ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год девятнадцатый

№ 3 (75)

июль - сентябрь 2015 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 3 (75), 2015 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2015 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.09.2015 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 3,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (75), июль – сентябрь 2015 г.

Содержание

Элементарное доказательство гипотезы Штейнгарца для биссектрис

О. Р. Каюмов, К. Е. Каширина

Гипотезы Штейнгарца об эллипсах вызвали большой интерес среди геометров, занимающихся как элементарной, так и высшей геометрией. Они были сформулированы в двух статьях [1,2], которые вышли практически одновременно. Специалисты стали искать доказательства, и довольно скоро часть гипотез была опровергнута, а одна из них практически доказана. Это гипотеза о том, что на общем эллипсе всегда лежат шесть центров окружностей, вписанных в треугольные фрагменты исходного треугольника, разрезанного своими биссектрисами. В работе [3] она была проанализирована с помощью *барицентрических координат*; доказано, что упомянутые шесть точек лежат на *общем коническом сечении*. В статье [4] это же было доказано при помощи *механического метода*.

Статьи [3,4] довольно сложные и вряд ли доступны школьникам. В настоящей статье гипотеза доказана средствами элементарной геометрии, причем установлено, что шесть центров лежат именно на эллипсе, а не на другом коническом сечении. Статья вполне доступна учащимся старших профильных классов.

Краткая справка: что такое эллипс?

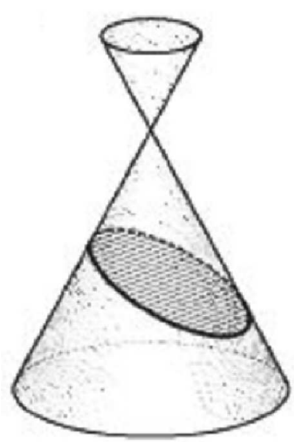


Рис. 1.

Эллипс видел каждый, кто резал ножом колбасу (строил плоское сечение кругового цилиндра). Форму эллипса может иметь имеет кромка светового пятна, когда фонариком освещают стену, потому что эллипсы (наряду с параболами и гиперболами) являются плоскими сечениями конуса (рис. 1).

Знаменитый Аполлоний Пергский (II до.н.э.) в трактате «Конические сечения» описал почти все, что мы знаем про эллипсы и сегодня, впрочем, исключая формулы в координатах, изобретенных Декартом в XVII веке. Если в древности конические сечения считались примером математической красоты, не запятнавшей себя практическим применением, то после открытий Кеплера они оказались в центре внимания физиков. Великий экспериментатор Роберт Гук в письме к Ньютону предположил, что причиной движения планеты по эллипсу является ее притяжение к Солнцу «обратно пропорционально квадрату расстояния до центра» [5, с. 16]. Когда великий математик строго подтвердил это уравнениями, стало ясно, что небесная механика подчиняется тем же законам, что и земная артиллерия. Началась, как говорят теперь, первая научная революция, а эллипс был одним из ее главных героев.

Мы будем использовать то из геометрических определений эллипса, которое позволит быстрее всего вывести его уравнение. Итак, «эллипс — это результат сжатия окружности к ее диаметру».

Например, на рис. 2 точка K окружности, приблизившись к горизонтальной оси Ox в три раза, стала точкой K_1 эллипса. В уравнении окружности $x^2 + y^2 = R^2$ можно ввести замену переменной $y = 3y_1$, поскольку именно в три раза менялся масштаб по вертикали, и получить в результате уравнение эллипса в виде $x^2 + 9y_1^2 = R^2$. Заметим, что теперь коэффициенты при квадратах координат оказались разными числами.

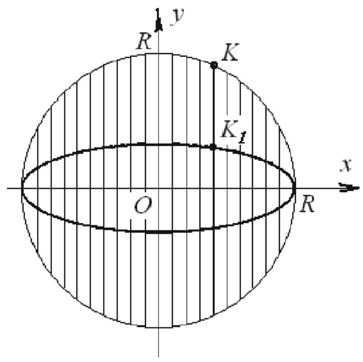


Рис. 2.

Когда начало координат назначено не в центре симметрии, уравнение линии становится более громоздким.

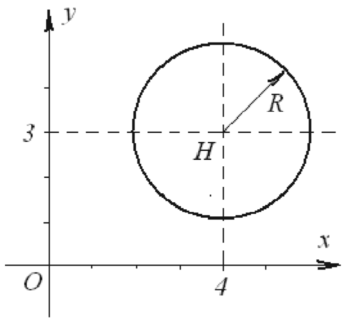


Рис. 3.

Например, для окружности со смещенным в точку $H(4,3)$ центром и радиусом $R=2$ (рис. 3) уравнение приобретает вид $(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$, где после раскрытия скобок получается много слагаемых: $x^2+y^2-8x-6y+21=0$.

В общем случае можно доказать, что для эллипса со смещенным центром и повернутой осью симметрии уравнением будет $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, где из шести коэффициентов первые три не могут одновременно обратиться в нуль. Если эта линия не проходит через начало координат, то есть не содержит точки $(0,0)$, то и последний коэффициент F не равен нулю. Значит, на него можно разделить всю левую часть, и в новых обозначениях $a=A/F, b=B/F,\ldots,e=E/F$ уравнение эллипса

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+1=0 \tag{1}$$

будет определяться всего лишь пятью коэффициентами a,b,c,d,e.

В отличие от прямой (порождаемой парой точек) или окружности (порождаемой тремя вершинами треугольника), эллипс однозначно восстанавливается лишь по пяти своим точкам. Зная координаты (x_i,y_i) каждой из пяти точек M_i $(i=1,2,\ldots,5)$ эллипса, можно подставить их в левую часть уравнения (1) и получить последовательно систему пяти уравнений

$$ax_i^2+bx_iy_i+cy_i^2+dx_i+ey_i=-1 \quad (i=1,2,\ldots,5) \tag{2}$$

для отыскания пяти чисел a,b,c,d,e, т.е. для восстановления конкретного уравнения эллипса.

Заметим, что не только эллипс определяется пятью своими точками, но и другие конические сечения (парабола, гипербола…), поскольку все они могут описываться уравнением вида (1).

Через шесть заданных точек, в общем случае, никакое коническое сечение может и не пройти. Значит, лежащие вместе на эллипсе (гиперболе, параболе) шесть точек связаны между собой геометрической зависимостью. Этот факт установлен теоремой Паскаля (1640): если шестиугольник вписан в коническое сечение, то пары его противоположных сторон в продолжении пересекаются в трех точках X_1, X_2, X_3, лежащих на общей прямой.

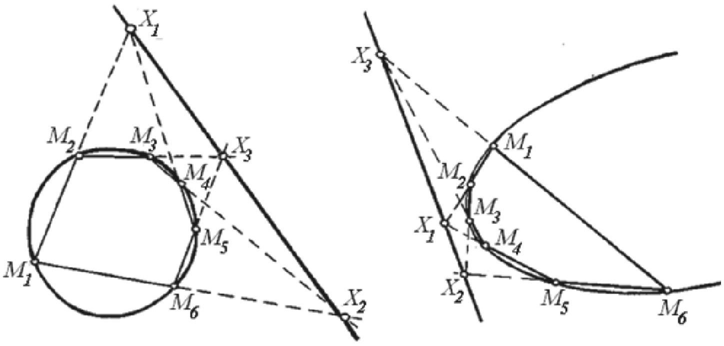


Рис. 4.

Шестнадцатилетний Блез Паскаль назвал свою теорему «*hexagramma mysticum*» (магический шестиугольник), потому что ей удовлетворяет любая замкнутая шестизвенная ломаная, даже имеющая самопересечения. На этом основан известный способ построения шестой вершины E при известных пяти вершинах, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, задающих конкретное коническое сечение.

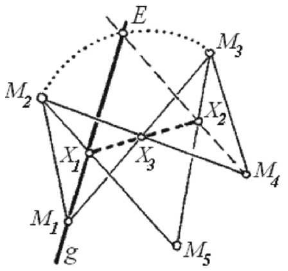


Рис. 5.

Согласно этому алгоритму (детали приведены в [6]), каждая дуга кривой, например, дуга M_2M_3, может заполняться точками по следующей схеме (рис. 5):

1) Через точку M_1 проводится произвольная прямая g так, чтобы точки M_2 и M_3 лежали от нее по разные стороны.

2) Пересекаются прямые $g \cap M_2M_5 = X_1$, $M_2M_4 \cap M_1M_3 = X_3$, $X_1X_3 \cap M_3M_5 = X_2$

3) Наконец, прямая X_2M_4 пересечет g в точке E, которая будет лежать на дуге M_2M_3.

Каждый раз новая прямая g проводится через точку M_1 с другим наклоном, так что последовательно дуга M_2M_3 заполняется новыми точками. Этот алгоритм замечателен тем, что воспроизводится только линейкой (без применения циркуля).

Такова прелюдия к гипотезе Штейнгарца.

Гипотеза Штейнгарца

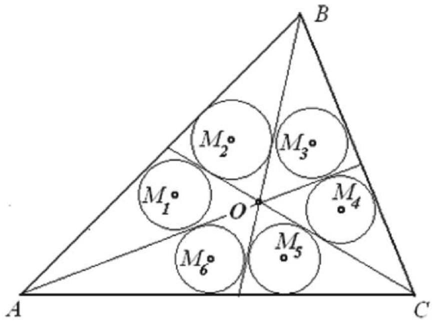


Рис. 6.

Если в каждый из шести треугольных фрагментов, полученных разрезанием треугольника биссектрисами, вписать окружность, то шесть центров этих окружностей будут принадлежать общему эллипсу (рис. 6).

Аналогичные гипотезы были сформулированы [1,2] также и для трех высот, трех медиан произвольного треугольника, но мы ограничиваемся рассмотрением лишь случая трех биссектрис. В работах [3,4] доказано, что в этом случае шесть центров принадлежат общему коническому сечению, но не уточнено, будет ли это именно эллипс. Доказательство («барицентрическое») не удовлетворило и самих авторов статьи [3], призвавших читателя искать более простой путь рассуждений.

Далее предлагается доказательство эллиптичности кривой, не выходящее за рамки элементарной геометрии.

О трех хордах конического сечения с о одной общей внутренней точкой

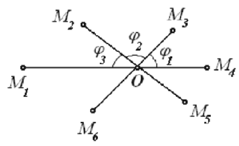


Рис. 7.

Заметим, что на рис. 6 пары противостоящих (по разные стороны от O) точек M_1 и M_4, M_2 и M_5, M_3 и M_6 лежат на биссектрисах вертикальных углов, поэтому являются концами трех отрезков M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6, имеющих общую точку пересечения O. Исследуем эту конфигурацию отдельно (рис. 7) и сформулируем для нее лемму.

Лемма. Если три отрезка M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 пересекаются в общей точке O и образуют известные углы ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, то условие принадлежности шести точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 общему коническому сечению имеет вид

$$(\mu_5 - \mu_2)\sin\phi_1 + (\mu_1 - \mu_4)\sin\phi_2 + (\mu_3 - \mu_6)\sin\phi_3 = 0, \tag{3}$$

где $\mu_i = 1/OM_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, то есть величины μ_i являются обратными к длинам отрезков OM_i.

Доказательство вынесено в Приложение.

Предложенная лемма дает геометрический способ проверки и всех остальных гипотез Штейнгарца, которые прежде исследовались лишь средствами компьютерной графики. Впрочем, как увидим далее, для проверки условия (3) тоже требуются усердие и смекалка.

Обоснование гипотезы Штейнгарца для биссектрис

Рассмотрим произвольный треугольник ABC, разрезаемый своими биссектрисами AA_1, BB_1, CC_1 на шесть треугольных частей с общей вершиной O. В каждом из этих треугольников возьмем центры вписанных окружностей, то есть точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 пересечения новых биссектрис (рис. 6). Сначала докажем, что эти шесть точек принадлежат общему коническому сечению. Чтобы воспользоваться леммой, понадобится явно вычислить отрезки и углы, упомянутые на рис. 7. Для удобства вычислений введем «учетверенные» углы $\angle A = 4\alpha$, $\angle B = 4\beta$, $\angle C = 4\gamma$ (рис. 8), откуда последует

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

Стороны, лежащие против вершин A, B, C. обозначим одноименными маленькими буквами a, b, c.

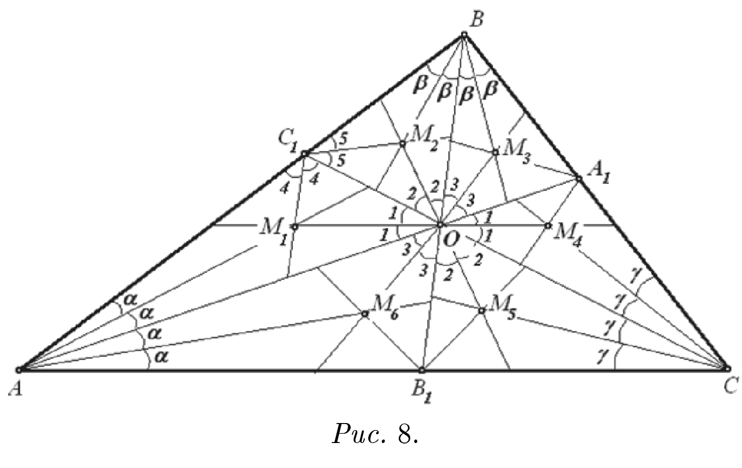


Рис. 8.

Чтобы вычислить углы $\angle 1, \angle 2, \angle 3$, рассмотрим треугольники при вершине O. Для треугольника AOB имеем $2(\angle 1 + \angle 2) = \pi - 2\alpha - 2\beta$, поэтому $(\angle 1 + \angle 2) = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + \gamma$.

Дополнив это условие аналогичными соотношениями из ΔAOC и ΔBOC, получим систему трех уравнений

$$\angle 1 + \angle 2 = \frac{\pi}{4} + \gamma, \quad \angle 3 + \angle 2 = \frac{\pi}{4} + \beta, \quad \angle 3 + \angle 1 = \frac{\pi}{4} + \alpha,$$

откуда найдутся по отдельности углы

$$\angle 1 = \frac{\pi}{4} - \beta, \quad \angle 2 = \frac{\pi}{4} - \alpha, \quad \angle 3 = \frac{\pi}{4} - \gamma. \tag{5}$$

Удвоенные углы $\angle 4, \angle 5$ (рис. 8) дополняют до π известные углы в треугольниках AOC_1 и BOC_1 соответственно, поэтому можно записать

$$\angle 4 = \frac{\pi}{4} + \beta - \alpha, \qquad \angle 5 = \frac{\pi}{4} + \alpha - \beta. \tag{6}$$

Заметим, что $\angle 5 = \pi/2 - \angle 4$, поэтому

$$\sin \angle 5 = \cos \angle 4, \sin \angle 4 = \cos \angle 5. \tag{7}$$

Далее будем искать выражения для отрезков OM_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, необходимых для проверки соотношения (3). Например, отрезок OM_1 участвует в теореме синусов для треугольника M_1C_1O:

$$\frac{OM_1}{\sin \angle 4} = \frac{OC_1}{\sin(\angle C_1M_1O)},$$

где $\angle C_1M_1O = \pi - \angle 1 - \angle 4 = \frac{\pi}{2} + \alpha$, поэтому $\sin(\angle C_1M_1O) = \cos\alpha$, откуда

$$OM_1 = \frac{OC_1}{\cos\alpha} \sin \angle 4. \tag{8}$$

Опустив из точки O на сторону AB перпендикуляр OC_2 (на рис. 8 он не показан, но равен радиусу r вписанной окружности), получим из прямоугольного треугольника OC_1C_2 гипотенузу

$$OC_1 = r/\sin(2\angle 5). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8) и учитывая (7), получим

$$OM_1 = \frac{r\cos\angle 5}{cos\alpha \sin(2\angle 5)} = \frac{r}{2\cos\angle sin(\angle 5)}$$

откуда $\mu_1 = \frac{1}{OM_1} = \frac{2}{r}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta\right)$. Аналогично (по теореме синусов для треугольника M_2C_1O) имеем

$$OM_2 = \frac{OC_1}{cos\beta}\sin\angle 5,$$

где после подстановки (9) с учетом (7) получится

$$OM_2 = \frac{r\cos\angle 4}{\cos\beta\sin(2\angle 4)} = \frac{r}{2cos\beta\sin(\angle 4)},$$

откуда $\mu_2 = \frac{1}{OM_2}$ и т.д.

Таким же способом выводятся все остальные значения μ_i, которые выпишем вместе:

$$\mu_1 = \frac{2}{r}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta\right), \qquad \mu_2 = \frac{2}{r}\cos\beta\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta - \alpha\right), \tag{10}$$

$$\mu_3 = \frac{2}{r}\cos\beta\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta - \gamma\right), \qquad \mu_4 = \frac{2}{r}\cos\gamma\sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma - \beta\right), \tag{11}$$

$$\mu_5 = \frac{2}{r}\cos\gamma\sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma - \alpha\right), \qquad \mu_6 = \frac{2}{r}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \gamma\right). \tag{12}$$

Здесь важно увидеть, что выражения μ_i (10-12) не только имеют одинаковую структуру, но и преобразуются друг в друга при «круговой перестановке обозначений» по схеме

$$\alpha \to \beta, \quad \beta \to \gamma, \quad \gamma \to \alpha. \tag{13}$$

То есть, меняя по этой схеме обозначения («α» на «β», «β» на «γ», «γ» на «α»), мы увидим, что преобразуются значения величин «μ_1» в «μ_3», «μ_3» в «μ_5», «μ_5» в «μ_1» (для нечетных индексов), а также «μ_2» в «μ_4», «μ_4» в «μ_6», «μ_6» в «$\mu 2$» (для четных).

Для проверки условия леммы (3) наряду с величинами μ_i понадобятся также выражения для углов ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 (рис. 7). В нашем случае (рис. 8) с учетом соотношений (5) получаем

$$\phi_1 = \angle 3 + \angle 1 = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma, \quad \phi_2 = \angle 3 + \angle 2 = \frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma, \quad \phi_3 = \angle 2 + \angle 1 = \frac{\pi}{2} - \beta - \alpha,$$

откуда

$$\sin\phi_1 = \cos(\beta+\gamma), \quad \sin\phi_2 = \cos(\alpha+\gamma), \quad \sin\phi_3 = \cos(\alpha+\beta). \tag{14}$$

Согласно лемме (3), нужно доказать, что окажется равной нулю сумма величин

$$(\mu_5 - \mu_2)\cos(\beta+\gamma) + (\mu_1 - \mu_4)\cos(\alpha+\gamma) + (\mu_3 - \mu_6)\cos(\alpha+\beta), \tag{15}$$

которую (после раскрытия скобок) представим в виде $(k_1 + k_2 + k_3)$, где

$$k_1 = \mu_1\cos(\alpha+\gamma) - \mu_2\cos(\beta+\gamma), \tag{16}$$

$$k_2 = \mu_3\cos(\beta+\alpha) - \mu_4\cos(\gamma+\alpha), \tag{17}$$

$$k_3 = \mu_5\cos(\gamma+\beta) - \mu_6\cos(\alpha+\beta). \tag{18}$$

Заметим, что эти слагаемые k_1, k_2, k_3 (после раскрытия в них выражений для μ_i) также преобразуются друг в друга при круговой перестановке обозначений по схеме (13), т.е. «k_1» переходит в «k_2», «k_2» — в «k_3», «k_3» — в «k_1». Эта закономерность позволит сократить выкладки: если удастся упростить выражение для k_1, то аналогичные упрощенные выражения для k_2 и k_3 можно будет формально получить из k_1 заменой обозначений по схеме (13).

Итак, исследуем выражение (16) для величины k_1:

$$k_1 = \frac{2}{r}\left[\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha-\beta\right)\cos(\alpha+\gamma) - \cos\beta\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta-\alpha\right)\cos(\beta+\gamma)\right].$$

Используя стандартную формулу $\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)$, преобразуем

$$\cos\alpha\cos(\alpha+\gamma) = \frac{1}{2}[\cos\gamma + \cos(2al+\gamma)],$$

$$\cos\beta\cos(\beta+\gamma) = \frac{1}{2}[\cos\gamma + \cos(2\beta+\gamma)].$$

Расписывая «синус суммы» и «синус разности», заменим

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha-\beta\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta-\alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha-\beta)].$$

В полученной (после перегруппировки слагаемых) сумме

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}}{r}\{\cos(\alpha-\beta)\left[\cos(2\alpha+\gamma) - \cos(2\beta+\gamma)\right]/2 +$$

$$+ \sin(\alpha-\beta)\left[\cos(2\alpha+\gamma) + \cos(2\beta+\gamma)\right]/2\} + \frac{\sqrt{2}}{r}\sin(\alpha-\beta)\cos\gamma$$

выражение в «фигурных скобках» окажется равным нулю, поскольку по стандартным формулам

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

получим

$$\cos(2\alpha+\gamma) - \cos(2\beta+\gamma) = -2\sin\frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{2}\sin\frac{2\alpha-2\beta}{2} = -\sqrt{2}\sin(\alpha-\beta),$$
$$\cos(2\alpha+\gamma) + \cos(2\beta+\gamma) = 2\cos\frac{2\gamma+2\beta+2\gamma}{2}\cos\frac{2\alpha-2\beta}{2} = \sqrt{2}\cos(\alpha-\beta),$$

где учтено $\frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{2} = \frac{\pi}{4}$ (см. (4)). В результате окажется

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}}{r}\sin(\alpha-\beta)\cos\gamma \tag{19}$$

Согласно упомянутым ранее закономерностям, остальные величины k_2, k_3 формально получаются из k_1 заменой обозначений по схеме (13), т.е.

$$k_2 = \frac{\sqrt{2}}{r}\sin(\beta-\gamma)\cos\alpha, \tag{20}$$

$$k_3 = \frac{\sqrt{2}}{r}\sin(\gamma-\alpha)\cos\beta \tag{21}$$

Нетрудно убедиться, что сумма выражений (19)–(21) (после раскрытия «синусов разностей») даст ноль, т.е. $k_1 + k_2 + k_3 = 0$.

Это значит, что условие леммы 3 выполнено, и точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 принадлежат общему коническому сечению. Этот факт был ранее доказан в работе [2] с помощью *барицентрических* координат, однако там не было обоснования, что кривая будет именно эллипсом.

Дополнительное условие (отличающее эллипс от параболы или гиперболы) может выражаться в требовании ограниченности кривой, проведенной через шесть точек.

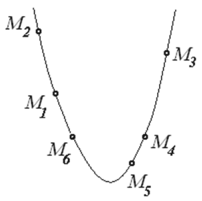


Рис. 9.

Чтобы доказать, что проходящая через точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 линия второго порядка ограничена, то есть является именно эллипсом, будем опираться на ранее упомянутую (рис. 5) графическую процедуру построения этой линии по пяти точкам M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 с помощью алгоритма, основанного на теореме Паскаля. Если применить такую же процедуру для восстановления точек, например, параболы (рис. 9), то для нее будет отсутствовать непрерывная дуга M_2M_3, потому что каждая очередная точка E окажется не в верхней, а в нижней части рисунка.

Достаточным условием существования (на рис. 5) непрерывной дуги M_2M_3 может быть, например, такой взаимный наклон отрезков M_1M_2 и M_4M_3, когда их продолжения пересекаются в точке P и образуют треугольник M_2M_3P, ограничивающий место расположения всех точек вида E, т.е. охватывающий снаружи всю дугу M_2M_3.

Таким образом, достаточным условием именно эллипса (в дополнение к условию (3)) может служить требование:

«При любой нумерации точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 отрезок M_1M_4 и точка $P = M_1M_2 \cap M_4M_3$ должны лежать по разные стороны от прямой M_2M_3».

Равносильное условие (которое мы будем далее использовать) выглядит так: «При любой нумерации точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 сумма углов $(\angle M_2M_1M_4 + \angle M_3M_4M_1)$ должна быть меньше π».

Покажем, что это требование выполняется для конического сечения, порождаемого биссектрисами треугольника. При этом рассмотрим два разных типа расположения выбранной четверки точек M_1, M_2, M_3, M_4 (при любом способе нумерации) по отношению к сторонам треугольника ABC.

Первый тип. Окружности с центрами M_1, M_2, M_3, M_4 касаются только двух сторон ABC. Например, на рис. 6 эти стороны — AB и BC. Здесь можно не только доказать, что сумма углов $(\angle M_2M_1M_4 + \angle M_3M_4M_1)$ меньше π, но и убедиться, что точка $P = M_1M_2 \cap M_4M_3$ всегда лежит внутри треугольника BM_2M_3.

Действительно, окружность с центром M_3 вписана в угол OBC, а окружность с центром M_4 касается лишь одной стороны (BC) этого угла. Поэтому треугольник BM_2M_3 и точка M_4 лежат по разные стороны от прямой BM_3. Следовательно, прямая M_4M_3 входит внутрь треугольника BM_2M_3 через вершину M_3, а значит, пересекает противоположную сторону (BM_2) в некоторой точке Z. Аналогично, прямая M_1M_2 входит внутрь треугольника M_2ZM_3 через вершину M_2, а значит, пересекает противоположную сторону (ZM_3) в некоторой точке P. Это и есть точка пересечения прямых M_1M_2 и M_4M_3, лежащая внутри треугольника BM_2M_3.

Второй тип. Четыре окружности касаются всех сторон треугольника ABC. Например, на рис. 6 таковы окружности с центрами M_1, M_6, M_5, M_4.

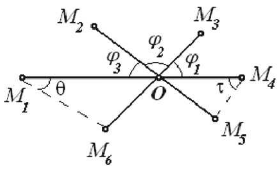


Рис. 10.

В этом случае рассуждение более громоздкое. Дополним прежний рис. 7 новыми обозначениями $\angle M_5M_4M_1 = \tau$, $\angle M_6M_1M_4 = \theta$ (рис. 10), а также $OM_i = m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Итак, требуется доказать, что $\theta + \tau < \pi$, то есть

$$\sin(\theta + \tau) > 0. \tag{22}$$

Применяя теоремы синусов и косинусов для треугольников M_1OM_6 и M_4OM_5, получим соотношения

$$\cos\theta = \frac{m_1 - m_6\cos\varphi_1}{M_6M_1}, \qquad \sin\theta = \frac{m_6}{M_6M_1}\sin\varphi_1,$$
$$\cos\tau = \frac{m_4 - m_5\cos\varphi_3}{M_4M_5}, \qquad \sin\tau = \frac{m_5}{M_4M_5}\sin\varphi_3,$$

откуда

$$\sin(\theta + \tau) = \sin\theta\tau + \cos\theta\sin\tau = \frac{m_6(m_4 - m_5\cos\varphi_3)\sin\varphi_1}{M_4M_5\cdot M_6M_1} + \frac{m_5(m_1 - m_6\cos\varphi_1)\sin\varphi_3}{M_4M_5\cdot M_6M_1}.$$

То есть условие (22) свелось к неравенству

$$m_3(m_1 - m_2\cos\varphi_3)\sin\varphi_1 + m_2(m_4 - m_3\cos\varphi_1)\sin\varphi_3 > 0.$$

Будем доказывать его, преобразовав к виду

$$m_3m_1\sin\varphi_1 + m_2m_4\sin\varphi_3 > m_3m_2(cos\varphi_3\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1\sin\varphi_3),$$

где в скобке правой части получили $\sin(\varphi_1 + \varphi_3) = \sin\varphi_2$ (рис. 10). При переходе к «обратным» величинам $m_i = 1/\mu_i$ неравенство приобретает вид

$$\mu_5\mu_1\sin\varphi_1 + \mu_4\mu_6\sin\varphi_3 > \mu_4\mu_1\sin\varphi_2. \tag{23}$$

Далее подставим в (23) соотношения (10)–(12), а также ранее полученные выражения (14) для углов φ_1, φ_2, φ_3. После сокращения одинаковых сомножителей $\left(\frac{4}{r^2}\cos\alpha\cos\gamma\right)$ неравенство (23) приобретает вид

$$q_1 + q_2 > q_3, \tag{24}$$

где

$$q_1 = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta\right) \cos(\beta + \gamma), \tag{25}$$

$$q_2 = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma - \beta\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \gamma\right) \cos(\alpha + \beta), \tag{26}$$

$$q_3 = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma - \beta\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta\right) \cos(\alpha + \gamma). \tag{27}$$

В выражении (25) преобразуем произведения в суммы по известным формулам тригонометрии

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)], \tag{28}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]. \tag{29}$$

Тогда распишем

$$\sin(\frac{\pi}{4} + \gamma - \alpha) \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta) = \frac{1}{2}[\cos(\gamma + \beta - 2\alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma - \beta\right)],$$
$$\cos(\gamma + \beta - 2\alpha) \cos?(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}[\cos(2\alpha) + \cos(2\gamma + 2\beta - 2\alpha)],$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma - \beta\right) \cos(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\gamma\right)\right] = \frac{1}{2}[\sin 2\beta - \sin 2\gamma],$$

откуда (с учетом $(2\gamma + 2\beta - 2\alpha) = 2(\gamma + \beta + \alpha) - 4\alpha = \frac{\pi}{2} - 4\alpha$) получим

$$q_1 = \frac{1}{4}[\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 2\beta + \sin 2\gamma]. \tag{30}$$

Заметим, что выражение (26) для q_2 получается из (25) формальной заменой местами переменных α и γ, поэтому из (30) следует

$$q_2 = \frac{1}{4}[\cos 2\gamma + \sin 4\gamma - \sin 2\beta + \sin 2\alpha]. \tag{31}$$

К сожалению, величину q_3 (27) не удается получить из q_1 путем формальных замен переменных, поэтому придется повторить для нее подробные преобразования по формулам (28)–(29):

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma - \beta\right) \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta) = \frac{1}{2}[\cos(\gamma - \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \gamma - 2\beta\right)],$$
$$\cos(\gamma - \alpha) \cos(\alpha + \gamma) = \frac{1}{2}[\cos(2\alpha) + \cos(2\gamma)],$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \gamma - 2\beta\right) \cos?(\alpha + \gamma) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha + 2\gamma - 2\beta\right)\right],$$

откуда (с учетом $\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha + 2\gamma - 2\beta\right) = \frac{\pi}{2} + 2(\alpha + \gamma + \beta) - 4\beta = \pi - 4\beta$) получим

$$q_3 = \frac{1}{4}[\cos 2\alpha + \cos 2\gamma - \sin 2\beta + \cos 4\beta]. \tag{32}$$

Подставляя выражения (30)–(32) в неравенство (27), приведем его (после сокращения подобных слагаемых) к виду

$$\sin 4\alpha + \sin 4\gamma + \sin 2\alpha + \sin 2\gamma > \cos 4\beta + \sin 2\beta$$

либо (в обозначениях углов при вершинах треугольника ABC):

$$\sin A + \sin C + \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2} > \cos B + \sin\frac{B}{2}. \tag{33}$$

Итак, условие (22) приведено к виду (33), которое и осталось доказать.

Заметим, что неравенство $a+c>b$ (для треугольника ABC) с применением теоремы синусов (после деления слагаемых на $2R$) превращается в

$$\sin A+\sin C>\sin B, \tag{34}$$

а для треугольника AOC (рис. 8), имеющего углы $\frac{A}{2}$, $\frac{C}{2}$, $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}\right)$, аналогичное неравенство имеет вид

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}>\cos\frac{B}{2}. \tag{35}$$

Поэтому из суммы формул (34) и (35) имеем справедливое неравенство

$$\sin A+\sin C+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}>\sin B+\cos\frac{B}{2}. \tag{36}$$

Для завершения доказательства условия (33) покажем, что в любом треугольнике выполняется свойство

$$\sin B+\cos\frac{B}{2}>\cos B+\sin\frac{B}{2}.$$

Действительно, группируя отдельно синусы и косинусы

$$\sin B-\sin\frac{B}{2}>\cos B-\cos\frac{B}{2} \tag{37}$$

преобразуем разности в произведения по известным формулам тригонометрии

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\quad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Тогда неравенство (37) получит вид

$$\cos\frac{3B}{4}\sin\frac{B}{4}>-\sin\frac{3B}{4}\sin\frac{B}{4},$$

равносильный условию

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{3B}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{B}{4}>0,$$

которое справедливо при всех возможных значениях угла $B\in(0,\pi)$. Таким образом, условие (22) доказано.

Рассмотрев все возможные расположения центров M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 окружностей, вписанных в треугольные фрагменты после разрезания исходного треугольника ABC биссектрисами (рис. 6), мы подтвердили, что эти центры лежат на общем коническом сечении, причем расположенном в ограниченной части плоскости. Иначе говоря, они лежат на общем эллипсе.

Гипотеза Штейнгарца для биссектрис полностью доказана.

Литература

[1] Штейнгарц Л.А. Гипотезы о медианах, высотах, биссектрисах и ... эллипсах // Математическое образование. - 2012. - № 2 (62). - С. 41-48.

[2] Штейнгарц Л.А. Орбиты Жукова и теорема Морлея // Математика в школе. - 2012. - № 6. - С. 53-61.

[3] Григорьев Д.С., Мякишев А.Г.[1] И снова о гипотезах Штейнгарца // Математическое образование. - 2013. - № 3 (67). - С. 40-56.

[1]К нашему глубокому прискорбию, Алексей Геннадьевич Мякишев скончался 22 августа этого года. См. некролог в конце настоящего номера журнала — *Прим. ред.*

[4] Осипов Н.Н. О механическом доказательстве планиметрических теорем рационального типа // Программирование. - 2014. - Т.40. - № 2. - С. 41-50.

[5] Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: Наука, 1989.

[6] Каюмов О.Р. Проективные свойства фигур. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2003.

Приложение

Доказательство леммы. Введем декартову систему координат с началом в точке O, направляя ось Ox вдоль луча OM_4. Обозначим длины отрезков $OM_i = m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Тогда рассматриваемые нами точки M_i (рис. 7) будут иметь следующие координаты (x_i, y_i):

$$x_1 = -m_1,\ x_2 = -m_2\cos\varphi_3,\ x_3 = m_3\cos\varphi_1,\ x_4 = m_4,\ x_5 = m_5\cos\varphi_3,\ x_6 = -m_6\cos\varphi_1,$$
$$y_1 = 0,\ y_2 = m_2\sin\varphi_3,\ y_3 = m_3\sin\varphi_1,\ y_4 = m_4,\ y_5 = -m_5\sin\varphi_3,\ y_6 = -m_6\sin\varphi_1.$$

Чтобы проверить, удовлетворяют ли эти координаты уравнению (1), используем пять точек для составления системы (2) из пяти уравнений с пятью неизвестными коэффициентами a, b, c, d, e. Анализ системы (2) позволяет сразу отделить от нее два уравнения с большим числом нулей (первое и четвертое):

$$\begin{array}{ll} (I) & am_1^2 - -dm_1 = -1, \\ (IV) & am_4^2 + dm_4 = -1. \end{array}$$

Разделив эти уравнения соответственно на m_1^2 и на m_4^2, и используя обозначения $\mu_i = 1/m_i$, из полученной системы

$$\begin{array}{ll} (I) & a - d\mu_1 = -\mu_1^2, \\ (IV) & a + d\mu_4 = -\mu_4^2 \end{array}$$

найдем значения корней

$$a = -\mu_1\mu_4, \quad d = \mu_1 - \mu_4 \tag{a}$$

Оставшиеся три уравнения тоже разделим каждое на квадрат длины m_i^2, получая в новых обозначениях

(II) $(a\cos 2\varphi_3 - b\cos\varphi_3\sin\varphi_3 + c\sin 2\varphi_3) + \mu_2(-d\cos\varphi_3 + e\sin\varphi_3) = -\mu_2^2,$

(III) $(a\cos 2\varphi_1 + b\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + c\sin 2\varphi_1) + \mu_3(d\cos\varphi_1 + e\sin\varphi_1) = -\mu_3^2,$

(V) $(a\cos 2\varphi_3 - b\cos\varphi_3\sin\varphi_3 + c\sin 2\varphi_3) + \mu_5(d\cos\varphi_3 - e\sin\varphi_3) = -\mu_5^2.$

Используя разность уравнений (II) и (V), содержащих одинаковые слагаемые, получим

$$-d(\mu_2 + \mu_5)\cos\varphi_3 + e(\mu_2 + \mu_5)\sin\varphi_3 = \mu_5^2 - \mu_2^2,$$

то есть $e\sin\varphi_3 = \mu_5 - -\mu_2 + d\cos\varphi_3$, откуда с учетом (4) получим

$$e = [\mu_5 - \mu_2 + (\mu_1 - \mu_4)\cos\varphi_3]/\sin\varphi_3. \tag{б}$$

Зная теперь a, d, e и вычислив оставшиеся корни b, c,v достаточно проверить, подходят ли к найденному явно уравнению эллипса координаты шестой точки, то есть будет ли справедливым и шестое уравнение

(VI) $(a\cos 2\varphi_1 + b\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + c\sin 2\varphi_1) + \mu_6(-d\cos\varphi_1 - e\sin\varphi_1) = -\mu_6^2.$

Здесь первая скобка может быть заимствована из (III) в виде

$$(a\cos 2\varphi_1 + b\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + c\sin 2\varphi_1) = -\mu_3^2 - \mu_3(d\cos\varphi_1 + e\sin\varphi_1),$$

поэтому остается проверить условие

$$-\mu_3^2 - \mu_3(d\cos\varphi_1 + e\sin\varphi_1) + \mu_6(-d\cos\varphi_1 - e\sin\varphi_1) = -\mu_6^2,$$

то есть $-(d\cos\varphi_1 + e\sin\varphi_1)(\mu_3 + \mu_6) = \mu_3^2 - \mu_6^2$, приводимое к виду

$$d\cos\varphi_1 + e\sin\varphi_1 = \mu_6 - \mu_3. \tag{в}$$

Подставляя в формулу (в) значения из (а), (б), получим

$$(\mu_1 - \mu_4)\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1[\mu_5 - \mu_2 + (\mu_1 - \mu_4)\cos\varphi_3]/\sin\varphi_3 = \mu_6 - \mu_3,$$

откуда с учетом равенства $\sin\varphi_3\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1\cos\varphi_3 = \sin(\varphi_1 + \varphi_3) = \sin(\pi - \varphi_1 - \varphi_3) = \sin\varphi_2$ последует искомое условие (3), при котором шестая точка тоже будет принадлежать общей кривой, что и требовалось доказать.

Каюмов Олег Рашидович,
профессор кафедры математики и экономики
филиала Омского государственного
педагогического университета, г. Тара.

E-mail: Oleg_Kayumov@mail.ru

Каширина Крестина Евгеньевна,
студентка 4 курса филиала ОмГПУ, г. Тара.

E-mail: krestina.kashirina@mail.ru

Формальный язык

К. В. Козеренко

В статье рассказано о становлении формального языка, который стал характерным признаком математики нового времени. Рассмотрены некоторые примеры формальных систем, обсуждается сущность аксиоматического метода.

Минус единица стала научным термином только во второй половине XIX века. До этого "...это не более, чем жаргон, в котором нет ни капли здравого смысла" (У. Френд, "Начала алгебры", 1796). "Ни Декарт, Ферма, Лейбниц, Эйлер, Лагранж, ни Гаусс или Коши не могли дать определения отрицательных, комплексных или иррациональных чисел" (М. Клайн [1]). Однако ещё в XVII веке в математику вошли функции, производные, дифференциальные уравнения, ряды Тейлора (Ньютон, 1666). В начале XVIII века родилось вариационное исчисление (И. Бернулли). К середине XIX века Коши, Больцано, а чуть позже Вейерштрасс поставили эти понятия на прочный логический фундамент. Риман дал строгое определение интеграла (интегралы начал вычислять Архимед ещё в III веке до нашей эры). Таким образом, были созданы методы, которые позволили решить огромное количество очень трудных задач астрономии, физики и техники. При этом математики вполне удовлетворительно выполняли вычисления с отрицательными, иррациональными, и даже с комплексными числами. А строгих определений все ещё не было. В чем же тут дело?

А вот в чём. Функция, производная, интеграл и т.д. **имели наглядную или чувственную интерпретацию**, то есть являлись объектами, так сказать, конкретной интуиции. И только к середине XIX века "...математики (Буль, Грассман) начали понимать, что должно быть позволено рассуждать об объектах, не имеющих никакой чувственной интерпретации" (Н. Бурбаки [2], Исторический очерк к гл. I-IV). И тогда прорвало! Почти одновременно Кантор, Дедекинд и Вейерштрасс дали определение (правда, довольно различными методами) действительного числа, затем Вейерштрасс предложил идею введения отрицательных чисел в виде классов пар натуральных чисел, и, наконец, в 1888 году Дедекинд сформулировал полную систему аксиом для арифметики (аксиомы Пеано). **Родился новый формальный язык! И новая интуиция!** Теперь "интуиция отнюдь не обязательно имеет пространственную или чувственную природу, как часто думают, а скорее представляет собой некоторое **знание поведения математических объектов,** часто прибегающее к помощи образов самой различной природы, но основанное прежде всего на повседневном знакомстве с этими объектами" (Н. Бурбаки [2], Введение).

Однако, на мой взгляд, первым, кто отказался от всякого обращения к наглядности и строго построил новую теорию с явно сформулированной целью, был Н. И. Лобачевский (1826). Недаром свою первую книгу он назвал "Воображаемая геометрия". Но геометрия была для него только полигоном для создания нового языка. Идеи Лобачевского чуть-чуть опередили время и его работы подверглись жесткой критике со стороны даже очень крупных математиков (М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский), но воспитанных на конкретной интуиции. Так Буняковский называл геометрию Лобачевского "абсурдом логики". Даже в 1883 году, когда геометрия Лобачевского уже почти завоевала признание, А. Кэли говорил, что "аксиома о параллельных, по моему мнению, не требует доказательства, но является составной частью нашего представления о пространстве" (М. Клайн [3]).

В качестве примера конструкций нового языка я приведу определение целых чисел.

Определение. Рассмотрим множество, состоящее из пар натуральных чисел (m, n). Договоримся не различать две пары (m, n) и (k, l) (или считать их, так сказать, эквивалентными), если $m + l = n + k$.

Множество пар натуральных чисел разбивается таким образом на *классы эквивалентных пар*, которые мы и будем называть *целыми числами.*

Как тяжело дались и как дорого стоят слова в этом определении: “договоримся не различать”! Так родился прием, который называется *факторизацией* и который в XX веке очень широко использовался.

Множество целых чисел принято обозначать буквой $\mathbb{Z}$. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ естественным образом вкладывается в множество целых чисел $\mathbb{Z}$ Это вложение задается формулой:

$$n \to [n+1, 1],$$

где через $[n+1, 1]$ обозначен класс эквивалентности, содержащий пару $(n+1, 1)$. Таким образом, класс эквивалентности, содержащий пару $(m,\ n\ )$ с $m > n$, есть не что иное как натуральное число $m - n$.

Определение. *Нулём* называется класс $[m,\ m]$ (обратите внимание на то, что ноль определяется)!

Определение сложения целых чисел.
Суммой целых чисел $[m, n]$ и $[k, l]$ назовем число $[m + k, n + l]$.

Замечание. Здесь также используется характерный для факторизации прием: из классов эквивалентностей выбираются представители, с ними производятся допустимые манипуляции (в данном случае мы складываем натуральные числа), а затем выбирается тот класс, в который попал новый элемент. При этом, конечно, требуется доказать, что этот класс не зависит от выбора представителей (в данном случае это очевидно).

Теперь мы можем решить уравнение $1 + x = 0$. В самом деле, из $1 = [2, 1]$; положив $x = [1, 2]$, получим, что $[2, 1] + [1, 2] = [3, 3]$, то есть $1 + x = 0$. Таким образом, $-1 = [1, 2]$, а класс эквивалентности, содержащий пару (m, n) с $m < n$, есть *отрицательное число* $-(n, m)$. (Заметьте, что и минус единица определяется).

Очень интересно, что хронологически сначала Гамильтон в 1837 году, считая известным, что такое действительное число, определил комплексные числа, придав, в частности, тем самым смысл выражению $\sqrt{-1}$. Затем в 1872 году появилось определение действительных чисел и, стало быть, $\sqrt{2}$ перестал быть мистическим символом. Потом разобрались с целыми и рациональными числами: -1 “получила гражданство”. И только в 1888 году была поставлена точка: натуральные числа стали полноправными членами среди математических понятий.

В геометрии похожие процессы завершились выходом в 1899 году книги Гильберта “Основания геометрии” [4]. Чтобы понять подход Гильберта, надо помнить, что Лобачевский вывел всевозможные следствия из евклидовых аксиом с измененной аксиомой о параллельных прямых. Новая аксиома утверждала, что через данную точку вне данной прямой можно провести бесконечное число прямых, не пересекающих данную прямую. Однако ни одного противоречия в новой геометрии не было найдено, хотя теоремы, полученные из новой системы аксиом, и находились в резком противоречии с повседневной практикой (например, сумма углов треугольника была, в отличие от евклидовой геометрии, меньше $180°$). Тем самым было обнаружено, что можно построить непротиворечивую геометрию, исходя из аксиом, не кажущихся очевидными (в отличие от евклидовых) и даже производящих впечатление неверных.

Только в 1870 году геометрия Лобачевского получила общее признание. Это произошло после того, как Феликс Клейн обнаружил в одной работе Кэли “модель”, позволяющую отождествить исходные объекты и соотношения геометрии Лобачевского с некоторыми объектами и соотношениями евклидовой геометрии. Этим он доказал, что геометрия Лобачевского непротиворечива в той же мере, что и евклидова, — противоречие в одной из них необходимо влечет противоречие в другой.

Невозможность доказательства постулата о параллельных прямых стала, наконец, “столь же истинной, как и любой другой математический факт”. Однако все значение этого открытия было оценено не сразу и не всеми. Хотя большинство математиков и признали, что можно строить различные неевклидовы геометрии путем изменения постулата о параллельных прямых, они так и не могли понять того очевидного факта, что другие аксиомы Евклида также являются произвольными предположениями и, заменяя их другими, можно строить новые неевклидовы геометрии.

Сначала Гильберт объяснил, что прямая, точка и плоскость **появляются только в связи с теми аксиомами, которые для них выбираются. Другими словами, назвать ли их точками, прямыми, плоскостями или же столами, стульями, пивными кружками, — это будут те объекты, для которых справедливы соотношения, выражаемые аксиомами.**

В некотором смысле это похоже на то, как значение неизвестного слова проясняется по мере использования его в различных контекстах. Каждое дополнительное предложение, в котором оно участвует, исключает некоторые значения, которые это слово могло бы иметь в предыдущих предложениях. Иными словами, аксиомы играют роль и определений, или как отметил Пуанкаре являются "замаскированными определениями".

В результате такого подхода стало ясно, что теоремы геометрии справедливы для любой интерпретации первоначальных объектов и основных соотношений, для которой выполняются аксиомы.

Затем Гильберт предложил положить в основание геометрии простой и полный список независимых аксиом, позволяющий доказать давно известные теоремы классической геометрии Евклида. Его подход — оригинальное сочетание абстрактной точки зрения и конкретного традиционного языка — был особенно эффективным. Выбрав систему аксиом евклидовой геометрии, немногим отличавшуюся по духу от аксиом самого Евклида, Гильберт смог продемонстрировать сущность аксиоматического метода. Установив образец современного строгого мышления в виде традиционной лестницы — первичные понятия, аксиомы, теоремы,— он пошел значительно дальше. В отличие от Евклида Гильберт требовал, чтобы его система аксиом удовлетворяла следующим логическим требованиям:

Она должна быть *полной*, т.е. такой, чтобы все её интерпретации были изоморфными.

Она должна быть *независимой*, т.е. отсутствие одной из аксиом системы делает невозможным доказательство, по крайней мере, одной теоремы.

Она должна быть *непротиворечивой*, т.е. не позволяющей получать противоречащих друг другу теорем.

При новом понимании математической теории как системы теорем, выводимых дедуктивным путем из множества произвольно выбранных аксиом, понятие непротиворечивости теории было единственной заменой интуитивной истины.

К тому времени, как мы помним, уже было доказано, что неевклидова геометрия Лобачевского столь же непротиворечива, как и евклидова геометрия.

Гильберт же показал, что любое противоречие в евклидовой геометрии должно повлечь противоречие в арифметике вещественных чисел. Тем самым вопрос о непротиворечивости евклидовой и неевклидовой геометрии был сведен к аналогичному вопросу о непротиворечивости свойств вещественных чисел. Свойства действительных чисел можно обосновать, исходя из свойств или аксиом целых чисел. Таким образом, исследование непротиворечивости геометрии привело к проблеме непротиворечивости арифметики. Ответ оказался совершенно неожиданным: в математической логике доказывается (Гедель), что непротиворечивость арифметики не может быть ни доказана, ни опровергнута, исходя из аксиом арифметики и логики! Таким образом, непротиворечивость арифметики является "постулатом логики", который "мы принимаем на основании доверия ко всему практическому и интеллектуальному опыту человечества".

Именно эти аспекты обоснования геометрии отмечают К. Рид [5], В. Никулин и И. Шафаревич [6].

Язык науки, особенно язык математики, принципиальнейшим образом отличается от естественного, так сказать, бытового языка. Для естественного языка характерно наличие неоднозначности, т.е. наличие взаимоисключающих смыслов. В процессе восприятия естественной речи человек пользуется различными инструментами разрешения неоднозначности, такими как аналогии, апелляции к наглядным образам, но, прежде всего, контекстом. Поэтому естественно-языковые тексты информационно избыточны. Язык математики использует особый инструмент разрешения неоднозначности. В математическом тексте **каждый (!) термин** или понятие должны быть **определены,** что абсолютно исключает возможность неоднозначного их понимания.

Ещё одна важная особенность формального языка — фиксация аналогий. Похожие структуры выделяются термином и определенным набором аксиом, которые отражают те или иные свойства этих структур. Так, например, множество $\mathbb{Z}$ целых чисел похоже на множество *многочленов*. Говорят, что $\mathbb{Z}$ и множество многочленов есть *кольца*. Про очень похожие структуры горят, что они изоморфны (“одинаковые вещи мы называем по-разному”). Например, комплексные числа как множество упорядоченных пар вещественных чисел изоморфны факторкольцу $ZR[x]/(x^2+1)$. Эта особенность формального языка позволяет изучать одновременно целые классы структур: коль скоро выполнены аксиомы, справедлива и любая теорема, полученная логическим путём из этих аксиом.

Итак, формальный язык стал языком науки. Как же это отразилось на преподавании математики?

Почти сто лет тому назад Эмиль Борель [7] говорил, что по “существу образование ума при помощи точных знаний гораздо важнее, чем приобретение этих знаний и, что преподавание математики может получить полную воспитательную ценность лишь при условии, если оно будет избегать слишком распространенного софизма, будто реальные трудности можно разрешить с помощью простых словесных определений”. Здесь я хочу быть правильно понятым и не перепугать тех, кто призывает учителей “быть реалистами и не пытаться научить строгим определениям с самого начала”. О таких вещах, на мой взгляд, надо сначала просто рассказывать на уроках и не только не требовать, но и не ожидать немедленного понимания. Семя брошено в почву, надо подождать пока оно прорастет. Что касается логических пробелов, то просто надо стремиться к тому, чтобы их было поменьше. Сама по себе эта деятельность мне кажется очень полезной. Впрочем, как и во всем, и здесь уместно “чувство меры и сообразности”. Степень погружения зависит от уровня класса. Однако, обязательно надо придерживаться принципа Н. Н. Константинова о **“честном умолчании”,** который подразумевает, что, если учитель в каком-то месте либо пропустил доказательство (умолчал), понимая, что ученики воспримут этот факт как нечто естественное и не вызывающее возражений, либо просто сослался на очевидность, то добавить строгое доказательство можно не разрушая структуры курса [8].

Как отметил В. А. Успенский [9], способность отличать осмысленное от бессмысленного и истинное от ложного следует неуклонно и неназойливо прививать уже с начальных классов школы. И не является ли это главным в школьном преподавании?

На то, что математика — это совершенно особый язык, очень редко кто в школе обращает внимание, и, как правило, этому вообще не учат, хотя, может быть, математика включена в школьную программу именно для того, чтобы хотя бы с ним познакомиться, или, что значительно лучше, научить хоть немного говорить на этом языке. Но самое страшное что, как правило, эти формальные конструкции обрушиваются на голову совершенно не подготовленного к ним бывшего школьника. Не подготовленного потому, что “школьная” математика, в основном, конкретна. А к формальному языку надо еще привыкнуть, надо уметь его узнавать. На это надо время.

Преподаватели же вузов считают, что студенты уже им владеют, и сразу начинают говорить с ними на незнакомом формальном языке, а бедные студенты не понимают, что происходит. В результате им приходится просто зазубривать непонятные определения и доказательства теорем, что приводит к потере смысла и разрыву образования.

Что делать? На этот вопрос Арнольд [10] дает такой ответ: избегать немотивированных определений и разъяснять фундаментальные идеи и методы!

Литература

1. Клайн М. Логика против педагогики. / В кн.: Математика (проблемы преподавания математики в вузах), вып. 3. - М.: Высшая школа, 1973.

2. Бурбаки Н. Теория множеств. - М.: Мир, 1965.

3. Клайн М. Математика. Утрата определенности. - М.: Мир,1984.

4. Гильберт Д. Основания геометрии. - М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

5. Рид К. Гильберт. - М.: Наука, 1977.

6. Никулин В.В., Шафаревич И.Р. Геометрии и группы. - М.: Наука, 1983.

7. Борель Э. Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки // Математическое просвещение. - Сер. 2, вып. 3. - 1958. - С. 89-100.

8. Интервью с Н. Н. Константиновым // Квант, № 1. - 2010. - С. 19-23.

9. Успенский В.А. Математическое и гуманитарное: преодоление барьера. - М.: МЦНМО, 2011. - С. 46.

10. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - С. 304.

Козеренко Константин Владимирович
лицей "Вторая школа", г. Москва,
заведующий кафедрой математики,
преподаватель математики
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: ckozerenko@mail.ru

Тригонометрические многочлены (продолжение)

Е. З. Скворцова

Окончание статьи о тригонометрических многочленах (начало и продолжение в предыдущих номерах журнала). Автор последовательно развивает теорию и приводит ряд задач, которые можно рассматривать как задачи повышенной трудности по отношению к программе профильных классов.

Глава 6. Угадаем корень (окончание)

Теперь займемся разложением на неразложимые КМ с рациональными коэффициентами $f_l(x)$ для конкретных небольших l.

1) $l = 2$. Правильная несократимая дробь только одна, $1/2$. Значит, $F_2(x)$ — это $2\cos x - 2\cos(1/2)\pi = 2\cos x$. Так как $F_2(x)$ имеет первую степень, то он сам неразложим.

2) $l = 3$. Правильных дробей две: $1/3$ и $2/3$. Имеем: $\cos(1/3)\pi$ и $\cos(2/3)\pi$ оба рациональны, равны соответственно $1/2$ и $-1/2$. Поэтому $f_3(x) = (2\cos x - 1)(2\cos x + 1)$, где $2\cos x - 1$ и $2\cos x + 1$ неразложимы, так как имеют первую степень.

3) $l = 4$. Правильных несократимых дробей две: $1/4$ и $3/4$. Имеем, $f_4(x) = (2\cos x - - 2\cos(1/4)\pi)(2\cos x - 2\cos(1/4)\pi) = 4\cos^2 x - 2 = 2\cos 2x$. Так как разложение КМ на простые множители единственно, а $\cos(1/4)\pi$ — иррациональное число, то $f_4(x)$ неразложим.

4) $l = 5$. Несократимые правильные дроби — $1/5$; $3/5$; $2/5$; $4/5$. Как мы знаем, $(1/5)\pi$ и $(3/5)\pi$ — корни КМ с рациональными коэффициентами $2\cos 2x - 2\cos x + 1$, а $(2/5)\pi$ и $(4/5)\pi$ — корни КМ с рациональными коэффициентами $2\cos 2x + 2\cos x + 1$. Значит, $f_5(x) = (2\cos 2x - 2\cos x + 1)(2\cos 2x + 2\cos x + 1)$. Остается выяснить, разложим ли $2\cos 2x - 2\cos x + 1$. Но корни $2\cos 2x - 2\cos x + 1$ находятся из квадратного уравнения $4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$, откуда $\cos x = (1 \pm \sqrt{5})/4$ — иррациональные числа. Значит, $2\cos 2x - 2\cos x + 1$ и $2\cos 2x + 2\cos x + 1$ неразложимы.

5) $l = 6$. Несократимые правильные дроби — $1/6$; $5/6$. Значит, $f_6(x) = (2\cos x - 2\cos(1/6)\pi)\cdot (2\cos x + 2\cos(1/6)\pi) = 4\cos^2 x - 3 = 2\cos 2x - 1$.

6) $l = 7$. Несократимые дроби — $1/7$; $3/7$; $5/7$; $2/7$; $4/7$; $6/7$. Имеем: $(1/7)\pi$; $(3/7)\pi$; $(5/7)\pi$ — корни $2\cos 3x - 2\cos 2x + 2\cos x - 1$, а $(2/7)\pi$; $(4/7)\pi$; $(6/7)\pi$ — корни $2\cos 3x + 2\cos 2x + 2\cos x + 1$. При этом $2\cos 3x - 2\cos 2x + 2\cos x - 1$ мог бы быть разложимым, только если бы раскладывался в произведение КМ первой степени с рациональными коэффициентами.

Специалистам известно, что $\cos(i/l)\pi$ рационален только при $i/l = 0; 1; 1/2; 2/3$ (при $0 \leq i/l \leq 1$). Но для тех, кому это неизвестно, поучительно будет познакомиться с одним из доказательств. Начнем с более общего утверждения, которое пригодится нам и в других ситуациях. Вы, наверное, знаете,что если обычный многочлен с целыми коэффициентами можно разложить в произведение двух многочленов ненулевой степени с рациональными коэффициентами, то данный многочлен можно разложить и в произведение многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами. Попробуем сформулировать и доказать аналогичное утверждение для КМ.

Заметим сначала, что произведение ТМ с целыми коэффициентами не обязано иметь целые коэффициенты (в СФ). Ведь произведение одночленов $\cos kx$ и $\cos lx$ при $k, l \neq 0$ равно $1/2\cos(k+l)x - 1/2\cos(k+l)x$. Докажем, что произведение двух КМ с целыми коэффициентами в СФ имеет целые коэффициенты в том и только том случае, если хотя бы один из этих КМ имеет СФ $2b_m \cos mx + \cdots + 2b_1 \cos x + b$, где все $b_m; \ldots; b_1$ — целые числа.

Действительно, если мы отбросим от обоих КМ с целыми коэффициентами одночлены с четными коэффициентами, то в СФ произведения, если все коэффициенты были целыми, так и останутся целыми, а если какой-то коэффициент был дробным, то он так и останется дробным, так как мы отбросили от произведения только несколько одночленов с целыми коэффициентами. Пусть теперь после отбрасывания старшие члены обоих КМ остались $a \cos k_1 x$ и $b \cos k_2 x$, где $k_1, k_2 > 0$. Но мы знаем, что старший член произведения — это старший член произведения старших членов, то есть $1/2(ab)\cos(k_1 + k_2)x$. И значит, произведение имеет дробный коэффициент при $\cos(k_1 + k_2)$. Если же от одного КМ удалось отбросить всё, кроме свободного члена, то понятно, что все коэффициенты произведения целые.

КМ с целыми коэффициентами $a_n \cos nx + \cdots + a$ назовем *примитивным*, если $\text{НОД}(a_n; a_{n-1}; \ldots; a) = 1$.

Оказывается, что, как и для обычных многочленов, произведение двух КМ с целыми коэффициентами является примитивным КМ. Правда, только если все коэффициенты СФ произведения — целые числа. Докажем это. Допустим, что $a_n \cos nx + \cdots + a$ и $b_m \cos mx + \cdots + b_1 \cos x + b_0$ примитивны и все коэффициенты в СФ их произведения — целые числа, но при этом произведение не примитивно. Для определенности будем считать, что четными являются $a_n; \ldots; a_1$. Пусть p — такое простое число, на которое делятся все коэффициенты произведения.

Сначала рассмотрим случай $p \neq 2$. По аналогии с предыдущим доказательством отбросим от множителей все члены $a_i \cos ix$ и $b_j \cos lx$, для которых a_i или b_j кратно p. Пусть после этого за старших членов множителей останутся $a_k \cos kx$ и $b_l \cos lx$. Тогда если хотя бы одно из чисел k и l равно 0, то старший член произведения — $a_k b_l \cos(k + l)x$, а если оба не равны 0, то $(1/2)a_k b_l \cos(k + l)x$. В обоих случаях коэффициент при $\cos(k + l)x$ не делится на p, что противоречит условию.

Теперь рассмотрим случай $p = 2$. Отбросим от первого слагаемого все одночлены с коэффициентами, кратными 4, а от второго — с кратными 2. Тогда старший член того, что останется от первого множителя, будет $a_k \cos kx$, где a_k четно, но не кратно 2, если $k \neq 0$ и a_k нечетно при $k = 0$. А второго — $b_j \cos lx$, где b_j нечетно. Значит коэффициент при $\cos(k+l)x$ равен $a_k b_l$, если хотя бы одно из чисел k и l равно 0, и $(1/2)\ a_k b_l$, если k и l оба равны 0. Так как $(1/2)\ a_k$ и b_l нечетны, то и $(1/2)a_k b_l$ нечетно. А в случае $k = 0, l \neq 0$ a нечетно (иначе первый множитель не был бы примитивным), и значит $a_k b_l$ нечетно. Если же $k \neq 0$, но $l = 0$, то это значит, что от произведения осталось только

$$(a_k \cos kx + \cdots + a)b = a_k b \cos kx + \cdots + a_0 b,$$

где $a_0 b$ нечетно (и значит, свободный член был нечетным и до процедуры отбрасывания).

В дальнейшем нам потребуется еще следующее утверждение:

Если произведение двух примитивных КМ $F_1(x)$ и $F_2(x)$ не является примитивным, то есть если его СФ имеет хоть один нецелый коэффициент, то примитивным является $2F_1(x)F_2(x)$.

Действительно, понятно, что если все коэффициенты СФ у $F_1(x)$ и $F_2(x)$ целые, но у $F_1(x)F_2(x)$ — не все, то это означает, что у $F_1(x)F_2(x)$ есть коэффициенты $a/2$, где a — целое нечетное число. При этом все коэффициенты $2F_1(x)F_2(x)$ целые и не все делятся на 2. А то, что если p — простое число и $p \neq 2$, то не все коэффициенты $2F_1(x)F_2(x)$ делятся на p, доказывается так же, как мы это доказывали для $F_1(x)F_2(x)$ для случая, когда все коэффициенты $F_1(x)F_2(x)$ целые.

Теперь, наконец, мы можем доказать следующее утверждение.

Утверждение 6.2. *Если КМ с целыми коэффициентами (в СФ) разложим в произведение двух КМ с рациональными коэффициентами, то его можно разложить и в произведение двух КМ с целыми коэффициентами(в СФ). Причем новые множители получаются из старых, один — умножением на некоторое рациональное число, а другой — делением на это число.*

Заметим, что каждый КМ с рациональными коэффициентами однозначно представим в виде $(k/l)g(x)$, где k/l — несократимая дробь, а $g(x)$ — примитивный КМ с целыми коэффициентами (в СФ). Пусть $f(x) = F_1(x)F_2(x)$ и $F_1(x)$, $F_2(x)$ имеют рациональные коэффициенты, а $f(x)$ — целые. Тогда $f(x) = kg(x)$; $F_1(x) = (k_1/l_1)g_1(x)$; $F_2(x) = (k_2/l_2)g_2(x)$, где $g(x)$; $g_1(x)$; $g_2(x)$ примитивны, k_1/l_1 и k_2/l_2 несократимы. Тогда $kg(x) = (k_1k_2/l_1l_2)g_1(x)g_2(x)$. Если $g_1(x)g_2(x)$ имеет целые коэффициенты, то $g_1(x)g_2(x)$ примитивен и значит $k = k_1k_2/l_1l_2$; $kg(x) = kg_1(x)g_2(x)$; $f(x) = (kg_1(x))g_2(x)$ — произведение КМ с целыми коэффициентами (в СФ). Если же $g_1(x)g_2(x)$ не примитивен, то $2g_1(x)g_2(x)$ примитивен, причем, так как у $k_1k_2g_1(x)g_2(x)$ все коэффициенты целые, то хотя бы одно из чисел k_1 и k_2 четно. Пусть $k_1 = 2k_3$. Тогда $k = k_2k_3/l_1l_2$; $f(x) = (2kg_1(x))g_2(x)$.

Теперь вспомним, что мы собирались доказать, что $\cos(i/l)\pi$ рационален только в случаях, когда он равен 0; -1; 1; $1/2$ или $-1/2$.

Мы знаем, что $(i/l)\pi$ — корень $2(\cos lx + 1)(\cos lx - 1) = \cos 2lx - 1$. Допустим, что $\cos(i/l)\pi$ рационален. Тогда, так как КМ $\cos 2lx - 1$ имеет целые коэффициенты, то он раскладывается в произведение $(a\cos x - b)(c_{2l-1}\cos(2l-1)x + \dots + c)$, где $a, b, c_{2l-1}, \dots, c_0$ — целые числа и $b/a = \cos(i/l)\pi$. Но старший коэффициент $\cos 2lx - 1$ равен 1, значит $1/2ac_{2l-1} = 1$; $ac_{2l-1} = 2$, то есть a равно либо 1, либо 2. Значит, $\cos(i/l)\pi$ — целое число, то есть 0, 1 или -1, или дробь со знаменателем 2, то есть $1/2$ или $-1/2$.

Похожее рассуждение показывает, что $f_l(x)$ — КМ с целыми коэффициентами. Ведь $f_l(x)$ — делитель $\cos 2lx - 1$. Значит $y\cos 2lx - 1$ есть делитель с целыми коэффициентами, равный $rf_l(x)$, где r — некоторое рациональное число, причем частное от деления $\cos 2lx - 1$ на $rf_l(x)$ тоже имеет целые коэффициенты. Но так как старший коэффициент $\cos 2lx - 1$ равен 1, то старший коэффициент $rf_l(x)$ — это 1 или 2. Значит, r равно $1/2$ или 1. В обоих случаях $1/r$ — целое число. Таким образом, $f_l(x)$ получается из КМ $rf_l(x)$ с целыми коэффициентами умножением на целое число $1/r$. Значит, $f_l(x)$ сам имеет целые коэффициенты.

7. $l = 8$. Несократимые дроби — $1/8$; $3/8$; $5/8$; $7/8$. Все они — корни $\cos 4x$. Значит, $f_8(x)$ имеет четвертую степень, а так как его старший коэффициент равен 2, то $f_8(x) = 2\cos 4x$. Остается выяснить, является ли $\cos 4x$ неразложимым.

Чтобы ответить на этот вопрос, изучим связь разложимости $f(2x)$ с разложимостью $f(x)$. Обратим внимание на то, что всегда $f(2(x+\pi)) \equiv f(2x)$, то есть функция $f(2x)$ не меняется при замене x на $x+\pi$. Этим свойством обладают в точности те КМ, которые в СФ содержат только члены $\cos kx$ с четными k, то есть однородные КМ четной степени.

Пусть дан произвольный КМ $f(x)$ с рациональными коэффициентами, для которого $f(x+\pi) \equiv f(x)$. Заметим, что если некоторый КМ с рациональными коэффициентами раскладывается двумя способами на неразложимые множители, то эти способы одинаковы с точностью до перестановки множителей и умножения их на числа. (Это следует из того, что если $g(x)$ входит в первое разложение, а $h(x)$ во второе, то НОД$(g(x); h(x))$ имеет рациональные коэффициенты и $g(x)$ и $h(x)$ на него делятся. Значит, либо этот НОД имеет нулевую степень, либо и $g(x)$, и $h(x)$ совпадают с НОД$(g(x); h(x))$ с точностью до умножения на число.)

Пусть $f(x) = g_1(x)\dots g_k(x)$, где все $g_i(x)$ неразложимы. Тогда $g_1(x+\pi)\dots g_k(x+\pi)$ — тоже разложение $f(x)$ на неразложимые множители. Значит те i, для которых $g_i(x+\pi)$ не получается из $g_i(x)$ умножением на константу, разбиваются на пары $(i; j)$ так, что $g_i(x+\pi)$ и $g_j(x)$ получаются друг из друга умножением на константу. Заметим также, что если $g_i(x) \equiv cg_i(x+\pi)$, то $c = \pm 1$, так как старшие коэффициенты $g_i(x)$ и $g_i(x+\pi)$ могут отличаться только знаком. Причем если $c = -1$, то так как $g_i(x)$ неразложим, а все однородные КМ нечетной степени делятся на $\cos x$, то $g_i(x)$ с точностью до умножения на константу может быть только $\cos x$. Итак, мы доказали

Утверждение 6.3. *Пусть дан произвольный КМ $f(x)$ с рациональными коэффициентами, для которого $f(x+\pi) \equiv f(x)$. Тогда разложение $f(x)$ на неразложимые множители состоит из четного числа множителей $\cos x$, множителей вида $h(2x)$ и пар $g(x)g(x+\pi)$, где $h(x)$ и $g(x)$ — КМ с рациональными коэффициентами.*

Отсюда следует

Утверждение 6.4. *Если $f(x)$ — неразложимый КМ с рациональными коэффициентами, то $f(2x)$ разложим, только если $f(x) = c(1+\cos x)$ или $f(2x) = cg(x)g(x+\pi)$ для некоторого КМ с рациональными коэффициентами $g(x)$.*

Действительно, если разложение $f(2x)$ на неразложимые множители состоит с точностью до постоянного множителя только из пар $g_i(x+\pi)g_i(x)$, то, группируя в одну группу по одному члену каждой пары, а в другую оставшиеся, получим, что $f(2x) = g(x)g(x+\pi)$, где $g(x)$ — произведение всех множителей из первой группы.

Если в разложение $f(2x)$ входит $\cos^{2k} x = ((1/2)(1+\cos 2x))^k$, то $f(2(\pi/2)) = 0$; $f(\pi) = 0$. Так как $f(x)$ — КМ, то $f(x)$ делится на $1 + \cos x$. А так как $f(x)$ неразложим, то $f(x) = c(1+\cos x)$.

Если же в разложение $f(2x)$ входит $g(2x)$, то $f(x)$ делится на $g(x)$. Так как $f(x)$ неразложим, то $f(x)$ совпадает с $g(x)$ с точностью до умножения на константу. Значит $f(2x)$ с точностью до умножения на ту же константу совпадает с $g(2x)$. То есть разложение $f(2x)$ на неразложимые множители состоит только из одного множителя. Значит, $f(2x)$ неразложим.

Теперь мы можем доказать (известный специалистам) факт: если $\cos nx$ неразложим, то и $\cos 2nx$ неразложим.

Действительно, если бы $\cos 2nx = cg(x)g(x+\pi)$ для некоторого КМ с рациональными коэффициентами $g(x)$, то $2\cos 2nx$ можно было бы представить как $c_1 g_1(x)g_1(x+\pi)$, где c_1 и все коэффициенты КМ $g_1(x)$ и $g_1(x+\pi)$ — целые числа. Тогда, так как старший коэффициент $2\cos 2nx$ равен 2, то $c = 1$. Подставляя $x = 0$, получаем $2 = c_1 g_1(0) g_1(\pi)$. Но $g_1(x) = a_n \cos nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + a$, где все коэффициенты целые. Значит, $g_1(0)$ и $g_1(\pi)$ представляют собой две суммы целочисленных слагаемых, отличающиеся только знаками некоторых слагаемых. Поэтому они оба четны или оба нечетны. И их произведение не может быть равно 2.

8. $l = 9$. Несократимые правильные дроби — 1/9; 5/9; 7/9 и 2/9; 4/9; 8/9.

Мы уже знаем, что для этих дробей k/l числа $\cos(k/l)\pi$ иррациональны. Значит, так как $f_9(x)$ имеет шестую степень и раскладывается на два множителя третьей степени с рациональными коэффициентами, НОД($f_9(x)$; $1+\cos 9x$) и НОД($f_9(x)$; $1 \cos 9x$), эти множители неразложимы. А так как $2\cos 3x$ — 1 имеет корни $(1/9)\pi$; $(5/9)\pi$ и $(7/9)\pi$, а $2\cos 3x + 1$ — $(2/9)\pi$; $(4/9)\pi$ и $(8/9)\pi$, то $2\cos 3x$ — 1 и $2\cos 3x + 1$ и есть неразложимые множители, на которые раскладывается $f_9(x)$.

9. $l = 10$. Несократимые правильные дроби — 1/10; 3/10; 7/10; 9/10. Удвоив числа $(1/10)\pi$; $(3/10)\pi$; $(7/10)\pi$; $(9/10)\pi$, получим $(1/5)\pi$; $(3/5)\pi$; $2\pi - (3/5)\pi$; $2\pi - (1/5)\pi$. Все они — корни неразложимого КМ.

$f(x) = 2\cos 2x - 2\cos x + 1$. Значит, достаточно доказать, что $f(2x)$ нельзя представить в виде произведения $dg(x)g(x+\pi)$, где d — целое число и $g(x) = a\cos 2x + b\cos x + c$; a, b и c — целые числа. Допустим, что $2\cos 4x - 2\cos 2x + 1 \equiv d(a\cos 2x + b\cos x + c)(a\cos 2xb\cos x + c)$. Сравнивая старшие коэффициенты в левой и правой частях, получаем, что $2 = a^2 d/2$, откуда $a^2 d = 4$, значит $d = 1$; $a = 2$ или $d = 4$; $a = 1$. Но в последнем случае d можно сделать равным 1 и a равным 2, умножив $a\cos 2x + b\cos x + c$ и $a\cos 2xb\cos x + c$ на 2. Итак,

$$2\cos 4x - 2\cos 2x + 1 \equiv (2\cos 2x + b\cos x + c)(2\cos 2x - b\cos x + c).$$

Подставив $x = \pi/2$, получаем $5 = (c-2)^2_{-}$, что невозможно при целом с. Значит, $2\cos 4x - 2\cos 2x + 1$ неразложим и $f_{10}(x) = 2\cos 4x - 2\cos 2x + 1$.

10. $l = 11$. Несократимые правильные дроби — 1/11; 3/11; 5/11; 7/11; 9/11 и 2/11; 4/11; 6/11; 8/11; 10/11.

Имеем, $(1/11)\pi$; $(3/11)\pi$; $(5/11)\pi$; $(7/11)\pi$; $(9/11)\pi$ — корни $2\cos 5x - 2\cos 4x + 2\cos 3x - 2\cos 2x + 2\cos x - 1$, а $(2/11)\pi$; $(4/11)\pi$; $(6/11)\pi$; $(8/11)\pi$; $(10/11)\pi$ — корни $2\cos 5x + 2\cos 4x + 2\cos 3x + 2\cos 2x + 2\cos x + 1$. Значит,

$$f_{11}(x) = (2\cos 5x - 2\cos 4x + 2\cos 3x - 2\cos 2x + 2\cos x - 1) \times \\ \times (2\cos 5x + 2\cos 4x + 2\cos 3x + 2\cos 2x + 2\cos x + 1).$$

Здесь степень множителей 5, а 5 — простое число. А так как делителей первой степени у $2\cos 5x - 2\cos 4x + 2\cos 3x - 2\cos 2x + 2\cos x - 1$ и $2\cos 5x + 2\cos 4x + 2\cos 3x + 2\cos 2x + 2\cos x + 1$ нет, то оба эти КМ неразложимы.

11. $l = 12$. Правильные несократимые дроби — $1/12$; $5/12$; $7/12$; $11/12$.

Все числа $(1/12)\pi; (5/12)\pi; (7/12)\pi; (11/12)\pi$ — корни $2\cos 4x - 1$. Значит $f_{12}(x) = 2\cos 4x - 1$. Докажем, что этот КМ неразложим. Допустим противное. Тогда $2\cos 4x - 1 = (2\cos 2x + a\cos x + b)(2\cos 2x\cos x + b)$, где a и b — целые числа.

При $x = 0$ имеем $2\cos 4x - 1 = 1$. Значит, оба множителя равны 1 или оба равны -1. Получаем, что $2 + a + b = 2 - a + b$, откуда $a = 0$. Но мы уже знаем, что $2\cos 2x - 1$ неразложим и значит делителя $2\cos 2x + b$ с целым b у $2\cos 4x - 1$ нет.

12. $l = 13$. Правильные несократимые дроби — $1/13$; $3/13$; $5/13$; $7/13$; $9/13$; $11/13$ и $2/13$; $4/13$; $6/13$; $8/13$; $10/13$; $12/13$. Имеем

$$\begin{aligned} f_{13}(x) \quad = \quad & (2\cos 6x - 2\cos 5x + 2\cos 4x - 2\cos 3x + 2\cos 2x - 2\cos x + 1)\times \\ & \times(2\cos 6x + 2\cos 5x + 2\cos 4x + 2\cos 3x + 2\cos 2x + 2\cos x + 1). \end{aligned}$$

Попробуем доказать, что множители неразложимы. Так как они переходят друг в друга при замене x на $x + \pi$, достаточно доказать неразложимость одного множителя.

В доказательстве удобно использовать следующий известный специалистам факт:

При любом целом n ТМ $2\cos nx$ — многочлен степени n от $2\cos x$ с целыми коэффициентами и коэффициентом 1 при старшем члене. (Этот факт легко доказывается с помощью формулы $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos x\cos nx$, откуда $2\cos(n+1)x = (2\cos x)(2\cos nx) - (2\cos(n-1)x)$.)

Итак, $2\cos 6x - 2\cos 5x + 2\cos 4x - 2\cos 3x + 2\cos 2x - 2\cos x + 1 = g(2\cos x)$, где $g(t)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Значит, если он раскладывается на 2 множителя — многочлена ненулевой степени от $\cos x$ с рациональными коэффициентами, то раскладывается и на два многочлена тех же степеней от $2\cos x$ с целыми коэффициентами. Мы уже знаем, что наш КМ может раскладываться только на 3 многочлена второй или на 2 многочлена третьей степени. Кроме того, мы знаем, что $2\cos x$ — целое число при $x = 0; \pi; \pi/2; \pi/3; 2\pi/3$. Подстановкой находим, что $g(2) = 1; g(-2) = 13; g(1) = 1; g(-1) = 1; g(0) = -1$. Мы видим, что $g(t)$ принимает значение ± 1 в четырех точках: $t = 2; 1; -1; 0$. Значит, если у $g(t)$ есть делитель степени не выше 3 с целыми коэффициентами, то и он в этих точках принимает значения ± 1. А если $g(t)$ раскладывается на два или больше множителей степеней не выше 3, то, так как $g(-2) = 13$, то по крайней мере один из множителей равен ± 1 и при $t = -2$. Докажем, что такого многочлена $h(x)$ с целыми коэффициентами, который имеет старший коэффициент 1 и степень не больше 3 и равен ± 1 при $x = 2; 1; -1; 0; -2$, не существует. Допустим противное: пусть $h(x)$ равен ± 1 во всех этих точках. Тогда $h(x)$ равен одному и тому же числу по крайней мере в трех из этих точек. Значит $h(x) - 1$ или $h(x) + 1$ равен $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, а сам $h(x)$ — $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \pm 1$. Тогда в оставшихся двух точках из $2; 1; -1; 0; -2$ имеем $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \pm 2$, то есть среди чисел $x - x_1; x - x_2; x - x_3$ одно четное (± 2) и два нечетных (± 1). Значит, среди чисел $x_1; x_2; x_3$ два четных и одно нечетное. В первом случае оставшиеся два числа должны быть нечетными, что противоречит тому, что нечетных только два. А во втором — четными. Значит среди $x_1; x_2; x_3$ обязательно находятся -1 и 1. Но тогда для того из чисел -2 и 2, которое отлично от x_3, $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ содержит множитель ± 3 и два целочисленных множителя, отличных от 0, и не может дать ± 1 при добавлении ± 1.

Итак, мы доказали, что $2\cos 6x - 2\cos 5x + 2\cos 4x - 2\cos 3x + 2\cos 2x - 2\cos x + 1$, а значит и $2\cos 6x + 2\cos 5x + 2\cos 4x + 2\cos 3x + 2\cos 2x + 2\cos x + 1$, неразложимы.

13. $l = 14$. Несократимые правильные дроби — $1/14$; $3/14$; $5/14$; $9/14$; $11/14$; $13/14$.

Как при $l = 10$, получаем, что $f_{14}(x) = 2\cos 6x - 2\cos 4x + 2\cos 2x - 1$. И для доказательства его неразложимости достаточно доказать, что его нельзя представить в виде произведения $(2\cos 3x + 2a\cos 2x + 2b\cos x + c)(2\cos 3x - 2a\cos 2x + 2b\cos x - c)$ с целыми $a; b; c$.

Но так как при $x = \pi/2$ имеем $f_{14}(x) = -7$, получаем, что $(-2a+c)(2a-c) = -7$; $(2a-c)^2 = 7$. А это невозможно при целых a и b.

На самом деле мы сейчас доказали следующее

Утверждение 6.5. *Если $l = 2(2n+1)$, где $2n+1$ не является квадратом целого числа, и если*

$$f_{2n+1}(x) = (2\cos nx - 2\cos(n-1)x + \cdots + 2(-1)^{n-1}\cos x + (-1)^n) \times \\ \times (2\cos nx + 2\cos(n-1)x + \cdots + 2\cos x + 1),$$

причем множители неразложимы, то

$$f_{2(2n+1)}(x) = 2\cos 2nx - 2\cos 2(n-1)x + \cdots + 2(-1)^{n-1}\cos 2x + (-1)^n,$$

причем этот КМ неразложим.

14. $l = 15$. Несократимые правильные дроби — $1/15$; $7/15$; $11/15$; $13/15$ и $2/15$; $4/15$; $8/15$; $14/15$.

При $l = 3$ неразложимые КМ — это $2\cos x - 1$ и $2\cos x + 1$. КМ $2\cos 5x - 1$ и $2\cos 5x + 1$ имеют корнями соответственно $((2k+1)/15)\pi$, где $2k+1$ не кратно 3, то есть $(1/15)\pi$; $(5/15)\pi$; $(7/15)\pi$; $(11/15)\pi$; $(13/15)\pi$, и $(2/15)\pi$; $(4/15)\pi$; $(8/15)\pi$; $(10/15)\pi$; $(14/15)\pi$. Корни $(5/15)\pi$ и $(10/15)\pi$ нам не нужны. Чтобы избавиться от них, разделим $2\cos 5x - 1$ на $2\cos x - 1$, а $2\cos 5x + 1$ на $2\cos x + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
2\cos 5x - 1 & 2\cos x - 1 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{2\cos 5x + 2\cos 3x - 2\cos 4x} & 2\cos 4x + 2\cos 3x - 2\cos x - 1 \\
2\cos 4x - 2\cos 3x - 1 & \\
-\ \underline{2\cos 4x + 2\cos 2x - 2\cos 3x} & \\
-2\cos 2x - 1 & \\
-\ \underline{-2\cos 2x - 2 + 2\cos x} & \\
-2\cos x + 1 & \\
-\ \underline{-2\cos x + 1} & \\
0 &
\end{array}$$

Аналогично, $2\cos 5x + 1$ при делении на $2\cos x + 1$ дает частное $2\cos 4x - 2\cos 3x + 2\cos x - 1$. Итак, $f_{15}(x) = (2\cos 4x + 2\cos 3x - 2\cos x - 1)(2\cos 4x - 2\cos 3x + 2\cos x - 1)$.

Теперь замечаем, что $2\cos 4x + 2\cos 3x - 2\cos x - 1$, будучи частным от деления $2\cos 5x1$ на $2\cos x - 1$, равен 1 при $x = 0; \pi; \pi/2; (2/3)\pi$, а при $x = \pi/3$ равен $2\cos(4\pi/3) + {}+ 2\cos(3\pi/3) - 2\cos(\pi/3) - 1 = -7$. Поэтому дальнейшее доказательство того, что $2\cos 4x + 2\cos 3x - 2\cos x - 1$, а значит и $2\cos 4x - 2\cos 3x + 2\cos x - 1$, неразложимы, — такое же, как для множителей $f_{13}(x)$.

15. $l = 16$. Несократимые правильные дроби — $(2k+1)/16$, $k = 0; 1; \ldots; 7$.

$f_{16}(x) = \cos 8x$.

Мы знаем, что $\cos 2nx$ неразложим, если $\cos nx$ неразложим. Значит, так как $\cos x$ неразложим, то $\cos 2^n x$ всегда неразложим.

16. $l = 17$.

$$\begin{aligned} f_{17}(x) \quad = \quad & 2\cos 8x - 2\cos 7x + 2\cos 6x - 2\cos 5x + 2\cos 4x - 2\cos 3x + 2\cos 2x - 2\cos x + 1)\times \\ & \times(2\cos 8x + 2\cos 7x + 2\cos 6x + 2\cos 5x + 2\cos 4x + 2\cos 3x + 2\cos 2x + 2\cos x + 1). \end{aligned}$$

Заметим, что множители имеют восьмую степень. Допустим, что они разложимы. Тогда их неразложимые делители имеют вторую или четвертую степень. В любом случае оба множителя должны раскладываться на два множителя четвертой степени. А так как оба множителя имеют вид $f(2\cos x)$, где f — многочлен с целыми коэффициентами, то эти $f(x)$ тоже раскладываются на 2 множителя четвертой степени с целыми коэффициентами.

Как в случае $l = 13$, получаем, что среди этих множителей обязательно есть такой $h(x)$, который равен ± 1 во всех точках $-2; -1; 0; 1; 2$ и при этом имеет четвертую степень. Покажем, что на самом деле такого $h(x)$ не существует. Для этого заметим, что $h(x)$ обязан совпадать со следующим многочленом:

$$\begin{aligned} h(-2)\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{(-1(-2)(-3)(-4)} + h(-1)\frac{(x+2)x(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)(-3))} + \\ + h(0)\frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(2)(1)(-1)(-2))} + h(1)\frac{(x+2)(x+1)x(x-2)}{(3)(2)(1)(-1))} + \\ + h(2)\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{(4)(3)(2)(1))}, \end{aligned}$$

так как этот многочлен имеет степень не выше 4 и совпадает с $h(x)$ в 5 точках: -2; -1; 0; 1; 2.

Но коэффициент при x^4 этого многочлена равен

$$(h(-2) + h(2))/24 - (h(-1) + h(1))/6 + h(0)/4.$$

Значит, $h(-2) + h(2) - 4(h(-1) + h(1)) + 6h(0) \geq 24$. Но если $h(\pm 2), h(\pm 1)$ и $h(0)$ равны ± 1, то $h(-2) + h(2) - 4(h(-1) + h(1)) + 6h(0)$ не превосходит $1 = 1 + 4(1 + 1) + 6 = 16 < 24$.

Поскольку частное от деления $\cos nx + \cos(n+1)x$ на $\cos x + 1$ всегда равно 1 при $x = 0$, ± 1 при $\pi/3; \pi/2; (2/3)\pi$ и равно $2n+1$ при $x = \pi$, то на самом деле мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 6.6. *Если $2n + 1$ простое число, то*

$$2\cos nx - 2\cos(n-1)x + \cdots + 2(-1)^{n-1}\cos x + (-1)^n$$

не может раскладываться на два или более множителей со степенями, не превосходящими 4.

17. $l = 18$. Правильные несократимые дроби — 1/18; 5/18; 7/18; 11/18; 13/18; 17/18.

Все числа $(1/18)\pi; (5/18)\pi; (7/18)\pi; (11/18)\pi; (13/18)\pi; (17/18)\pi$ — корни $2\cos 6x - 1$. Значит, $f_{18}(x) = 2\cos 6x - 1$. И чтобы доказать, что $f_{18}(x)$ неразложим, достаточно доказать, что не существует таких целых a, b, c, что

$$2\cos 6x - 1 = (2\cos 3x + 2a\cos 2x + 2b\cos x + c)(2\cos 3x - 2a\cos 2x + 2b\cos x - c).$$

Как раньше в аналогичных ситуациях, попробуем подставить $x = \pi/2$. Получим $-3 = -(-2a + c)(-2a + c); 3 = (2a - c)^2$, что противоречит тому, что 3 не является квадратом целого числа. Заметим, что мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 6.7. *Если n нечетно и $2\cos nx - 1$ неразложим, то и $2\cos 2nx - 1$ неразложим.*

18. $l = 19$.

$f_{19}(x)$, как мы знаем, раскладывается на два множителя девятой степени, $2\cos 9x - 2\cos 8x + \cdots + 1$ и $2\cos 9x - 2\cos 8x + \cdots + 1$. Если бы эти КМ, в свою очередь, раскладывались на множители с рациональными коэффициентами, то это были бы множители третьей степени вида $2\cos 3x + 2a\cos 2x + 2b\cos x + c$ с целыми a, b, c. А это, как мы доказали в пункте 16, исключено.

19. $l = 20$. Правильные несократимые дроби — 1/20; 3/20; 7/20; 9/20; 11/20; 13/20; 17/20; 19/20.

Для $n = 10$ ТМ $f_n(x)$ неразложим и равен $2\cos 4x - 2\cos 2x + 1$. Значит, $2\cos 8x - 2\cos 4x + 1$ имеет корнями все числа $(1/20)\pi$; $(3/20)\pi$; $(7/20)\pi$; $(9/20)\pi$; $(11/20)\pi$; $(13/20)\pi$; $(17/20)\pi$; $(19/20)\pi$. Остается доказать, что $2\cos 8x - 2\cos 4x + 1$ нельзя разложить на два множителя четвертой степени с целыми коэффициентами. Но $2\cos 8x - 2\cos 4x + 1$ принимает значение 1 во всех 5 точках $0; \pi; \pi/3; \pi/2; (2/3)\pi$. А мы в пункте 16 доказали, что КМ четвертой степени с целыми коэффициентами, равных ± 1 во всех этих точках, не существует.

20. $l = 21$. Правильные несократимые дроби — 1/21; 5/21; 11/21; 13/21; 17/21; 19/21 и 2/21; 4/21; 8/21; 10/21; 16/21; 20/21. Для тех из этих дробей k/l, у которых числители нечетны, $(k/l)\pi$ — корни $2\cos 7x - 1$, для тех, у которых числители четны — корни $2\cos 7x + 1$.

Но $2\cos 7x - 1$ и $2\cos 7x + 1$ разложимы, так как делятся на $2\cos x - 1$ и $2\cos x + 1$ соответственно. Выполним деление уголком.

$$
\begin{array}{l|l}
-\; 2\cos 7x - 1 & 2\cos x - 1 \\ \cline{2-2}
\quad \underline{2\cos 7x + 2\cos 5x - 2\cos 6x} & 2\cos 6x + 2\cos 5x - 2\cos 3x - 2\cos 2x + 1 \\
\quad\; -\; 2\cos 6x - 2\cos 5x - 1 & \\
\qquad\; \underline{2\cos 6x + 2\cos 4x - 2\cos 5x} & \\
\qquad\quad -\; -2\cos 4x - 1 & \\
\qquad\qquad \underline{-2\cos 4x - 2\cos 2x + 2\cos 3x} & \\
\qquad\qquad\quad -\; -2\cos 3x + 2\cos 2x - 1 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-2\cos 3x - 2\cos x + 2\cos 2x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\; 2\cos x - 1 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{2\cos x - 1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Результат деления $2\cos 7x + 1$ на $2\cos x + 1$ получается заменой в найденном частном x на $x + \pi$:

$$2\cos 6x 2 - \cos 5x + 2\cos 3x - 2\cos 2x + 1.$$

Итак,

$$f_{21}(x) = (2\cos 6x + 2\cos 5x - 2\cos 3x - 2\cos 2x + 1)(2\cos 6x 2\cos 5x + 2\cos 3x - 2\cos 2x + 1).$$

Заметим, что $2\cos 6x + 2\cos 5x - 2\cos 3x - 2\cos 2x + 1$ равно 1 при $x = 0; \pi; \pi/2$ и -1 при $x = (2/3)\pi$.

При $x = \pi/3$ значение этого КМ равно 7. Значит этот КМ, а следовательно и

$$2\cos 6x - 2\cos 5x + 2\cos 3x - 2\cos 2x + 1,$$

не могут раскладываться на два или больше КМ с целыми коэффициентами степеней, не превосходящих 4. Значит, эти КМ неразложимы.

21. $l = 22 = 2 \cdot 11$. Так как мы доказали, что $2\cos 5x + 2\cos 4x + \cdots + 1$ и $2\cos 5x - 2\cos 4x + \cdots + 2\cos x - 1$ неразложимы, то из доказанного в пункте 13 Утверждения 6.5. следует, что $f_{22}(x)$ неразложим и равен $2\cos 10x - 2\cos 8x + \cdots + 2\cos 2x - 1$.

22. $l = 23$.

Имеем,

$$f_{23}(x) = (2\cos 11x - 2\cos 10x + \dots + 2\cos x - 1)(2\cos 11x + 2\cos 10x + \dots + 2\cos x + 1).$$

Так как 11 простое число, то оба множителя неразложимы.

23. $l = 24$. Несократимые правильные дроби — $1/24$; $5/24$; $7/24$; $11/24$; $13/24$; $17/24$; $19/24$; $23/24$.

$f_{24}(x) = 2\cos 8x - 1$. Чтобы доказать, что $2\cos 8x - 1$ неразложим, достаточно доказать (так как $2\cos 4x - 1$ неразложим), что не существует таких целых a, b, c, d, что

$$2\cos 8x - 1 = (2\cos 4x + 2a\cos 3x + 2b\cos 2x + 2c\cos x + d) \times \\ \times (2\cos 4x - 2a\cos 3x + 2b\cos 2x - 2c\cos x + d).$$

Воспользуемся тем, что при $x = \pi/3$ ТМ $2\cos 8x - 1 = -1 - 1 = -2$ — делится на 2, но не делится на 4. Но множители, на которые мы разложили $2\cos 8x - 1$, состоят при $x = \pi/3$ из целочисленных слагаемых, причем соответствующие слагаемые второй суммы, если и отличаются от слагаемых первой, то только знаками. Значит их произведение либо нечетно, либо кратно 4 и не может быть равно -2.

Заметим еще, что $2\cos 2nx - 1$ при любом n, не кратном 3, равно -2. Значит, мы доказали

Утверждение 6.8. *При любом n, не кратном 3, если $2\cos nx - 1$ неразложим, то и $2\cos 2nx - 1$ неразложим. В частности, так как $2\cos x - 1$ неразложим, то $2\cos 2^n x - 1$ всегда неразложим.*

24. $l = 25$. Правильные несократимые дроби — $1/25$; $3/25$; $7/25$; $9/25$; $11/25$; $13/25$; $17/25$; $19/25$; $21/25$; $23/25$ и $2/25$; $4/35$; $6/25$; $8/25$; $12/25$; $14/25$; $16/25$; $18/25$; $22/25$; $24/25$.

Так как все $(k/5)\pi$ такие, что $(k/5)$ — несократимые дроби с нечетными k, — корни $2\cos 2x - 2\cos x + 1$, а с четными k — корни $2\cos 2x + 2\cos x - 1$, то $f_{25}(x) = (2\cos 10x - 2\cos 5x + 1)(2\cos 10x + 2\cos 5x - 1)$. Докажем, что множители неразложимы. Для этого найдем значения $2\cos 10x - 2\cos 5x + 1$ в точках $0; \pi; \pi/3; \pi/2; (2/3)\pi$. Получаем соответственно $1; 5; -1; -1; 1$. Значит, если $2\cos 10x - 2\cos 5x + 1$ разложим (а тогда можно считать, что коэффициенты множителей целые числа), то по крайней мере один из его множителей равен во всех этих точках ± 1. Мы уже доказали, что таких КМ ненулевой степени не выше 4 с целыми коэффициентами нет.

Если же оба множителя имеют степень 5, то тот из них, который во всех 5 точках равен ± 1, при делении на $(2\cos x - 1)(2\cos x + 1)2\cos x(2\cos x - 2)(2\cos x + 2)$ дает в остатке константу, 1 или -1.(так как делимое и делитель являются многочленами от $2\cos x$ с целыми коэффициентами и старший коэффициент делителя как многочлена от $2\cos x$ равен 1, то частное и остаток тоже имеют целые коэффициенты. Значит, так как наш множитель имеет степень 5 и старший коэффициент 2, он обязан совпадать с

$$(2\cos x - 1)(2\cos x + 1)2\cos x(2\cos x - 2)(2\cos x + 2) \pm 1 = 2\cos 5x - 2\cos x \pm 1.$$

Докажем, что на самом деле $2\cos 10x - 2\cos 5x + 1$ не делится на $2\cos 5x - 2\cos x \pm 1$. Это можно сделать непосредственно делением уголком, но мы используем косвенные соображения.

Мы знаем, что $2\cos 10x - 2\cos 5x + 1$ раскладывается на множители вида $2\cos x - a$, где $-2 < a < 2$, с попарно различными a. Значит, его делитель тоже должен обладать этим свойством. Но $2\cos 5x - 2\cos x \pm 1 = g(2\cos x) \pm 1$, где g — многочлен пятой (и значит нечетной) степени со старшим коэффициентом 1, обращающийся в 0 в точках 2 и -2. Значит, в промежутке $]2; +\infty[$ g принимает все положительные значения от 0 до $+\infty$, а в промежутке $]-\infty; -2[$ — все отрицательные. Значит, у $g(x) + 1$ всегда есть корень в $]-\infty; -2[$, а у $g(x) - 1$ — в $]2; +\infty[$.То есть у $g(x)\pm 1$ всегда есть корень вне $[-2;2]$, и поэтому $g(2\cos x)\pm 1$ не может быть делителем $2\cos 10x - 2\cos 5x + 1$.

Теперь сформулируем и докажем более общее утверждение, которое нам пригодится дальше.

Утверждение 6.9. *Пусть некоторый КМ не имеет делителей $2\cos x - 2a$ таких, что $|a|>1$, и пусть этот КМ можно представить в виде $g(2\cos x)$, где $g(x)$ — многочлен со старшим коэффициентом 1 и целыми остальными коэффициентами, обращающийся в ±1 во всех, кроме точках $-1;0;1$, и в одной из точек -2 и 2 равный тоже ±1, а в другой ±1 или $\pm p$, где p — простое число. Тогда этот КМ не может раскладываться на два или больше множителей — КМ нечетных степеней с целыми коэффициентами.*

Доказательство. Имеем, если $g(2\cos x)$ раскладывается на КМ нечетных степеней с целыми коэффициентами, то и сам $g(x)$ раскладывается на множители тех же степеней с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Рассмотрим тот из множителей (обозначим его $h(x)$), который обращается в ±1 во всех 5 точках. Мы знаем, что его степень выше 4. Но если мы разделим $h(x)$ с остатком на $(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$, то остаток будет иметь степень не выше 4 и целые коэффициенты и тоже будет обращаться в ±1 во всех 5 точках. Значит, остаток тождественно равен ±1, а сам $h(x)$ равен $(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(ax^2+bx+c)\pm1$, где a,b,c — целые числа. Но тогда $h(x)$ имеет нечетную степень и принимает одно и то же значение на концах отрезка $[-2;2]$. Значит, у $h(x)$ есть хоть один корень вне этого отрезка. Тогда и $g(x)$ имеет корень вне $[-2;2]$, что противоречит условию.

25. $l=26$.

$$f_{26}(x) = 2\cos 12x - 2\cos 10x + 2\cos 8x - 2\cos 6x + 2\cos 4x - 2\cos 2x + 1.$$

Так как 13 не является квадратом целого числа, то из Утверждения 6.5, доказанного в пункте 13, следует, что $f_{26}(x)$ неразложим.

26. $l=27$. Несократимые правильные дроби — 1/27; 5/27; 7/27; 11/27; 13/27; 17/27; 19/27; 23/27; 25/27 и 2/27; 4/27; 8/27; 10/27; 14/27; 16/27; 20/27; 22/27; 26/27.

При умножении первых 9 дробей на 9 получаются несократимые дроби со знаменателем 3 и нечетными числителями, а последних 9 — с четными. Значит, при умножении первых 9 дробей на π получаются корни КМ $2\cos 9x - 1$, а последних 9 — корни $2\cos 9x + 1$. Значит,

$$f_{27}(x) = (2\cos 9x - 1)(2\cos 9x + 1).$$

Докажем, что $2\cos 9x - 1$ неразложим (тогда и $2\cos 9x + 1$ неразложим). Замечаем, что в точках $0;\pi;\pi/3;\pi/2;(2/3)\pi$ значения $2\cos 9x - 1$ соответственно равны $1;-3;-3;-1;3$. Значит, если $2\cos 9x - 1$ разложим, то у него есть делитель третьей степени вида $g(2\cos x)$, где g — многочлен третьей степени со старшим коэффициентом 1 и с целыми коэффициентами, равный ±1 в точках $-2;0;2$. Имеем: g принимает одно и то же значение по крайней мере в двух из точек $-2;0;2$. Значит, $g(x)=x(x-2)(x-a)\pm1$, или $g(x)=(x+2)(x-2)(x-a)\pm1$, или $g(x)=(x+2)x(x-a)\pm1$, где a — целое число. Рассмотрим эти три случая.

Первый случай: $g(x)=x(x-2)(x-a)\pm1$. Тогда, так как $g(-1)=3(-1-a)\pm1$, то $g(-1)$ принимает значение ±1 или ±3 только при $-1-a=0$; $a=-1$. То есть $g(x) = x(x-2)(x+1)\pm1$. Но тогда $g(-2)=-8\pm1$ — противоречие.

Второй случай: $g(x)=(x+2)(x-2)(x-a)\pm1$. Так как $g(0)=-4(-a)\pm1$, то $a=0$. Но тогда $g(-1)=3\pm1$ четно.

Третий случай: $g(x)=(x+2)x(x-a)\pm1$ — симметричен первому.

27. $l=28$.

$$f_{28}(x) = f_{14}(2x) = f_7(4x) = 2\cos 12x - 2\cos 8x + 2\cos 4x - 1.$$

Чтобы доказать неразложимость этого КМ, достаточно доказать, что его нельзя разложить на 2 множителя так:

$$(2\cos 6x + 2a\cos 5x + 2b\cos 4x + 2c\cos 3x + 2d\cos 2x + 2e\cos x + f) \times \\ \times (2\cos 6x - 2a\cos 5x + 2b\cos 4x - 2c\cos 3x + 2d\cos 2x - 2e\cos x + f),$$

где a, b, c, d, e, f — целые числа.

Замечаем, что $2\cos 12x - 2\cos 8x + 2\cos 4x - 1$ равно 1 в точках $0; \pi; \pi/3; \pi/2; (2/3)\pi$. Значит, и оба множителя при делении на $2\cos 5x - 2\cos x$ дают в остатке 1 или -1. А так как они имеют шестую степень, то они имеют вид

$$g_1(x) = (2\cos x - a)(2\cos 5x - 2\cos x) \pm 1 u g_2(x) = g_1(x+\pi) = (2\cos x + a)(2\cos 5x - 2\cos x) \pm 1.$$

Значит,

$$g_1(x)g_2(x) = 2\cos 6x + 2\cos 4x - 2\cos 2x - 2 \pm 1 - a^2(2\cos 5x - 2\cos x)^2,$$

и коэффициент при $\cos 10x$ равен $4 - 2a^2$. А так как он должен быть равен 0, то $4 - 2a^2 = 0$; $a^2 = 2$ — при целом a невозможно. Значит, $2\cos 12x - 2\cos 8x + 2\cos 4x - 1$ неразложим.

28. $l = 29$.

$$f_{29}(x) = (2\cos 14x - 2\cos 13x + \cdots + 2\cos 2x 2\cos x + 1) \times \\ \times (2\cos 14x + 2\cos 13x + \cdots + 2\cos 2x + 2\cos x + 1).$$

Докажем неразложимость множителей. Заметим, что их степень 14. Значит, они могут раскладываться только на 7 множителей второй степени или два седьмой. Но в пункте 16 мы доказали, что такие КМ не имеют делителей с рациональными коэффициентами степеней, не превосходящих 4, а в пункте 24 (Утверждение 6.9) — что они не могут иметь делителей нечетных степеней.

29. $l = 30$. Правильные несократимые дроби — $1/30$; $7/30$; $11/30$; $13/30$; $17/30$; $19/30$; $23/30$; $29/30$.

Так как

$$f_{15}(x) = (2\cos 4x + 2\cos 3x - 2\cos x - 1)(2\cos 4x - 2\cos 3x + 2\cos x - 1),$$

причем $(1/15)\pi; (7/15)\pi; (11/15)\pi; (13/15)\pi$ — корни первого множителя, то есть частного от деления $2\cos 15x - 1$ на $2\cos x - 1$, то $f_{30}(x) = 2\cos 8x + 2\cos 6x - 2\cos 2x - 1$. Остается доказать неразложимость этого КМ на $(2\cos 4x + 2a\cos 3x + 2b\cos 2x + 2c\cos x + d)$ и $(2\cos 4x - 2a\cos 3x + 2b\cos 2x - 2c\cos x + d)$ с целыми a, b, c, d. Но $2\cos 8x + 2\cos 6x - 2\cos 2x - 1$ принимает значение 1 в точках $0; \pi/2$ и π, а в точках $\pi/3$ и $2\pi/3$ он принимает значение 5. Мы знаем, что КМ степени 4 с целыми коэффициентами, принимающих значения ± 1 во всех этих пяти точках, не существует. Значит остается только вариант, что тот из двух множителей $2\cos 8x + 2\cos 6x - 2\cos 2x - 1$, который равен ± 1 в точке $\pi/3$, в точке $2\pi/3$ равен ± 5. Тогда для этого множителя четвертой степени с целыми коэффициентами $g(x)$ имеем $g(\pi/3) + g(2\pi/3)$ равно ± 6 или ± 4.

Из выкладок пункта 13 получаем, что если такой КМ $g(x)$ существует, то для соответствующего ему многочлена $h(x)$ такого, что $h(2\cos x) = g(x)$, старший коэффициент равен $(h(-2) + h(2) - 4(h(-1) + h(1)) + 6h(0))/24$.

Тогда $h(-2)+h(2)-4(h(-1)+h(1))+6h(0)$ должно быть кратно 24. При $h(-1)+h(1)=\pm 6$ для этого необходимо, чтобы $h(-2)+h(2)+6h(0)$ было кратно 24. Но $h(-2)+h(2)$ кратно 6 только если оно равно 0. А тогда $h(-2)+h(2)+6h(0)$ не делится на 4, так как $h(0)$ нечетно.

В случае же $h(-1)+h(1)=\pm 4$ число $h(-2)+h(2)+6h(0)$ должно давать остаток 8 или 16 при делении на 24. Значит, опять $h(-2)+h(2)$ не 0, а ± 2. Остаются только варианты $h(-2)=h(2)=h(0)=1$; $h(-1)=-5$; $h(1)=1$ и $h(-2)=h(2)=h(0)=-1$; $h(-1)=5$; $h(1)=-1$. Значит, $h(x)$ — это либо $(x-2)(x+2)x(x-1)+1$, либо $-((x-2)(x+2)x(x-1)+1)$. Получаем, с точностью до множителя -1:

$$h(2\cos x)=(2\cos x-2)(2\cos x+2)2\cos x(2\cos x-1)+1=(4\cos^2 x-4)(4\cos^2 x-2\cos x)+1=$$

$$(2\cos 2x-2)(2\cos 2x+2-2\cos x)+1=4\cos^2 2x-4\cos 2x+4\cos 2x-4-4\cos 2x\cos x+4\cos x+1=$$

$$2\cos 4x+2-4-2\cos 3x-2\cos x+4\cos x+1=2\cos 4x-2\cos 3x+2\cos x-3.$$

Осталось проверить делением в столбик, что $2\cos 8x+2\cos 6x-2\cos 2x-1$ не делится на $2\cos 4x-2\cos 3x+2\cos x-3$, предлагаем эту проверку читателю.

Значит, таких g и h не существует и $f_{30}(x)=2\cos 8x+2\cos 6x-2\cos 2x-1$ неразложим.

Мы приходим к такому выводу:

Пусть дано некоторое уравнение $f(x)=0$, где $f(x)$ — КМ с рациональными коэффициентами. Тогда при $2\le n\le 30$, если k_1/n и k_2/n несократимые дроби и n нечетно, то при k_1 и k_2 одинаковой четности k_1/n и k_2/n могут быть корнями уравнения только одновременно. Если же n четно, то для любых k_1 и k_2, взаимно простых с n, k_1/n и k_2/n могут быть корнями уравнения только одновременно.

Верно ли это свойство при всех n, а не только при $n\le 30$, мы не знаем.

А теперь вернемся к ТМ $f(\cos x;\sin x)$, но займемся только однородными, так как их деление и разложение на множители обладают такими же хорошими свойствами, как деление и разложение на множители КМ. (Напомним, что произвольный ТМ $(\cos x;\sin x)$ превращается в однородный заменой x на $2y$.) Оказывается, что вопросы, связанные с корнями вида $(k/l)\pi$ однородного ТМ, удобно сводить к аналогичным вопросам для КМ, используя равенство $\sin x=\cos((\pi/2)-x)$, что для $x=(k/l)\pi$ превращается в $\sin(k/l)\pi=\cos((l-2k)/2l)\pi$, а для $x=(k/2l)\pi$в $\sin(k/2l)\pi=\cos((l-k)/2l)\pi$.

Определим минимальный однородный ТМ с корнем $(k/l)\pi$ аналогично минимальному КМ. Минимальный однородный ТМ для $(k/l)\pi$ всегда является делителем однородного ТМ $\sin lx$, а если l четно, а k нечетно, то и $\cos(l/2)x$.

Докажем следующее полезное утверждение.

Утверждение 6.10. *Пусть $l=2n+1$, $n>0$ и пусть для этого l известно, что минимальный КМ для $\pi/(2l)$ однороден или, что равносильно, имеет вид $g(2x)$, где g — КМ с рациональными коэффициентами, то есть СФ данного КМ содержит только одночлены $a_i\cos ix$ с четными i. Тогда если некоторый ТМ $a_m\cos mx+b_m\sin mx+\cdots+a$ с рациональными коэффициентами и с m, не превосходящим степени $g(x)$, имеет корнем π/l, то все b_i равны 0.*

Доказательство. Пусть π/l — корень $a_m\cos mx+b_m\sin mx+\cdots+a$. Тогда

$$\begin{aligned}&a_m\cos m(\pi/l)+b_m\sin m(\pi/l)+\cdots+a=\\&\qquad=(a_m\cos 2m(\pi/2l)+\cdots+a)+(b_m\cos((l-2m)/2l)\pi+\cdots+b_1\cos((l-2)/2l)\pi).\end{aligned}$$

Получился КМ $(a_m\cos 2mx+\cdots+a)+(b_m\cos(l-2m)x+\cdots+b_1\cos(l-2)x)$ степени $\max(2m;l-2m)\le 2n$ с рациональными коэффициентами и с корнем π/l. А так как этот КМ имеет степень, не превосходящую степени $2n$ минимального КМ для $\pi/(2l)$, то он делится на минимальный КМ, а значит, получается из него умножением на константу. Значит все b_i, как коэффициенты при $\cos kx$ с нечетными k, равны 0.

Заметим, что если $f(x)$ — однородный ТМ и k натуральное число, то $f(kx)$ тоже однородный, поэтому для однородных ТМ точно так же, как для КМ, доказывается: для всех несократимых дробей k/l с одним и тем же знаменателем l минимальные однородные ТМ для $(k/l)\pi$ имеют одну и ту же степень.

Получаем такие следствия нашего Утверждения 6.10:

Следствие 1. *Если $f(2x)$ — минимальный КМ для $\pi/(2l)$, где l нечетно, то $f(2x)$ неразложим и как однородный ТМ, и значит, и как однородный является минимальным для $\pi/(2l)$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда, так как все однородные делители $f(2x)$ с рациональными коэффициентами имеют одну и ту же степень, то $\pi/(2l)$ — корень однородного ТМ с рациональными коэффициентами степени, не превосходящей степени $f(x)$. Причем если степень этого ТМ четна, то, благодаря своей однородности, он имеет вид $g(2x)$, где $g(x)$ — ТМ и π/l — корень $g(x)$. Тогда из Утверждения 6.10. следует, что на самом деле $g(2x)$ — КМ и $f(2x)$ разложим как КМ. Если же степень этого ТМ нечетна, то у $f(2x)$ есть еще неразложимый однородный множитель с рациональными коэффициентами той же степени, и перемножив эти два множителя, получим нужный $g(2x)$.

Следствие 2. *Если $f(2x)$ — минимальный КМ для $\pi/(2l)$, где l нечетно, и π/l — корень $f(2x+\pi) = f(2(x+(1/2)\pi))$, то $f(2x+\pi)$ — минимальный однородный ТМ для π/l.*

(Корнем $f(2x+\pi)$ всегда является $\pi n/l$, так как $(\pi n/l) + (\pi/2) = \pi/(2l)$. Но в случае, если минимальные КМ для π/l и $\pi n/l$ совпадают, π/l тоже является корнем $f(2x+\pi)$.)

Доказательство. Согласно следствию 1, $f(2x)$ неразложим как однородный ТМ. Значит и $f(2x+\pi)$ неразложим как однородный ТМ. А так как π/l —его корень, то $f(2x+\pi)$ — минимальный однородный ТМ для π/l.

Теперь перейдем к конкретным примерам. Рассмотрим l от 2 до 12.

1. $l = 2$. Единственная правильная несократимая дробь со знаменателем 2 — это 1/2.

Минимальный однородный ТМ для $\pi/2$ — это $\cos x$.

2. $l = 3$. Правильные несократимые дроби — 1/3 и 2/3.

Минимальный КМ для $\pi/6$ — это $2\cos 2x - 1$. А $\pi/3$ — корень $2\cos(2x+\pi) - 1$. Значит, $2\cos 2x - 1$ — минимальный однородный ТМ для $\pi/6$ и $5\pi/6$, а $2\cos 2x + 1$ для $\pi/3$ и $2\pi/3$.

3. $l = 4$. Правильные несократимые дроби — 1/4 и 3/4.

Имеем: $\pi/2$ и $3\pi/2$ — корни $\cos x$, а $\pi/4$ и $3\pi/4$ — корни $\cos 2x$. Но $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$. Соответственно, минимальный однородный ТМ для $\pi/4$ это $\cos x - \sin x$, а для $3\pi/4$ – $\cos x + \sin x$.

4. $l = 5$. Правильные несократимые дроби — 1/5; 2/5; 3/5; 4/5.

Минимальный КМ для $\pi/5$ — это $2\cos 2x - 2\cos x + 1$, а для $\pi/10$ — $2\cos 4x - 2\cos 2x + 1$. Значит и максимальный однородный для $\pi/10$ (и всех $k\pi/10$, где $k/10$ несократимая дробь) это $2\cos 4x - 2\cos 2x + 1$, а для $\pi/5$ (и $2\pi/5; 3\pi/5; 4\pi/5$) $2\cos 4x + 2\cos 2x + 1$ (так как $\pi/5$ — корень этого ТМ).

5. $l = 7$. Аналогично случаю $l = 5$, получаем, что для $(k/l)\pi$, где k/l — несократимые дроби со знаменателем 14, минимальный однородный ТМ — это $2\cos 6x - 2\cos 4x + 2\cos 2x - 1$, а со знаменателем 7 — $2\cos 6x + 2\cos 4x + 2\cos 2x + 1$.

6. $l = 8$.

$\pi/8$ и $5\pi/8$ — корни $\cos 2x - \sin 2x$, а $3\pi/8$ и $7\pi/8$ — корни $\cos 2x + \sin 2x$.

Докажем, что $\cos 2x - \sin 2x$ неразложим (как однородный ТМ). Действительно, если бы $\pi/8$ был корнем однородного ТМ первой степени с рациональными коэффициентами $a\cos x - b\sin x$, где $a^2 + b^2 \neq 0$, то $a\cos\pi/8 - b\sin\pi/8 = 0$; $a\cos\pi/8 - b\cos(\pi/2 - \pi/8) = a\cos\pi/8 - b\cos 3\pi/8 = 0$. Но $a\cos x - b\cos 3x$ — это КМ третьей степени с рациональными коэффициентами. Это противоречит тому, что минимальный КМ для $\pi/8$ — это $2\cos 4x$.

7. $l = 9$.

Для $(k/l)\pi$, где k/l — несократимые дроби со знаменателем 18, минимальный КМ это $2\cos 6x - 1$. Значит, он же является минимальным однородным ТМ для этих $(k/l)\pi$. А так как для всех несократимых дробей $k/9$ имеем $2\cos 6k\pi/9 + 1 = 2\cos 2k\pi/3 + 1 = 0$, то $2\cos 6x + 1$ — минимальный однородный ТМ для всех $(k/l)\pi$, где k/l — несократимые дроби со знаменателем 9.

8. $l = 11$. Аналогично предыдущим случаям нечетных l получаем, что

$2\cos 10x - 2\cos 8x + 2\cos 6x - 2\cos 4x + 2\cos 2x - 1$ — минимальный однородный ТМ для всех $(k/22)\pi$, где k взаимно просто с 22, а $2\cos 10x + 2\cos 8x + 2\cos 6x + 2\cos 4x + 2\cos 2x + 1$ для всех $(k/11)\pi$, где k взаимно просто с 11.

9. $l = 12$.

Все числа $(k/12)\pi$, где k взаимно просто с 12, — корни $2\cos 4x - 1$. Но $2\cos 4x - 1 = -(2\sin 2x - 1)(2\sin 2x + 1)$. Эти два множителя уже неразложимы (как однородные ТМ), так как несократимые дроби со знаменателем 12 не могут быть корнями однородного ТМ первой степени с рациональными коэффициентами. Ведь если $\operatorname{tg} x$ рационален, то и $\cos 2x$ рационален, а это возможно только при $2x = m\pi/2; x = m\pi/4$, где m — целое число. Значит, для $\pi/12$ и $5\pi/12$, то есть для $((4k+1)/12)\pi$, минимальный однородный ТМ — это $2\sin 2x - 1$. а для $11\pi/12$ и $5\pi/12$, то есть для $((4k+3)/12)\pi$, минимальный однородный ТМ — это $2\sin 2x + 1$.

10. $l = 13$.

Аналогично предыдущим случаям нечетных l получаем, что $2\cos 12x - 2\cos 10x + 2\cos 8x - 2\cos 6x - 2\cos 4x + 2\cos 2x + 1$ — минимальный однородный ТМ для всех чисел $(k/26)\pi$, где k взаимно просто с 26, а $2\cos 12x + 2\cos 10x + 2\cos 8x + 2\cos 6x + 2\cos 4x + 2\cos 2x + 1$ для всех чисел $(k/13)\pi$, где k взаимно просто с 13.

11. $l = 15$.

Аналогично предыдущим случаям нечетных l получаем, что $2\cos 8x + 2\cos 6x - 2\cos 2x - 1$ — минимальный однородный ТМ для всех чисел $(k/30)\pi$, где k взаимно просто с 30, а $2\cos 8x + 2\cos 6x + 2\cos 2x + 1$ — для всех чисел $(k/15)\pi$, где k взаимно просто с 15.

Заметим, что если $l = 4m$, то все числа $(k/l)\pi$ — корни ТМ $\cos 2mx = (\cos mx - \sin mx)(\cos mx + \sin mx)$ (при этом все $((4i+1)/l)\pi$ — корни первого множителя, а $((4i+3)/l)\pi$ — второго). Поэтому минимальный однородный ТМ для π/l является делителем $\cos mx - \sin mx$.

Утверждение 6.11. *Пусть известно, что $m = 2n + 1$ и минимальный однородный ТМ для $\pi/(2m)$ имеет вид $g(2x)$, где $g(x)$ — ТМ степени n. Тогда минимальный однородный ТМ для $\pi/(4m)$ имеет степень $2n$.*

Доказательство. Имеем: $\pi/(4m)$ — корень $g(4x)$. При этом $g(4x)$ раскладывается в произведение двух однородных ТМ так, что если первый множитель — это $h(x)$, то второй — $h(x+\pi/2)$.

$h(x)$ — это НОД $g(4x)$ и $\cos(2n+1)x-\sin(2n+1)x$ как двух однородных ТМ, а $h(x+\pi/2)$ — это НОД $g(4x)$ и $\cos(2n+1)x+\sin(2n+1)x$ как двух однородных ТМ, то есть $h(x)$ — это делитель частного от деления $\cos(2n+1)x-\sin(2n+1)x$ на $\cos x-\sin x$ при четном n и на $\cos x+\sin x$ при нечетном. Заметим, что частное от деления $\cos(4k+1)x-\sin(4k+1)x$ на $\cos x-\sin x$ — это частное от деления $\cos(4k+1)(x+(\pi/4))$ на $\cos(x+(\pi/4))$, то есть $(-1)^k(2\cos 4kx-2\sin(4k-2)x+\cdots+(-1)^k)$. Аналогично, частное от деления $\cos(4k+3)x-\sin(4k+3)x$ на $\cos x+\sin x$ равно $(-1)^k(-2\sin(4k+2)x+2\cos 4kx+\cdots+(-1)^k)$.

Докажем, что $h(x)$ и $h(x+\pi/2)$ не разложимы в произведение однородных ТМ с рациональными коэффициентами. Допустим, что у $h(x)$ есть однородный делитель с рациональными коэффициентами $h_1(x)$ степени, меньшей $2n$. Тогда $h_2(x)=h_1(x)h_1(x+(\pi/2))$ — однородный делитель $g(4x)$ такой, что $h_2(x+(\pi/2))=h_1(x+(\pi/2))h_1(x+\pi)$ совпадает с $h_2(x)$, если степень $h_1(x)$ четная, и отличается только знаком, если она нечетная.

В первом случае $h_2(x)$ состоит только из членов вида а $\cos 4ix$ и $b\sin 4ix$, то есть имеет вид $h_3(4x)$, где $h_3(x)$ — тоже однородный ТМ. Тогда $g(2x)$ делится на однородный ТМ $h_3(2x)$ степени меньшей, чем степень $g(2x)$, а это противоречит тому, что $g(2x)$ — минимальный однородный ТМ для $\pi/(2m)$.

Во втором случае $h_2(x)$ состоит только из членов вида $a\cos 2(2i+1)x$ и $b\sin 2(2i+1)x$, в том числе имеет нулевой свободный член. Тогда $h_2(x)$ имеет вид $h_3(2x)$, где $h_3(x)$ однородный ТМ нечетной степени, меньшей $2n$, а это опять противоречит тому, что $g(2x)$ минимальный однородный ТМ для $\pi/(2m)$.

15. $l=16$. Докажем

Утверждение 6.12. *При $l=2^n+2$ (n — целое неотрицательное число) минимальный однородный ТМ для π/l — это $\cos 2^nx-\sin 2^nx$.*

Доказательство. Докажем индукцией по n, что при всех n ТМ $\cos 2^nx-\sin 2^nx$ не разложим в произведение однородных ТМ меньшей степени с рациональными коэффициентами. При $n=0;1$ мы это уже доказали. Допустим теперь, что для некоторого $n\geq 1$ ТМ $\cos 2^nx-\sin 2^nx$ неразложим и докажем, что тогда и $\cos 2^{n+1}x-\sin 2^{n+1}x$ неразложим.

Заметим, что $\cos 2^{n+1}x-\sin 2^{n+1}x$ не изменяется при замене x на $x+(\pi/2)$. Значит, если он разложим, то у него либо есть однородный делитель меньшей степени с рациональными коэффициентами, обладающий тем же свойством, то есть имеющий вид $g(4x)$, где $g(x)$ — некоторый ТМ с рациональными коэффициентами, либо есть делитель степени $2(2i+1)$ для некоторого целого i, либо $\cos 2^{n+1}x-\sin 2^{n+1}x=h(x)h(x+\pi/2)$ для некоторого однородного ТМ $h(x)$ с рациональными коэффициентами.

В первом случае $\cos 2^{n+1}x-\sin 2^{n+1}x$ делится на $g(2x)$, что противоречит допущению, так как $g(2x)$ всегда однороден.

Во втором случае, так как все неразложимые делители $\cos 2^{n+1}x-\sin 2^{n+1}x$ должны иметь одну и ту же степень — делитель 2^{n+1}, а 2^{n+1} делится на $2i+1$ только при $i=0$, то возможен только случай, когда $\cos 2^{n+1}x-\sin 2^{n+1}x$ делится на $a\cos 2x-b\sin 2x$ с рациональными a и b. Но тогда $\cos 2^nx-\sin 2nx$ имело бы корнем $k\pi/4$, что при $n\geq 1$ неверно.

Остается рассмотреть третий случай. Пусть $\cos 2^{n+1}x-\sin 2^{n+1}x=h(x)h(x+\pi/2)$. Достаточно рассмотреть $n\geq 2$, так как при $n=1$ $h(x)$ имеет степень 2, то есть выполняется второй случай. Тогда старшая ступень $h(x)$ — это $a\cos 2^nx+b\sin 2^nx$, а старшая ступень $h(x+\pi/2)$ — это $a\cos(2^nx+2^{n1}\pi)+b\sin(2^nx+2^{n1}\pi)=a\cos 2^nx+b\sin 2^nx$, так как $n\geq 2$.

Значит, старшая ступень $h(x)h(x+\pi/2)$ такая же, как у $(a\cos 2^nx+b\sin 2^nx)^2=a^2(1+\cos 2^{n+1}x)/2+b^2(1+\cos 2^{n+1}x)/2+ab\sin 2^{n+1}x$. Получаем, что $a^2-b^2=2$; a $b=-1$; $a^2-b^2=-2ab$; $a^2+2ab-b^2=0$; $a=-b\pm b\sqrt{3}$, то есть при всех рациональных $b\neq 0$ число a иррационально. Значит, и третий случай невозможен.

Итак, мы доказали, что при нечетных l от 1 до 15 минимальный однородный ТМ для $(k/l)\pi$ для всех k, взаимно простых с l, один и тот же. То есть в этом случае, если дан какой-то однородный ТМ с рациональными коэффициентами и фиксировано l, то либо все $(k/l)\pi$ такие, что k взаимно просто с l, — его корни, либо ни одно из них не корень. То же самое верно, если $l = 2m$ и m нечетно и не превосходит 15. Если же l кратно 4, то один общий минимальный ТМ имеют все $(4k+1)\pi/l$, где $4k+1$ взаимно просто с l, другой — все $(4k+3)\pi/l$, где $4k+3$ взаимно просто с l.

Но мы знаем, что π/l — корень ТМ $f(x)$ в том и только в том случае, когда $\pi/(2l)$ корень $f(2x)$. Значит, при нечетных l от 1 до 15, если ТМ $f(x)$ имеет рациональные коэффициенты и для некоторой несократимой дроби k/l с нечетным k число $(k/l)\pi$ — корень $f(x)$, то и для всех остальных i, взаимно простых с l, $(i/l)\pi$ — корень $f(x)$. Аналогичное утверждение верно для четных k, а для нечетных k остается верным, если $l = 2m$ и m нечетно и не превосходит 15. А при $l = 2; 4; 8$ если $(4k+1)\pi/l$ корень, то и для всех остальных i число $(4i+3)\pi/l$ — корень, и если $(4k+1)\pi/l$ — корень, то и для всех остальных i число $(4i+3)\pi/l$ — корень. При $l = 6$ если $\pi/6$ — корень, то и $5\pi/6$ — корень, и наоборот. А $7\pi/6$ — корень в том и только в том случае, если $11\pi/6$ корень.

Упражнения к главе 6.

6.1. Решите уравнение $\cos 5x + \cos 4x - 2\cos 3x - 3\cos 2x + \cos x + 2 = 0$.

6.2. Решите уравнение $\cos 3x + \cos 2x - 3\cos x - 2 = 0$.

6.3. Решите уравнение $\sin 3x - 2\cos 2x + \sin x - 2 = 0$.

6.4. Решите уравнение $2\cos 3x = 13\sin 2x + 17\cos x$.

6.5. Решите уравнение $2\cos 4x + 4\cos 3x + 6\cos 2x + 8\cos x + 5 = 0$.

6.6. Решите уравнение $2\cos 5x + 2\cos 3x + 2\cos x + 1 = 0$.

6.7. Решите уравнение $(1/\sin x) - (1/\sin 2x) = 1/\sin 3x$.

6.8. Найдите все несократимые дроби k/l такие, что минимальный КМ для $(k/l)\pi$ имеет степень 2.

6.9. Известно, что $a\cos 5\pi/7 + b\cos 3\pi/7 + c\cos \pi/7 + d = 0$, где a, b, c, d рациональные числа, причем не все они равны 0. Что вы можете сказать о числах a, b, c, d (кроме того, что уже сказано)?

6.10. Найдите минимальный КМ для $\pi/35$.

6.11. Докажите, что КМ с целыми коэффициентами, принимающий значение 1 при $x = \pi/4$, не может делиться без остатка на КМ вида $a(\cos 5x - \cos x) \pm 1$ ни при каком целом $a \neq 0; \pm 1$.

6.12. Найдите минимальный КМ для $\pi/31$.

6.13. Пусть числа a, ka и la являются корнями неразложимого КМ с рациональными коэффициентами. Обязательно ли kla тоже корень этого КМ?

Литература

1. Табачников С.Л. Многочлены. - Москва, 2002.

2. Прасолов В.В. Многочлены. - Москва, 2002.

Скворцова Елена Зеликовна,
преподаватель отделения математики
Всероссийской заочной
многопредметной школы (ВЗМШ).

E-mail: cskvorcova@math-vzms.org

О понятии формы

А. М. Прерис

Автор обсуждает понятие формы (геометрической), которое обычно отсутствует в стандартных курсах элементарной и высшей геометрии. Судя по многолетнему опыту преподавания автором начертательной геометрии и графики в инженерно-педагогической Академии (г. Харьков) такое понятие может быть полезным ввиду возможных инженерных, в частности, архитектурных приложений геометрических объектов и конструкций.

Рис. 1.

Нас всю жизнь окружают объекты естественного и искусственного происхождения, отличающиеся друг от друга теми или иными свойствами. Но различаем мы их, прежде всего, по форме. Так, по наличию куполов, увенчанных крестами, на основе имеющегося опыта можно сделать вывод, что на рис. 1 представлен христианский храм. И только тот, кто видел этот храм в натуре или на фотографиях с соответствующими подписями, может сказать, что это Исаакиевский собор в Санкт-Петербурге. Но и создание нового объекта, например, жилого или административного здания, моста через реку и др., начинается с определения его формы. Поэтому изучение формы представляет огромный практический интерес.

В литературе по элементарной геометрии, в том числе и в школьных учебниках, декларируется, что геометрия — это наука, изучающая формы и их отношения. Однако о том, что такое форма и ее геометрическая интерпретация, информация отсутствует. В то же время понятие формы является решающим для понимания геометрии как науки.

Существует ряд определений понятия формы. Наиболее близким по смыслу является внешнее очертание. Однако это определение не дает возможности использовать для изучения формы математический аппарат. Поэтому поступим следующим образом. Мысленно нанесем на поверхность объекта сплошное множество точек. Если при этом считать, что точки не имеют размеров, то образуется мысленная оболочка объекта, не имеющая толщины, которую мы и будем считать его формой. Следует подчеркнуть, что принятое определение формы не зависит от реальных свойств окружающих нас объектов и поэтому представляет собой абстрактное понятие.

Но принятое представление формы дает возможность определить положение на ней любой точки в численном виде, то есть, путем определения расстояний от нее до каких-то других объектов, независимых от рассматриваемой формы. И лучше всего для роли таких объектов подходят, например, стены зданий. Но не создавать же реальную стену специально для того, чтобы ее использовать для такой простой операции. Поэтому напрашивается идея использовать для этой цели воображаемую стену. И в качестве такой воображаемой стены принять форму реальной стены. Забегая вперед, заметим, что такая форма называется плоской, а геометрический объект, имеющий плоскую форму, называется плоскостью. Поэтому для определения положения точки в форме будем измерять ее расстояние до плоскости, которую установим в нужном месте. Но мы живем в трехмерном пространстве и определяем положение любого объекта по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Поэтому для определения положения точки в пространстве достаточно измерить ее расстояния до трех взаимно перпендикулярных плоскостей, расположенных так, как это удобно нам, например, под точкой, за ней и справа. Эти три плоскости образуют так называемую пространственную трехмерную прямоугольную систему координат.

Рассмотрим пример. На рис. 2 представлено изображение пирамиды Хефрена, построенной предположительно в середине XXVI века до н. э. В основании пирамиды находится квадрат со стороной, равной 210,5 м. Высота пирамиды — 136,4 м. Создадим ее форму. Затем расположим в пространстве три плоскости: Π_1, Π_2 и Π_3 так, чтобы они были перпендикулярны друг другу и соответственно проходили под формой пирамиды, за ней и справа от нее. Выберем на форме пирамиды произвольную точку К и, опустив из нее перпендикуляры KK_1, KK_2 и KK_3 на плоскости созданной системы координат, получим интересующие нас расстояния, которые называют координатами. Если на форме пирамиды выбрать еще одну точку и аналогичным образом определить ее координаты, то в результате их сравнения с координатами точки К можно определить взаимное расположение этих точек в пространстве, а также решать численные задачи с их участием, например, определить расстояние между этими точками. Если имеющуюся систему координат сместить в некотором направлении или изменить ее ориентацию, то значения координат выбранных точек также претерпят изменения. Однако это не скажется на их взаимном расположении и расстоянии между ними. Из этого следует, что выбор положения и ориентации системы координат может определяться исполнителем так, как это целесообразнее с точки зрения решения поставленной задачи.

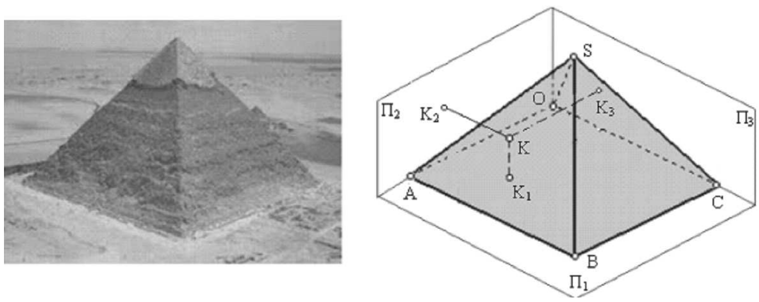


Рис. 2.

В соответствии с принятым определением для изучения формы объекта достаточно определить положение всех принадлежащих ей точек. Однако это невыполнимо. Поэтому напрашивается другой путь: выделить на форме объекта участки, обладающие только им присущим набором свойств, изучить их свойства, а затем изучить взаимное расположение этих участков в форме. Так, купола Исаакиевского собора обладают одним набором свойств, колонны портиков — другим, стены — третьим и т.д. (Следует заметить, что на некоторых формах выделение участков не имеет смысла, так как они целиком описываются одним набором свойств. Примером такой формы является сфера).

Участки формы, обладающие только им присущим набором свойств, будем в дальнейшем называть *поверхностями* и присваивать им собственные имена.

Но для выделения таких участков на форме необходимо установить их границы. В качестве таковых целесообразно принять цепочки точек, которые будем называть *линиями*. Так, купола

Исаакиевского собора отделяются от расположенных под ними элементов замкнутыми кривыми линиями, а стены отделяются друг от друга прямыми линиями. Точно так же сходящимися в вершине, представляющей собой точку, прямыми линиями разделяются боковые грани пирамиды. Таким образом, форму можно рассматривать как совокупность точек, линий и поверхностей.

Рассмотрим, как формируются и какими основными свойствами обладают геометрические объекты.

Как следует из принятого определения, основным и простейшим формообразующим геометрическим элементом является точка.

Геометрические объекты более высокого уровня сложности образуются перемещением объектов более низкого уровня сложности по некоторому закону (кинематическим способом). А если на закон перемещения при этом не накладывать никаких ограничений, то можно получить множество различных типов объектов более высокого уровня сложности.

В соответствии с этим способом линия образуется перемещением точки по некоторому закону. Поэтому линию можно рассматривать как множество точек, расположенных в соответствии с некоторым законом, что дает возможность всегда выбрать на ней любую точку.

Если точка в процессе перемещения не меняет направления движения, то создается прямая линия. Представление о прямой линии может дать луч света, ребро крышки стола и др. Из этого представления прямой, в частности, вытекает ее важное свойство: прямая является кратчайшим расстоянием между двумя точками. Прямая линия безгранична, поэтому в практических приложениях используют ее отрезки и лучи. *Отрезком* называют часть прямой, ограниченную с двух сторон. Отрезок прямой имеет длину, что и определило его широкое использование при решении различных задач, например, для определения расстояния между двумя объектами, в частности — между двумя точками. В качестве единицы длины принят метр[1]. В тексте расстояние, равное, например, 20 метрам, записывают следующим образом: «20 м.». Для измерения более коротких отрезков используются части метра: дециметр, сантиметр, миллиметр и другие, представляющие собой соответственно одну десятую, одну сотую, одну тысячную метра и так далее. Для измерения больших расстояний используется километр, равный тысяче метров. *Лучом* называют часть прямой, ограниченную с одной стороны. В связи с этим луч не имеет длины и используется главным образом при решении задач, связанных с заданием или определением направления, например, направления движения корабля или самолета.

Если точка в процессе перемещения меняет направление движения, то создается кривая линия. Если при этом все точки кривой линии принадлежат одной и той же плоскости, то такую линию называют плоской кривой, если это условие не выполняется — пространственной кривой или линией двоякой кривизны. Примером плоской кривой может служить любая, за исключением прямой, нарисованная на листе бумаги линия. Примером пространственной кривой может служить траектория полета самолета, выполняющего фигуры высшего пилотажа, винтовая линия, в результате перемещения по которой того или иного профиля создается пружина или резьба. Если в результате перемещения конечное положение точки совпадает с начальным положением, создается замкнутая кривая линия, если это условие не выполняется — разомкнутая. Примером плоской замкнутой линии является окружность. Линия безгранична. Поэтому понятие линии в основном используется в теоретических исследованиях, а в практической деятельности используют ее отрезки, под которыми понимают часть линии, ограниченную с двух сторон. Одним из важных свойств отрезка линии является длина. Этим свойством обладает также замкнутая линия: она безгранична, но имеет длину.

Поверхность может быть образована перемещением некоторой линии a (образующей), форма которой в процессе перемещения может оставаться неизменной или изменяться. Для наглядности изображения на чертеже закон перемещения образующей обычно задают графически в виде семейства линий $l, m, n, \ldots$, которые называют *направляющими*. При этом имеется в виду, что в процессе формообразования образующая скользит по направляющим (рис 3). В общем случае со-

[1] Здесь и далее автор ссылается на широко распространенную *метрическую систему мер*; эти же единицы длины (площади, объема) приняты в международной системе физических единиц СИ — *Прим. ред.*

здается неограниченная во всех направлениях поверхность. Однако в ряде случаев образующая a и закон ее перемещения могут быть такими, что образуется замкнутая поверхность. Примером такой поверхности может быть сфера, которая образуется вращением полуокружности a вокруг оси m, проходящей через ее концы (рис. 4).

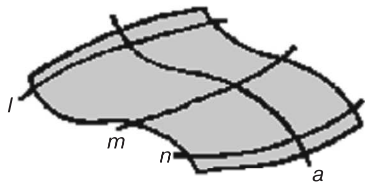


Рис. 3

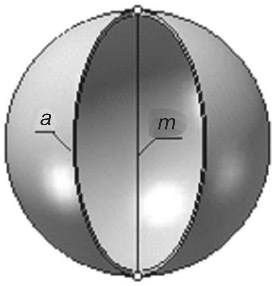


Рис. 4

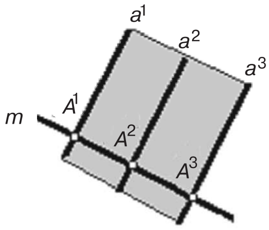


Рис. 5

Если в качестве образующей a принять прямую линию и потребовать, чтобы она перемещалась параллельно самой себе и при этом ее некоторая точка A скользила по прямолинейной направляющей m, то образуется частный случай поверхности, который называется плоскостью (рис. 5). Представление о плоскости может дать поверхность жидкости в сосуде, находящейся в покое, поверхность хорошо отполированной крышки стола или поверхность хорошо отшлифованного зеркала. Достоинство принятого способа формирования поверхностей (в том числе и плоскости) состоит в том, что на поверхности всегда можно выбрать любую линию и, следовательно, точку, необходимую для решения той или иной задачи.

Понятия поверхности и плоскости представляют в основном теоретический интерес, а в практической деятельности используют их части, которые называются *отсеками*. Примером отсека поверхности может быть, например, купол парашюта, крыша легкового автомобиля и др. Одним из основных свойств отсека, кроме измерений в двух взаимно перпендикулярных направлениях, является его площадь. При этом под площадью следует понимать величину отсека поверхности, выраженную в единицах площади. В качестве единицы площади принят квадратный метр. Это площадь такого квадрата, сторона которого равна 1 метру. В тексте площадь, равную, например, 20 квадратным метрам, записывают следующим образом: «20 кв.м.» или «20 м^2». Для определения меньших площадей используются части квадратного метра: квадратный дециметр, квадратный сантиметр, квадратный миллиметр, и др. Для измерения больших площадей используется квадратный километр. А замкнутая поверхность обладает еще одним важным свойством — объемом, который определяет величину ограниченной ею части пространства и измеряется единицами объема. В качестве единицы объема принят кубический метр. Это объем такого куба, ребро которого равно 1 метру. В тексте объем, равный, например, 20 кубическим метрам, записывают следующим образом: «20 куб.м.» или «20 м^3». Для определения меньших объемов используются части кубического метра: кубический дециметр, кубический сантиметр, кубический миллиметр, и др. Для измерения больших объемов используется кубический километр.

Существует и понятие *геометрического тела*. Под ним понимают часть пространства, ограниченную замкнутой поверхностью или отсеками поверхностей (включая и плоскости) и заполненную некоторым материалом. Таким образом, разница между замкнутой поверхностью и геометрическим телом состоит в том, что замкнутая поверхность — это только оболочка, а геометрическое тело представляет собой оболочку, заполненную материалом. Например, сфера представляет собой пустотелую оболочку, а шар представляет собой сферу, заполненную материалом.

Прерис Анатолий Маркович,
канд. техн. наук, доцент,
г. Харьков.
E-mail: anatolypresis@rambler.ru

Упражнения по экспериментальной геометрии

Т. Эренфест-Афанасьева

Предлагаем вниманию читателей книгу Татьяны Эренфест-Афанасьевой — автора, сочетавшего профессиональные занятия теоретической физикой с преподаванием математики в средней школе. Хотя книга издана довольна давно — оригинальное издание на немецком языке "Ubungensammlung zu einer geometrishen propädeuse, von T. Ehrenfest-Afanassjewa, Haag, Martinus Nijhoff вышло в 1931 году, она может быть интересна современным читателям, особенно учителям геометрии, оригинальной концепцией содержания учебного предмета геометрия, изложенной автором во введении, а также интересной подборкой неформальных геометрических упражнений.

Перевод с немецкого Б. Ямрома.

В настоящем номере журнала опубликованы предисловия переводчика и автора, а также введение и методические указания к использованию упражнений. Сами упражнения будут опубликованы в следующем номере.

Предисловие переводчика

Преподавание вообще, а математики в особенности, далеко не легкое занятие. Оно требует не только знания детской психологии и умения заинтересовать предметом, но также глубокого понимания сущности предмета и его роли среди других областей знания. Татьяна Афанасьева-Эренфест была таким педагогом. Не часто талантливый физик-теоретик находит время и проявляет интерес к преподаванию математики в средней школе. Думается, что причиной этого были ее работа в женской гимназии Санкт-Петербурга по окончании Высших Бестужевских курсов и посещение лекций Феликса Клейна в Геттингене, куда ее командировали для усовершенствования в математике и физике.

Вскоре после издания в Голландии небольшой брошюры с упражнениями, предлагаемыми здесь в переводе, она вместе с мужем П. Эренфестом приехала в Советский Союз. В Ленинграде он читал лекции в Физико-техническом институте, затем поехал в Харьков в созданный по инициативе А. Иоффе Харьковский физико-технический институт. Она некоторое время преподавала геометрию в школе во Владикавказе. В 1936 году Афанасьева-Эренфест явилась инициатором создания математической секции Ассоциации по инновациям в образовании. Ассоциация во многом способствовала улучшению преподавания математики в Голландии, особенно после Второй Мировой войны. Ее перу также принадлежит монография "Основы термодинамики", изданная в 1956 году.

Со дня опубликования этих упражнений прошло три четверти века. Школьники, увлекающиеся математикой и физикой, могли найти некоторые из них в различных популярных брошюрах и книгах, издававшихся в 50-70-х годах прошлого века, но таких немного. Основная же масса довольствовалась стандартными учебниками и задачниками, страдавшими теми же недостатками, которые Афанасьева-Эренфест подвергает критике во введении. В своей критике она условно делит преподавателей геометрии на "логиков" и "практиков". Для первых основным является логическая структура материала, эта традиция восходит к "Началам" Евклида. Практики акцентируют внимание на прикладную ценность геометрии.

Ключевым для понимания ее педагогической философии является второй параграф введения. Она ставит на первое место в подготовительном этапе обучения геометрии *развитие воображения*, без которого усвоение основного курса будет малоэффективным и скучным. При достаточно развитом воображении в сочетании с умением находить связи и порядок в окружающем учеников мире они становятся активными соучастниками в формулировке и доказательстве теорем основного курса. Более того, приобретенная способность находить порядок в пространстве будет переноситься учениками в другие области деятельности. Эффективность такого подхода в обучении находит свое подтверждение в том факте, что многие выдающиеся открытия в биологии в середине прошлого века были сделаны физиками, а сейчас исследовательские отделы финансовых компаний ищут новых сотрудников в первую очередь среди выпускников физических факультетов университетов. И биология, и финансовая наука требуют незаурядной изобретательности и воображения, и оказывается, что физики подготовлены лучше, чем математики, в переносе опыта из одной области в другую. В наше время изменения в технологии происходят столь стремительно, что на протяжении одного поколения исчезают и возникают целые отрасли производства. Таким образом, в любом предмете, будь то математика, физика, или химия (я уж не говорю о литературе, без которой ученик будет нем), важна не только его содержательная сторона, но и универсальные навыки, позволяющие продолжать учиться всю жизнь.

Ни учебники, ни методические пособия, ни онлайн-курсы не заменят живого учителя. Для преподавателя геометрии ценность предлагаемого текста не столько в обилии упражнений, подготавливающих учеников к основному курсу, сколько в стимуляции учителя лишний раз задуматься о той роли, которую будет играть геометрия в жизни учеников, и сделать ее преподавание увлекательным, с тем чтобы знания, приобретенные ими, были полезными во всем, что бы они ни предприняли в своей жизни.

Хочу выразить признательность Татьяне Янковской за помощь в окончательной редакции перевода.

Б. Ямром, Нью-Йорк, июль 2015.

Предисловие

Предлагаемые задачи отличаются от обычно используемых в книгах по геометрической пропедевтике в одном важном аспекте: они не ставят своей целью наглядно представить *теоремы* систематического курса, их цель — формирование важнейших геометрических понятий и приобретение обширного репертуара разнообразных *пространственных представлений*. Соответственно, в них особое внимание уделяется развитию *качественных* аспектов пространственных отношений.

При создании этого сборника мы руководствовалось убеждением, что развитие пространственного воображения с помощью наглядных доказательств в традиционных подготовительных курсах было, с одной стороны, недостаточным, а с другой стороны, излишним, когда воображение достаточно хорошо развито к тому моменту, когда приходит время доказательства теорем; и что систематический курс будет более ценным во всех отношениях, если мы избежим утомительной траты времени на исправление нечетких предварительных описаний на подготовительных курсах.

Предлагаемый вводный очерк может пролить некоторый свет на позицию автора по отношению к преобладающим представлениям в преподавании геометрии, и объяснить ее собственную концепцию наиболее эффективного подхода.

Введение

§1. Как известно, существуют два направления в обучении геометрии. Первый, довольно старый, основан на предположении, что основные понятия и аксиомы геометрии являются врожденными для человека, и что поэтому достаточно с самого начала разворачивать всю систему теорем и доказательств для студентов в духе Евклида.

Другое направление, которое в последние тридцать лет[1] в разных странах приобрело больший вес, основывается на понимании того, что студенты часто показывают гораздо более глубокое понимание того, что утверждают теоремы, если они иллюстрируются конкретными примерами в реальных ситуациях, и скорее верят в их справедливость, если они подтверждаются с помощью осмотра или даже измерений, а не демонстрируются строгими доказательствами.

[1]Книга написана 1931 году *(примечание переводчика).*

Для представителей обоих направлений "геометрия", которую учащиеся должны знать, является содержимым *теорем*; они отличаются только тем, что они считают ценным в этих теоремах. Для сторонников первого направления — я возьму на себя смелость далее называть их "логиками" — суть заключается в воспитательном значении безупречной аргументации; для придерживающихся второго направления — я могла бы называть их "практиками" — она лежит в согласии этих теорем с физическим опытом и в возможности использовать их для практических целей и для исследования в других научных областях.

Эти два варианта использования геометрии, соответственно, с презрением воспринимаются наиболее крайними представителями обоих направлений, и умеренно признаются менее радикальными — и еще более умеренно используются.

Мне кажется, что неспособность обеих сторон убедить друг друга в том, чем каждый из них дорожит в геометрии, связана с их слишком узким пониманием геометрии. Они забывают, что систематический курс геометрии представляет собой лишь выдержку из неисчерпаемого комплекса пространственных задач.

Теперь я попытаюсь объяснить, как эта ситуация влияет на обучение.

§2. В чем заключается "воспитательное значение" школьного предмета? — Вероятно, в том, что способ решения задач в этом предмете становится для студента настолько своим, что он также переносит его на другие области своего мышления.

Поэтому мы остановимся на следующих вопросах:

1) Что является наиболее типичным в методе, с помощью которого решаются геометрические задачи?

2) Почему желательно — а это действительно желательно — перенести его в другие области знания?

3) Можно ли перенести его в другие области знания?

4) Делают ли "логики" все необходимое для того, чтобы привить такой метод студентам?

Разумеется, мы здесь остановимся только на тех аспектах, которые могут пролить свет на наш сборник упражнений.

1) Геометрический метод украшен словами "логическое мышление", и он тем самым предполагает, что геометрические истины следует искать и могут быть найдены благодаря некоторым рецептам, которые доступны априори.

Тем не менее применяя общепринятые рецепты, невозможно найти ничего принципиально нового, поскольку новое всегда неизвестно, никто не знает, где оно находится, почему оно необходимо, и часто даже, существует ли *оно*. При всем нашем мастерстве в доказательстве теорем Евклида, мы не обладаем, например, рецептом для направления в выборе новых научно-исследовательских проектов, для того чтобы открыть для себя дальнейшие важные для нас отношения. Для таких действительно новых вещей, геометрия не содержит поисковой системы.

Нельзя говорить о "логическом поиске" и не следует говорить о "логическом мышлении": эти словосочетания вводят в заблуждение и вызвали фактический вред в образовании, потому что они отвлекли мышление учителей от внимательного анализа мыслительного процесса!

Если под словом "логический" понимается то, что свободно от противоречий, хорошо организовано и ясно, то это может быть использовано только в связи с евклидовым *стилем изложения*, который так характерен для геометрии.

Если однако спросить, нет ли чего-то характерного в процессе, посредством которого возникла геометрическая система, то безусловно можно сказать, что такая особенность есть: это *неустанное стремление к предельной ясности.*

"Геометрический метод", таким образом, не останавливается до тех пор, пока задача не станет полностью прозрачной, результат сформулирован самым ясным образом и все полученные результаты организованы так, что они образуют гармоничную, хорошо продуманную систему.

2) Эта гармония и порядок являются идеалом любого исследования, так что нет, вероятно, необходимости, обсуждать это здесь, во всяком случае, мы будем считать наш второй вопрос

решенным.

3) Можно ли добиться того, чтобы наши ученики расширяли свои знания в различных других областях, стремясь к предельной ясности? Лично я убеждена, что лучшие результаты могут быть достигнуты в этом отношении, если только учащимся предоставляется возможность на уроках геометрии испытать, в чем сущность геометрического метода.

4) Однако, вопрос, может ли это в настоящее время осуществиться "логиками", безусловно имеет отрицательный ответ! В самом деле, ведь они не видят самой важной задачи, спрятанной в геометрической системе, так как они думают только об уже готовых теоремах, найденных в книгах.

§3. Построение системы есть создание порядка из хаоса. Прежде чем представить систему перед восхищенной общественностью, надо довольно бессистемным образом собрать следующее вещи:

a. Прежде всего следует осознать *существование* соответствующей области исследования, изолируя характерные для нее особенности в разнообразных явлениях и объединяя их в общую категорию.

b. Следует сформулировать первые *задачи с достаточной ясностью.*

c. Осторожно ввести основные *понятия*, к которым могут быть сведены другие понятия из рассматриваемой области (вспомним безнадежное состояние механики до того, как понятие "массы" было введено Ньютоном!).

d. Определить такие элементарные отношения между этими понятиями — *аксиомы* — из которых все остальные будут логически следовать (во многих областях естествознания ученые до сих пор находятся в поиске таких понятий).

e. Изобрести наиболее подходящий *стиль* для *представления системы.*

Содержание пунктов (a) и (b) в каждой науке создавалось многими людьми под влиянием самой жизни в результате длительного и полусознательного прогресса. В геометрии (в отличие от механики, например), то же самое, по-видимому, происходило и в случае (c). С другой стороны, (d) и (e) вполне могут рассматривается как замечательные и очень ценные достижения одного человека — Евклида. (В данном контексте несовершенства, позже обнаруженные в его системе, бледнеют по сравнению с его вкладом в геометрию!)

Что думают логики обо всем этом? — Они считают, что геометрические аксиомы даются новорожденному даром, и, следовательно, наиболее важной задачей для древних греков было: сомневаться во всем, даже наиболее очевидном, чтобы впоследствии — с помощью этих аксиом — снять сомнения; и что именно это и составляет "научную" суть геометрического метода.

И они ставят это на передний план так убедительно, что и практики, даже когда они становятся учителями геометрии, остаются под влиянием этого представления о науке. Поскольку, однако, они пугаются доказательств очевидного, они демонстрируют в целом враждебное отношение к евклидовому стилю изложения.

Логики не демонстрируют *прогресса от хаоса к системе* и *пользы*, которую дает систематическим знакомством с предметом, и, похоже, таким образом "геометрия" у них предстает умственной игрой, свободной от какого-либо материала, и вместо работы с *понятиями*, которые можно получить, благодаря абстрагированию, только из личного живого опыта, ученики имеют дело с *названиями* и *рисунками*, которые у них часто не ассоциируются с чем-то знакомым.

Тем не менее всегда есть редкие ученики, которые без знаний и помощи учителя, благодаря собственному таланту восполняют некоторые пробелы в обучении и способны оценить геометрический метод. Но даже среди них очень мало таких, кто может проявить смелость, чтобы создать порядок в какой-то другой области; *этому* они, конечно, не научатся у логиков!

Тем не менее, это неправда, что неподготовленный человек имеет в своем распоряжении геометрические аксиомы — или хотя бы даже элементарные понятия. Нет необходимости обращаться к предъевклидовой истории, чтобы заметить, что пространство, как и любая другая область исследования, показывает себя наивному человечеству в довольно хаотичной форме:

аргументы в пользу этого можно видеть каждый день, наблюдая, как беспомощны многие люди, когда в своей деятельности они должны принимать во внимание свойства пространства (упаковка, перемещение мебели, ее пронос через дверь, резка ткани, изготовление чего-либо своими руками, и т.п.). Безусловно, им не придёт в голову свести соответствующие пространственные отношения к проблеме на плоскости и рассмотреть соответствующие длины и углы в плоскости. Даже ремесленники, которые благодаря своей деятельности приобрели какой-то навык в практическом решении некоторых геометрических задач, только частично осознают пространственные законы и понятия. Это не мешает аксиомам евклидовой геометрии казаться очевидными почти для каждого человека, как только он имеет повод задуматься о них вообще. Но *способность* видеть их как очевидное не то же самое, что *иметь их в своем распоряжении*!

§4. Для того чтобы метод был эффективным, необходимо, чтобы успешное овладение мастерством в определенной области осуществлялось через личный опыт, более того, это мастерство должно рассматриваться как желаемое.

Каким образом логики и практики демонстрируют важность геометрии своим ученикам? Для логиков вопрос на самом деле не существует: геометрия родилась в головах греков и представлена ими сразу так научно, что теперь каждый школьник должен знать геометрию. — Такое положение вещей, конечно, едва ли создает условия для уверенного освоения большинством учеников логико-геометрического метода.

Во многих учениках может быть возбужден достаточно живой интерес к геометрии, если им показать, как пространственные проблемы *плотно проникают во все, что мы делаем и знаем.*

Если для логиков согласие между геометрическими теоремами и опытом простая случайность, они не могут сделать это центром внимания, то можно было бы ожидать принципиально другого отношения от практиков: для них геометрия — это изучение вещей в физическом мире.

Но, к несчастью, весь геометрический аспект этого мира для них вписан в несколько десятков теорем учебника геометрии; все, что они делают, чтобы установить связь между книгой и миром заключается в следующем: показать практическое применение части *этих* теорем.

К сожалению, эти приложения не являются наиболее интересными, которые можно найти в природе. Вспомним, что система, которая составляет содержание учебника, направлена в основном на вывод некоторых *формул*, с помощью которых можно достичь *количественного* освоения пространством. Теорема Пифагора и объем сферы являются безусловно стоящими внимания, и никакие другие области точных наук не могут обойтись без них. Но часто ли мы имеем повод для применения их в практической жизни? что особенно привлекает нас в них? почему мы должны во что бы то ни стало на ранней стадии учить именно *эти* формулы, когда ученики ещё не могут критически оценить их правильность? Интерес, который эти теоремы пробуждают в нас, лежит не столько в каждой из них в отдельности, сколько в возможности соединить их вместе в простую систему и сделать базисом многочисленных, во всех отношениях важных для нас, исследований. Теорема Пифагора *завораживает* только тех, кто находит радость в *умственных усилиях.* Но такого рода радости в зародыше уничтожаются школьными доказательствами, так что ученик не может больше следовать за систематическим курсом со свежим детским любопытством.

Если учесть ограниченность геометрического материала в школьных учебниках, трудно отделаться от впечатления, что и для практиков множество окружающих нас пространственных проблем остается напрочь закрытым.

§5. Несмотря на это, нельзя отрицать, что в “практическом” преподавании большее количество учеников с определенной живостью реагирует на изучаемый материал: во всяком случае, они видят более ясно, *о чем* идет речь, и они лучше представляют себе пространственные объекты. Много говорят также о развитии дара интуиции в практической методике преподавания.

Тем не менее, такое развитие событий гораздо слабее и более одностороннее, чем оно могло бы быть. Также упущено из виду следующее: для того, чтобы полностью усвоить графическое доказательство, нужно иметь живое воображение, без которого доказательство воспринимается механически и само по себе мало способствует развитию воображения, так как после этого сразу переходят к применению доказанного, что, как правило, имеет *вычислительный*, а не наглядный характер.

И ещё: практики часто не различают, что дает наглядное исследование теоремы для развития *воображения* и какой вклад вносит манипуляция *измерениями* в проверку теоремы; на самом деле, измерение часто ни в коей мере не стимулирует воображение[2].

§6. Мы приходим к выводу, что ни логики, ни практики не могут в достаточной мере добиться успеха пользуясь только их собственным методами, и что причиной этого является пренебрежение той предварительной работой, которая должна предшествовать изучению геометрических систем. Поэтому нашей задачей будет: стимулировать эту предварительную работу в сознании учеников и целенаправленно направлять её.

В наших действиях на каждом шагу мы сталкиваемся с пространственными задачами; даже в различных других школьных предметах, таких, как география, механика, физика и т.д., мы имеем дело с вопросами, которые не могут быть поняты без достаточного овладения пространственными понятиями. Для некоторых из нас эти проблемы являются достаточным стимулом для развития геометрической интуиции и помогают нам с легкостью овладевать курсом геометрии. Для многих других это в большинстве случаев слишком сложно; им самим не хватает энергии для скрупулезного анализа геометрических проблем (это часто объясняет также отсутствие ловкости в ручных манипуляциях и то, что некоторые школьные предметы остаются непреодолимыми для них) и, таким образом, они приступают к курсу геометрия совершенно неподготовленными.

Если учитель выберет наиболее подходящие примеры из всего этого материала и представит их ученикам наиболее эффектным способом, то сможет достичь следующих результатов:

1. Приобретается достаточно разнообразный запас геометрических образов вместе со способностью мысленно менять размеры и расположение фигур в воображении.

2. Основные понятия геометрического курса будут связаны с конкретным опытом, и соответствующие термины связаны с живым воображением.

3. Рисунки в учебнике геометрии будут рассматриваться как схематично обобщенные образы реальных вещей, а не как самодостаточные объекты обучения.

4. Ученики узнают, как велико значение геометрического аспекта для физических явлений и как важна геометрия для естественных и технических наук.

5. Можно будет предлагать ученикам задачи, геометрическое содержание которых совершенно доступно для них, но где при этом они обнаружат, что верное решение требует критического анализа — у них возникнет потребность *доказывать теоремы*! И они почувствуют, как многое проясняется, становится на свои места, когда все, что возможно было с уверенностью наблюдать, можно сформулировать в сжатой форме: они естественным образом придут к *евклидовым представлениям*!

Наш сборник призван убедить учителей, что есть множество проблем, для осмысления которых нет теорем систематического курса и которые, напротив, подготавливают к живому восприятию этих теорем.

---

[2]Возьмем, например, экспериментальный метод нахождения отношения периметра круга к его диаметру: веревка натягивается на предмет с круговым сечением (например, банку), затем распрямляется и измеряется линейкой. Также измеряется диаметр. Процедура повторяется, насколько это возможно, для нескольких круглых предметов разной величины. Затем соответствующие отношения (среди которых могут быть и меньшие трех) записываются и определяется их среднее. После чего учитель объявляет, что при более точных измерениях это среднее будет примерно 3,14 (что редко случается, когда измерения делают ученики).

Такая процедура имеет очень мало общего с визуализацией рассматриваемых здесь линий: отношение вычисляется после того как скрученная веревка *распрямляется* и из *этой картины самой по себе нет основания утверждать*, что отношение должно быть такое, а не иное. Насколько более взывающим к воображению является дискурсивное доказательство: здесь, после того как в круг вписан шестиугольник, ученики могут не только доказать, но и *видеть*, что его периметр равен шести радиусам и что его периметр меньше периметра круга. С этого момента для них просто невозможно забыть, что число π больше и ненамного больше трех!

Об этом пункте и многих других я говорила более подробно в моей брошюре “Wat kan en moet het Meetkundeonderwijs aan een Niet-wiskundige geven” [1924 bij J.B.Wolters, Groningen].

Следует признать, что во многих случаях трудно избежать использования по умолчанию той или иной довольно сложной теоремы, и многие читатели могут быть склонны решить, что этот метод злоупотребляет наглядностью, что характерно для практиков. Но есть все же существенная разница между этими двумя методами: я подчеркиваю, что эти предварительные упражнения не открывают, не формулируют и не доказывают *никаких общих теорем*; связи, устанавливаемые в каждом отдельном случае, должны остаться эпизодическими и только *названия понятий* следует запоминать на этом этапе. Однако, подсознательное впитывание впечатлений, которые в ходе этих упражнений приведут к признанию теорем, действительно является необходимым этапом для последующего овладения теоремами: так и только так работает человеческий разум при построении науки; даже в теории чисел большому открытию предшествует рассмотрение многочисленных частных случаев.

Как пользоваться упражнениями

§7. Вопросы организованы в соответствии с геометрической классификацией и необязательно в последовательности, в которой они могут предлагаться ученикам. Я думала этим облегчить учителям поиск подходящих упражнений; для них решение, что легко и что трудно для данной группы учащихся, зависит от предыстории их развития и не может быть однозначно закреплено в книге.

Не предполагается, что каждое упражнение должно быть использовано на “уроке геометрии”. Многие из них могут быть связаны с другими занятиями учеников: рисованием, лепкой, изготовлением моделей из разных материалов, играми, работой с инструментами, одеждой, оформлением класса и т.д.; посещением фабрик, экскурсиями на природу, уроками физики и т.д. Учитель математики должен быть внимателен к любым занятиям его учеников и быть в контакте с другими учителями для достижения общих целей!

Задания сильно отличаются по уровню трудности; некоторые из них могут и должны предлагаться уже дошкольникам; однако, так как это не было сделано для большинства учеников, опыт показывает, что полезно обратиться к ним и в средней школе.

Подборка упражнений, очевидно, слишком велика, чтобы быть исчерпанной в подготовительном периоде. Кстати, многие упражнения могут быть использованы в систематическом курсе — как иллюстрация или побуждение к формулировкам теорем — в этом случае, разумеется, их использование отличается от использования в подготовительном периоде.

Вопросы должны быть организованы таким образом, что вначале предлагаются наиболее простые концепции. Но не упускайте из виду тот факт, что в конечном итоге вы переходите к систематическому курсу; в конце подготовительного периода должны прозвучать вопросы, могущие дать повод формулировкам теорем. Для этих целей можно, разумеется, использовать задачи, *решавшиеся раньше на интуитивном уровне*, и теперь привлечь внимание учеников к условиям, принимаемым за очевидные, хотя в действительности они не являются самоочевидными (например, подобие треугольников и четырехугольников; при построении треугольников по трем сторонам оставлять без внимания, будут ли определенные окружности всегда пересекаться).

§8. Обсуждая эти проблемы с учениками, рекомендуется не спешить с показом наглядных пособий, а дать им возможность использовать их собственное воображение; даже если они не очень преуспеют в этом, попытка сама по себе будет полезна, хотя бы для усиления восприятия при ознакомлении с реальным объектом. С другой стороны — особенно вначале — не следует пренебрегать наглядными пособиями даже в случае очевидных хороших ответов: правильный ответ может оказаться красивой иллюзией, если впоследствии приглядеться, как ученик манипулирует объектом; конечно, не все ученики дадут правильный ответ; и, наконец, вряд ли можно переоценить значение многократных сенсорных впечатлений для жизнеспособности наших идей!

Наглядные пособия в руках учеников являются уникальным средством для учителя получить доступ к их воображению. — Если учитель позволит им как можно больше работать руками, он откроет для себя и будет точно знать, чего им не хватает для ясного следования за простейшими рассуждениями.

Очень важно просить учеников делать зарисовки всего, что обсуждается: именно в эти моменты у многих учеников происходит процесс абстрагирования.

Не следует экономить время на необходимые манипуляции: потом можно будет гораздо быстрее продвигаться в систематическом курсе, и только тогда с реальным успехом!

§9. Тот, кто после всего этого перейдет к преподаванию систематического курса по стандартным учебникам, будет серьёзно разочарован. На самом деле, для большинства учеников все еще отсутствует понимание "логических" доказательств: как вы знаете, в начале стандартных учебников доказываются совершенно очевидные теоремы!

В таком случае обычно говорят: "простые вещи — наиболее сложные". Тут самый раз задуматься над этим высказыванием и спросить себя *почему* "простые" вещи так сложны. Можно придти к выводу: не простота делает теоремы сложными, но что-то настолько не простое, что большинство учителей не имеют никакого реального понимания цели этих доказательств!

В поте лица своего некоторые учителя пытаются действовать, как если бы они действительно сомневались в этих теоремах. Естественно, это ложь. Никто не доказывал равенство вертикальных углов потому, что первоначально сомневался в этом. На самом деле, *не правильность теоремы доказывается*, но скорее ее *логическая зависимость от других теорем*, которые предполагаются уже установленными, и не более очевидны, чем сама эта теорема.

Очевидно, новичок не может понять проблемы такого рода: он удовлетворен знанием теоремы и уверенностью, что может положиться на нее, и не задаваться вопросом, справедлива ли теорема как независимая аксиома или как логическое следствие из других аксиом.

Следует заметить, что большинство людей — *независимо от их возраста* — равнодушны к этому отличию (разумеется, ошибочно!) даже если они учились геометрии у логиков.

Нужно принять решение пропустить доказательства очевидных теорем в начале курса.

Ясность изложения при этом не пострадает, если эти теоремы не будут протащены контрабандой, но будут явно сформулированы и объявлены принятыми без доказательства.

Решение, какие теоремы являются истинными аксиомами (т.е., множество логически независимых утверждений, позволяющих вывести все последующие теоремы, описывающие данный предмет), является серьёзной проблемой, значение которой для науки очень велико, хотя и признается не всеми учеными.

Если пожелать ознакомить с этим наиболее способных учеников, наибольшего успеха можно добиться, отложив это до окончания систематического курса.

Если принять за основу два правила:

1. ученики подготовлены к систематическому изучению пространства, например, представленным здесь способом,
2. доказательства очевидных теорем опущены,

то будет видно, что ученики не только будут понимать геометрию, но и будут способны под руководством учителя принимать *активное* участие в построении геометрических теорем — и только это приведет к столь ценному для логиков настоящему мастерству геометрического метода и важного для практиков фактического содержания геометрии.

Перевод с немецкого:

Ямром Борис,
Нью-Йорк, 2015 г.

E-mail: yamrom@optonline.net

П. А. Некрасов и русская средняя школа конца XIX – начала XX века

Р. З. Гушель

В статье рассказано о деятельности профессора и ректора Московского университета, попечителя Московского учебного округа Павла Алексеевича Некрасова в области организации математического образования в средней школе в конце XIX – начале XX веков.

П. А. Некрасов (1853 – 1924).
Источник: ru.wikipedia.org/wiki/Некрасов_Павел_Алексеевич

На рубеже XIX и XX веков в отечественном образовании остро стоял вопрос о необходимости модернизации мужской средней школы, введения в её курс новых разделов, а также изменения структуры среднего образования с учётом индивидуализации обучения и запросов государства в сотрудниках разных специальностей.

Одним из видных деятелей в этой области был попечитель Московского учебного округа (1898-1905), профессор Московского университета, известный отечественный математик Павел Алексеевич Некрасов. Он родился 8(20) января 1853 года в семье священника села Житово Рязанской губернии. Осиротев в 10 лет, мальчик учился на казённый счёт в Рязанском духовном училище, а затем — в Рязанской духовной семинарии. Проявив повышенный интерес к математике, он в 1874 году поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета и в 1878 году окончил курс со степенью кандидата.

По рекомендации профессоров А. Ю. Давидова, Н. В. Бугаева и В. Я. Цингера Некрасов "был оставлен в Московском университете на два года для усовершенствования по кафедре чистой математики и приготовления к профессорскому званию с 23 сентября 1878 года" [1, л. 15 об.].

В августе 1879 года Павел Алексеевич был назначен учителем математики Московского частного реального училища К. П. Воскресенского. Это учебное заведение было широко известно не только в Москве. Здесь преподавали многие замечательные педагоги, в том числе известный химик И. А. Каблуков, историк С. К. Богоявленский и другие. Среди выпускников училища встречаем имена профессора математики В. В. Немыцкого, биолога П. А. Мантейфеля, экономиста А. В. Чаянова, лётчика М. М. Громова, народного артиста СССР С. В. Образцова. В училище Воскресенского П. А. Некрасов служил до 1886 года. 7 декабря 1884 года он стал его инспектором. В течение всех лет службы в училище он состоял и классным наставником.

Но педагогическая деятельность не помешала его активной научной работе. В 1883 году Павел Алексеевич защитил в Московском университете магистерскую диссертацию на тему

“Исследование уравнения вида $u^m - pu^n - q = 0$”. За эту работу Академия наук присудила автору премию имени В. Я. Буняковского. В 1885 году П. А. Некрасов стал приват-доцентом Московского университета.

В 1886 году после защиты диссертации “Ряд Лагранжа” учёный был утверждён Советом университета в степени доктора чистой математики. В том же году он был назначен экстраординарным профессором по кафедре чистой математики. А в 1890 году Павла Алексеевича утвердили в должности ординарного профессора.

27 марта 1891 года П. А. Некрасов стал деканом физико-математического факультета, а 17 декабря того же года он “назначен помощником ректора... на четыре года с увольнением от должности декана...” [1, л.20-21 об.].

С ноября 1893 года П. А. Некрасов — ректор Императорского Московского университета. Он сменил на этом посту будущего попечителя Московского учебного округа и министра народного просвещения Н. П. Боголепова (1846-1901). В этой должности Павел Алексеевич состоял до 1898 года, когда его назначили попечителем Московского учебного округа. Будучи преподавателем и ректором университета, Павел Алексеевич специально не занимался вопросами средней школы. Теперь же полученный в начале карьеры опыт учителя ему пригодился.

Начало службы П. А. Некрасова в должности попечителя совпало со временем организации Высочайше учреждённой комиссии, которая была призвана разрешить многие проблемы средней школы того времени. 8 июля 1899 года министр народного просвещения Н. П. Боголепов разослал попечителям учебных округов циркуляр за № 16212, в котором были указаны основные недостатки средних учебных заведений. Среди таковых министр отметил: “отчуждённость от семьи и бюрократический характер средней школы, невнимание к личным особенностям учащихся и пренебрежение воспитанием нравственным и физическим, ... чрезмерность ежедневной умственной работы, возлагаемой на учеников, особенно в низших классах...” [2, с.I-V]. Здесь указаны только некоторые из перечисленных в циркуляре недостатков. Для участия в работе учреждаемой комиссии, намеченной на 1900 год, попечителям предлагалось прислать в С.-Петербург наиболее опытных педагогов с мест.

Получив этот циркуляр, П. А. Некрасов собрал в Москве большое совещание, в котором приняли участие свыше 200 педагогов высшей и средней школы Московского учебного округа. Совещание проходило с 16 сентября по 2 декабря 1899 года. Его участники разбились на пять групп, и каждая группа разрабатывала вопросы организации мужской средней школы какого-либо одного типа, в том числе: тип 1 — классическая гимназия; тип 2 — классическая гимназия с уменьшенным числом уроков по древним языкам; тип 3 — гимназия без греческого языка; тип 4 — реальное училище; тип 5 — школа нового типа.

Материалы совещания в том же 1899 году были опубликованы в шести выпусках. В последнем, шестом выпуске приведены ответы профессоров Московского университета и Императорского технического училища на вопросы анкет, касавшиеся состояния и перспектив развития средней школы в России. Для профессоров университета и технического училища анкеты были разными. Всего на вопросы анкет ответили около 80 профессоров разных специальностей, что свидетельствует о глубокой заинтересованности сотрудников высшей школы в том, чтобы получить хорошо подготовленных в средней школе студентов. С другой стороны, такой охват профессуры анкетированием свидетельствует о большой работе, проведённой и самим П. А. Некрасовым, и его сотрудниками по привлечению коллег к решению вопросов средней школы.

Далеко не все, отвечавшие на вопросы анкеты, участвовали и в самом совещании. На нём выступали, в частности, ректор Московского университета А. А. Тихомиров, профессора Р. Ю. Виппер, И. А. Каблуков, А. И. Кирпичников, Н. А. Умов, И. В. Цветаев и ряд других. Математиков Московского университета представляли на нём профессора К. А. Андреев, Н. В. Бугаев (декан физико-математического факультета), Л. К. Лахтин, Б. К. Млодзеевский и другие. Был здесь и директор Московского учительского института Ф. И. Егоров. Но большинство на совещании принадлежало, разумеется, сотрудникам средней школы.

Среди известных педагогов-математиков средней школы, принявших участие в совещании, были А. М. Воронец, Д. Д. Галанин, К. К. Мазинг, Н. А. Рыбкин, В. П. Шереметевский.

Приведём названия некоторых докладов, опубликованных в первых пяти выпусках материалов совещания в виде приложений. Первая часть каждого из этих выпусков содержала протоколы заседаний совещания, а далее помещались тексты докладов.

- Кирпичников А.И. (профессор, декан историко-филологического факультета). Об отношении учителя к ученикам и их родителям (вып. 1).
- Миллер Вс.Ф. (профессор, директор Лазаревского института). Об объединении учебного плана гимназии и реального училища в пределах прогимназических классов (вып. 1).
- Никольский П.П. (директор Тульской гимназии). О балльной системе (вып. 1).
- Георгиевский Л.А. (директор Императорского лицея в память цесаревича Николая). О причинах нареканий на гимназии, степени их основательности и мерах к их устранению (вып. 2).
- Первов П.Д. (учитель Лазаревского института). О постановке курса русской словесности в классической гимназии (вып. 3).
- Некрасов П.А. (профессор, попечитель Московского учебного округа). О цели и значении преподавания математики в гимназиях (вып. 3).
- Тихомиров А.А. (профессор, ректор Московского университета). О необходимости введения естествоведения в число предметов гимназического преподавания (вып. 2).
- Давыдовский В.Ф. (преподаватель Практической академии коммерческих наук). О практических занятиях по физике в реальных училищах (вып. 4).
- Виноградов П.Г. (профессор Московского университета). Учебный план и программа истории (вып. 5).
- Плестерер А.Л. (преподаватель 1-й Московской гимназии и Частного реального училища Мазинга). О целях преподавания новых языков в реальных училищах (вып. 4).
- Высотский Н.Г. (директор Ярославской гимназии). О физическом воспитании учеников гимназии (вып. 1).

Фамилии и должности докладчиков, а также тематика их выступлений, представленных в этой небольшой выборке, говорят о глубоком и всестороннем рассмотрении вынесенных на обсуждение вопросов.

Организация такого многочисленного совещания, участниками которого были, в том числе, и крупные учёные и руководители, издание в том же году многотомного сборника его трудов свидетельствуют, что П. А. Некрасов был замечательным организатором и руководителем. Ни в одном учебном округе не проводилось совещания такого уровня. Многие решения самой Комиссии 1900 года опирались на заключения этого совещания.

Но Павел Алексеевич не только собирал совещание, но и выступал на нём. 16 сентября 1899 года при открытии этого собрания он сказал, в частности: "Цель, с какою я созвал вас, господа, видна из разосланного вам приглашения. Я желал бы, чтобы вы содействовали мне в разрешении задачи, возложенной на меня циркуляром г. Министра народного просвещения от 8 июля 1899 года... Ввиду серьёзности дела я не могу не выяснить этой задачи подробно и усерднейше прошу Вас оказать мне содействие. Я ищу полноты и беспристрастия, я готов дать ход всяким направлениям, какие имеют под собою твёрдую почву. Поэтому я пригласил сюда начальников высших и средних учебных заведений и всех лиц, работавших в истекшем учебном году в комиссии по вопросу о подготовке преподавателей средней школы. Я обратился к Московскому педагогическому обществу, которое указало мне 25 лиц из своей среды... В наших занятиях я желал бы полного выяснения всех направлений и серьёзных заключений..." [2, с. 1-2].

Помимо выступления на открытии совещания, попечитель активно участвовал и в общих собраниях, и в заседаниях групп. На двенадцати общих собраниях, проходивших раз в неделю, он и председательствовал, и активно участвовал в обсуждении рассматривавшихся вопросов. Выступал он и в заседаниях групп.

8 ноября 1899 года П. А. Некрасов выступил в заседании третьей группы с сообщением, посвящённым цели и значению преподавания математики в гимназиях. Он сказал: "Среди многих причин неудовлетворительности преподавания математики одна из главных кроется в самом направлении этого преподавания. Это направление во многих отношениях держит математику в стороне от действительных научных интересов, ставя ей в гимназии слишком одностороннюю схоластическую цель: "усвоение последовательности и логичности выводов и доказательств"... При этом забывают, что математика не есть формальная логика и отвлечённая схоластическая эквилибристика, а наука и вместе с тем величайший из научных методов миропознавания, что таковою она является не в высших только частях, но и в её элементах...

Не расширяя в средней школе объёма программы математики, не осложняя, а напротив, по форме упрощая содержание задач, как материала для упражнений по математике, можно повысить развитие абитуриентов гимназии, ставя единственно правильную цель преподавания математики: усвоение её, как науки и как научного метода миропознавания... Преподавая математику, необходимо как можно чаще и практичнее сближать (особенно в задачах) её, как научный метод миропознавания с теми конкретными научными фактами и явлениями, к которым она применима. Заимствуя подходящие для этой цели явления из разных наук, нужно облекать вопросы об этих явлениях в форму простых и научно выраженных математических задач. Если явления ещё не могут быть усвоены учениками в систематическом изложении, то... можно и даже крайне желательно сообщать ученикам на уроках математики пропедевтическое объяснение явлений, достаточное для усвоения содержания задачи и её математической конструкции... Необходимо также предоставить физико-математическим факультетам университетов оказывать влияние на направление преподавания математики в гимназиях, передавая на предварительное заключение этих факультетов вопросы об одобрении учебных пособий по математике..." [3, с. 207-211].

Говоря о содержании гимназического математического образования, П. А. Некрасов особенно отметил значение теории сочетаний и бинома Ньютона, которые некоторые педагоги предлагали изъять из курса средней школы. Он считал эти разделы очень важными для учащихся. "Теория сочетаний представляет средство для развития одной из важнейших способностей ума — способности представлять явления в разных комбинациях. Эта способность нужна в жизни всякому, и изощрение её желательно... Входя через бином Ньютона в связь со всеми отделами анализа и давая элементарные основы для исчисления вероятностей, в то же время теория сочетаний есть одна из немногих и очень важных глав элементарной математики, принадлежащих аритмологии, крайне подавляемой в курсе гимназии анализом..." [там же].

К этой теме Павел Алексеевич не раз возвращался впоследствии. На XIII съезде Русских Естествоиспытателей и Врачей в Тифлисе в 1913 году и на состоявшемся в январе 1914 года II Всероссийском съезде преподавателей математики он вновь говорил об этом, в том числе, в связи с необходимостью создания промежуточных (лицейских) классов между средней и высшей школой. П. А. Некрасов считал, что эти классы нужны для более качественной подготовки выпускников гимназии к продолжению образования. Он предлагал разделить двухгодичные лицейские классы на два отделения — гуманитарное и математическое. Каждое из отделений он предлагал бифурцировать ещё раз, а именно: гуманитарное — на отделения A и B, математическое — на C и D (обозначения Некрасова — *Р Г.*). О бифуркации математического отделения он говорил: "Бифуркация эта имеет в своём основании известное единство, от которого начинается разделение целого по следующим двум направлениям: в школе C преобладает изучение математической и логической дедукции и функциональной связи величин, а в школе D преобладает изучение индукции, комбинаторного анализа и коррелятивной связи, выясняемой и познаваемой эмпирически и статистически" [4, с. 238].

А за два года до этого, на I Всероссийском съезде преподавателей математики П. А. Некрасов специально говорил о том, какая математическая подготовка нужна для тех, кому предстояло в высшей школе заниматься экономическими науками. Здесь, по его мнению, главными разделами курса математики должны были стать "1) математическая теория вероятностей с законами больших чисел... 2) математическая статистика и 3) графическое исчисление..." [5]. Что касается элементов аналитической геометрии и математического анализа, то докладчик считал возможным вовсе исключить их из программы подготовки экономистов, оставив лишь метод координат и решение задач на максимум и минимум, которые нужны при изучении экономических наук.

Но П. А. Некрасова интересовали не только вопросы преподавания комбинаторики и создания лицейских классов. В 1912 году на том же I Всероссийском съезде преподавателей математики он выступил с сообщением, которое было посвящено результатам преподавания элементов высшей математики в мужской средней школе.

На основании министерского циркуляра от 30 июня 1906 года за № 12414 в дополнительном (седьмом) классе реальных училищ была введена новая программа по математике, содержавшая значительные разделы аналитической геометрии и основ анализа бесконечно малых [6]. А в кадетских корпусах многие из этих разделов, в том числе, кривые второго порядка, начали изучаться ещё раньше. В мужских гимназиях их не было. Циркуляр 1906 года вступил в действие с 1907/1908 учебного года. Вскоре появились учебные руководства для реалистов по названным разделам.

П. А. Некрасов в своём выступлении подвёл некоторые предварительные итоги введения в программы по математике этих вопросов. Что касается аналитической геометрии и дифференциального исчисления, то этот материал, по наблюдениям докладчика, усваивался хорошо. "Начала же интегрального исчисления давались ученикам с большим трудом, здесь даже опытный преподаватель не мог почти ничего сделать при отведённом времени на преподавание" [7, с. 176-177]. В заключение прений по его докладу П. А. Некрасов сказал: "По наблюдениям, сделанным в петербургских учебных заведениях, понятие о пределе и основные теоремы о пределах устанавливаются раньше, до седьмого класса, а это даёт большую экономию во времени. Затем, как в петербургских гимназиях, так и в реальных училищах, понятие о функции негласным образом уже вошло в обиход... В заключение можно утверждать, что экономия, достигнутая надлежащей подготовкой учеников в предыдущих классах, позволит даже при одном только часе в седьмом классе дать закруглённый курс начал дифференциального исчисления, но, конечно, не интегрального" [там же, с. 178-179].

Укажем ещё несколько публикаций П. А. Некрасова, посвящённых проблемам средней школы:

- Основы общественных и естественных наук в средней школе. - СПб., 1906.
- Теория вероятностей и математика в средней школе // Журнал Министерства народного просвещения. - 1915. - №№ 2-4.
- Средняя школа, математика и научная подготовка учителей. - СПб., 1916. - 65 с.

Попечителем Московского учебного округа П. А. Некрасов состоял до 1905 года, когда его перевели в Министерство народного просвещения. Здесь он служил до 1908 года, а потом вернулся к преподавательской работе в С.-Петербургском университете. С 1917 года Павел Алексеевич вновь преподаёт в Московском университете.

Среди полученных П. А. Некрасовым за годы службы наград ордена: Св. Станислава всех трёх степеней, Св. Анны 1-й степени, Св. Владимира 3-ей и 2-ой степени. Последним классным чином, полученным им до 1917 года, был чин Тайного Советника (III класс в Табели о рангах).

Скончался Павел Алексеевич 20 декабря 1924 года. Его имя в советской литературе почти не упоминалось, так как он принадлежал к московской философско-математической школе Н. В. Бугаева, которая была объявлена в 30-е годы XX века реакционной [8, с. 5-9].

Список литературы

1. Формулярный список П. А. Некрасова // Центральный исторический архив Москвы. - Ф. 418. - Оп. 487. - Дело 280.

2. Совещания, происходившие в 1899 году в Московском учебном округе по вопросам о средней школе. - М., 1899. - Вып. 1.

3. То же. Вып. 3.

4. Некрасов П.А. Вторая (бакалаврская) ступень в составе будущей средней школы // Математическое образование. - 1914. - № 5. - С. 235-238.

5. Некрасов П.А. О необходимых отделах математики для экономических наук // Математическое образование. - 1912. - № 2. - С. 79-81.

6. Программа математики для дополнительного класса реальных училищ // Журнал Министерства народного просвещения. - 1907. - № 1.

7. Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. - СПб., 1913. - Т. 2. - С. 176-179.

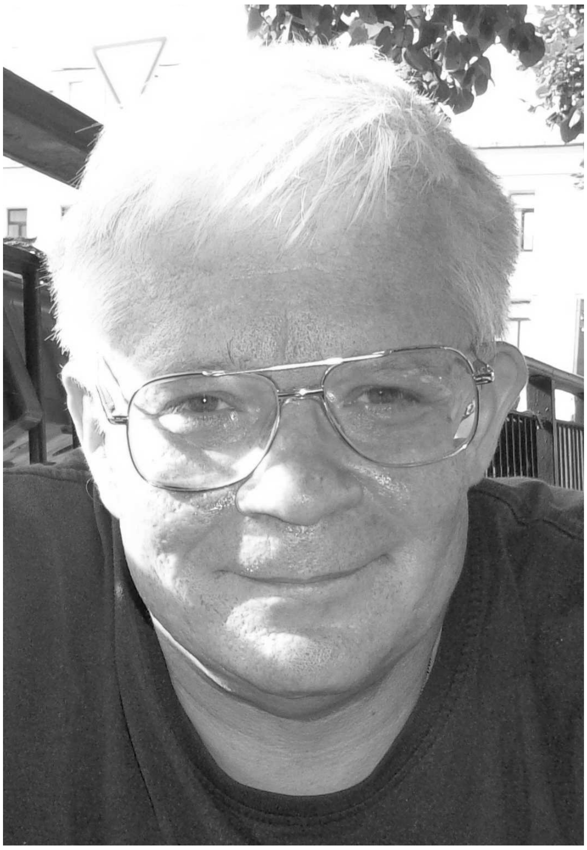
8. На борьбу за материалистическую диалектику в математике. Сборник статей / под ред. Э. Кольмана. - М., 1931.

Гушель Ревекка Залмановна,
г. Ярославль, научный сотрудник отдела
Истории математики и математического образования
Научно-практического центра
"Математическое просвещение".

E-mail: gushelr@yandex.ru

Памяти Алексея Геннадьевича Мякишева

От редакции



Редакция с прискорбием сообщает, что 22 августа этого года после продолжительной болезни на 54-м году жизни скончался постоянный автор нашего журнала Алексей Геннадьевич Мякишев.

Более двадцати лет Алексей Геннадьевич преподавал математику в Московском Химическом Лицее (школа № 1303), учитель высшей квалификационной категории (присвоена в 2000 г.). Руководил проектной деятельностью учащихся в Лицее МИФИ № 1511, был членом жюри многих олимпиад школьников, в частности, Олимпиады по геометрии имени И. Ф. Шарыгина, являлся автором многих олимпиадных задач по геометрии, участвовал в ряде семинаров для учителей, на которых щедро делился своими знаниями с коллегами.

А. Г. Мякишев — соавтор профильного учебника по геометрии для 10-го класса и автор задачника к этому учебнику. Кроме нашего журнала, он активно сотрудничал с журналами “Математика в школе” и “Математика в профильной школе. Фрактал”.

Читателям нашего журнала Алексей Геннадьевич запомнился как автор многочисленных статей по геометрии (см. список ниже), написанных оригинальным неформальным стилем, завораживающих красотой предлагаемых геометрических конструкций и элегантностью доказательств. В частности, он виртуозно владел методом барицентрических координат.

Выражаем глубокие соболезнования родным и близким покойного. Благодарим редакцию журнала “Математика в школе”,любезно предоставившую биографическую справку и фотографию.

Список публикаций А. Г. Мякишева в журнале “Математическое образование”

1. О некоторых преобразованиях, связанных с треугольником. - № 1(8). - 1999. - С. 2-24.

2. О дополнительной кубике Дарбу. - № 4(11). - 1999. - С. 19-30.

3. О некоторых свойствах точки Лемуана. - № 2(17). - 2001. - С. 51-73.

4. Об умножении точек относительно треугольника и о средне-геометрическом между обобщенными сопряжениями в треугольнике. - № 2(21). - 2002. - С. 96-107.

5. М-конфигурация треугольника. - № 4(27). - 2003. - С. 80-96.

6. О некоторых прямых, связанных с четырехугольником. - № 2(37). - 2006. - С. 7-17.

7. Конфигурация равенства. - № 1(45). - 2008. - С. 9-26; № 2(46). - 2008. - С. 29-44.

8. Об эквивалентности прямых Эйлера и Нагеля. - № 4(48). - 2008. - С. 16-33.

9. Прогулки по окружностям: от Эйлера до Тэйлора. - № 1(57). - 2011. - С. 17-39.

10. О некоторых окружностях, связанных с треугольником. - № 2(62). - 2012. - С. 49-65; № 3(63). - 2012. - С. 10-37; № 4(64). - 2012. - С. 41-62.

11. (Совместно с Д. С. Григорьевым) И снова о гипотезах Штейнгарца. - № 3(67). - 2013. - С. 40-56.

12. О некоторых “треугольных” кониках. - № 4(68). - 2013. - С. 39-57; № 1(69). - 2014. - С. 12-35.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru Раздел: Партнеры, журнал “Математическое образование”.

www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанным адресам.

Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2015 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2015 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ) и Российском индексе научного цитирования (РИНЦ).

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >