$.

Мы уже знаем, что каждый ТМ можно представить в виде

$$\begin{aligned}&(a_1\cos(x/2)-b_1\sin(x/2))\cdot\dots\cdot(a_m\cos(x/2)-b_m\sin(x/2))\times\\&\qquad\times g_1(\cos(x/2);\sin(x/2))\cdot\dots\cdot g_k(\cos(x/2);\sin(x/2)),\end{aligned}$$

где $g_i(y;z)=c_iy_i^2+2d_iyz+e_iz_i^2$ — однородные многочлены второй степени с $d_i^2-c_ie_i<0$. Значит $g_i(\cos(x/2);\sin(x/2))$ при обратной замене превращаются в ТМ вида $a\cos x+b\sin x+c$ такие, что $a^2+b^2<c^2$, причем $g_i(\cos(x/2);\sin(x/2))$ имеют вторую степень как ТМ от $\cos(x/2)$. Так как при замене x на $2y$ степень ТМ удваивается, то все произведение имеет четную степень. Но произведение $g_1(\cos(x/2);\sin(x/2))\dots g_k(\cos(x/2);\sin(x/2))$ тоже имеет четную степень. Значит и $(a_1\cos(x/2)-b_1\sin(x/2))\dots(a_m\cos(x/2)-b_m\sin(x/2))$ имеет четную степень, то есть m четно. Группируя эти множители как угодно, лишь бы только парами, получим, что каждая пара дает множитель вида $a\cos x+b\sin x+c$ такой, что $a^2+b^2\geq c^2$. Мы доказали

Утверждение 5.4. *Любой ТМ, имеющий ненулевую степень, можно представить в виде произведения ТМ первой степени.*

Вспомним теперь, что мы группировали множители $a_i\cos(x/2)-b_i\sin(x/2)$ по парам произвольно. Поэтому понятно, что о единственности разложения на множители вида $a\cos x+b\sin x+c$ речи быть не может. Например, рассмотрим произведение

$$\cos(x/2)\sin(x/2)(\cos(x/2)+\sin(x/2))(\cos(x/2)-\sin(x/2)).$$

При группировке по парам $\cos(x/2)$ можно сгруппировать с любым из трех оставшихся множителей. Соответственно получим три варианта разложения на множители вида $a\cos x+b\sin x+c$:

$$\begin{aligned}&(\cos(x/2)\sin(x/2))((\cos(x/2)+\sin(x/2))(\cos(x/2)-\sin(x/2)))=(1/2)\sin x\cos x;\\&(\cos(x/2)(\cos(x/2)+\sin(x/2))(\sin(x/2(\cos(x/2)-\sin(x/2))=\\&\qquad=((1/2)(\cos x+1)+(1/2)(\sin x))((1/2)(\sin x)-(1/2)(1-\cos x))=\\&\qquad=1/4(\sin x+\cos x+1)(\sin x+\cos x-1);\\&(\cos(x/2)(\cos(x/2)-\sin(x/2))(\sin(x/2(\cos(x/2)+\sin(x/2))=\\&\qquad=((1/2)(\cos x+1)-(1/2)(\sin x))((1/2)(\sin x)+(1/2)(1-\cos x))=\\&\qquad=1/4(\cos x-\sin x+1)(\sin x-\cos x-1).\end{aligned}$$

Пусть теперь известно, что все корни ТМ $a\cos x + b\sin x + c$ являются корнями некоторого ТМ $f(x)$.

Обязательно ли $f(x)$ делится на $a\cos x + b\sin x + c$? Если $a\cos x + b\sin x + c$ имеет 2 разных корня в промежутке $[0; 2\pi[$, то есть если $a^2 + b^2 > c^2$, то

$$a\cos x + b\sin x + c = (a\cos(x/2) - b\sin(x/2))(c\cos(x/2) - d\sin(x/2)),$$

где пары $(a; b)$ и $(c; d)$ не пропорциональны, то, благодаря единственности разложения ТМ на простые ТМ от $x/2$, $f(x)$ обязан делиться на $a\cos x + b\sin x + c$. Если же $a\cos x + b\sin x + c$ имеет только один корень в $[0; 2\pi[$, то есть если $a^2 + b^2 = c^2$, то $a\cos x + b\sin x + c = (a\cos(x/2) - b\sin(x/2))^2$, и ТМ может делиться на $a\cos(x/2) - b\sin(x/2)$, но не делится на $(a\cos(x/2) - b\sin(x/2))^2$.

Пример: $\sin x$ нельзя разделить на $\cos x + 1$ даже с остатком.

Рассмотрим теперь вопрос, когда из делимости на каждый из двух ТМ следует делимость на их произведение.

Для обычных многочленов делимость на произведение равносильна делимости на оба множителя в том и только в том случае, если эти множители взаимно просты. Поэтому сначала попробуем разобраться с взаимной простотой и наибольшими общими делителями. Напомним, что в главе 3 мы назвали наибольшим общим делителем (НОД) двух ТМ такой их общий делитель, который делится без остатка на все их общие делители. Для однозначности потребуем, чтобы старший коэффициент НОД был равен 1. Рассмотрим следующие множества функций:

- F_0 — множество всех КМ, то есть множество всех четных ТМ;
- F_1 — множество всех однородных ТМ;
- F — множество всех ТМ;
- F_2 — множество всех однородных ТМ от $x/2$.

Каждому из этих множеств соответствуют свои НОД. Причем в F_0, F_1 и F_2 НОД любых двух функций существует а в F для некоторых пар существует, а для некоторых — нет. При этом F_0 — подмножество F_1, F_1 — подмножество F, а F — подмножество F_2. Заметим, что хотя при переходе из F_0 и F_1 в F и из F в F_2 появляются новые функции, но при этом если $f_1(x)$ не делился без остатка на $f_2(x)$, то и после перехода не появится такая функция $h(x)$, что $f_1(x) = f_2(x)h(x)$. Докажем это.

Сначала докажем, что если f_1 и f_2 принадлежат F, f_2 ненулевая функция, g принадлежит F_2 и $f_1 = f_2 g$, то на самом деле g принадлежит F. Действительно, F, как мы знаем, состоит из всех однородных ТМ от $x/2$ четных степеней. А если f_1; f_2 и g — ТМ от $x/2$ и f_1 и f_2 имеют в F_2 четные степени, то так как степень f_1 равна сумме степеней f_2 и g, то и степень g в F_2 четна.

Теперь докажем, что если f_1 и f_2 принадлежат F_1, f_2 ненулевая функция, g принадлежит F и $f_1 = f_2 g$, то на самом деле g принадлежит F_1. Вспомним, что если f_1 и f_2 — однородные ТМ, то каждый из них можно представить в виде суммы ступеней $a_k \cos kx + b_k \sin kx$, где все k одной четности. Тогда при делении уголком f_1 на f_2 в частном тоже будут получаться ступени со степенями одной и той же четности. Значит, частное — однородный ТМ.

Докажем, что если f_1 и f_2 принадлежат F_0, f_2 — ненулевая функция, g принадлежит F и $f_1 = f_2 g$, то на самом деле g принадлежит F_0. Действительно, F_0 состоит из всех четных функций из F. А если f_1 и f_2 четные, то при всех x, при которых $f_2(x) \neq 0$, $g(-x) = f_1(-x)/f_2(-x) = f_1(x)/f_2(x) = g(x)$. Так как $f_2(x) = 0$ имеет только конечное число решений в $[0; 2\pi[$, то $g(-x) - g(x) = 0$ имеет в $[0; 2\pi[$ бесконечно много решений. Значит $g(-x) - g(x) \equiv 0$, $g(x)$ — четная функция.

Теперь рассмотрим любые два множества функций G_1 и G_2 такие, что G_1 — подмножество G_2 и если f_1 и f_2 принадлежат G_1 и в G_2 f_1 делится на f_2 без остатка, то частное всегда принадлежит G_1. Тогда если у f_1 и f_2 существует НОД в G_2 и этот НОД является функцией из G_1, то он обязан быть НОД и в G_1.

Действительно, если g — НОД f_1 и f_2 в G_2, то в G_2 g делится без остатка на все общие делители функций f_1 и f_2, в том числе и на все те, которые принадлежат G_1. Причем результаты деления на общие делители из G_1 обязаны принадлежать G_1. Это и означает, что g — наибольший общий делитель f_1 и f_2 и в G_1.

Во множестве F_2, благодаря единственности разложения на простые множители, НОД существует у любой пары функций. Но для f_1 и f_2 из F их НОД в F_2 не обязан быть функцией из F, так как НОД может иметь нечетную степень как ТМ от $x/2$.

Пример: НОД$(1-\cos x; \sin x)$ в F_2 — это $\sin(x/2)$, так как $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$; $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$. А поскольку $1-\cos x$ и $\sin x$ — ТМ первой степени, не получающиеся друг из друга умножением на число, их НОД в F равен 1.

А можно ли и как по разложению на простые множители НОД$(f_1; f_2)$ в F_2 однозначно ответить на вопрос, существует ли НОД$(f_1; f_2)$ в F, и найти его, если он существует?

Покажем, что все зависит от количества множителей первой степени в разложении НОД$(f_1; f_2)$ в F_2 и от числа входящих в него множителей первой степени, не получающихся друг из друга умножением на константу. Если количество множителей первой степени четно, то НОД$(f_1; f_2)$ в F_2 принадлежит F, и значит является НОД$(f_1; f_2)$ и в F. Если же оно нечетно, то возможны два случая.

Первый случай. НОД$(f_1; f_2)$ в F_2 равен $\sin^k((x-a)/2)g(x/2)$, где $g(x/2)$ — произведение простых множителей второй степени; k нечетно. Тогда НОД$(f_1; f_2)$ в F — это (с точностью до умножения на константу) $\sin^{k-1}((x-a)/2)g(x/2)$.

Второй случай. НОД$(f_1; f_2)$ в F_2 равен $h(x) = \sin((x-a_1)/2)\ldots\sin((x-a_k)/2)g(x/2)$, где $g(x/2)$ — произведение простых множителей второй степени; k нечетно, $k>1$ и $\sin(x-a_2)/2)$ не получается из $\sin((x-a_1)/2)$ умножением на константу, то есть a_2-a_1 не кратно 2π. Пусть $G_1(x)$ получается выбрасыванием из $h(x)$ первого множителя, а $g_2(x)$ — второго. Тогда разложение на простые множители в F_2 как $G_1(x)$. так и $g_2(x)$, содержит четное число множителей. Значит, $G_1(x)$ и $g_2(x)$ — ТМ от x, то есть принадлежат F. Допустим, что $h_1(x)$ — НОД$(f_1; f_2)$ в F. Тогда $h_1(x)$ делится без остатка в F на $G_1(x)$ и $g_2(x)$. Но тогда разложение на простые множители $h_1(x)$ должно содержать в себе разложение $h(x)$. А чтобы $h_1(x)$ был из F, нужно, чтобы у него был еще какой-то простой множитель из F_2, не входящий в разложение $h(x)$. Это противоречит тому, что НОД$(f_1; f_2)$ в F_2 равен $h(x)$.

Пусть теперь f_1 и f_2 принадлежат F_1. Докажем, что их НОД в F_2 всегда является НОД и в F_1

Заметим, что если ТМ f однороден, то $f(x+\pi)\equiv f(x)$, если степень f четна, и $f(x+\pi)\equiv -f(x)$, если степень f нечетна. Поэтому $f(x)$ и $f(x+\pi)$ должны одинаково раскладываться на простые множители в F_2. Значит, если в разложении $f(x)$ есть простой в F_2 множитель $g(x)$, то так как в разложении $f(x+\pi)$ есть (с точностью до умножения на константу) простой множитель $g(x+\pi)$, то либо $g(x)$ и $g(x+\pi)$ получаются друг из друга умножением на константу, либо $g(x+\pi)$ входит в разложение $f(x)$. А так как для $g(x) = \sin((x-a)/2)$ имеем $g(x+\pi) = \cos((x-a)/2)$ — не получается из $g(x)$ умножением на константу, то множители первой степени входят в разложение каждого из F_1 и F_2 парами — $\sin((x-a_1)/2)$ в паре с $\sin(x-a_2)/2)$, где a_2 отличается от a_1 на нечетное кратное π. Значит НОД$(F_1; F_2)$ в F_2 является ТМ от x, то есть принадлежит F. Кроме того, $\sin((x-a)/2)\sin((x+\pi-a)/2) = (1/2)\sin(x-a)$ — однородный ТМ от x. А простые множители второй степени в F_2, как мы знаем, записываются в виде $a\cos x + b\sin x + c$. Если $c=0$, то этот множитель однородный. А если нет, то у него в разложениях f_1 и f_2 есть пара

$$a\cos(x+\pi) + b\sin(x+\pi) + c = -a\cos x b\sin x + c.$$

Имеем:

$$(a\cos x + b\sin x + c)(-a\cos x b\sin x + c) = c^2 - (a\cos x + b\sin x)^2$$

состоит после раскрытия скобок только из одночленов четных степеней, то есть это однородный ТМ от x. Значит НОД$(f_1; f_2)$ в F_2 принадлежит F_1 и следовательно является НОД$(f_1; f_2)$ и в F_1.

Заметим еще, что если в каком-то множестве функций НОД двух функций f_1 и f_2 удалось представить в виде $f_1g_1 + f_2g_2$, где g_1 и g_2 — функции из этого же множества(так бывает, если к f_1 и f_2 удается применить алгоритм Евклида), то этот НОД остается НОД и в любых более широких множествах функций при условии, что если f не делилась без остатка на g в исходном множестве, то не делится и в расширенном. По этой причине НОД двух функций из F_2 остается их НОД и в F, и в F_2.

Теперь попробуем ответить на вопрос, в каких из множеств F_0; F_1; F; F_2 из того, что $f(x)$ делится на $f_1(x)$ и на $f_2(x)$, и $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взаимно просты (то есть их НОД в этом множестве- константа 1) следует, что $f(x)$ делится на $f_1(x)f_2(x)$.

Так как в F_0; F_1; F_2 разложение на простые множители единственно, то для этих множеств рассматриваемое свойство выполняется. А вот в F из взаимной простоты множителей ничего хорошего не следует. Например, $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$ и $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$ в F взаимно просты. Но удалив из их произведения $4\sin^3(x/2)\cos(x/2)$ один множитель $\sin(x/2)$ и добавив любой множитель вида $\sin((x-a)/2))$, например, $\cos(x/2)$, получим: $4\sin^2(x/2)\cos^2(x/2) = \sin^2 x$ делится на $\sin x$ и на $1-\cos x$, но не делится на $\sin x(1-\cos x)$.

Теперь мы, наконец, можем доказать следующее

Утверждение 5.5. *Если известно, что ТМ $f(x)$ с делится без остатка на $g(x) = a_1\cos x + b_1\cos x + c_1$ и на $h(x) = a_2\cos x + b_2\sin x + c_2$, причем $g(x)$ и $h(x)$ не имеют общих корней и не получаются друг из друга умножением на константу, то $f(x)$ обязательно делится на $g(x)h(x)$.*

Действительно, $a_1\cos x + b_1\cos x + c_1$ и $a_2\cos x + b_2\sin x + c_2$ в F_2 имеют вторую степень. Поэтому они взаимно просты в F_2 в том и только в том случае, если они не получаются друг из друга умножением на константу и не имеют общих простых делителей первой степени в F_2, то есть не делятся в F_2 на одно и то же $\sin((x-a)/2)$, то есть не имеют общих корней.

Выясним еще, как связаны между собой НОК одних и тех же ТМ в разных множествах F_0; F_1; F; F_2 (НОК — общее кратное, на которое делятся все общие кратные. Для определенности старший коэффициент НОК равен 1).

В тех множествах, где выполняется единственность разложения на простые множители, то есть в F_0; F_1; F_2 НОК находится, как для целых чисел — разложением на простые множители и верно соотношение: $f_1(x)f_2(x)$ с точностью до множителя-константы равно НОД$(f_1(x); f_2(x)) \cdot HOK(f_1(x); f_2(x))$. Поэтому НОК в F_0 и в F_1 всегда существует и не меняется при переходе в F_2.

Что же касается связи НОК в F и в F_2, то, аналогично НОД, если НОК$(f_1(x); f_2(x))$ из F_2 принадлежит F, то оно является НОК$(f_1(x); f_2(x))$ и в F. Это происходит в том случае, если НОК в F_2 имеет четную степень. Если же степень НОК в F_2 нечетна, то НОК в F не существует. Действительно, пусть $h(x)$ – НОК$(f_1(x); f_2(x))$ в F_2, и $h(x)$ не принадлежит F, то есть имеет нечетную степень в F_2. Тогда при любом a многочлен $\sin((x-a)/2)h(x)$ — общее кратное $f_1(x)$ и $f_2(x)$, принадлежащее F, а все остальные их общие кратные получаются из общих кратных такого вида умножением на какие-то ТМ из F. Допустим, что существует $HOK(f_1(x); f_2(x))$ в F и оно имеет вид $\sin((x-a)/2)h(x)g(x)$. Но тогда, взяв общее кратное $\sin((x-a-\pi)/2))h(x)$, получаем, что оно не делится на $\sin((x-a)/2)h(x)g(x)$, так как не делится даже на $\sin((x-a)/2)h(x)$.

Итак, мы теперь кое-что знаем о связи между разложением ТМ $f(x)$ на множители и корнями уравнения $f(x) = 0$. Как и для обычных многочленов, это помогает не столько решать уравнения, сколько раскладывать $f(x)$ на множители, когда корни каким-то образом найдены (угаданы). Единственное, что помогает решать уравнения, это сведение решения уравнения к решению уравнения меньшей степени, если один из корней угадан. Этим мы займемся в следующей главе. А сейчас рассмотрим примеры разложения на простые множители ТМ, корни которых мы умеем находить.

Начнем с разложения $\cos nx$ на простые множители в F_0, точнее на множители первой степени $\cos x - a$. Мы знаем, что каждый КМ обязан раскладываться на множители вида $\cos x - a$ и $a\cos^2 x + b\cos x + c$ такие, что $b^2 - 4ac < 0$. А так как степень $\cos nx$ равна n, то если мы найдем n его корней $x_1, \dots, x_n$ с разными $\cos x_1, \dots, \cos x_n$, то это будет означать, что $\cos nx$ раскладывается в произведение множителей первой степени $\cos x - \cos x_1, \dots, \cos x - \cos x_n$.

Имеем: $\cos nx = 0$ в том и только в том случае, если $nx = (\pi/2) + k\pi$, то есть $x = (\pi(2k + 1)/(2n))$, где k — любое целое число. Получаем n корней в промежутке $[0; \pi]$: $\pi/(2n); (3\pi)/(2n); \dots; ((2n-1)\pi)/(2n)$. Значит,

$$\cos nx = c(\cos x - \cos(\pi/(2n)))(\cos x - \cos((3\pi)/(2n)) \dots (\cos x - \cos(((2n-1)\pi)/(2n)).$$

Найдем еще, чему равно с в этой формуле. Для этого найдем старшую ступень вида $a_k \cos kx$ правой части. Мы знаем, что если старшие ступени двух ТМ равны $a\cos kx$ и $b\cos lx$, то старшая ступень их произведения — это $((ab)/2)\cos(k + l)x$. Соответственно, если старшие ступени n множителей соответственно равны $a_1 \cos k_1 x; \dots; a_n \cos k_n x$, то старшая ступень их произведения равна$((a_1 \dots a_n)/2^{n-1})\cos(k_1 + \dots + k_n)x$. Значит старшая ступень правой части — это $(c/2^{n-1})\cos nx$. А так как старшая ступень левой части есть $\cos nx$, то $c/2^{n-1} = 1; c = 2^{n-1}$.

Теперь разложим на множители $\sin(nx - a)$ (к такому виду, как мы знаем, приводятся $b\cos nx + c\sin nx$, если $b^2 + c^2 \neq 0$). Так как это однородный ТМ степени n, то, чтобы разложить его на множители вида $\sin(x - a)$, достаточно найти n его корней, попарные разности которых не кратны π. Имеем: $\sin(nx - a) = 0$ в том и только в том случае, если $nx - a = k\pi$, то есть $x = (\pi k + a)/n$, где k — любое целое число. Получаем требуемые n корней: $a/n; (\pi + a)/n; (2\pi + a)/n; \dots; ((n-1)\pi + a)/n$. Значит,

$$\sin(nx - a) = c\sin(x - a/n)\sin(x - (\pi + a)/n)\sin(x - (2\pi + a)/n)\dots\sin(x - ((n-1)\pi + a)/n).$$

Как для $\cos nx$, коэффициент c находим, сравнивая старшие ступени. Так как старшая ступень вида $a_k \cos kx + b_k \sin kx$ для $\sin(ix - a)\sin(jx - b)$ — это

$$-(1/2)\cos((i + j) - (a + b)) = (1/2)(\sin((i + j)x) - (a + b + (\pi/2))),$$

то старшая ступень правой части — это

$$\begin{aligned}(1/2^{n-1})\sin(nx - ((a/n) + ((\pi + a)/n) + \dots + (((n-1)\pi + a)/n) + (\pi/2)(n-1))) &=\\ = (1/2^{n-1})\sin(nx - a - ((n-1)/2)\pi - (\pi/2)(n-1))) &=\\ = (1/2^{n-1})\sin(nx - a - \pi(n-1)) &= (-1/2)^{n-1}\sin(nx - a).\end{aligned}$$

Так как старшая ступень левой части — это сам $\sin(nx - a)$, то $c = (-2)^{n-1}$. Так как $\cos x = -\sin(x - (\pi/2))$, то сразу получаем:

$$\begin{aligned}\cos(nx - a) = (-2)^{n-1}(-1)\sin(x - (a + (\pi/2))/n)\sin(x - (\pi + (\pi/2) + a)/n) \times\\ \times \sin(x - (2\pi + (\pi/2) + a)/n)\dots\sin(x - ((n-1)\pi + (\pi/2) + a)/n).\end{aligned}$$

Теперь разложим $\cos nx - \cos a$ на простые множители в F_0 и в F_2. При разложении в F_2 никаких проблем не возникает, так как

$$\begin{aligned}\cos nx - \cos a = -2\sin((nx - a)/2)\sin((nx + a)/2) =\\ = -2\sin((n(x/2) - (a/2))\sin((n(x/2) + (a/2)),\end{aligned}$$

а $\sin(ny - a)$ мы уже умеем раскладывать. Разложение в F_0 можно получить из разложения в F_2, группируя множители $\sin((x/2) - b)$ и $\sin((x/2) + b)$ ($\sin(x/2)$ группируется сам с собой, что возможно потому, что $\cos nx - \cos a$ — четная функция, поэтому $\sin(x/2)$ обязан входить в это разложение четное число раз). Но удобнее раскладывать прямо в F_0. Найдем корни. $\cos nx - \cos a = 0$ в том и только в том случае, если $nx = \pm a + 2k\pi$, то есть $x = (\pm a + 2k\pi/n)$, где k — любое целое число. При $\cos a \neq \pm 1$, то есть $a \neq l\pi$, где l — целое число, при k от 0 до $(n-1)$ все $\cos(a+2k\pi/n)$ попарно различны. Действительно, чтобы проверить, что $\cos c \neq \cos d$, достаточно проверить, что $c+d$ и $c-d$ не кратны π. Если бы $((a+2k\pi)/n)-(a+2l\pi)/n)) = 2m\pi$, то $(k-l)/n = m$, что невозможно, так как $k \neq l$ и $|k-l| < n$. Если бы $((a+2k\pi)/n) + (a+2l\pi)/n)) = 2m\pi$, то $a = (mn-k-l)\pi$ было бы кратно π. Значит, при $a \neq l\pi$, то есть $\cos a \neq \pm 1$,

$$\cos nx - \cos a = c(\cos x - \cos(a/n))(\cos x - \cos(a+2\pi/n))(\cos x - \cos(a+2(n-1)\pi/n)).$$

Причем мы знаем, что старшая ступень вида $a_k \cos kx$ правой части есть $(1/2^{n-1})\cos nx$, значит, $c = 2^{n-1}$.

При $\cos a = \pm 1$ рассуждения, с помощью которых мы вывели эту формулу, непосредственно не проходят из-за того, что в этом случае у $\cos nx - \cos a$ нет n корней с попарно различными косинусами. Из равенств $\cos nx - 1 = -2\sin^2(nx/2)$ и $\cos nx + 1 = 2\cos^2(nx/2)$ мы видим, что (так как $\sin(x/2)$ и $\cos(x/2)$ имеют по n различных корней в $[0; 2\pi[)$ во множестве F_2 все корни $\cos a \pm 1$ имеют кратность 2. Но

$$c(\cos x - \cos(a/n))(\cos x - \cos(a+2\pi/n)) \cdot \dots \cdot (\cos x - \cos(a+2(n-1)\pi/n))$$

при $a = l\pi$ имеет те же самые корни:

$$\cos x - \cos((l\pi + 2i\pi)/n) = -2\sin((x-(l\pi+2i\pi/n))/2)\sin((x+(l\pi+2i\pi/n))/2), a(l\pi+2i\pi)/n$$

и $-(l\pi+2i\pi)/n$ удовлетворяют $\cos n\pi = \cos l\pi$. При этом корни $(l\pi+2i\pi)/n$ и $(l\pi+2j\pi)/n$ отличаются друг от друга на $(2(i-j)\pi)/n$, то есть их разность не кратна 2π при $0 \leq j < i < n$, и то же верно для $-(l\pi+2i\pi)/n$ и $-(l\pi+2j\pi)/n$. А разность $(l\pi+2i\pi)/n$ и $-(l\pi+2j\pi)/n$ равна $(2l\pi+2(i+j)\pi)/n$ и кратна 2π в том и только в том случае, если $l+(i+j)$ кратно n, то есть j дает тот же остаток при делении на n, что $-(l+i)$. Получаем, что все корни

$$c(\cos x - \cos(l\pi/n))(\cos x - \cos(l\pi+2\pi/n)) \dots (\cos x - \cos(l\pi+2(n-1)\pi/n))$$

имеют кратность 2, то есть разложение на простые множители в F_2 у этого ТМ такое же, как у $\cos nx - \cos l\pi$. Значит,

$$\cos nx - \cos l\pi = 2^{n-1}(\cos x - \cos(l\pi/n))(\cos x - \cos(l\pi+2\pi/n)) \dots (\cos x - \cos(l\pi+2(n-1)\pi/n)).$$

На самом деле это рассуждение можно было не проводить, а воспользоваться соображениями непрерывности: при фиксированных n и x имеем $y = \cos nx - \cos a$ и $y = 2^{n-1}(\cos x - \cos(a/n))(\cos x - \cos(a+2\pi/n))(\cos x - \cos(a+2(n-1)\pi/n))$ — непрерывные функции от a, поэтому из их совпадения при $-1 < a < 1$ следует совпадение и при $a = \pm 1$.

Теперь попробуем найти НОД и НОК $\sin(nx+a_1)$ и $\sin(mx+a_2)$. Зависят ли они от того, в каком из множеств F_1, F и F_2 мы их ищем? Эти ТМ однородные, поэтому их НОД и НОК в F_1 существуют и являются также НОД и НОК в F и в F_2 . Для нахождения НОД и НОК однородных ТМ достаточно разложить их на простые множители в F_1. Корни $\sin(nx+a_1)$ — это $(-a_1+k\pi)/n$, где k — любое целое число. Корни $\sin(nx+a_2)$ — это $(-a_2+l\pi)/m$, где l — любое целое число. Общие корни есть в том и только в том случае, если уравнение с неизвестными y и z $(-a_1+y\pi)/n = (-a_2+z\pi)/m$; то есть $ym - zn = (a_1m - a_2n)/\pi$, имеет решения в целых числах. Понятно, что если число $(a_1m-a_2n)/\pi$ не целое, то целых решений нет и значит $\sin(nx+a_1)$ и $\sin(mx+a_2)$ взаимно просты, их НОД это 1, а НОК, с точностью до множителя-константы, — их произведение. Если же $(a_1m-a_2n)/\pi$ — целое, то, как мы знаем, $ym - zn = a$ имеет решения в целых числах в том и только в том случае, если $a/\text{НОД}(m;n)$ — целое число, то есть $(a_1m - a_2n)/(\pi НОД(m;n))$ — целое. Значит, если $(a_1m-a_2n)/(\pi\text{НОД}(m;n))$ не целое, то $\sin(nx+a_1)$ и $\sin(mx+a_2)$ взаимно просты. А если $(a_1m-a_2n)/(\pi\text{НОД}(m;n))$ целое, то решения в целых числах есть и формула общего решения имеет вид $y = y_0 + t(n/\text{НОД}(m;n))$; $z = z + t(m/\text{НОД}(m;n))$, где t любое целое число, а $(y;z)$ — одно из решений. Значит, общая формула общих корней:

$$(-a_1 + (y_0 + t(n/НОД(m;n)))\pi)/n = ((-a_1 + y\pi)/n) + (t\pi)/\text{НОД}(m;n),$$

где t — любое целое число, то есть общие корни повторяются с периодом $\pi/\text{НОД}(m;n)$. Следовательно, в этом случае НОД $\sin(nx + a_1)$ и $\sin(mx + a_2)$ представляет собой (с точностью до умножения на константу) произведение множителей $\sin(x - b_i)$, где b_i $(i = 0, 1, \ldots, \text{НОД}(m;n) - 1)$ — общие корни $\sin(nx + a_1)$ и $\sin(mx + a_2)$, $b_i = b + \dfrac{i\pi}{\text{НОД}(m;n)}$. Но те же самые корни имеет $\sin(\text{НОД}(m;n)(x - b))$. Значит, НОД $\sin(nx + a_1)$ и $\sin(mx + a_2)$ равен (с точностью до умножения на константу) $\sin(\text{НОД}(m;n)(x - b_0))$, где b_0 — любой из общих корней $\sin(nx + a_1)$ и $\sin(mx + a_2)$. Соответственно, НОК этих однородных ТМ равен (с точностью до умножения на константу) их произведению, деленному на их НОД.

Упражнения к главе 5

5.1. В каких из множеств F_1; F; F_2 из того, что x_0 — корень $f(x)$, следует, что $f(x)$ делится без остатка на $\sin(x - x_0)$?

5.2. В каких из множеств F_0; F_1; F_2 из того, что x_0 — корень $f(x)$, следует, что $f(x)$ делится без остатка на $\cos x - \cos x_0$?

5.3. Угадайте 2 корня ТМ $(a \sin x + b)(b \sin x + a) - (a \cos x + b)(b \cos x + a)$ в промежутке $[0; 2\pi[$ (Здесь a и b — числа, отличные от 0.). На какой ТМ первой степени обязан делиться этот ТМ ? Выполните деление. Используя результат деления, решите уравнение $(a \sin x + b)(b \sin x + a) = (a \cos x + b)(b \cos x + a)$.

5.4. Найдите ТМ первой степени, имеющий в промежутке $[0; 2\pi[$ два корня, $\pi/6$ и $\pi/2$.

5.5. Найдите ТМ первой степени, имеющий в промежутке $[0; 2\pi[$ только один корень, $\pi/6$.

5.6. Найдите однородный ТМ второй степени, имеющий в промежутке $[0; \pi[$ два корня, $\pi/6$ и $\pi/2$.

5.7. Найдите все ТМ второй степени, имеющие в промежутке $[0; 2\pi[$ ровно два корня, $\pi/6$ и $\pi/2$.

5.8. Для ТМ $f(x) = 3 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x + \cos x - 3 \sin x - 5$ найдите $f_{\text{зач}}(x)$ и разложите его на простые множители в F_0. Пользуясь полученным разложением, решите уравнения $f_{\text{зач}}(x) = 0$ и $f(x) = 0$.

5.9. Совпадает ли множество всех общих делителей $f_{\text{чет}}(x)$ и $f_{\text{нечет}}(x)$ в F с множеством всех общих делителей $f(-x)$ и $f(x)$? Верно ли, что если в F существует НОД $f(-x)$ и $f(x)$, то существует и НОД $f_{\text{чет}}(x)$ и $f_{\text{нечет}}(x)$, и наоборот, и что если они оба существуют, то они одинаковы?

5.10. Найдите НОД $f(-x)$ и $f(x)$ в F и в F_2 для $f(x)$ из Упражнения 5.8.

5.11. Верно ли, что каждый КМ а $\cos^2 x + 2b \cos x + c$ можно представить в виде произведения двух КМ вида $d \cos x + e$? А двух ТМ вида $d \cos x + e \sin x + f$? Представьте $f(x) = 2\cos^2 x + 4\cos x + 3$ в виде произведения двух ТМ первой степени. Сколько решений имеет эта задача?

5.12. Найдите все разложения ТМ $\sin^2 x$; $\cos^2 x$; $\cos^3 x$ на множители вида $a \cos x + b \sin x + c$. (Не забудьте доказать, что вы действительно нашли все варианты.)

5.13. Найдите НОД$(\sin x - (\sqrt{2}/2); \sin x - \cos x)$ в F и в F_2.

5.14. Найдите НОК$(\sin x - (\sqrt{2}/2); \sin x - \cos x)$ в F_2. Есть ли у этих ТМ НОК в F? Есть ли у них общие кратные первой степени? Приведите пример двух их общих кратных второй степени, которые не делятся друг на друга.

5.15. Существует ли НОД в F у $f(x) = 4\cos^2 x + 8\cos x \sin x - 4\cos x - 3$ и у $g(x) = 4\cos^2 x - 6\cos x \sin x + 3\cos x - 3$. Если существует, то найдите его. Найдите НОД$(f(x); g(x))$ в F_2 и общие корни уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$.

5.16. Найдите НОД$(\cos 4x \cos 5x; \cos 6x \cos 7x)$ в F_0; F_1 и F_2.

5.17. Найдите НОД $f(x) = \sin 4x - \sin 2x - \cos 3x + 2\sin x - 1$ и $g(x) = 2\sin 2x - \sqrt{3}$ в F_2 и в F.

5.18. Найдите НОД$(\sin^8 x; 1 + \cos^8 x)$ и НОД$(\sin^7 x; 1 + \cos^7 x)$ в F_2 и в F.

Глава 6. Угадаем корень

Мы теперь знаем кое-что

- о числе корней ТМ n-ой степени;
- о связи между корнями и разложением ТМ на множители.

Поэтому теперь мы можем с уравнениями вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — ТМ, делать то, что раньше умели делать только для обычных многочленов — решать такие уравнения угадыванием корней. Вы, наверное, обращали внимание, что чаще всего угадывание применяется к многочленам с целыми или рациональными коэффициентами. Одна из причин в том, что если мы имеем дело с иррациональными числовыми выражениями, то выяснить, равны ли два таких выражения, бывает не проще, чем решить иррациональное уравнение, преобразуя выражения с переменными. Поэтому мы и в случае ТМ ограничимся ТМ с целыми или рациональными коэффициентами. А вместо целых и рациональных корней будем рассматривать корни вида $(k/n)\pi$, где k и n — целые числа. Тогда особенно просто проверить, является ли $(k/n)\pi$ корнем нашего ТМ при $n = 1; 2; 3; 4$ и 6. Остальными n мы займемся позже. А теперь рассмотрим простые примеры.

Угадаем все корни уравнения $\cos 6x + 2\cos 5x + \cos 4x + \cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$.

Левая часть этого уравнения — КМ шестой степени. Значит в $[0; \pi]$ он имеет не больше 6 корней. Поэтому если в $[0; \pi]$ удастся найти 6 корней, то уравнение можно будет считать решенным. Перебирая числа $(k/n)\pi$, где k и n — целые числа, $0 \le k \le 6$; $0 \le n \le 6$ и $n \ne 5$, подставляя их в уравнение, находим 6 корней: $\pi; \pi/2; \pi/4; 3\pi/4; \pi/6; 5\pi/6$. Значит, уравнение решено. Его корни $\pm\alpha + 2k\pi$, где $\alpha = \pi; \pi/2; \pi/4; 3\pi/4; \pi/6; 5\pi/6$, k — любое целое число.

Конечно, не всегда так просто угадать все корни. Но, угадав один корень уравнения $f(\cos x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен, всегда можно понизить степень уравнения. Ведь мы знаем, что если x_0 — корень, то $f(\cos x)$ обязан делиться на $\cos x - \cos x_0$. Правда, если $\cos x_0$ иррационален, то частное имеет по крайней мере один иррациональный коэффициент.

Решим уравнение $\cos 4x + 2\cos 3x - \cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$.

Угадав корень $\pi/3$, делим ТМ из левой части уравнения на $2\cos x - 1 = 2(\cos x - \cos(\pi/3))$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;\cos 4x + 2\cos 3x - \cos 2x + 2\cos x + 1 & 2\cos x - 1 \\
\underline{\cos 4x + \cos 2x - \cos 3x\qquad\qquad\qquad} & \overline{\cos 3x + 3\cos 2x + \cos x} \\
-\;3\cos 3x - 2\cos 2x + 2\cos x + 1 & \\
\underline{3\cos 3x + 3\cos x - 3\cos 2x\quad} & \\
-\;\cos 2x - \cos x + 1 & \\
\underline{\cos 2x - \cos x + 1} & \\
0 &
\end{array}
$$

Угадываем еще один корень, $\pi/4$. Потом мы докажем, что если КМ с рациональными коэффициентами имеет корень $\pi/4$, то и $3\pi/4$ обязательно его корень. А сейчас это можно проверить подстановкой в уравнение. Получаем, что ТМ $\cos 3x + 3\cos 2x + \cos x$ обязан делиться на $(\cos x - \cos\pi/4)(\cos x - \cos 3\pi/4) = (1/2)\cos 2x$.

Выполняем деление уголком.

$$\begin{array}{r|l} -\ \cos 3x + 3\cos 2x + \cos x & \cos 2x \\ \cos 3x + \cos x & \overline{2\cos x + 3} \\ \hline -\ 3\cos 2x & \\ \underline{3\cos 2x} & \\ 0 & \end{array}$$

Но уравнение $2\cos x + 3 = 0$ не имеет корней. Значит, все решения исходного уравнения в $[0;\pi]$ — это $\pi/3; \pi/4$ и $3\pi/4$.

Теперь рассмотрим ТМ $f(\sin x; \cos x)$. Это труднее, но интереснее.

Решим угадыванием корней уравнение $\sin 3x - \cos 3x - \cos 2x - \sin 2x + \sin x + \cos x - 1 = 0$.

Находим перебором и подстановкой в исходное уравнение корни $\pi/2; -\pi/2; -\pi/4$; $3\pi/4; \pi/6$; $5\pi/6$. Так как ТМ третьей степени имеет не больше 6 корней в промежутке $]-\pi;\pi]$, других корней в этом промежутке нет. Корни, не принадлежащие $]-\pi;\pi]$, отличаются от найденных на $2k\pi$, где k любое целое число.

Из предыдущей главы мы знаем, что если найден один корень x_0, то ТМ обязан только как ТМ от $x/2$ делиться на $\sin((x-x)/2)$. При делении степень данного ТМ как ТМ от $x/2$ понизится на 1. Но эта степень в 2 раза выше исходной. Поэтому желательно угадывать сразу по два корня.

Решим угадыванием корней уравнение $\sin 4x - \sin 2x - \cos 3x + 2\sin x - 1 = 0$.

Угадываем 2 корня: π и $\pi/3$. Значит наш ТМ обязан делиться на ТМ

$$\sin((x-\pi)/2)\sin((x-(\pi/3))/2) = (1/2)(\cos\pi/3 - \cos(x - 2\pi/3)).$$

Недостаток этого ТМ первой степени в том, что он имеет иррациональный коэффициент $(1/2)\sin(2\pi/3)$ при $\sin x$. Поэтому попробуем еще поугадывать корни. Потом мы докажем, что если ТМ с рациональными коэффициентами имеет корень $\pi/3$, то и $-\pi/3$ обязательно его корень. А сейчас это можно проверить подстановкой в уравнение. Перебором находим, что $\pi/6$ тоже корень.

Из дальнейшей теории следует, что и $5\pi/6$ обязано быть корнем. Делаем вывод, что наш ТМ делится на $\sin((x-(\pi/3))/2)\sin((x+(\pi/3))/2) = -(1/2)(\cos x - 1/2)$ и на $\sin((x-\pi/6)/2)\sin((x-(5\pi/6))/2) = -(1/2)(\sin x - 1/2)$. Значит, он делится и на $(2\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 2\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 1$.

Выполним деление уголком.

$$\begin{array}{r|l} -\ \sin 4x - \sin 2x - \cos 3x + 2\sin x - 1 & 2\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 1 \\ \sin 4x - \sin 3x + \sin x - \cos 3x - \cos x + \cos 2x & \overline{\cos 2x + \cos x} \\ \hline -\ \sin 3x - \sin 2x - \cos 2x + \sin x + \cos x - 1 & \\ \underline{\sin 3x - \sin 2x + \sin x - \cos 2x - 1 + \cos x} & \\ 0 & \end{array}$$

Получили частное $\cos 2x + \cos x$. Это КМ. А так как π его корень, то этот КМ делится на $\cos x + 1$. Выполним деление уголком.

$$\begin{array}{r|l} -\ \cos 2x + \cos x & \cos x + 1 \\ \cos 2x - 2\cos x - 1 & \overline{2\cos x - 1} \\ \hline -\ -\cos x - 1 & \\ \underline{-\cos x - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

Значит, остальные корни — это корни уравнения $2\cos x - 1 = 0$. Мы их уже нашли. Итак, наше исходное уравнение в $]-\pi;\pi]$ имеет 5 корней: $-\pi/3$; $\pi/3$; $\pi/6$; $5\pi/6$; π.

Заметим, что на множители наш ТМ раскладывается так:

$$(\cos x + 1)(2\cos x - 1)^2(2\sin x - 1) = (\cos 3x + 1)(2\sin x - 1).$$

Если бы мы сразу догадались, что он так раскладывается, решение оказалось бы короче. Впрочем, найдя на черновике более длинное решение, в чистовике можно написать сразу короткое: предъявить разложение $(\cos 3x + 1)(2\sin x - 1)$; проверить раскрытием скобок, что оно верно и решить уравнение $\cos 3x + 1 = 0$ и $2\sin x - 1 = 0$.

Теперь решим угадыванием уравнение $2\cos 3x - 3\sin x - \cos x = 0$. ТМ $2\cos 3x - 3\sin x - \cos x$ однородный, так как содержит $\sin kx$ и $\cos kx$ только с нечетными k. Поэтому, угадав его корень $3\pi/4$, мы можем утверждать, что наш ТМ делится на $\sin(x - 3\pi/4) = (1/\sqrt{2})(\sin x + \cos x)$. Выполним деление.

$$\begin{array}{l|l} 2\cos 3x - 3\sin x - \cos x & \sin x + \cos x \\ \cline{2-2} & a\cos 2x + b\sin 2x + \cdots \end{array}$$

a и b подбираем так, чтобы старшая ступень произведения $(\sin x + \cos x)(a\cos 2x + b\sin 2x)$ была $2\cos 3x$, то есть

$$(a/2)\sin 3x + (a/2)\cos 3x - (b/2)\cos 3x + (b/2)\sin 3x = 2\cos 3x,$$

откуда

$$(a/2) - (b/2) = 2; \qquad (a/2) + (b/2) = 0.$$

Значит, $a = 2$; $b = -2$. Продолжим выполнять деление уголком.

$$\begin{array}{rr|l} - & 2\cos 3x - 3\sin x - \cos x & \sin x + \cos x1 \\ \cline{3-3} & 2\cos 3x - 2\sin x & 2\cos 2x - 2\sin 2x - 1 \\ \cline{2-2} - & -\sin x - \cos x & \\ & \underline{-\sin x - \cos x} & \\ & 0 & \end{array}$$

В частном получился ТМ от $2x$ степени 1. Поэтому применяем общий способ решения уравнений вида $a\cos x + b\sin x = c$.

$$2\sqrt{2}((1/\sqrt{2})\cos 2x - (1/\sqrt{2})\sin 2x) = 1; \quad \cos(2x + \pi/4) = 1/(2\sqrt{2});$$

откуда $x = \pm(1/2)\arccos(1/(2\sqrt{2})) - (\pi/8) + k\pi$, где k — любое целое число.

Окончательный ответ: корни данного уравнения $3\pi/4 + k\pi$ и $\pm(1/2)\arccos(1/(2\sqrt{2})) - (\pi/8) + k\pi$, где k — любое целое число.

Пусть теперь даны некоторый КМ $a_m\cos mx + a_{m-1}\cos(m-1)x + \cdots + a_0$ и натуральное число l. Мы хотим выяснить, есть ли у данного КМ корни вида $(k\pi)/l$ и с какими именно k. Заметим, что если k четное, то $(k/l)\pi$ — корень уравнения $\cos lx - 1 = 0$; а если k нечетное, то корень уравнения $\cos lx + 1 = 0$. Поэтому если мы заменим наш КМ остатком от его деления на $\cos lx - 1$, то не изменятся его корни $(k/l)\pi$ с четными k, а если остатком от деления на $\cos lx + 1$, — то с нечетными.

Другой способ сведения одного КМ степени l к другому так, чтобы степень нового КМ была меньше l, а корни вида $(k/l)\pi$ с данным l и произвольными k фиксированной четности были те же самые, состоит в использовании формулы

$$\cos(k+l)x = \cos kx\cos lx - \sin kx\sin lx \text{ или } \cos(k+ln)x = \cos kx\cos lnx - \sin kx\sin lnx.$$

Так как при $x = (k/l)\pi$ имеем $\sin lnx = 1$, а $\cos lnx = (-1)^{nk}$, то, если нас интересуют четные k, $\cos(ln+r)x$ можно заменить на $\cos rx$, а если нечетные, — то на $(-1)^n\cos rx$.

В результате описанных двух способов сведения могут получаться разные КМ. Например, $\cos 4x$ при сведении первым способом при $l = 3$ и четных k дает $-\cos 2x + 2\cos x$, а при сведении вторым способом дает $\cos x$.

Теперь заметим, что если l нечетно, $l = 2n+1$, то при $x = (k/l)\pi$ выполняется равенство $nx + (n+1)x = k\pi$, откуда $\cos(n+1)x = \cos(k\pi - nx) = (-1)^k \cos nx$. Поэтому при четных k и $x = (k/l)\pi$ имеем $\cos(n+1)x = \cos nx$, а при нечетных k — $\cos(n+1)x = -\cos nx$. Делением соответственно на $\cos(n+1)x + \cos nx$ или на $\cos(n+1)x - \cos nx$ (то есть заменяя наш КМ соответствующим остатком от деления), мы получаем два КМ степени, не превосходящей n, то есть $(l-1)/2$, один имеет те же корни $(k/l)\pi$ с нечетными k (точнее, совпадает с исходным при всех $x = k/l\pi$ с нечетными k), а другой — с четными k.

Вместо деления можно воспользоваться соотношением

$$(n+1+t)x + (n-t)x = k\pi$$

при $x = (k/2n+1)\pi$, откуда при $x = (k/l)\pi = (k/2n+1)\pi$

$$\cos(n+1+t)x = (-1)^k \cos(n-t)x.$$

На этот раз оба способа сведения приводят к одному и тому же результату. Дело в том, что, в отличие от КМ $\cos lx - 1$ и $\cos lx + 1$, имеющих кратные корни как ТМ от $x/2$, и поэтому имеющих меньше l (то есть меньше степени рассматриваемого ТМ) корней в $[0;\pi]$, каждый из КМ $\cos(n+1)x + \cos nx$ и $\cos(n+1)x - \cos nx$ имеет в $[0;\pi]$ $n+1$ корень. А именно, $\cos(n+1)x + \cos nx$ имеет корни $\pi/(2n+1)$; $3\pi/(2n+1)$; $\ldots (2n-1)\pi/(2n+1)$; $(2n+1)\pi/(2n+1)$, а $\cos(n+1)x - \cos nx$ — корни $0\pi/(2n+1)$; $2\pi/(2n+1)$; $\ldots$; $2n\pi/(2n+1)$. Таким образом, при обоих способах сведения получаются два КМ, совпадающие в $n+1$ точках промежутка $[0;\pi]$ и при этом имеющие степень не выше n. Значит это один и тот же КМ.

Теперь выполним аналогичное сведение для корней $(k/l)\pi$ с четными l и нечетными k.

Для четного $l = 2n$ при $x = (k/l)\pi$ выполняется равенство $(n+t)x + (n-t)x = k\pi$. Поэтому при нечетных k имеем $\cos nx = 0$ и $\cos(n+t)x + \cos(n-t)x = 0$. Значит, наш КМ сводится к КМ степени, не превосходящей n, совпадающему с исходным при $x = \pi/2n$; $3\pi/2n$; $\ldots$; $(2n-1)\pi/2n$, любым из двух способов: делением с остатком на $\cos nx$ или заменой $\cos(n+t)x$ на $\cos(n-t)x$ (точнее, заменой $\cos(qn+r)x$, где $r = 0, \ldots, n-1$; q — любое целое положительное число, на $(-1)^q \cos rx$).

Теперь вернемся к случаю нечетного $l = 2n+1$. Так как π — корень $\cos(n+1)x + \cos nx$, а $\cos(n+1)x + \cos nx$ не просто ТМ, а КМ, то он обязан делиться на $\cos x + 1$. Причем результат должен быть КМ степени n с рациональными коэффициентами. Выполним деление уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\ \cos(n+1)x + \cos nx & \cos x + 1 \\ \cline{2-2} \cos(n+1)x + \cos(n-1)x + 2\cos nx & 2\cos nx - \cdots \\ \cline{1-1} -\ \cos nx - \cos(n-1)x & \\ \ldots & \end{array}$$

То есть результат деления получится $2\cos nx-$ (результат деления $\cos nx + \cos(n-1)x$ на $\cos x + 1$), или $2\cos nx - 2\cos(n-1)x + \cdots + 2(-1)^{n-1}\cos x + (-1)^n$.

У нас получился КМ степени n с целыми коэффициентами, имеющий n корней $\pi/(2n+1)$; $3\pi/(2n+1)$; $\ldots (2n-1)\pi/(2n+1)$, и значит представляющий собой произведение $(\cos x - \cos\pi/(2n+1)) \ldots (\cos x - \cos(2n-1)\pi/(2n+1))$.

Мы знаем, что алгоритм Евклида по двум многочленам (а значит и по двум КМ) с рациональными коэффициентами дает результат — НОД — тоже с рациональными коэффициентами. Поэтому для того, чтобы выяснить, есть ли у заданного КМ корни $(k/2n+1)\pi$ с фиксированным n и произвольным нечетным k из $[0; 2n-1]$, достаточно найти его НОД с $2\cos nx - 2\cos(n-1)x + \cdots + 2(-1)^{n-1}\cos x + (-1)^n$. Если этот НОД совпадает (с точностью до умножения на константу) с

$$2\cos nx - 2\cos(n-1)x + \cdots + 2(-1)^{n-1}\cos x + (-1)^n,$$

то $\pi/(2n+1); 3\pi/(2n+1); \dots (2n-1)\pi/(2n+1)$ — корни нашего КМ. (В случае, если мы сначала перейдем к КМ степени, не превосходящей n, такое совпадение будет иметь место в том и только в том случае, когда полученный КМ степени, не превосходящей n, сам с точностью до умножения на константу совпадает с $2\cos nx - 2\cos(n-1)x + \dots + 2(-1)^{n-1}\cos x + (-1)^n$.) В случае несовпадения, скорее всего, НОД окажется константой. Тогда тоже все ясно — общих корней нет.

Если же НОД будет иметь ненулевую степень, то корни среди $\pi/(2n+1); 3\pi/(2n+1); \dots; (2n-1)\pi/(2n+1)$ у данного КМ есть, причем их количество равно степени НОД. Если мы хотим выяснить, для каких конкретно нечетных k число $(k/2n+1)\pi$ — корень нашего КМ, то полезно сначала отсеять все k, для которых дробь $k/2n+1$ сократима (и значит, наша задача сводится к другой паре $(k_1; l_1)$, где $l_1 < l$). Чтобы исключить корни $(k/2n+1)\pi$, где $k/2n+1$ сократима на фиксированный простой делитель p числа $2n+1$, достаточно разделить оставшийся у нас КМ на его НОД с $\cos n_1 x + \cos(n_1-1)x$, где $2n_1+1 = (2n+1)/p$. Можно также исключить корни $(k/2n+1)\pi$ с четными k, разделив на НОД с $\cos(n+1)x - \cos nx$. Если после этого все еще получается КМ ненулевой степени, то мы должны радоваться, что нашлось такое n, для которого произведение всех $\cos x - \cos(k/2n+1)\pi$, где $k/2n+1$ — несократимая правильная дробь, можно разложить в произведение двух КМ меньшей степени с рациональными коэффициентами. (Как мы покажем дальше, при n от 1 до 30 это невозможно.) Но в этом случае выяснять, для каких именно нечетных k число $(k/2n+1)\pi$ — корень, придется, наверное, с помощью каких-то оценок $\cos(k/2n+1)\pi$ снизу и сверху. Аналогично решается вопрос для дробей k/l с четным числителем или знаменателем $l = 2n$. При этом роль $2\cos nx - 2\cos(n-1)x + \dots + 2(-1)^{n-1}\cos x + (-1)^n$ будут играть соответственно частное от деления $\cos(n+1)x - \cos nx$ на $\cos x - 1$, то есть $2\cos nx + 2\cos(n-1)x + \dots + 2\cos x + 1$, и частное от деления $\cos nx$ на $\cos x$, то есть $2\cos(n-1)x - 2\cos(n-2)x + \dots + 2(-1)^{n-2}\cos x + (-1)^{n-1}$.

Перейдем к **примеру**. Решим угадыванием корней уравнение $2\cos 4x + 2\cos 3x + 1 = 0$. Подстановкой убеждаемся, что у этого уравнения нет корней $(k/l)\pi$ с $l < 5$. Проверим корни $(k/5)\pi$. При $x = (k/5)\pi$ имеем $5x = k\pi$; $4x + x = k\pi$; $\cos 4x = (-1)^k \cos x$; аналогично $\cos 3x = (-1)^k \cos 2x$. Поэтому, если нас интересуют только корни $(k/5)\pi$, мы можем перейти от исходного КМ к $2(-1)^k\cos 2x + 2(-1)^k \cos x + 1$. Видим, что при $k = 2$ получается КМ $2\cos 2x + 2\cos x + 1$. А мы знаем, что КМ $2\cos nx + 2\cos(n-1)x + \dots + 2\cos x + 1$ имеет корни $2\pi/(2n+1); \dots; 2n\pi/(2n+1)$. Значит, корнями получившегося у нас КМ являются $(2/5)\pi$ и $(4/5)\pi$. Поэтому исходный КМ делится на $2\cos 2x + 2\cos x + 1$. Выполним деление уголком.

$$
\begin{array}{rl|l}
- & 2\cos 4x + 2\cos 3x + 1 & 2\cos 2x + 2\cos x + 1 \\ \cline{3-3}
 & 2\cos 4x + 2 + 2\cos 3x + 2\cos x + 2\cos 2x & 2\cos 2x - 1 \\ \cline{2-2}
- & -2\cos 2x - 2\cos x - 1 & \\
 & -2\cos 2x - 2\cos x - 1 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Остается решить уравнение $2\cos 2x - 1 = 0$. Получаем, что, кроме $(2/5)\pi$ и $(4/5)\pi$, исходный КМ имеет в $[0; \pi]$ еще 2 корня: $(1/6)\pi$ и $(5/6)\pi$.

Итак, для конкретного l задача выяснения, является ли $(k/l)\pi$, где k/l — несократимая дробь, корнем КМ с рациональными коэффициентами, упрощается, если заранее найден КМ наименьшей возможной степени с корнем $(k/l)\pi$, с рациональными коэффициентами. Такой КМ будем называть *минимальным* для этого корня. Поскольку если $(k/l)\pi$ одновременно корень двух КМ $f_1(\cos x)$ и $f_2(\cos x)$, то он корень их НОД, причем если f_1 и f_2 имеют рациональные коэффициенты, то и их НОД имеет рациональные коэффициенты, имеем: минимальный КМ для конкретного $(k/l)\pi$ единственен, если потребовать, чтобы его старший коэффициент был равен 2. И на минимальный делятся все остальные КМ с рациональными коэффициентами с этим корнем. В частности, минимальные КМ для $(k/l)\pi$ для фиксированного l и взаимно простых с ним k являются делителями произведения всех $2\cos x - 2\cos(k/l)\pi$, где k/l — правильная несократимая дробь. Это произведение обозначим $f_l(x)$. КМ $f_l(x)$ имеет рациональные коэффициенты, как мы объяснили выше, избавляясь от всех корней КМ $\cos nx$ или $\cos(n+1)x + \cos nx$, для которых дробь k/l, где $l = 2n$ или $l = 2n+1$ соответственно, сократима. Старший коэффициент у $f_l(x)$ равен 2.

Нас будут интересовать степени минимальных КМ и разложение $f_l(x)$ на неразложимые КМ (то есть такие КМ с рациональными коэффициентами, которые нельзя разложить в произведение двух КМ ненулевых степеней с рациональными коэффициентами).

Заметим, что если КМ $f(x)$ имеет рациональные коэффициенты и m — целое число, то и $f(mx)$ — КМ с рациональными коэффициентами (а степень $f(mx)$ в $|m|$ раз больше степени $f(x)$). Попробуем воспользоваться этим, чтобы сделать полезные выводы.

Пусть КМ $f(x)$ — делитель $f_l(x)$ с рациональными коэффициентами. Тогда $f(x)$ является произведением нескольких множителей $\cos x - \cos(i/l)\pi$, где i/l — правильная несократимая дробь. А $f(mx)$ — произведением множителей $\cos mx - \cos(i/l)\pi$. При этом $\cos mx - \cos(i/l)\pi$, в отличие от $\cos x - \cos(i/l)\pi$, имеет m корней с разными косинусами. Но мы сейчас докажем, что если m нечетно и взаимно просто с l, то среди корней $\cos mx - \cos(i/l)\pi$ обязательно есть корни $f_l(x)$, причем у всех общих корней $\cos mx - \cos(i/l)\pi$ и $f_l(x)$ один и тот же косинус.

Действительно, корни $\cos mx - \cos(i/l)\pi$ — это $\pm((k+2il)/lm)\pi$. Значит, достаточно найти такое целое i, чтобы $k+2il$ делилось на m, то есть найти такие целые i и j, что $(i;j)$ — решение уравнения $2xl - ym = -k$. где x, y обозначают неизвестные целые числа. А так как $2l$ и m взаимно просты, то такое решение обязательно существует.

Теперь разберемся, почему если $(j_1/l)\pi$ и $(j_2/l)\pi$ — оба корни $\cos mx - \cos(k/l)\pi$, то $\cos(j_1/l)\pi = \cos(j_2/l)\pi$. Имеем: $\cos(m(j_1/l)\pi) = \cos(m(j_2/l)\pi)$. Значит, либо сумма, либо разность чисел $m(j_1/l)\pi$ и $m(j_2/l)\pi$ кратна 2π. Но $2l$ и m взаимно просты. Поэтому $j_1 + j_2$ или $j_1 j_2$ кратно $2l$. А это означает, что $\cos(j_1/l)\pi = \cos(j_2/l)\pi$.

Итак, $f(mx)$ имеет столько же корней $(i/l)\pi$ с разными $\cos x$, сколько $f(x)$. Но тогда НОД$(f(mx); f_l(x))$ — многочлен с рациональными коэффициентами той же степени, что $f(x)$. Значит, если $(i/l)\pi$ — один из корней этого НОД, то степень его минимального КМ не больше степени $f(x)$.

Но a — корень $f(mx)$ в том и только в том случае, когда ma — корень $f(x)$. Значит, для любого i, взаимно простого с l, и m, взаимно простого с $2l$, степень минимального КМ для $(i/l)\pi$ не выше степени минимального КМ для $m(i/l)\pi$. А, как известно, для любой пары $(i_1; i_2)$ целых чисел, взаимно простых с $2l$, найдется такое m, взаимно простое с $2l$, что $i_1 - mi_2$ кратно $2l$. Поэтому если числа i_1 и i_2 оба нечетны и взаимно просты с l, то степень минимального КМ для $(i_1/l)\pi$ не больше степени минимального КМ для $(i_2/l)\pi$, и наоборот, то есть эти степени равны.

Заметим, что если l четно, то все взаимно простые с ним i нечетны, и значит все $(i/l)\pi$ имеют одну и ту же степень КМ. Если же l нечетно, то числа i и $i - l$ всегда имеют разную четность. При этом $(i/l)\pi$ — корень $f(x)$ в том и только в том случае, если $(i/l)\pi - \pi = (i - l/l)\pi$ — корень $f(x+\pi)$. Причем $f(x+\pi)$ имеет рациональные коэффициенты, если $f(x)$ имеет рациональные коэффициенты, так как $\cos n(x+\pi) = (-1)^n \cos nx$. И степень $f(x+\pi)$ та же, что у $f(x)$. Поэтому степень минимального КМ для $(i - l/l)\pi$ такая же, как для $(i/l)\pi$. Следовательно, и при нечетном l минимальные КМ для всех $(i/l)\pi$ таких, что i взаимно просто с l, имеют одну и ту же степень.

Так как каждый неразложимый КМ с рациональными коэффициентами является минимальным для своих корней, то мы доказали следующее

Утверждение 6.1. *Если $f_l(x)$ раскладывается в произведение двух или больше неразложимых КМ с рациональными коэффициентами, то все эти множители имеют одну и ту же степень — некоторый делитель степени $f_l(x)$.*

Скворцова Елена Зеликовна,
преподаватель отделения математики
Всероссийской заочной
многопредметной школы (ВЗМШ).

E-mail: cskvorcova@math-vzms.org

От Адама Ризе к Симплекс-методу или Непростые следствия простой задачи

И. Акулич

В статье, на примере решения достаточно простой старинной арифметической задачи, проиллюстрированы современные методы решения задач линейного программирования — симплекс метод, а также некоторые методы поиска оптимальных целочисленных решений.

Еще в XVI веке Адам Ризе[1] предложил следующую арифметическую задачу:

Трое торгуют лошадь стоимостью 12 флоринов[2], но никто из них в отдельности не располагает такой суммой. Один из них сказал двум другим:

— Дайте мне по половине своих денег, и я куплю лошадь.

Второй говорит:

— Дайте мне по третьей части своих денег, и я приобрету лошадь.

Наконец, третий сказал:

— Дайте мне лишь по четверти своих денег, и лошадь будет моей.

Сколько денег было у каждого?

Задача может вызвать затруднение разве что у безнадежных лоботрясов. Если обозначить количество флоринов у первого, второго и третьего покупателей через x_1, x_2 и x_3 соответственно, то ее условие можно свести к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{x_2+x_3}{2} = 12 \\ x_2 + \frac{x_1+x_3}{3} = 12 \\ x_3 + \frac{x_1+x_2}{4} = 12 \end{cases} \qquad (1)$$

из которой $x_1 = 3\frac{9}{17}$, $x_2 = 7\frac{13}{17}$, $x_3 = 9\frac{3}{17}$.

Но это, как говорится, присказка. Ознакомьтесь с продолжением задачи Адама Ризе:

Два математика беседовали, прогуливаясь по улицам средневекового города. Один из них рассказывал о том, как вчера зашел на рынок и оказался свидетелем вышеупомянутого разговора трех покупателей:

— Я не видел, сколько у них было денег, — сказал он, — но из их беседы сумел точно определить, какой суммой обладал каждый, — и он назвал те самые три числа, которые указаны выше.

[1] Адам Ризе (1492–1559) — выдающийся немецкий математик и педагог. Самоучкой достиг замечательно глубоких сведений в арифметике, алгебре и геометрии. Был очень популярен среди простого народа. Выражение “nach Adam Riese” (“по Адаму Ризе”) стало поговоркой, до сих пор употребляемой в Германии. Издал несколько учебников, содержащих множество задач.

[2] Флорин — золотая монета, которую впервые начали чеканить во Флоренции (отсюда и название). С XIV века ее стали выпускать и в Германии, присвоив также второе название — *гульден*.

— Интересно, — усмехнулся второй математик, — как ты собираешься отделить от флорина семнадцатую часть? Считаешь ты хорошо, но не совсем верно понял услышанный разговор. Никто ведь не утверждал что после того, как двое остальных выделят ему часть своих капиталов, у него наберется ровно 12 флоринов. Каждый лишь говорил, что ему в таком случае хватит денег на покупку лошади, т.е. у него окажется не меньше 12 флоринов. Открою секрет: и я был вчера на рынке, и, хотя сам тоже не видел, какими суммами они располагали, но, по утверждению рыночного менялы, каждый из них имел целое число флоринов (более мелких монет ни у кого не было).

— Да, в таком случае мое решение неверно, — согласился первый. — Но, как известно, даром ничего не пропадает, и, полагаю, полученный мной результат может быть использован в качестве оценки снизу. Иначе говоря, я могу утверждать, что суммарное количество денег у них должно быть *не менее* суммы чисел, найденных мной: $3\frac{9}{17} + 7\frac{13}{17} + 9\frac{3}{17} = 20\frac{8}{17}$ флоринов. А поскольку сумма трех целых чисел есть заведомо число целое, то, значит, у покупателей всего было не меньше 21 флорина.

— Ты уверен?

— Конечно! Ведь в моем решении речь идет о строгих равенствах, а на самом деле имели место три неравенства, причем одного и того же вида: "не меньше". Значит, и сумма денег у всех троих не меньше, чем получилось у меня. Я это интуитивно чувствую.

— Интуиция — не доказательство. Но даже если ты и прав, то интересна сама по себе задача определения наименьшей суммы денег у покупателей. Пусть, как ты утверждаешь, она действительно не меньше 21 флорина, но, может быть, и это значение недостижимо? Например, если все найденные тобой числа просто округлить в большую сторону, то получится сумма $4 + 8 + 10 = 22$ флорина, что больше 21. Решив же задачу полностью, мы проверим тем самым и твою интуицию.

— Что ж, проблема ясна. Но я не вижу путей ее решения, кроме прямого перебора всех возможных наборов из трех целых чисел, каждое из которых может принимать значения от 0 до 11 (большими они быть не могут, поскольку известно, что никому из покупателей не хватило денег, чтобы купить лошадь единолично). Всего получается $12 \times 12 \times 12 = 1728$ наборов, и, в принципе, их можно все проверить, тем более что здесь возможна отбраковка заведомо бесперспективных вариантов. Но всё-таки для решения задач такого рода нужен какой-то общий метод, который, я уверен, рано или поздно будет разработан. Пусть даже через несколько сотен лет.

— Поживем, — увидим, — вздохнул второй.

Прервем ученую беседу и вернемся из XVI века в нынешний. Сначала сформулируем задачу в современных обозначениях. У покупателей, как мы условились, было x_1, x_2 и x_3 флоринов соответственно. Тогда их высказывания можно записать в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{x_2+x_3}{2} \geq 12 \\ x_2 + \frac{x_1+x_3}{3} \geq 12 \\ x_3 + \frac{x_1+x_2}{4} \geq 12 \end{cases} \tag{2}$$

Кроме того, следует добавить еще три "естественных" ограничения, отображающих невозможность наличия в кармане *отрицательных* сумм денег:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Всего, таким образом, получилось 6 неравенств. Требуется найти *целые* числа x_1, x_2 и x_3, удовлетворяющие этим неравенствам, чтобы их сумма $G = x_1 + x_2 + x_3$ была наименьшей.

Сначала решим более простую задачу, а именно: будем считать, что x_1, x_2 и x_3 — *не обязательно целые* числа. Одолев ее, мы заодно проверим, верным ли было предположение первого математика о том, что сумма найденных им трех чисел — действительно наименьшая возможная. Такого рода задачи (когда и функция, минимум которой надо найти, и все ограничения *линейно* зависят от переменных) называются *задачами линейного программирования* (для краткости назовем их *Л-задачами*).

Принцип, на котором основано решение Л-задач, разработан давным-давно. Проиллюстрируем его на примере решения нашей частной "лошадиной" задачи. Рассмотрим систему прямоугольных декартовых координат в пространстве $Ox_1x_2x_3$. Возьмем для начала первое неравенство-ограничение: $x_1 + \frac{x_2+x_3}{2} \geq 12$. Если заменить в нем знак "$\geq$" на "$=$", то получившееся уравнение $x_1 + \frac{x_2+x_3}{2} = 12$ в нашей системе координат представляет собой плоскость. А в случае неравенства мы имеем множество точек, лежащих *по одну сторону* от этой плоскости (включая и саму плоскость). То есть проведенная плоскость "рассекает" пространство на две части, только одна из которых удовлетворяет этому неравенству.

Остальные 5 неравенств также "разрезают" пространство надвое — каждое по-своему. Пересечение всех шести полученных *полупространств* есть множество точек (x_1, x_2, x_3), удовлетворяющих всей системе неравенств. Оно представляет собой некий выпуклый многогранник (правда, совсем не обязательно *замкнутый*[3]).

А теперь обратимся к сумме $G = x_1 + x_2 + x_3$, минимум которой надо найти. Ее называют *целевой функцией*. Если вновь обратиться к системе координат (с "вырезанным" из пространства многогранником допустимых точек), то, придавая величине G различные числовые значения, мы получим уравнения различных параллельных между собой плоскостей: $x_1 + x_2 + x_3 = G$. Какие-то из них пересекаются с "многогранником допустимых значений", какие-то — нет. Основная идея метода линейного программирования заключается в том, что экстремальное значение целевой функции достигается, когда эта плоскость не пересекается, а только *соприкасается* с многогранником в какой-то точке (т.е. многогранник лежит *по одну сторону* от плоскости). Но какова может быть эта точка соприкосновения? Для выпуклого многогранника это непременно *одна из его вершин*[4]!

Именно такой вывод позволяет нам указать способ решения Л-задачи: найти все вершины многогранника, проверить их и выбрать ту, для которой целевая функция минимальна (а в общем случае, может быть, и максимальна). У нас имеется 3 переменных и 6 ограничений — к счастью, не очень много. А если бы их было намного больше? Тогда вырезаемый плоскостями многогранник и представить-то невозможно (ибо из *пространства* мы выходим в *гиперпространство*) — как же тогда находить координаты вершин?

К нашей радости, математическая мысль не стоит на месте. Был разработан мощный и удобный способ решения Л-задач при любом числе переменных и ограничений, названный *симплекс-методом*[5] (далее — просто СМ). Для удобства использования автор настолько его формализовал, что при его применении совершенно не чувствуется смысла выполняемых действия — сплошные манипуляции с таблицами[6]. Достоинство СМ еще и в том, что он может быть легко

---

[3]Кстати, в данном случае многогранник как раз *незамкнутый*. Но для других задач он может и "замкнуться" — всё зависит от системы ограничений.

[4]Мысленно представьте себе какой-нибудь многогранник и плоскость, перемещающуюся перпендикулярно самой себе — и тогда последнее утверждение станет для вас очевидным (по крайней мере, на интуитивном уровне). Конечно, в частном (математики говорят — "вырожденном") случае соприкосновение плоскости с многогранником может пройти по целому ребру, а то и по грани, но в любом случае через какую-то вершину она обязательно пройдет!

[5]Этот метод был предложен в 1947 году американским ученым Джорджем Данцигом (1914–2005).

[6]Для тех же, кому интересна *глубинная идея* СМ, вкратце поясним. Представим себе наш "многогранник допустимых значений" и плоскость, изображающую целевую функцию, касающуюся многогранника в "экстремальной" вершине. СМ содержит два этапа. На первом этапе производится поиск одной (любой!) вершины многогранника. Конечно, не обязательно ей сразу окажется нужная нам "экстремальная" вершина. На втором этапе перебира-

реализуем на компьютере.

При использовании СМ сначала надо систему ограничений и целевую функцию преобразовать к некоторому специфическому виду.

Во-первых, СМ позволяет находить лишь *минимум* (но не *максимум*!) целевой функции. В данном случае так оно и есть. Ну, а если бы требовалось всё-таки найти максимум? Ничего страшного. Достаточно все коэффициенты при слагаемых целевой функции умножить на -1, и поиск максимума функции G сведется к поиску минимума функции $-G$.

Во-вторых, все переменные, входящие в целевую функцию и систему ограничений, должны быть *неотрицательны.* У нас это имеет место — более того, позволяет отбросить ограничения (3) — зачем они нужны, если переменные и так должны быть неотрицательны? А если бы какая-то переменная x_i была, наоборот, *неположительна*? Не беда: тогда в системе ограничений и целевой функции заменим x_i на $-x_i$. Более того — если какая-то переменная x_i может принимать *любые* значения (как положительные, так и отрицательные), то надо всего лишь записать: $x_i = x_i{}' - x_i^{''}$, т.е. заменить x_i разностью двух неотрицательных переменных (при этом, правда, количество переменных возрастает на 1).

Запишем систему ограничений (2) в "нормальном" виде: расположив переменные в порядке возрастания номеров, оставив в правой части только свободные члены и избавившись от дробей (последнее необязательно, но система становится приятней на вид):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 24 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 36 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 48 \end{cases} \tag{4}$$

Следующий шаг: если в правой части какого-либо неравенства свободный член отрицателен, умножим обе части на -1, в результате чего свободный член справа становится положительным, коэффициенты при всех x_i в левой части меняют знак, а само неравенство становится противоположным, т.е "$\geq$" заменяется на "$\leq$" и наоборот. В нашей задаче это не требуется.

Очередное действие: превращение неравенств в уравнения. Для этого в левую часть каждого неравенства добавляем по одному *неотрицательному* вспомогательному параметру — переменной y_j. Каждое из них снабжаем знаком "+" или "−", в зависимости от того, каков вид неравенства ("$\leq$" или "$\geq$" соответственно). В нашем случае все неравенства — типа "$\geq$", поэтому все вспомогательные переменные (их три — по числу уравнений) получают знак "−":

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - y_1 = 24 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - y_2 = 36 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - y_3 = 48 \end{cases} \tag{5}$$

Разумеется, если какое-либо из ограничений сразу задано в виде *равенства* (всякое бывает!), то добавлять вспомогательное переменное в него не следует.

Ну, что ж, подготовительные операции завершены, и мы приступаем к заполнению *симплекс-таблицы.* Для этого в придачу к имеющимся шести переменным придется ввести еще несколько переменных z_k, которые называются *искусственными.* Их количество равно числу уравнений (т.е. 3). Симплекс таблица — прямоугольная, имеет на одну строку больше, чем введено искусственных переменных, и на 1 столбец больше, чем суммарное количество основных и вспомогательных переменных (а именно 3+1 = 4 строки и 3+3+1 = 7 столбцов). Строки помечаем сверху вниз искусственными переменными: z_1, z_2 и z_3, столбцы слева направо — основными и вспомогательными переменными: x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 и y_3. Самая нижняя строка и самый правый столбец никак не помечаются и носят название *главной строки* и *главного столбца* соответственно. В

ются все ребра, ведущие из этой вершины в соседние вершины, и выбирается та из соседних вершин, которая находится ближе всего к "целевой" плоскости. Затем просматриваем все ребра, ведущие из этой второй вершины, и выбираем очередную вершину, которая еще ближе к целевой плоскости — и так далее. Когда для очередной вершины все ведущие из нее пути ведут лишь к отдалению от плоскости — значит, всё: экстремальная вершина найдена!

клетки построчно заносятся коэффициенты при соответствующих основных и вспомогательных переменных системы уравнений (5), а в главный столбец — свободные члены. Так заполняются все строки, кроме главной. В каждую же клетку главной строки вносим сумму чисел во всех выше лежащих клетках того же столбца *с обратным знаком*. Заметим, что при заполнении таблицы мы пока что никак не используем коэффициенты при переменных целевой функции, ибо это лишь *первый* этап СМ (в котором отыскиваются координаты хотя бы одной вершины многогранника).

Заполненная симплекс-таблица выглядит следующим образом:

Таблица 1

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
z_1	2	1	1	-1	0	0	24
z_2	1	3	1	0	-1	0	36
z_3	1	1	4	0	0	-1	48
	-4	-5	-6	1	1	1	-108

Следующий шаг (вернее — несколько однотипных шагов) — перезаполнение симплекс-таблицы (практически, конечно, удобней заготовить несколько чистых бланков и в их клетки вписывать новые значения). Здесь мы будем по специальным правилам заменять числа в таблице на другие. Выполняем следующие действия:

1) Выбираем *разрешающий столбец*. С этой целью среди всех чисел нижней строки (кроме самого правого, расположенного в главном столбце) выбираем *наименьшее* (если таковых несколько — то любое). Если это число — отрицательное, то столбец называется разрешающим. Как видно, таковым является столбец x_3, для которого значение равно -6. Ну, а если бы среди рассмотренных чисел вообще не оказалось отрицательных? Тогда это свидетельствовало бы либо о чем-то приятном, либо наоборот. А именно:

приятный случай: если главная строка состоит из одних нулей; это означает, что мы уже “нащупали” одну из вершин многогранника, и первый этап завершен (как говорят, найдено *допустимое базисное решение* — далее “ДБР”);

неприятный случай: в главной строке имеются строго положительные числа; это явный признак того, что система ограничений *несовместна*, т.е. нет ни одной точки пространства, им удовлетворяющим — тогда решение приходится вынужденно прекратить.

2) Выбираем *разрешающую клетку*. Для этого просматриваем все клетки разрешающего столбца, в которых записаны *положительные* числа, и для каждого из них составляем дробь, в знаменателе которой стоит это самое число, а в числителе — число из главного столбца, находящееся в той же строке. Видно, что в разрешающем столбце имеется три положительных числа в строках z_1, z_2 и z_3, равные соответственно 1, 1 и 4, а в главном столбце напротив них находятся числа 24, 36 и 48. Составляем три дроби: $\frac{24}{1} = 24$, $\frac{36}{1} = 36$ и $\frac{48}{4} = 12$. Та клетка разрешающего столбца, для которой дробь — *наименьшая*, называется разрешающей клеткой, а строка, содержащая ее — *разрешающей строкой*. Если наименьших дробей несколько, выбираем любую. Таким образом, разрешающей является клетка, лежащая в строке z_3. Ну, а если бы в разрешающем столбце не было положительных чисел? Это тоже говорит о противоречивости системы ограничений.

3) Берем пустой бланк таблицы и *перезаполняем* ее. Сначала пометим строки и столбцы новой таблицы теми же буквами x_i, y_j и z_k. Они переносятся на те же места, где и были, за следующим исключением: обозначения разрешающей строки и разрешающего столбца меняются местами (т.е. x_3 становится строкой, а z_3 — столбцом).

4) Определяем *разрешающий коэффициент* C_P, равный обратной величине числа в разрешающей клетке: $C_P = \frac{1}{4}$.

5) Новое значение в разрешающей клетке становится равным C_P.

6) Новые значения остальных чисел разрешающего столбца становятся равными прежним значениям, умноженным на $-C_P$.

7) Новые значения остальных чисел разрешающей строки становятся равными прежним значениям, умноженным на C_P.

8) Находим новые значения во всех остальных клетках. Для каждой из них определяем две вспомогательные клетки: клетку K_1, расположенную в разрешающем столбце в одной строке с рассматриваемой клеткой, и клетку K_2, расположенную в разрешающей строке в одном столбце с рассматриваемой клеткой. Тогда новое значение в рассматриваемой клетке равно прежнему значению за вычетом произведения $C_1C_2C_P$, где C_1 и C_2 — *прежние* значения чисел в клетках K_1 и K_2.

Таким образом, получаем новые значения для всех клеток, то есть, по сути — новую симплекс-таблицу. Затем преобразуем ее по тем же правилам (выбираем разрешающий столбец, разрешающую клетку и т.д.). Полученную таблицу снова преобразуем — и т.д., пока не получим таблицу с полностью нулевой главной строкой. Это означает, что ДБР найдено, и можно двигаться дальше - приступать непосредственно к поиску минимума целевой функции.

“Да, — скажет любой, ознакомившись с инструкцией, — СМ в громоздкости не откажешь!”. Увы, ничего проще пока не изобрели[7]. Кроме того (вот маленькая радость!), при преобразовании симплекс-таблицы возможно упрощение. Оно заключается в том, что если при обмене наименований разрешающих столбца и строки (см. п. 4 инструкции) столбец получает имя *искусственной* переменной (z_k), то в новой таблице этот столбец *вычеркивается*, т.е. выполнять пп. 5 и 6 вообще не следует! При этом в новой таблице окажется на один столбец меньше, чем в предыдущей, что весьма способствует уменьшению объема вычислений. Когда же мы, преобразовывая таблицу многократно, придем к окончательной таблице, с нулевой главной строкой, в ней число столбцов уменьшится по сравнению с исходным на величину, равную первоначальному количеству искусственных переменных, т.е. искусственные переменные “естественным образом” из таблицы исчезнут[8]. Исходная таблица 1 имеет 7 столбцов, а в конце преобразований их останется $7-3=4$. И первый из них пропадет при первом же преобразовании — поскольку бывший столбец x_3 получил имя z_3, мы тут же его вычеркиваем).

Вот как выглядит симплекс-таблица после первого преобразования:

Таблица 2

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
z_1	7/4	3/4	−1	0	1/4	12
z_2	3/4	11/4	0	−1	1/4	24
x_3	1/4	1/4	0	0	−1/4	12
	−5/2	−7/2	1	1	−1/2	−36

После второго преобразования она становится короче еще на один столбец:

Таблица 3

	x_1	y_1	y_2	y_3	
z_1	17/11	−1	3/11	2/11	60/11
x_2	3/11	0	−4/11	1/11	96/11
x_3	2/11	0	1/11	−3/11	108/11
	−17/11	1	−3/11	−2/11	−60/11

А после третьего получаем то, к чем стремились — таблицу с нулевой главной строкой:

[7] Если не считать способов решения некоторых Л-задач, имеющих специфический вид, например, широко известная “транспортная задача”, которая решается несравненно легче.

[8] Впрочем, бывают редкие случаи, когда этот закон нарушается, но они чрезвычайно редки, и мы на них останавливаться не будем.

Таблица 4

	y_1	y_2	y_3	
x_1	$-11/17$	$3/17$	$2/17$	$60/17$
x_2	$3/17$	$-7/17$	$1/17$	$132/17$
x_3	$2/17$	$1/17$	$-5/17$	$156/17$
	0	0	0	0

Итак, ДБР найдено. Теперь посмотрим в итоговой таблице 4: именами каких переменных обозначены столбцы? Это y_1, y_2 и y_3. Далее придется с помощью составленной нами ранее системы уравнений (5) выразить целевую функцию через эти (и только эти!) переменные. Как это сделать? Сначала представим систему в виде:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 24 + y_1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 36 + y_2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 48 + y_3 \end{cases} \tag{6}$$

Далее можно использовать какой-нибудь стандартный математический способ, например, метод Гаусса[9], или что-нибудь еще, после чего подставить значения x_1, x_2 и x_3 в целевую функцию. Но мы поступим проще: поскольку эти значения *по отдельности* нас не интересуют, умножим первое уравнение на 6, второе — на 3, третье — на 2 и сложим их[10]. Получаем: $17x_1 + 17x_2 + 17x_3 = 348 + 6y_1 + 3y_2 + 2y_3$, и $G = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{348}{17} + \frac{6}{17}y_1 + \frac{3}{17}y_2 + \frac{2}{17}y_3$.

Затем снова возвращаемся к таблице 4. Заменим нули в ее главной строке найденными нами коэффициентами целевой функции в соответствии с именами столбцов, а в последнюю, самую правую клетку, помещаем свободный член из выражения целевой функции, причем с обратным знаком. И вот что у нас вышло:

Таблица 5

	y_1	y_2	y_3	
x_1	$-11/17$	$3/17$	$2/17$	$60/17$
x_2	$3/17$	$-7/17$	$1/17$	$132/17$
x_3	$2/17$	$1/17$	$-5/17$	$156/17$
	$6/17$	$3/17$	$2/17$	$-348/17$

Теперь переходим ко *второму* этапу СМ — непосредственному поиску минимума целевой функции. По известным уже правилам преобразуем новую таблицу, и проделываем это столько раз, сколько потребуется, пока не получим окончательной таблицы, у которой в главной строке... нет, не нули, не угадали! В итоговой таблице все числа главной строки (кроме, может быть, самого правого) должны стать *неотрицательны*. При этом выбрать разрешающий столбец невозможно, что свидетельствует о достижении цели. Тогда наименьшее значение целевой функции как раз равно числу, записанному в правой нижней ячейке, причем с обратным знаком. А как узнать, при каких значениях переменных этот минимум достигается? Очень просто: те переменные, которыми именованы столбцы окончательной таблицы, должны равняться 0, а значения переменных, которыми обозначены строки, размещены в правых ячейках этих строк (в главном столбце). Всё!

Здесь следует добавить несколько слов. Во-первых, возможен случай, когда в разрешающем столбце не окажется положительного числа, и означает это уже не противоречивость системы ограничений, а наоборот — что "многогранник допустимых значений" неограничен в таком

[9]Карл Гаусс (1777–1855) — великий немецкий ученый, получивший среди современников титул "короля математиков". Среди многих решенных им математических проблем есть и способы решения систем линейных уравнений.

[10]Отдельный вопрос: как были подобраны эти множители? Подумайте сами!

направлении, что минимум целевой функции становится недостижимым[11]. Во-вторых, при преобразовании таблицы надо помнить, что искусственных переменных в ней уже нет, и потому, к сожалению, никакого уменьшения числа столбцов при переходе к новой таблице быть не может.

Что ж, "добьем" нашу задачу. Выбираем разрешающий столбец... Вот так раз! Среди чисел нижней строки отрицательных *нет* (кроме последнего). Это значит, что минимум целевой функции *уже достигнут*, то есть мы ухитрились счастливо угодить в оптимальную вершину, и дальнейшие преобразования не нужны!

Тем лучше. Прямо с последней таблицы считываем ответ: минимум целевой функции равен $G_{min} = -\left(-\frac{348}{17}\right) = 20\frac{8}{17}$; $x_1 = \frac{60}{17} = 3\frac{9}{17}$; $x_2 = \frac{132}{17} = 7\frac{13}{17}$; $x_3 = \frac{156}{17} = 9\frac{3}{17}$; $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

Смотрите-ка, а ведь средневековый математик был прав, интуиция его не подвела! Действительно, минимум суммы денег у покупателей достигается именно при тех значениях, которые он указал. Впрочем, сейчас мы можем дать этому факту обоснованное объяснение. Решению системы уравнений из исходной задачи Адама Ризе соответствует в пространстве точка пересечения трех плоскостей, которая одновременно является одной из вершин "многоугольника допустимых значений". В данном случае совпало так, что эта же вершина является той самой, в которой достигается минимум целевой функции.

Наш триумф по поводу успешно найденного минимума функции $G = x_1 + x_2 + x_3$ слегка омрачается тем, что добиться той же цели мы могли куда проще, используя подход, близкий к использованному нами при выражении G через y_1, y_2 и y_3. А именно, взяв всё ту же систему неравенств (4), умножим первое на 6, второе — на 3, третье — на 2 и сложим. Получим: $17x_1 + 17x_2 + 17x_3 \geq 348$, откуда $G = x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{348}{17} = 20\frac{8}{17}$, то есть такая сумма — действительно минимально возможная[12].

Итак, Л-задачу мы одолели. Но ведь и она — не конечная наша цель. Мы-то хотим найти *целочисленные* значения сумм, которыми располагали покупатели. Попробуем найти *целые* числа x_1, x_2 и x_3, удовлетворяющие данным ограничениям, чтобы их сумма $G = x_1 + x_2 + x_3$ была наименьшей. Такую задачу назовем *ЦЛ-задачей*. Уж наверняка математики разработали хорошие способы одолеть и ее!

Однако, придется слегка разочароваться. Ибо насколько хороши существующие приемы решения Л-задачи, настолько же слабы известные в настоящее время методы решения ЦЛ-задачи. Конечно, многие из них позволяют найти некоторые наборы целых чисел, соответствующих минимуму целевой функции, но решить задачу полностью — то есть *гарантированно* выявить *все* такие наборы (их может быть несколько) — не позволяет ни один.

Ознакомимся с наиболее известными способами решения ЦЛ-задачи.

Первый, самый очевидный, основывается на предположении, что оптимальная точка ЦЛ-задачи находится в "непосредственной близости" от оптимальной вершины Л-задачи, что можно интерпретировать так. Оптимальная точка Л-задачи известна: $(3\frac{9}{17}, 7\frac{13}{17}, 9\frac{3}{17})$. Она находится внутри некоторого единичного куба, координаты всех вершин которого — целые числа. Весьма вероятно, что минимум целевой функции ЦЛ-задачи достигается в какой-то из этих вершин, каковых имеется восемь: (3,7,9), (3,7,10), (3,8,9), (3,8,10), (4,7,9), (4,7,10), (4,8,9), (4,8,10). Осталось только проверить их на соответствие системе ограничений и выбрать точку с наименьшей целевой функцией (в данном случае — просто суммой координат). Поскольку минимум целевой функции ЦЛ-задачи, очевидно, не может быть меньше минимума целевой функции Л-задачи (а его мы уже нашли — это $20\frac{8}{17}$), то минимум целевой функции ЦЛ-задачи никак не меньше 21. Это позволяет сразу отбросить из рассмотрения точки, сумма координат которых не превышает 20 (а таких точек — половина!). Среди остальных четырех точек системе ограничений (4) удовлетворяют только три: (3,8,10), (4,8,9) и (4,8,10). Для первых двух целевая функция равна 21, для третьей — 22. Итак, имеем два оптимальных набора (x_1, x_2, x_3) ЦЛ-задачи: (3,8,10) и (4,8,9).

[11] Иногда говорят: минимум равен $-\infty$, что не вполне корректно.

[12] Но зато симплекс-метод применим к *любой* Л-задаче, а наше упрощенное решение — только к конкретной.

Определить *все* оптимальные наборы этот метод не позволяет. Более того — бывают случаи, когда он дает неверный результат, потому что предположение о геометрической близости целочисленной и нецелочисленной оптимальных точек, вообще говоря, *неверно*. Но никто не сможет оспорить явное преимущество метода — *простоту*.

Второй способ, названный *методом дополнительного ограничения*, более трудоемкий, но и более обоснованный. Понятно, что минимум целевой функции ЦЛ-задачи *не меньше* минимума целевой функции Л-задачи, округленного в бо́льшую сторону. Предположим, что минимум целевой функции ЦЛ-задачи *как раз равен* этому округленному числу. А если так, то мы к исходной системе ограничений можем добавить еще одно ограничение, притом довольно жесткое: *целевая функция равна округленному в бо́льшую сторону минимуму целевой функции Л-задачи*. Итак, новая система ограничений содержит теперь уже не три, а четыре уравнения:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 24 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 36 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 48 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 21 \end{cases} \tag{7}$$

Дальше решаем ту же Л-задачу симплекс-методом. Поскольку четвертое ограничение имеет вид равенства, то четвертую *вспомогательную* переменную водить не следует, а четвертую *искусственную* переменную (z_4) добавить придется. Далее — как обычно. Исходная симплекс-таблица здесь такова:

Таблица 6

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
z_1	2	1	1	−1	0	0	24
z_2	1	3	1	0	−1	0	36
z_3	1	1	4	0	0	−1	48
z_4	1	1	1	0	0	0	21
	−5	−6	−7	1	1	1	−129

Промежуточные таблицы для экономии места мы, пожалуй, опустим, а итоговую покажем (она получилась довольно "узенькая", поскольку при пересчете пришлось выбросить 4 столбца, соответствующих искусственным переменным):

Таблица 7

	y_2	y_3	
x_1	1/2	1/3	9/2
x_2	−1/2	0	15/2
x_3	0	−1/3	9
y_1	1/2	1/3	3/2
	0	0	0

Далее следует выразить целевую функцию $G = x_1 + x_2 + x_3$ через y_2 и y_3. В данном случае это проще простого. Действительно, поскольку дополнительное (четвертое) ограничение дает $x_1 + x_2 + x_3 = 21$, то $G = 21 = 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + 21$. Стало быть, в главной строке обновленной симплекс таблицы должны находиться (слева направо) числа 0, 0 и -21. И поскольку все они (кроме самого правого) неотрицательны, то это значит, что минимум целевой функции уже найден (и равен, что неудивительно, 21), а достигается они при $x_1 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$; $x_3 = 9$; $y_1 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$; $y_2 = y_3 = 0$. Однако, найденная нами оптимальная точка *не целочисленная*. Провал!

Впрочем, не будем, озлившись на бесплодность затраченных трудов, рвать бумагу в клочья (или дубасить кулаком по монитору, если использовали компьютер). Оказывается, не всё потеряно! Но об этом чуть позже.

Следующий метод носит красивое название: *метод расщепления*. Для применения его опять нужна таблица (5).

Из всех координат оптимальной вершины (т.е. среди чисел x_1, x_2,x_3) выберем то, которое *наиболее* отличается от ближайшего целого числа. Это, конечно, $x_1 = 3\frac{9}{17}$. Его дробная часть равна $\frac{9}{17}$, а дополнение ее до ближайшего большего целого числа, очевидно, равно 1 - $\frac{9}{17} = \frac{8}{17}$. Теперь создадим две новых таблицы. Обе они получаются добавлением в приведенную итоговую таблицу дополнительной строки, которую можно вставить в любое место, только не в самый низ (мы сделаем эту добавочную строку *предпоследней*). Она помечается каким-либо новым именем (например, w_1) и представляет собой еще одну *вспомогательную* переменную (к сожалению, не *искусственную*, так что число столбцов в процессе преобразований не уменьшится).

В одной из новых таблиц добавочная строка содержит те же числа, что и строка, носящая имя выбранной нами переменной (x_1), но все — с обратным знаком, а самое правое число равно его дробной части, т.е. $\frac{9}{17}$, взятой со знаком “минус”:

Таблица 8

	y_1	y_2	y_3	
x_1	$-11/17$	$3/17$	$2/17$	$60/17$
x_2	$3/17$	$-7/17$	$1/17$	$132/17$
x_3	$2/17$	$1/17$	$-5/17$	$156/17$
w_1	$11/17$	$-3/17$	$-2/17$	$-9/17$
	$6/17$	$3/17$	$2/17$	$-348/17$

Во второй таблице добавленная строка содержит точно те же числа, что и строка x_1, а самое правое число равно определенному выше дополнению $\frac{8}{17}$, взятому со знаком “минус”:

Таблица 9

	y_1	y_2	y_3	
x_1	$-11/17$	$3/17$	$2/17$	$60/17$
x_2	$3/17$	$-7/17$	$1/17$	$132/17$
x_3	$2/17$	$1/17$	$-5/17$	$156/17$
w_1	$-11/17$	$3/17$	$2/17$	$-8/17$
	$6/17$	$3/17$	$2/17$	$-348/17$

Тем самым произошло *расщепление* итоговой симплекс-таблицы Л-задачи на две *по переменной* x_1. Смысл расщепления таков: таблица 8 соответствует введению дополнительного ограничения $x_1 \leq 3$, таблица 9 — введению дополнительного ограничения $x_1 \geq 4$, т.е. оптимальные целочисленные точки сначала будут отыскиваться вблизи значения $x_1 = 3\frac{9}{17}$. Далее каждую из таблиц преобразовываем, пока не обнаружим оптимальную точку. Весьма вероятно, что она окажется целочисленной. Если же нет, то следует еще раз расщепить задачу по наиболее отличающейся от нуля переменной, и так далее.

Но как преобразовывать таблицы 8 и 9? И у той, и у другой в главной строке нет отрицательных чисел (кроме, может быть, самого правого), и потому выбрать разрешающий столбец невозможно! Оказывается, для метода расщепления разрешающие строка, столбец и клетка выбираются по-другому. Сначала ищем разрешающую *строку*. Для этого среди чисел главного столбца (кроме самого нижнего) выбираем *наименьшее*. Если оно *неотрицательное*, то разрешающей строки нет, преобразования закончены, и надо проанализировать таблицу и определить: получено ли целочисленное решение, или требуется вновь расщеплять таблицу на две. Если же оно *отрицательно*, то строка, в которой это число содержится, и является разрешающей.

Затем перебираем все клетки разрешающей строки (кроме самой правой), в которых стоят *отрицательные* числа. Если таковых нет, то задача при таких ограничениях неразрешима. Если же такие клетки есть, то для каждой из них составляется дробь, в знаменателе которой стоит абсолютная величина числа из этой клетки, а в числителе — число из самой нижней клетки того же столбца. Та клетка, для которой эта дробь минимальна, и будет *разрешающей* клеткой, а содержащий ее столбец — *разрешающим* столбцом. Применительно к таблице 8 разрешающая строка — это w_1, а разрешающий столбец может быть выбран одним из двух: y_2 или y_3, поскольку для них составленные дроби равны: $\frac{3/17}{3/17} = \frac{2/17}{2/17}$ (для определенности возьмем столбец y_2).

Далее таблица преобразуется по тем же правилам, что и в решении обычной Л-задачи (пп. 3-8). В результате получим:

Таблица 10

	y_1	w_1	y_3	
x_1	0	1	0	3
x_2	$-4/3$	$-7/3$	$1/3$	9
x_3	$1/3$	$1/3$	$-1/3$	9
y_2	$-11/3$	$-17/3$	$2/3$	3
	1	1	1	-21

В ней выбрать разрешающую строку невозможно, и, значит, минимум целевой функции достигнут. Равен он, как и ожидалось, 21, при $x_1 = 3$, $x_2 = 9$, $x_3 = 9$. Мы получили еще одну оптимальную точку, ранее неизвестную.

Если проделать то же с таблицей 9, то получим:

Таблица 11

	w_1	y_2	y_3	
x_1	-1	0	0	4
x_2	$3/11$	$-4/11$	$1/11$	$84/11$
x_3	$2/11$	$1/11$	$-3/11$	$100/11$
y_1	$-17/11$	$-3/11$	$-2/11$	$8/11$
	$6/11$	$3/11$	$2/11$	$-228/11$

Она соответствует оптимальной точке $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{84}{11} = 7\frac{7}{11}$, $x_3 = \frac{100}{11} = 9\frac{1}{11}$. Ничего не поделаешь — придется расщеплять еще раз — на этот раз по переменной x_2, т.к. именно она наиболее отклоняется от целого числа. В итоге на свет появляются две целочисленных точки: (4, 7, 11) и (4, 8, 9). У первой целевая функция равна 22 и нас не устраивает, зато вторая — вполне приемлема (хотя мы ее уже нашли ранее другим способом).

А теперь вспомним наше фиаско при попытке решить задачу методом добавления жесткого ограничения $x_1 + x_2 + x_3 = 21$ (см. таблицы 6 и 7). Помнится, там получилась нецелая точка $(4\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 9)$. Но кто мешает нам и здесь применить расщепление? Оказывается, что сразу две переменные — x_1 и x_2 — одинаково отличаются от нуля, и можно выбирать, по какой из них выполнять расщепление. Взяв, например, x_1, получим оптимальную точку (4, 8, 9) — увы, опять найденную ранее.

Наконец, рассмотрим еще один популярный способ решения ЦЛ-задачи, известный как *метод отсечения*. С виду он слегка напоминает метод расщепления. В нем также основой служит таблица 5. В нее добавляется по специальным правилам новая строка, и затем таблица преобразовывается по тем же правилам, что и в методе расщепления. Если в результате не получается целочисленная точка, добавляется еще одна строка, снова выполняется преобразование — и так далее, пока не добьемся цели. Здесь нет разделения таблицы на две, а только добавление новых строк. Поэтому метод отсечения способен дать лишь одну оптимальную точку (тогда как при расщеплении их может оказаться несколько).

Чтобы усвоить правила, по которым добавляется новая строка, необходимо уяснить понятие "*дробная часть числа*" (в методе расщепления мы сталкивались с таким понятием, но как-то вскользь). Дробная часть числа определяется как разность между числом и его *целой частью*. В свою очередь, целая часть числа — это наибольшее целое число, не превосходящее данного числа. Например, у числа $8\frac{1}{4}$ целая часть — это 8, и дробная часть равна $8\frac{1}{4} - 8 = \frac{1}{4}$. А у числа $\left(-8\frac{1}{4}\right)$ целая часть есть -9, поэтому дробная часть составляет $\left(-8\frac{1}{4}\right) - (-9) = \frac{3}{4}$. Так что для всех нецелых чисел дробная часть всегда больше 0, но меньше 1, а для целых она, естественно, равна 0.

Итак, вернемся еще раз к таблице 5. Среди переменных x_i выбираем такое, у которого дробная часть *наибольшая*. В нашем случае это $x_2 = 7\frac{13}{17}$. Эта дробная часть со знаком "минус" будет стоять в самой правой клетке добавленной строки, а в остальные ее клетки помещают со знаком "минус" дробные части чисел, стоящей в строке, носящей имя выбранной переменной x_2 (в соответствующих столбцах). Но вот вопрос: в какое место вставляется добавленная строка? Ответ: в любое место *выше главной строки* (обычно добавленную строку располагают непосредственно *над главной строкой*). В результате получим следующую таблицу:

Таблица 12

	y_1	y_2	y_3	
x_1	$-11/17$	$3/17$	$2/17$	$60/17$
x_2	$3/17$	$-7/17$	$1/17$	$132/17$
x_3	$2/17$	$1/17$	$-5/17$	$156/17$
w_1	$-3/17$	$-10/17$	$-1/17$	$-13/17$
	$6/17$	$3/17$	$2/17$	$-348/17$

Если после преобразования этой таблицы снова не получается целочисленное решение, добавляем по тому же принципу еще одну строку, пока не получим, что требуется. А в данном случае получим (поверьте на слово) также известную ранее точку (3, 8, 10).

Читателя может заинтересовать "физический смысл" метода отсечения. Вкратце его можно изложить так. Введением дополнительной строки от выпуклой многогранной области, определяемой системой ограничений, отсекается нецелочисленная оптимальная точка, полученная в результате решения исходной Л-задачи, вместе с некоторой своей окрестностью. В результате минимум целевой функции ищется уже в новой, "урезанной" области. Если после преобразований опять "вылезла" нецелочисленная точка, то она вместе с некоторой своей окрестностью также "вырезается", и т.д., пока оптимальная точка не станет целочисленной.

Есть и другие способы решения и Л-задачи, и ЦЛ-задачи, но мы их рассматривать не будем: нельзя объять необъятное, и того, что есть, хватает с избытком.

На прощание подведем итог решения нашей ЦЛ-задачи. Все полученные результаты сведем в таблицу (на этот раз не *симплекс*, а обычную):

Таблица 13

Методы	**Результат**
- ближайшей целочисленной точки	(3,8,10) и (4,8,9)
- дополнительного ограничения	не найдено
- то же с последующим расщеплением	(4,8,9)
- расщепления (применительно к результирующей таблице исходной задачи)	(3,9,9) и (4,8,9)
- отсечения	(3,8,10)

Как видно, разные методы дают, в общем-то, и разные результаты, которые, как и следовало ожидать, частично повторяются. Всего же мы “выудили” три оптимальных точки: (3,8,10), (3,9,9) и (4,8,9), но гарантировать отсутствие других оптимальных точек мы не можем.

Можно ли всё-таки выяснить, имеются ли они? Очень жаль, но в общем случае ничего надежней обыкновенного перебора предложить не удается[13]. А вообще говоря, при решении задач, поставленных практикой, т.е. реальными потребностями, следует поразмыслить: так ли уж необходимо знать *все* оптимальные решения или достаточно получить одно из них? Часто требуется именно последнее. Тогда рассмотренные методы во всех отношениях удовлетворительны. Пользуйтесь на здоровье!

Акулич Игорь Федорович,
ведущий инженер
ОАО “Белэнергоремналадка”, г. Минск

E-mail: shark_if@mail.ru

[13]И, кстати, он показал, что других оптимальных точек всё же нет.

Библиографические материалы к юбилейным датам 2015 года. II полугодие

Р. З. Гушель

Календарь юбилейных дат второй половины 2015 г., связанных с именами известных деятелей в области математики и математического образования, а также с важнейшими событиями в этой сфере. После краткой информации о человеке или событии приводится небольшой список литературы.

2 июля — 90 лет со дня рождения замечательного отечественного математика, ученицы академика И. Г. Петровского, специалиста в области теории дифференциальных уравнений с частными производными, прикладной математике, топологии и математической физике, академика АН СССР (с 1991 г.), профессора МГУ (с 1950 г.) **Ольги Арсеньевны Олейник** (умерла 13 октября 2001 г.).

1) Арнольд В.И. и др. Олейник Ольга Арсеньевна (к 60-летию со дня рождения) // УМН. - 1985. - Т. 40. - Вып. 5. - С. 279-293.

2) Вентцель Т.Д. и др. Ольга Арсеньевна Олейник (некролог) // УМН. - 2003. - № 1. - С. 165-174.

3) Смирнова Г.А. Ольга Арсеньевна Олейник // МПр. - 2003. - Вып. 7. - С. 35-38.

4) Олейник О.А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. - Сер. математ. - 1961. - Т. 25. - Вып. 1. - С. 3-20.

5) Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 2005. - Изд. 2. - 260с.

6) Олейник О.А. О топологии действительных алгебраических кривых на алгебраической поверхности // Мск. - 1951. - Т. 29 (71). - С. 133-156.

7) Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М., 1997. - 512 с.

17 июля — 130 лет со дня рождения отечественного педагога и историка математики, профессора **Ивана Яковлевича Депмана** (умер 26 марта 1970 г.).

1) Андронов И.К., Баранова И.В. Памяти профессора Ивана Яковлевича Депмана // МШ. - 1970. - № 6.

2) Андронов И.К., Черкасов Р.С. 80-летний юбилей Ивана Яковлевича Депмана // МШ. - 1967. - № 1.

3) Галченкова Р.И., Ожигова Е.П. И. Я. Депман. К 80-летию со дня рождения // Вопр. ИЕТ. - 1967. - Вып. 21.

4) Зенкевич Н.Г. Профессор И. Я. Депман. - Брянск. - 1974. - 47 с.

5) Депман И.Я. История арифметики. - М., 1965.

6) Депман И.Я. Карл Михайлович Петерсон и его кандидатская диссертация // ИМИ. - 1952. - Вып. 5. - С. 134-166.

7) Депман И.Я. Первое знакомство с математической логикой. - М., 1963.

8) Депман И.Я. Русские математические журналы для учителя // МШ. - 1951. - № 6. - С. 9-22.

4 августа — 210 лет со дня рождения ирландского математика, члена и президента (1837-1845) Ирландской АН, чл.-корр. Петербургской АН **Уильма Роуана Гамильтона** (умер 2 сентября 1865 г.). Основные работы относятся к механике, оптике, вариационному исчислению. Исследовал теорию комплексных чисел и создал учение о кватернионах.

1) Александрова Н.В. Формирование основных понятий векторного исчисления // ИМИ. - 1982. - Вып. 26. - С. 205-235.

2) Крамар Ф.Д. Кватернионы в ранних работах Гамильтона // ИМЕН. - 1966. - Вып. V. - С. 175-184.

3) Кроткова Н.Г. Обобщение комплексного числа у У. Р. Гамильтона и де Моргана // ИМЕН. - 1973. - Вып. 14. - С. 127-130.

4) Погребысский И.Б. От Лагранжа к Эйнштейну. - М. - 1996. - С. 176-194.

5) Полак Л.С. Уильям Гамильтон. М., 1993. - 270с.

Август — 290 лет назад начала свою работу **Петербургская Академия наук**. Проект Положения об Академии Пётр I утвердил 2 февраля 1724 г. Академия состояла из трёх классов: в первый входили математика, астрономия, механика и география; во второй класс — физика, химия и естественные науки, в третий — гуманитарные науки.

1) Анри В. Роль Лейбница в создании научных школ в России // УФН. - 1918. - Т. 2. - Вып. 2. - С. 94-100.

2) Гнеденко Б.В. Академия наук и развитие математики // МШ. - 1974. - № 1. - С. 4-11.

3) История Академии наук СССР. - М.-Л., 1958. - Т. 1-3.

4) Князьков С. Очерки из истории Петра Великого и его времени. - СПб., 1914.

5) Копелевич Ю.Х. Основание Петербургской Академии наук. - Л., 1977. - 211 с.

6) Ожигова Е.П. Математика в Петербургской Академии наук в конце XVIII - первой половине XIX века. - Л., 1980.

7) Пекарский П. История Императорской Академии наук в Петербурге. - Спб., 1870. - Т. 1, 1873. - Т. 2.

8) Сухомлинов М. И. История Российской Академии наук. - СПб., 1874-1888. - Вып. 1-3.

7 сентября — 100 лет со дня рождения выдающегося японского математика, специалиста в области стохастического анализа, создателя теории стохастического интегрирования, лауреата премий Киото и Вольфа **Киёки Ито** (умер 10 ноября 2008 г.).

1) Ито К. Вероятностные процессы / Пер. с японского А. Д. Вентцеля и С. А. Вербы / Под ред. Е. Б. Дынкина. - М., 1960. - Вып. I, II.

13 сентября — 130 лет со дня рождения немецкого математика, специалиста по дифференциальной геометрии, топологии, теории функций комплексного переменного, профессора Гамбургского университета (1919-1962) **Вильгельма Бляшке** (умер 17 марта 1962 г.).

1) Яглом И.М. Бляшке Вильгельм (1885-1962) // УМН. - 1963. - Т. 18. - Вып. 1. - С. 135-143. - Некролог.

2) Бляшке В. Введение в геометрию тканей. - М., 1959.

3) Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. - М., 1957.

4) Бляшке В. Греческая и наглядная геометрия // МПр. - 1957. - Вып. 2; 1958. - Вып. 3.

5) Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. - М.-Л., 1935. - Т. 1. - 330 с.

6) Бляшке В. Круг и шар. - М., 1967.

7) Бляшке В. Лекции по интегральной геометрии // УМН. - 1938. - Т. 5. - С. 97-149.

14 сентября — 80 лет со дня рождения известного отечественного историка математики и её популяризатора, ученицы проф. К. А. Рыбникова, Заслуженного преподавателя Московского университета **Аллы Владимировны Дорофеевой**. Она занимается историей вариационного исчисления и интегральных уравнений. Ей принадлежит большое число популярных работ по истории математики.

1) Дорофеева А.В. Вариационное исчисление во второй половине XIX века // ИМИ. - 1963. - С. 99-128.

2) Дорофеева А.В. Высшая математика. Гуманитарные специальности. - М., 2004. - Изд. 3.

3) Дорофеева А.В. О формировании понятия дифференциала функции многих переменных // ИМЕН. - 1986. - Вып. 32. - С. 101-110.

4) Дорофеева А.В. Рене Декарт и его “Геометрия” // Квант. - 1987. - № 9.

5) Дорофеева А.В. Страницы истории на уроках математики. - М., 2007. - 96 с.

6) Дорофеева А.В., Чернова М. Л. Карл Вейерштрасс. - Л., 1985.

21 сентября — 80 лет со дня рождения замечательного математика, академика РАН (1991г.), члена Лондонского Королевского общества (2009 г.) и многих других академий мира, специалиста в области динамических систем и теории вероятностей, ученика академика А. Н. Колмогорова, внука профессора МГУ В. Ф. Кагана, лауреата премий Вольфа (1997 г.), Пуанкаре (2009 г.), Абеля (2014 г.) **Якова Григорьевича Синая**.

1) Аносов Д.В. и др. Яков Григорьевич Синай (к 70-летию со дня рождения) // УМН. - 2005. - т.60. - Вып.5. - С.183-186.

2) Новиков С.П. и др. Яков Григорьевич Синай (к 60-летию со дня рождения) // УМН. -1996. - т.51. - Вып.4. - С.179-191.

3) Синай Я.Г. Как математики изучают хаос // МПр. - 2001. - С.32-46.

4) Синай Я.Г. Классические динамические системы со счётнократным лебеговским спектром // Известия АН - Серия математическая. - 1966. - Т.30. - Вып.1. - С.15-68.

5) Синай Я.Г. Курс теории вероятностей. - М. - 1985, 1986. - Ч.1, 2

6) Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории. М. - 1995. - 205с.

7) Синай Я.Г. Теория фазовых переходов: строгие результаты. - М. - 1980. - 207с.

20 октября — 150 лет со дня рождения отечественного математика и механика, профессора МВТУ (1924-1944) и сотрудника ЦАГИ (1930-1943), одного из основоположников винтового исчисления, лауреата Государственной премии (1943), Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР **Александра Петровича Котельникова** (умер 06.03.1944).

1) А. П. Котельников // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. - 1948. - Вып. 6. - С. 3-5.

2) Путята Т.В. и др. Александр Петрович Котельников (1865-1944). - М., 1968. - 122 с.

3) Розенфельд Б.А. Александр Петрович Котельников // ИМИ. - 1956. - Вып. IX. - С. 317-402.

4) Котельников А.П. Проективная теория векторов // Изв. Казан. ФМО. - Т. VIII, IX. - Приложение. Казань, 1899.

5) Котельников А.П. Точки Бурместра, их свойства и построение // МСк. - 1927. - Т. 34. - С. 207-348.

6) Котельников А.П., Фок В.А. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. - М., 1950. - 86 с.

23 октября — 150 лет со дня рождения известного латышского математика, профессора Рижского Политехнического института (1895-1918) **Пирса Георгиевича Боля** (умер 25 декабря 1921 г.). Его исследования относятся к теории функций действительного переменного, дифференциальным уравнениям и механике.

1) Гайдук Ю.М. Научные заслуги П. Боля в оценках его современников // ИМИ. - 1990. - Вып. 32-33. - С. 126-136.

2) Мышкис А.Д., Рабинович И.М. Математик Пирс Боль из Риги (1865-1921). - Рига, 1965.

3) Боль П. Избранные труды. - 1961.

4) Боль П. О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применяемых в механике. - Юрьев, 1900.

5) Боль П. Собрание трудов. - Рига, 1974. - 517 с.

31 октября — 200 лет со дня рождения выдающегося немецкого математика, члена Берлинской АН (1856), профессора Берлинского университета, почётного члена Петербургской АН (1895) **Карла Теодора Вильгельма Вейерштрасса** (умер 19 февраля 1897 г.). Основные труды учёного посвящены математическому анализу, теории аналитических функций, дифференциальной геометрии и линейной алгебре.

1) Васильев А.В. Роль профессор Вейерштрасса в современном развитии математики. - Казань, 1885. - 18 с.

2) Дорофеева А.В., Чернова М.Л. Карл Вейерштрасс. - М., 1985.

3) Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетиях. - М., 1989. - Т. 1.

4) Кочина П.Я. Карл Вейерштрасс. - М., 1985. - 271 с.

5) Покровский П.М. Карл Вейерштрасс / ВОФЭМ. - 1897. - 255.

6) Вейерштрасс К. Речь, произнесённая при вступлении в должность ректора Берлинского университета 15 октября 1873 г. // УФН. - 1918. - Т. 1. - Вып. 2. - С. 85-93.

7) Вейерштрасс К. О лудольфовом числе (доказательство невозможности квадратуры круга). - Казань, 1984.

8) Письма К. Вейерштрасса к Софье Ковалевской. - М., 1973.

2 ноября — 200 лет со дня рождения английского математика, профессора математики в Куинс-Колледже (Ирландия), крупного специалиста в области математической логики, математическом анализе и теории вероятностей **Джорджа Буля** (умер 8 декабря 1864 г.).

1) Депман И.Я. Первое знакомство с математической логикой. - М., 1963.

2) Курдюмова Н.А. Джордж Буль как основоположник математической логики // МШ. - 1995. - № 6.

3) Петрова С.С. Дж. Буль и развитие символических методов в дифференциальных уравнениях // ИМИ. - 1985. - Вып. 29. - С. 88-102.

4) Стяжкин Н.И. Обоснование и анализ логических методов Джорджа Буля // Вестн. МГУ. - Сер. 8. - Эконом. Философ. - 1960. - № 1. - С.79-90.

5) Яглом И.М. Булева структура и её модели. - М., 1980. - 190 с.

6) Буль Дж. Курс дифференциальных уравнений Георга Буля. - Харьков, 1869-1870.

9 ноября — 130 лет со дня рождения немецкого и американского математика, члена Национальной АН США, лауреата Международной премии им. Н. И. Лобачевского **Германа Вейля** (умер 9 декабря 1955 г.). Был крупным специалистом в области дифференциальной геометрии, теории групп, основаниях математики.

1) Норден А.П. Проективно-евклидова геометрии Вейля // МСк. - 1946. - Т. 18 (60). - С. 153-167.

2) Яглом И.М. Герман Вейль. - М., 1967.

3) Вейль Г. Геометрические идеи Римана, их влияние и связи с теорией групп // ИМИ. - 1990. - Вып. 32-33. - С. 250-289.

4) Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. - М., 2004. - 400 с.

5) Вейль Г. Математическое мышление. - М., 1989. - 400 с.

6) Вейль Г. Симметрия. - М., 1968.

7) Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. - М. - 1986.

12 ноября — 190 лет со дня рождения известного отечественного математика и историка науки, специалиста в области теории линейных дифференциальных уравнений, теории вероятностей и истории математики **Михаила Егоровича Ващенко-Захарченко** (умер 27 августа 1912 г.).

1) Грацианская Л.Н. М. Е. Ващенко-Захарченко // ИМИ. - 1961. - Вып. 14. - С. 441-466.

2) Поссе К. М. Е. Ващенко-Захарченко (некролог) // ЖМНП. - 1912. - № 11-12. - С. 49-52.

3) Ващенко-Захарченко М.Е. История математики. - Киев, 1883. - Т. 1. - 684 с.

4) Ващенко-Захарченко М.Е. Лекции разностного исчисления. - Киев, 1868. - 179 с.

5) Ващенко-Захарченко М.Е. “Начала” Евклида с пояснительным введением и толкованиями. - Киев, 1880. - 747 с.

6) Ващенко-Захарченко М.Е. Риманова теория функций составного переменного. - Киев, 1866. - 105 с.

7) Ващенко-Захарченко М.Е. Указатели сочинений по неевклидовой геометрии на 1880 г. // Киев. Унив. Изв. - 1880. - № 2.

16 ноября — 180 лет со дня рождения итальянского математика, президента (с 1898 г.) Национальной Академии деи Линчеи в Риме, крупного специалиста в области дифференциальной геометрии, теории аналитических функций и механики **Эудженио Бельтрами** (умер 18 февраля 1900 г.). Он показал, в частности, что геометрия Лобачевского реализуется в трёхмерном евклидовом пространстве на поверхности постоянной отрицательной кривизны.

1) Журавлев И.В. О гомеоморфном решении многомерного аналога уравнения Бельтрами // СМЖ. - 1993. - Т. 34. - Вып. 5. - С. 43-52.

2) Каган В.Ф. Основания геометрии. - М., 1956. - Ч. II. - С.11-24.

3) Севостьянов Е.А. О квазилинейных уравнениях типа Бельтрами с вырождением // Матем. заметки. - 2011. - Т. 90. - Вып. 3. - С. 445-453.

4) Бельтрами Э. Опыт интерпретации неевклидовой геометрии // Об основаниях геометрии. - М., 1956. - С. 130-212.

5) Бельтрами Э. Основы теории пространств постоянной кривизны // Там же. - С. 342-365.

8 декабря — 150 лет со дня рождения французского математика, академика (с 1912 г.), почетного члена АН СССР (1959) **Жака Адамара** (умер 17 октября 1963 г.). Он занимался теорией аналитических функций, теорией чисел. Основоположник функционального анализа во Франции.

1) Гельфонд А.О., Шнирельман Л.Г. О работах Жака Адамара по теории функций комплексного переменного и теории чисел // УМН. - 1936. - Т. 2. - С. 92-117.

2) Леви П. Адамар Жак (1865-1963) // УМН. - 1964. - Т. 19. - Вып. 3. - С. 163-182.

3) Маргулис А.Я., Юшкевич А.П. Жак Адамар // МШ. - 1964. - № 2. - С. 77-80.

4) Полищук Е.М., Шапошникова Т.О. Жак Адамар. - Л., 1990.

5) Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. - М., 1978. - 351 с.

6) Адамар Ж. Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций. - М.-Л., 1951. - 134 с.

7) Адамар Ж. Элементарная геометрия. - М., 1957. - Ч. I, II. - Изд. 4.

22 декабря — 250 лет со дня рождения немецкого математика, члена Берлинской АН (с 1817 г.) и иностранного почётного члена Петербургской АН (1798) **Иоганна Фридриха Пфаффа** (умер 21 апреля 1825 г.). Занимался теорией дифференциальных уравнений, положил начало теории дифференциальных форм, развитой позже Э. Картаном. Учитель К. Ф. Гаусса.

1) Болибрух А.А. Система Пфаффа типа Фукса на комплексном аналитическом многообразии // МСк. - 1977. - Т. 103. - Вып. 1. - С. 112-123.

2) Демидов С.С. К истории теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Работы И. Ф. Пфаффа и О. Коши // ИМИ. - 1979. - Вып. 24. - С. 191-217.

3) Клейн Ф. Высшая геометрия. - М.-Л., 1939.

4) Синцов Д.М. Свойства системы интегральных кривых Пфаффова уравнения в n переменных // Изв. АН СССР. - VII серия. - 1931 г. - Т. 10. - С. 1275-1294.

23 декабря — 125 лет со дня рождения отечественного педагога-математика, доктора педагогических наук, чл.-корр. АПН СССР, кавалера ордена Ленина и медали К. Д. Ушинского **Владимира Модестовича Брадиса** (умер 23 мая 1975 г.).

1) Андронов И.К. Владимир Модестович Брадис // МШ. - 1966. - № 1. - С. 92-94.

2) Данилова Е.Ф. Владимир Модестович Брадис // МШ. - 1961. - № 3. - С. 83-85.

3) Брадис В.М. Воспитание логических навыков при изучении математики // МШ. - 1953. - № 1. - С. 20-24.

4) Брадис В.М. Средства и способы элементарных вычислений. - М., 1954. - Изд. 3. - 231 с.

5) Брадис В.М. Теория и практика вычислений. - М., 1937.

6) Брадис В.М. Четырёхзначные математические таблицы. - М., 1957. - Изд. 28.

130 лет со дня рождения автора отечественных стабильных школьных учебников по геометрии, сотрудника АПН РСФСР **Николая Никифоровича Никитина** (умер 27 сентября 1966 г.).

1) Гибш И.А. Николай Никифорович Никитин // МШ. - 1962. - № 2. - С. 65-66.

2) Никитин Н.Н. Геометрия. Учебник для 6-8 классов семилетней и средней школы. - М., 1986.

3) Никитин М.Н. О различных способах доказательства теорем (из опыта работы школы) // МШ. - 1962. - № 6. - С. 18-25.

4) Никитин И.И. В советской школе в 1917-1947 гг. // МШ. - 1947. - № 5. - С. 4-22.

5) Никитин И.И., Маслова Г.Г. Сборник задач по геометрии для 6-8 классов. - М., 1971. - Изд. 15. - 160 с.

475 лет со дня рождения французского математика **Франсуа Виета** (умер 13 декабря 1603 г.). Он преобразовал алгебру, создав учение об уравнениях, основанное на буквенных обозначениях. Занимался также вопросами геометрии, приводящими к уравнениям второй и третей степени, и геометрическими построениями.

1) Башмакова И.Г. Франсуа Виет и становление математики Нового времени // ВИЕТ. - 1991. - № 2. - С. 74-79.

2) Глушков С.С. О творчестве Ф. Виета // ИМЕН. - 1978. - Вып. 20. - С. 58-61.

3) Розенфельд Б.А. Векторы и псевдовекторы Виета и их роль в создании аналитической геометрии // ИМИ. - 1976. - Вып. 21. - С. 102-109.

4) Шаль М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. - М., 1883. - С. 55-59.

5) Шепелева З. В. Шепелев М. И. Франсуа Виет // МШ. - 1992. - №№ 4-5.

Список сокращений

Изв. АН СССР — Известия Академии наук. Журнал.

Изв. Каз. ФМО — Известия Казанского физико-математического общества. Журнал.

ИМИ — Историко-математические исследования. Сборник статей.

ИМЕН — История и методология естественных наук. Сборник статей, издававшийся в МГУ.

МПр — Математическое просвещение. Сборники статей, выходившие в 1934-1938 и 1957-1961 гг. В 1995 г. издание возобновлено.

МШ — Математика в школе. Журнал.

УМН — Успехи математических наук. Журнал.

МСк — Математический сборник. Журнал, выходящий с 1866 г.

Вопр. ИЕТ — Вопросы истории естествознания и техники, с 1956 до 1979 г. — сборники статей.

ВИЕТ — Вопросы истории естествознания и техники, журнал, выходящий с 1980 г.

УФН — Успехи физических наук.

ЖМНП — Журнал Министерства народного просвещения. Издавался в С.-Петербурге в 1834-1917 гг.

СМЖ — Сибирский математический журнал.

Вестн. МГУ — Вестник МГУ.

Гушель Ревекка Залмановна,
г. Ярославль, научный сотрудник отдела
Истории математики и математического образования
Научно-практического центра
"Математическое просвещение".

E-mail: gushelr@yandex.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал "Математическое образование".

www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанным адресам.

Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2015 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2015 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ) и Российском индексе научного цитирования (РИНЦ).

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

I. Kostenko. 1970 – 1986. Realization of Reform-70, Keeping its Results (Article 6) 2

It is analyzed how the "Reform-70" was realized, how its results were kept by its organizers, and how the scientific society was struggling against its negative consequences.

A. Ryazanovsky. Polynomials of One Variable, Finished 18

An introduction to polynomials theory for high school students.

E. Skvortsova. Trigonometric Polynomials, Continued 27

An introduction to the theory of trigonometric polynomials for high school students, with a set of exercises.

I. Akulich. From Adam Riese to Simplex-Method or Complicated Consequences of a Simple Problem 42

A simple old arithmetic problem set by Adam Riese is considered. On the base of it the modern simplex-method of solving linear optimization problems and some of its variations are illustrated.

R. Gushel. Bibliography for Anniversary Dates of 2015, the Second Half 55

Anniversary dates for the second half of 2015 connected to some outstanding people and events of mathematics or math education are given. A short description of a person or an event is followed by bibliographic list.

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >