ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год девятнадцатый

№ 4 (76)

октябрь - декабрь 2015 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (76), 2015 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2015 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.12.2015 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (76), октябрь – декабрь 2015 г.

Содержание

Актуальные вопросы математического образования

И. П. Костенко. Уроки “ВТУ-реформы” (статья седьмая, заключительная) 2

Учащимся и учителям средней школы

А. А. Остапенко. Математика для старшеклассников: от фрагментарности к системности 22

Студентам и преподавателям математических специальностей

А. Ю. Эвнин. Задачи математического конкурса в ЮУрГУ 26

Т. В. Дудникова. О принципе предельной амплитуды для одномерного нелинейного волнового уравнения 53

Содержание образования: геометрия

Т. Эренфест-Афанасьева. Упражнения по экспериментальной геометрии (окончание) 59

Замечательные даты в мире математики и математического образования

Р. З. Гушель. Библиографические материалы к юбилейным датам 2016 года. I полугодие 72

Информация

От редакции. О деятельности ФМОП в 2015 г. 80

Уроки “ВТУ-реформы” (статья седьмая, заключительная)

И. П. Костенко

В предыдущих шести статьях [1 – 6] мы проследили историю реформ советского математического образования, начиная с 1918 г. до 1986 г. В данной, заключительной статье кратко опишем влияние идей и деяний реформы-70 (ВТУ-реформы) на качество образования в 1980-х гг. и далее по настоящее время. Представим обнаруженную нами динамику качества образования в виде диаграммы и проанализируем получившуюся картину. Постараемся сделать актуальные выводы из всего нашего длительного исторического исследования.

“Если русское общество еще жизнеспособно,
то эта жизнеспособность должна проявиться
в готовности и способности учиться у истории.”

Отец Сергий Булгаков (1909 г.)

1. 1980-е гг. Продолжение деградации

В 1988 г. преподаватели МАДИ провели тщательный анализ результатов вступительных экзаменов на дневное отделение по всем основным разделам школьной программы. Их вывод:

> “*По-прежнему* низок уровень знаний абитуриентов по *геометрии* и *тригонометрии*. Много ошибок допускают поступающие при проведении *числовых расчётов*... Эти недостатки в знаниях становятся уже *стабильными*, и надо серьёзно работать над устранением причин, их вызывающих (качество учебников, учебные планы, программы, планирование учебного материала и т.д.” [7 (1989, № 2), с. 56].

“Недостатки” отмечаются именно в тех разделах, которые грубо перестроены реформой. Но *причины видятся* не в учителях, как указывали “реформаторы”, а *в программах и учебниках*. Так что в 1980-х гг. реформа продолжала своё разрушительное действие.

Более того, преподаватели МАДИ провели сравнительный анализ результатов экзаменов (в %) по некоторым разделам программы с 1981 г. по 1988 г. и свели его в другую таблицу. Их вывод:

> “из таблицы видно, что *знания абитуриентов по большинству разделов программы становятся от года к году слабее*, особенно резкое ухудшение отмечается по геометрии ... и это несмотря на то, что задачи, предлагаемые на экзаменах, в некоторых случаях стали проще” [там же, с. 57].
>
> Примеры: в 1983 г. текстовую задачу правильно решали 48% абитуриентов (в 1988 г. – 42%); неравенства – 76% в 1981 г. (28% в 1988 г.); тригонометрические преобразования – 51% в 1981 г. (34% в 1987 г.); геометрия – 78% в 1981 г. (30% в 1988 г.)

Из той же таблицы можно вывести обобщённые показатели решаемости (будем так их называть): если в 1981 г. в МАДИ средний процент правильных решений по выделенным разделам был 72%, то в 1988 г. – 38%. **Падение в 1,9 раза — почти в 2 раза.**

Сходные проценты решаемости в конце 1980-х гг. дают преподаватели Московского педагогического института имени В. И. Ленина В. С. Копылов и С. В. Пчелинцев: от 25% (геометрия) до 49,4% (текстовая задача) [там же, с. 42 – 43].

Заметим, оценки качества 1980-х сделаны иначе, нежели оценки по прошлым десятилетиям, — не по проценту положительных отметок (качество-1 и 2). Ситуация существенно изменилась: из-за ослабления абитуриентов и необходимости обеспечить набор вузы вынуждены были снижать трудность заданий и порой значительно завышать экзаменационные баллы абитуриентов. Поэтому теперь сравнение качества образования по среднему проценту решаемости заданий более объективно отражает реальность.

Вывод: **в течение первой пореформенной десятилетки качество математических знаний и умений выпускников школы (качество-2) к концу 1980-х гг., сравнительно с их началом, упало почти в два раза.**

Отметим, что через 10 лет после реформы-70 качественные симптомы некачества оставались теми же — *отсутствие элементарных знаний, в частности, знаний арифметики, неумение решать простейшие примеры и задачи, неспособность учащихся рассуждать, мыслить, понимать.*

> "Особенно плохо знают они *тригонометрию* и *геометрию*, слабо владеют техникой элементарных *преобразований*, не умеют *логически мыслить*, рассуждать, проводить доказательства" [8, с. 148].

Следует иметь в виду, что, начиная со второй половины 1970-х гг., мы не можем больше делать количественные оценки качеств-1 и 2, которые можно было бы сравнивать с предыдущими оценками. Необходимый для этого статистический материал исчезает из вузовских анализов, а тот, который изредка появляется, сильно искажает реальность (падает трудность заданий и завышаются оценки их выполнения). Мы можем только объективно констатировать **неизменную тенденцию массового падения качества знаний, вплоть до сегодняшнего "нуля"**.

Продолжался и процесс деградации личности учащихся. Приведём анализ принципов, методов и результатов реформы-70, сделанный кандидатом психологических наук А. Левиновым в 1986 г. — анализ с точки зрения профессионального психолога.

> "Наблюдая современную школу, где *непрерывно меняются* учебники и учебные программы, вводятся одни дисциплины и отменяются другие, изменяется число лет обучения и возраст, с которого оно начинается, понимаешь, что неблагополучие коренится в самой основе.
>
> Сегодня уже можно подвести кое-какие итоги многолетнего эксперимента, *в корне изменившего* за последние пятнадцать-двадцать лет содержание и стиль школьного обучения[1] ... *радикально повлияла на школу идея повышения научности преподавания.* Эта идея предполагала, что содержание учебных курсов должны разработать учёные. Им же было дано право написать учебники. Как и следовало ожидать, *доктора и академики написали книги, недоступные рядовому школьнику*: тексты учебников, подбор и количество упражнений наглядно демонстрируют, что *их авторы совершенно не понимают, на кого вообще рассчитаны учебные пособия.* Раньше люди, писавшие учебники, хорошо знали дело учителя. Они понимали, что сложность должна нарастать постепенно, пройденное нужно тщательно отрабатывать, повторять и закреплять. Учебники были настолько доступны, что школьник, пропустивший занятие, мог сам разобраться в соответствующем материале. Сейчас это невозможно ... можно с уверенностью сказать, что существующая система обучения себя не оправдала. *У современного ученика ... память значительно хуже, чем у тех, кто учился по старой, "донаучной" программе. Он меньше знает и существенно хуже соображает.* Совершенно очевидно, что нужны *решительные* изменения в системе школьного образования. Изменения, основанные *на вечных правилах*: интеллект создаётся только в результате большой и постоянной умственной нагрузки; человеческая память

[1] Психолог подтверждает, — то, что было сделано со школой, нельзя называть реформой, это был "слом".

> устроена так, что нужно систематическое повторение и закрепление пройденного; нужны ежегодные переводные экзамены"[2].

"Решительные изменения" продолжали вноситься в наше образование сразу после реформы-70 и до настоящего времени (профессионализация, демократизация, гуманизация, информатизация, ЕГЭизация и пр., и пр.), только направлены они были не на улучшение, а на дальнейшее разрушение. "Вечные правила" для этого не понадобились.

2. Процентомания и коррупция

"Процентомания" — ещё один результат реформы-70, стратегически ценный для будущего разрушения страны. Его можно рассматривать как объективный показатель качества образования: чем хуже качество знаний, тем выше должен быть процент успеваемости. Эту закономерность мы увидим чуть ниже.

Официальное отношение к процентомании в 1940 – 1950-х гг. Феномен "процентомании" существовал до реформы, до министра М. А. Прокофьева, и это, в известном смысле, закономерное явление в условиях массовой школы. Эта бюрократическая практика была осуждена на самом высшем государственном уровне, в Постановлении СНК СССР 1944 г. Нарком В. П. Потёмкин издал 25 января 1944 г. приказ "О социалистическом соревновании в школах". Замечательно содержание этого краткого приказа.

> "Социалистическое соревнование, механически перенесенное из области производства в учебную работу школы, *вредно отражается на качестве обучения и дисциплине* в школе ... приводит к искусственному завышению оценок успеваемости, ослабляет требовательность учителей... В результате таких *извращений основ* учебно-воспитательного дела во многих школах формальные показатели растут, а в действительности учащиеся не становятся грамотнее и образованнее, ... прекратить практику социалистического соревнования в школе среди учащихся и учителей... **Запретить(!) неправильную и вредную практику оценки школы и учителя на основе средних процентов успеваемости учащихся** *...устранить всякое давление на учителя* в оценке успеваемости учащихся, возложив на него персональную ответственность за правильность оценки успеваемости учащихся" [9, с. 179].

Следующий министр просвещения РСФСР, И. А. Каиров, выступая с обстоятельным докладом перед лучшими учителями страны на августовском совещании в Москве в 1950 г., говорил:

> "нужно всемерно бороться с могущей иметь место у некоторых учителей тенденцией добиваться стопроцентной успеваемости путём снижения требовательности к качеству знаний учащихся путём постановки завышенных оценок. Все такие факты надо немедленно разоблачать и подвергать суровому осуждению со стороны учительской общественности" [7 (1950, № 6), с. 6].

Удивительные для нас слова, — не правда ли? Почему же министр мог тогда так говорить? Потому что И. А. Каирову не было нужды скрывать подлинное качество своего образования, оно было реально высоким. Была достигнута государственная цель, жёстко поставленная перед образованием ещё в начале 1930-х гг., — дать стране грамотных специалистов. Отсюда следовало, что "центральной задачей была и остаётся задача борьбы за высококачественные и прочные знания учащихся" [там же]. За реальные знания! М. А. Прокофьеву же надо было скрыть реальное качество, которое упало в результате его реформы. Посмотрим, как он это делал.

Историю "школьного процента" проследила "Литературная газета" (ЛГ) в 1974 г. Первые симптомы отмечены в печати в 1953 г.:

[2] Известия, 08.02.1986.

> "впервые об этом заявила учительница А. Верашкина на страницах ЛГ. Это было 25 апреля 1953 г. ... Это беда наша и беда большая"[3].

В начале 1960-х гг. разговор вспыхнул снова.

> "откровенный *нажим на совесть учителя*, прямое или косвенное *принуждение*, бухгалтерский подход к педагогике — болезнь, захватившая многие коллективы"[4].
>
> "Процент у нас превратился в фетиш... В редакцию посыпались письма"[5].

Заметим связь: в начале 1960-х гг. школа стала учить по новым реформаторским программам, и сразу же у управленцев появляется необходимость "*принуждать*" учителей повышать проценты успеваемости.

Второй взрыв приходится на начало 1970-х гг. (начало реформы). Заслуженная учительница школы РСФСР О. Челпанова:

> "за последнее время нажим на "процент" явно усилился"[6].

Летом 1974 г. Учительская газета (УГ) пригласила министра М. А. Прокофьева ответить на вопросы учителей. Его ответ:

> "Надо бороться за каждого ученика, за его успехи в учении, за всестороннее развитие его личности, за коммунистическую воспитанность... Мы не имеем права допускать "обесценивания" среднего образования"[7].

Какое лицемерие!

В 1974-76 гг. Литературная газета провела длительную дискуссию на тему "Этот загадочный школьный процент".

> "Редакция получила свыше тысячи писем ... География откликов представляет всю страну"[8].
>
> "На страницах ЛГ были опубликованы десятки писем учителей о "загадочном школьном проценте" ... назывались конкретные адреса ... В ходе дискуссии большинство участников считали, что необходимо устранить сами условия, порождающие процентоманию, то есть *формализм в оценке работы школы*"[9].
>
> " "Процентомания" треплет нервы учителя, унижает его человеческое и профессиональное достоинство, ... приносит огромный вред всем, кто участвует в работе школы, ... нравственно калечит часть учеников"[10].

В этой "дискуссии", конечно, много учительской боли. Но замечательно, что учителя понимают глубинную причину "живучести процентомании", связанную с реформой-70.

> "На первое место читатели ставят *трудности, связанные с освоением новых программ* и *перегрузкой* учащихся, что с неизбежностью толкает учителя при оценке знаний к применению пресловутого принципа "три пишем — два в уме". ... Разбухли

[3] Литературная газета, 23.10.1974, с. 11.
[4] Известия, 17.01.1964.
[5] Учительская газета, 11.12.1965.
[6] Учительская газета, 21.03.1970.
[7] Литературная газета, 23.10.1974, с. 11.
[8] Литературная газета, 23.04.1975, с. 12.
[9] Литературная газета, 17.11.1976, с. 12.
[10] Литературная газета, 23.04.1975, с. 12; 23.10.1974, с. 11.

> программы непомерно и нередко за счёт ненужных частностей ... Но договорились ли учёные-педагоги о самом понятии ОБЩЕГО среднего образования, о его определении и объёме[11]? ... Сегодняшние школьные программы — это скорее набор *разнородных* и поверхностных специальных знаний, чем продуманная система ОБЩЕГО образования. Этот мотив повторяется в очень многих письмах, написанных как родителями, так и учителями"[12].

Перекладывание вины на учителей. В начале 1983 г. ЛГ пригласила того же Прокофьева и представила ему письма читателей. Вот отрывок из письма О. Мережко:

> "как это может быть, чтобы в огромной стране было 97 с лишним процентов успевающих учеников? Теперь поставлена новая задача: половина из них должна успевать без троек... Сама задача порождает приписки в цифрах, что губительно для нравственного воспитания школьников"[13].

Ответ министра:

> "по данным Всемирной организации здравоохранения, примерно два процента детей не способны усвоить программу среднего образования ... Все остальные подростки ... могут справиться с программой. Именно этого (?) и требует Минпрос от педагогов страны ... вы научите ребят своему предмету ... А вы умеете только применять двойку, как кнут, между тем нынешние дети кнута не боятся ... Так что учитесь работать творчески, без кнута. Не хотите, не можете — оставьте учительскую профессию ... Цифра 97 процентов кажется читателю нереальной. Что ж, мы и сами не делаем культа (?) из этой цифры. Такие сведения поступают из школ" [там же].

Надо ли комментировать ответ? Министерство, значит, не при чём. Обычная для "реформаторов" лицемерная подмена смыслов: "формализм в оценке работы школы" (его смысл — "показуха", имеющая целью скрыть низкое качество знаний) подменяется "заботой о ребятах". В неумении учить министр обвиняет тех учителей, которые болеют за истинное качество, не могут ставить лживых оценок, которые хотят и умеют учить.

И этот подленький приём используется руководством школ (вузов) и министерскими функционерами до сих пор. В 2010 г. учителя пишут:

> "Очень обидно слышать слова главы Рособрнадзора Л. Н. Глебовой, выступающей на разных каналах ТВ, о том, что в низких результатах ЕГЭ виноваты учителя. В сущности, она повторяет лозунг советских времён: нет плохих учеников, есть плохие учителя" [7 (2010, № 10), с. 67].

Поправим, — это не лозунг "советских времён", это лозунг "реформаторов". С 1930-х и до середины 1950-х не было слышно публичного упрёка со стороны управленцев в адрес учителей. Наоборот, лучшие учителя награждались, а упрекались те, кто ставил завышенные оценки. Первые упрёки учителя услышали в 1958 г. от редакции журнала "Математика в школе" сразу после того, как в 1956 г. из школы (семилетки) были выведены учебники Киселёва, что повлекло снижение качества знаний. "Реформаторы" переложили вину за это снижение на учителей: "основной причиной ... является низкий теоретический и методический уровень преподавания" [7 (1958, № 4), с. 2]. И с тех пор управленцы взяли на вооружение этот подленький приём. С тех пор началось непрерывное унижение учителей управленцами всех уровней.

[11] Этот же вопрос задавал академик А. Н. Тихонов главному разработчику нового содержания образования А. И. Маркушевичу. Ответа не было.

[12] Литературная газета, 23.04.1975, с. 12.

[13] Литературная газета, 19.01.83, с. 12

Глубинную причину “живучести” этого метода, живучести “процентомании” назвали учителя в 1975 г., и она связана с непосильностью программ, введённых в школу реформой-70. Причина эта действует до сих пор потому, что до сих пор живут в нашем образовании дела тех “реформаторов”.

Стратегический смысл “процентомании”. С её помощью были надёжно закреплены и официально спрятаны результаты реформы. Были заблокированы у управленцев и учителей стимулы реального повышения качества обучения и качества знаний учащихся. Более того, дан стимул и оправдание профессиональной и моральной деградации учительского корпуса и развращения учащихся. Подлинный смысл прокофьевской политики “процентомании” — *закрепление процесса деградации образования.*

Стратегический результат этой политики - падение интеллектуального потенциала страны. И этот результат явно проявился в тех же 1980-х гг. Инженер В. Анохин (Химки) пишет:

> “в системе школьного обучения, где в угоду показателям нерадивым ученикам “натягивают” тройки ... В вечерние, заочные, а теперь и в дневные вузы принимают с теми же “натянутыми” тройками... На мой взгляд, студент-троечник не имеет права на диплом инженера... Сейчас процесс наполнения инженерного корпуса посредственными инженерами принял форму прогрессирующей болезни, которая буквально поражает все инженерные и даже учёные инстанции”[14].

Начало коррупции. Массовое падение качества знаний закономерно породило управленческую процентоманию. Процентомания сняла контроль с качества оценок и, в свою очередь, ударила по лучшим учителям, создав предпосылки для процветания худших. Тем самым были созданы социальные условия для коррупции в самом широком смысле — коррупции профессиональной, моральной и уголовной. Коррозия охватила всех — управленцев, учителей, учащихся, родителей. Яркое подтверждение — огромный рост числа фиктивных медалистов.

> **1968 г., МГПИ:** “из 81 медалистов ... только 15 ... получили на письменном и устном экзаменах по математике “5”, 12 получили оценку неуд.” [7 (1969, № 2), с. 30].
>
> К концу 1960-х гг. имеем 81% “липовых” медалистов, из них 15% “двоечников”.
>
> **1979 г., МЭИ:** “Из 213 медалистов, подавших заявления в наш институт, лишь 44 человека получили на письменном экзамене оценку «5»” [7 (1980, № 3), с. 38].

К концу 1970-х — стабильно 80% “липы”.

> **1988 г., МАДИ:** “из 69 медалистов, сдававших экзамен на I потоке в 1988 г., все 10 задач решили 9 человек, 5 задач — 5 человек, 7 медалистов не решили ни одной задачи” [7 (1989, № 2), с. 57].

К 1990-м имеем уже 85% “липовых” медалистов, и 12% из них — настоящие “двоечники”.

Факт всплеска в печати писем о “процентомании” в начале 1960-х гг. и факт резкого роста в это же время числа “липовых” медалистов (до 80%) позволяют сделать вывод, что *начало коррупции следует отсчитывать с 1960-х годов.* Первопричиной является резкое падение качества образования в начале 1960-х, вызванное заменой учебников Киселёва и первой “реформаторской” перестройкой программ. После “реформы-70” замечается рост “липы” — с 80% до 85%.

Под нажимом вузов медалистов заставили сдавать вступительные экзамены. Но тогда следовало бы отменить медали вообще, ибо они перестали выполнять свою роль стимула повышения качественного учения, для каковой цели и были введены в 1943 г. Заметьте, министерские управленцы даже не стали возрождать контроль над качеством медальных оценок, потому что эта

[14] Газета “Известия”, 10.01.1984.

мера поставила бы вопрос о контроле над всеми оценками, что повредило бы красивую картину, которую рисовала процентомания. К тому же, признание ложности всех официальных оценок качества заставило бы управленцев решать эту проблему, т.е. серьёзно и ответственно работать, чего они уже не умели.

Наконец, надо должным образом оценить тот очевидный факт, что деградация образования идёт на протяжении тридцати лет[15] (начиная с 1960-х), коррупция растёт и *всё это время всё это не волнует управленцев*, действия которых направлены не на решение проблем, а на имитацию решения. Поразительное легкомыслие и безответственность? Или сознательная политика с намеченным результатом? Не забудем, что в 1940-х – начале 50-х гг. управленцы сознавали всю опасность этой тенденции и блокировали её. Они были умнее?

Так проникала во все поры общества и становилась нормой жизни многообразная и очевидная всем ЛОЖЬ, которая закономерно вела к деградации не только образования, но и всего государственного управления и, в конечном счёте, привела к краху государства в 1990-х.

3. 1990–20??. Гниение

В 1990-х процесс деградации, запущенный реформой-70, лавинообразно продолжался. Новые управленческие “инициативы” поддерживали и стимулировали этот процесс. Основных “достижений” реформы (программы, учебники) управленцы не касались. Сегодня мы видим конечный результат “реформы” — полное отвращение учащихся к учёбе (“низкая учебная мотивация” — по официальной терминологии) и абсолютную безграмотность выпускников школы во всех областях знания. Многочисленные факты, подтверждающие этот вывод, приведены в первой статье цикла [1]. Напомним некоторые.

1996. Газета “Первое сентября” на основании многочисленных учительских опросов делает вывод:

> “Больше половины старшеклассников не знают предмет даже на тройку — вот главная беда школы”[16].

2001. Заместитель министра образования РФ В. Болотов признал, что 70% школьников “не осваивают математику и физику”[17]. Так что неопределённая фраза “более половины” уточняется так: 70%.

2001. Газета “Эксперт” сообщила результаты международного исследования:

> “большая часть подростков в России испытывает трудности с *пониманием* содержания текстов”[18].

Если же говорить прямо, — школьники не умеют читать! Не понимают смысла слов!

2000. Результаты вступительных экзаменов в МАДИ:

> “не решили н и о д н о й задачи (из 10. – И.К.) 30% абитуриентов и только 35% решили не менее 4 задач... Но самую большую трудность, как и всегда, вызывают задачи по геометрии (задачи 9 и 10): их решил всего 1% экзаменующихся” [7 (2002, № 2), с. 63].

Заметим, — 65% абитуриентов решили менее 4 задач из 10, или 1-2 задачи из 5, т. е. по стандартным меркам, получили “двойку”. Заметим также, — процент “не менее 4 задач” включает

[15] Напомним, что здесь мы ведём речь о 1980-х гг.

[16] Газета “Первое сентября”, 1996, № 4, с. 1.

[17] Учительская газета, 2001, № 34-35, с. 9. Эти данные “озвучивали” и другие представители Правительства РФ, например В. Матвиенко (Учительская газета, 2001, № 37, с. 5).

[18] Эксперт, 2001, № 46, с. 11.

часть “двоек” (“тройка” ставится за 3 правильно решённые задачи из 5, или 6 из 10). Так что если к 65% добавить процент “двоек”, включённый в категорию “не менее 4 задач”, мы и получим процент, опять приближающийся к 70%, если не больше.

Так что в 1990-х гг. был статистически установлен процент некачественного образования (процент “двоек”), скажем так: около **70%**. Следовательно, процент допустимого качества, **качество-2 - около 30%**. Не забудем, что эта оценка сделана по другим, резко заниженным нормам, нежели дореформенные оценки.

Качество-1 — не более **10%**, если судить по международным данным 1995 г.:

> “По математике **10%** российских учащихся (7-8 классов. – И.К.) имеют наивысший уровень подготовки” [11, с. 8].

Посмотрим теперь, что изменилось через следующие 10 лет?

2009. Преподаватели МАДИ провели тестирование своих первокурсников и сравнили его результаты с их же результатами ЕГЭ:

> “меньше 60 баллов по ЕГЭ набрали 58%, а по тестированию — 80%, т.е. результаты по ЕГЭ сильно завышены” [7 (2010, № 2), с. 42].

Оценим этот результат с точки зрения качеств-2 и 1. “Меньше 60 баллов по ЕГЭ” — это, в сущности, значит, что решены не более 11 задач из 20 (не более двух задач из пяти) и по пятибалльной системе это оценка меньше “тройки”, т.е. “двойка”. Если оценивать качество процентом выпускников, знающих школьный курс математики не менее, чем удовлетворительно (качество-2, в нашей терминологии), то выборка МАДИ оценивает это качество в 20%.

Если же оценивать качество настоящим качеством, т.е. процентом хороших и отличных знаний, то по данным тестирования МАДИ придётся принять его за 2,4%, если не ниже [там же, с. 42].

Этот процент согласуется с результатами ЕГЭ в целом по стране:

> “доля выпускников с хорошими (более 75) и тем более отличными (более 90) баллами ничтожно мала” [там же, с. 57].

Процент МАДИ (2,4%) согласуется и с результатами международного тестирования PISA-2009:

> “продвинутым математическим мышлением и умением проводить рассуждения” обладают 3,6%[19] наших 15-летних школьников.

Итак, *численная оценка официально допустимого качества (качество-2) математического образования* **2009 г.** *может быть принята за* **20%** *(примерно 80% абитуриентов знают математику на “двойку”, а точнее, не более чем на “единицу”). Оценку же настоящего качества (качество-1) придётся принять за* **2,4%** *(процент хороших и отличных знаний).*

Важно, что те же самые “недостатки”, которые фиксировались в 1978 г. фиксируются и через 30 лет (дроби, вычисления, уравнения, логика, обессмысленность действий):

> “плохое знание таблицы умножения; непонимание алгоритма решения системы линейных алгебраических уравнений...; неправильное применение формул для нахождения корней квадратного уравнения...); незнание элементарных действий с обыкновенными дробями” [7 (2010, № 2), с. 65].

[19] В журнале нет этих процентов, а есть фраза, из которой они следуют: “71% российских 15-летних учащихся ... достигли порогового уровня... Из них чуть более 5% обладают продвинутым мышлением и умением проводить рассуждения” [7 (2011, № 3), с. 71].

К новым “недостаткам” (незнание таблицы умножения) можно добавить сокращение на “икс” дроби “синус икс, делённое на икс”, незнание площади параллелограмма, треугольника, прямоугольника и др. **Эти новые “недостатки” говорят не о снижении качества знаний, а об их полном отсутствии.**

“Недостатки” эти свидетельствуют, прежде всего, о *незнании арифметики* современными претендентами на высшее образование. А ведь арифметика — это фундамент всего математического образования. Фундамент, следовательно, разрушен. И мы знаем, кем и когда были заложены мины под крепкий когда-то фундамент, — напомним некоторые идеи, внедрённые в реформаторскую программу 1960 г.:

> “Необходимо перестроить курс арифметики таким образом, чтобы основное внимание в нём уделялось не обыкновенным дробям, ... а *десятичным* ... целесообразно (?) изучать их в V классе не после обыкновенных дробей, а перед ними... В то же время курс арифметики нуждается в существенной разгрузке...” [7 (1959, № 1), с. 41 – 42].

Второй важнейший факт, который вскрывают эти “недостатки”, — *атрофию способности осмысленно воспринимать знания*, что доказывает эффективность о т у п л е н и я молодёжи современным российским образованием. И школьники, и студенты в подавляющем большинстве стали необучаемыми.

Всё это доказывает, что **общего математического образования у нас больше н е с у щ е с т в у е т**.

Деградация личности молодёжи. В 2000-х гг. стала отчётливо заметна *атрофия памяти* учащихся, — многие не могут держать в сознании более одного элемента мысли (“однобайтовая память”). Предельный результат обессмысливания обучения. Практика показывает, что объяснения преподавателя, которые как будто поняты учащимися, забываются на следующий день почти бесследно.

Ухудшение памяти учащихся, как и паралич мышления, тоже берёт начало с реформы-70. Напомним приведённое выше заключение психолога:

> “У современного ученика ... память значительно хуже, чем у тех, кто учился по старой, “донаучной” программе. Он меньше знает и существенно хуже соображает”.

Очень важное, почти медицинское заключение. Подлинно научное заключение о деградации личности учащихся. Самый страшный результат реформы-70, о котором никто не говорит, и весь трагизм которого как будто не осознаётся обществом.

Переход падения в гниение. Когда некачественные продукты застаиваются, процесс ухудшения их качества переходит в стадию разложения. Так и процесс деградации нашего образования перешёл из стадии падения (1956 – 1991гг.) в стадию *гниения* (1990-е гг. и далее). На этой стадии собственно учебные факторы (содержание обучения, методика, учителя, учебники) перестали действовать на учащихся и полную монополию получили социальные факторы, включённые “демократическими” реформами 1990-х, — проповедь индивидуализма, практицизма, выгоды и удовольствий. Главным достижением этих реформ в образовании стало массовое освобождение детей от ответственности и от желания учиться. Но не забудем, что это освобождение было подготовлено реформой-70, сделавшей обучение непонимаемым. Напомним отрывок из письма тринадцати старшеклассниц 1980 г.:

> “Нам никак не одолеть программу по математике. Вот и ходим мы в “дебилах”, как называют нас учителя” [10, с. 104].

Сегодня речь идёт уже о массовой математической безграмотности школьников и студентов, об абсолютной *безграмотности* 80% претендентов на высшее образование. Остальные 20% — это способные ребята, которые, конечно же, что-то схватывают в процессе обучения, но их знания не поднимаются выше "тройки". Раньше, до реформы, такие ученики учились на "отлично", а больше половины тех, кто сегодня находится в "двоечниках", в начале 1950-х гг. могли бы учиться на "хорошо". И лишь мизерная часть (менее 1%) может быть сегодня оценена как имеющие качественные практические знания (благодаря репетиторству). Да и это качество требует дополнительной проверки, потому что оно основано на данных письменных работ, по которым нельзя вполне оценить знание и понимание теории.

Приведём подтверждение последней оценки результатами ЕГЭ-2012 и 2013:

> "Уровень предлагаемых заданий настолько низкий, что непонятно, как отбираются абитуриенты в технические вузы. Качество математического образования упало до такого уровня, что для получения удовлетворительной оценки за курс средней школы выпускнику предлагают по графику изменения температуры в течение суток определить, когда температура была наибольшей" (учительница Т. Н. Дацюк, г. Сызрань) [7 (2013, №3), с. 6].

По данным ЕГЭ-2013 средний балл, переведённый в пятибалльную шкалу, чуть больше 2, а **оценка качества-1 по всей стране составляет менее 1%** [7 (2013, № 7), с. 33].

4. Общая картина динамики качества знаний за 80 лет

В третьей статье мы построили диаграмму динамики качества знаний абитуриентов, охватывающую промежуток от 1931 г. до 1956 г. [3, с. 33]. Достроим её до 2013 г. Учтём сделанные в четвёртой и пятой статьях оценки качества 1960 г. [4, с. 8] и 1970 г. [5, с. 17]. Учтём выявленные в статье шестой и седьмой тенденции падения качества-2 на промежутках от 1970 до 1978 гг. [6, с. 2 – 5] и от 1978 до 2013г. Поскольку у нас нет достоверных оценок качества-2 в узловых точках (1978, 1991, 2009), а есть подтверждение тенденции его падения, то на рисунке обозначим эти тенденции пунктиром. Учтём также установленное выше падение качества-2 примерно в 2 раза на промежутке от 1978 до 1991 г. Учтём и значения качества-1: в 2009 г. — 2,4%, в 2013 г. — менее 1%. Получается вот какая картина:

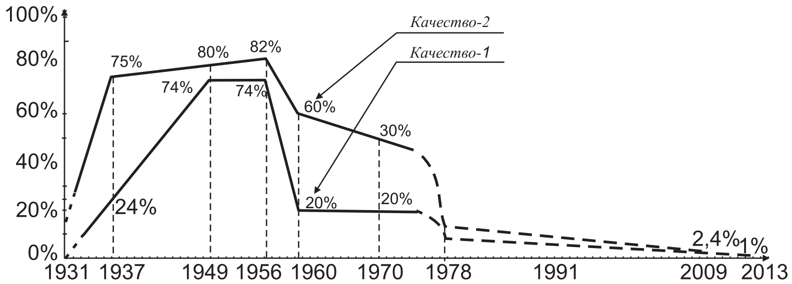


Рис. 1. Тенденции изменения качества знаний выпускников школ с 1931 г. по 2013 г.

Субъективное противоречие. Обратим внимание на то, что возникающая в результате нашего исследования картина вроде бы не согласуется со всеобщим ощущением резкого падения качества знаний школьников в 1990-е и особенно в 2000-е годы. Наверное, надо объяснить это противоречие — между субъективным ощущением и результатами объективного исследования.

Мы легко забыли, что ещё в конце 1970-х гг. качество знаний опустилось недопустимо низко. Журнал "Коммунист" в 1980 г. официально признал, что

> "в знаниях абитуриентов обнаруживаются серьёзные пробелы, о которых раньше не было и речи ... оказались утраченными многие весьма необходимые знания и навыки (в том числе арифметического *счёта*, решения алгебраических *уравнений* и *неравенств, тригонометрических* и *геометрических* построений и преобразований и пр.)" [10, с. 110].

С тех пор эти “недостатки” не только не исправлялись, а прогрессивно усугублялись и к началу 1990-х качество знаний уже опустилось практически до нуля: “70% не осваивают математику”, а те, кто “осваивают”, в большинстве имеют всё те же “серьёзные пробелы” в знаниях и навыках.

С 1990-х и особенно в 2000-х гг. мы наблюдаем массовое разложение даже тех крох знаний, которые прежде имели “двоечники” (незнание таблицы умножения, неумение складывать дроби, незнание площади круга, параллелограмма и пр.). И вот это наше изумление перед столь невероятным результатом современного образования, происходящим на наших глазах, вызывает ощущение резкого падения качества “здесь и сейчас”. Мы вдруг увидели то, чего старались не замечать в течение двадцати с лишним лет после реформы-70, — увидели себя “на дне” и ужаснулись.

Естественно, мы ищем объяснения и невольно связываем это падение с ЕГЭ, которое у всех перед глазами. В то время как ЕГЭ никак не могло повлиять на появление всех тех “недостатков” в знаниях, которые отмечались выше, а всего лишь проявило для общества конечный результат длительного процесса деградации, заданного ВТУ-реформой в 1956 г.

Сделаем **анализ итоговой диаграммы**. Она показывает, что весь 80-летний промежуток делится на три периода: 1) 1931-1956 гг. — рост качества; 2) 1956-1978 гг. — падение качества; 3) 1978-2013 гг. — сползание качества практически до нуля.

Первый период делится на три части:

1931-1937 гг. — резкий рост качеств-1 и 2 до приемлемого высшей школой уровня. Это связано с восстановлением традиционных образовательных структур и методов обучения, направляемым мощной государственной волей;

1937-1949 гг. — продолжение того же среднего темпа роста качества-1 и значительное замедление роста качества-2. Массовое распространение классических принципов и методов обучения. Требовательное, ответственное и компетентное управление;

1949-1956 гг. — стабилизация и внутреннее совершенствование качества-1 и небольшой рост качества-2. Совершенствование программ, методов обучения и управления в условиях стабильности.

Второй период тоже делится на три части:

1956-1960 гг. — резкое падение качества-1 (в 3,5 раза) и качества-2, вызванное первым вторжением “реформаторов” в программы и методы обучения (подрыв методики обучения решению задач, замена учебников Киселёва и Рыбкина). Подмена цели обучения (вместо повышения качества знаний — “связь школы с жизнью”);

1960-1970 гг. — стабилизация качества-1 и продолжение падения качества-2 с замедлением. Приспособление учителей к новой программе и учебникам. Подрыв “реформаторами” классической схемы урока (ликвидация домашних заданий). Захват и бюрократизация ключевых управленческих позиций и структур (создание Министерства просвещения СССР). Начало “процентомании”.

1970-1978 гг. — обвальное падение качеств-1 и 2 в результате реформы-70, деградация личности учащихся. Рост процентомании и коррупции. Полная некомпетентность и безответственность управленцев. Анемия высшей власти.

Третий период можно разделить на две части:

1978-1991 гг. — продолжение падения качеств-1 и 2 в два раза. Закрепление всех достижений реформы-70 (программы, учебники). Ликвидация принципа стабильного учебника (вариативность). Внедрение новых ложных идей (политехнизация плюс профессионализация, компьютеризация, демократизация и пр.). Хаотизация учебного процесса с помощью новых ложных методов и учебников (Давыдов-Занков-Аргинская и пр.);

1991-2013 гг. — стабилизация качеств-1 и 2 практически на нулевом уровне, всеобщее разложение элементарнейших знаний, продолжение деградации личности учащихся под влиянием демократических социальных инноваций начала 1990-х гг.

5. Выводы из диаграммы

1. К **1937 г.** качество-1 достигалось во многом за счёт учащихся с повышенными способностями (их, будем считать, примерно 20%), а качество-2 — со средними способностями (их примерно 60%).

2. К **1949 г.** огромная масса средних учащихся (50%) поднялась до хороших за счёт массового распространения в преподавании классических принципов обучения.

3. К **1956 г.** происходит практическая стабилизация качеств-1 и 2 на уровне 75-80%, т. е. процесс улучшения качества образования приходит к своему пределу.

4. Пик роста качества-2 на уровне 82% позволяет сделать обоснованный практикой вывод: *примерно 20% учащихся массовой школы не могут овладеть программой по не зависящим от методов обучения причинам.*

5. Пик роста качества-1 на уровне 74% доказывает, что примерно три четверти учащихся массовой школы могут учиться на "хорошо" и "отлично" при правильно поставленном ответственном обучении, правильной методике и доступных учебниках.

6. К **1960 г.**, всего за 5 лет начавшихся реформ, образование отброшено к уровню 1935 г., т.е. на 25 лет назад. Допустимое качество поддерживалось сильными учащимися (20%) и частью "средних" (40%), а 20% из числа "средних" перешли в разряд "двоечников" из-за ухудшения методики обучения и ликвидации понятных учебников.

7. К **1970 г.** продолжалось падение качества-2, но оно замедлилось, благодаря усилиям учительства.

8. К **1978 г.** "реформаторы" отбросили наше образование на 50 лет назад, к 1920-м годам. Уничтожения классической методики, программ и учебников не выдержали ни учителя, ни лучшие учащиеся.

9. К **1990 г.**, всего за десятилетие качество упало в 2 раза за счёт удержания управленцами принципов реформы в программах и учебниках.

10. С **1991 г.**, года новой российской "демократической" революции начинается качественно новый процесс *застойного гниения* нашего образования, несмотря на все беспрерывные министерские инновации, имитирующие управление.

И ещё один важный вывод следует сделать:

11. **Качество образования страны определяется не двадцатью процентами способных учащихся, а шестьюдесятью процентами "средних".** Именно на них, **на "средних", должно ориентироваться образование страны, а не на элитные и специализированные школы**. Целью должно быть массовое поднятие качества знаний и умственного развития "средних", поскольку именно они определяют эффективность функционирования всех структур общества.

И мы можем сегодня вполне согласиться с этим утверждением, видя, как наши невежественные "средние" управители на всех уровнях не могут решить ни одной социальной и государственной проблемы. Наш нынешний "средний" управитель имеет возраст до 50 лет, он кончал пореформенную школу, которая приучила его к бессмыслицам, к безответственности и к имитации учения и любой деятельности. Это качества на всю жизнь.

6. Стратегические следствия реформы-70

1. **Падение качества специалистов и, как следствие, техногенные катастрофы.**

Это падение и его связь с функционированием инфраструктуры страны, как мы знаем, было замечено сразу после реформы, в 1980-х гг. Добавим последние данные:

> “С 2000 года ... затонули две атомные подводные лодки... Целое созвездие спутников рухнуло на землю. Произошло 45 авиакатастроф”[20].

Добавим страшную аварию на Саяно-Шушенской ГЭС, ряд аварий на шахтах и пр., и пр. Зампред правительства РФ, отвечающий за ВПК страны, Д. О. Рогозин сокрушается:

> “мы всегда считали, что живём в космической державе, ... а тут вдруг (?) за последние полтора года семь аварий”[21].

2. **Падение научного, технического, культурного и вообще интеллектуального и духовного потенциала всей страны.**

Напомним строгие научные данные, измеряющие этот признак:

> “наукометрический анализ научных открытий СССР за последние сорок лет показывает, что 34% всего фонда научных открытий было сделано в 50-е, 46% — в 60-е, 18% — в 70-е и только 2% — в 80-е годы”[22].

В период 1950-60-х гг. было сделано 80% научных открытий, а после реформы — 2%!

3. **Реформа-70 предопределила дальнейшую историю страны, создав необходимые предварительные условия для так называемой “демократической” революции-91.**

Без массового шокового опускания в 1970-х гг. интеллектуального, морального и культурного уровня молодёжи была бы невозможна переориентация её сознания с труда учёбы и дальнейшего профессионального служения обществу на добывание фиктивных, по сути, дипломов и последующее мещанское потребленчество, вещизм и гедонизм. Только такую молодёжь, лишённую знаний и отученную понимать суть явлений, можно было увлечь “демократическими” идеалами, проповедью свободы, лёгких денег и удовольствий.

7. В чем же коренная причина почти шестидесятилетней деградации?

Теперь, имея полную картину динамики качества нашего математического образования (рис. 1), можно ответить на этот важнейший вопрос. Мы знаем начальную точку, с которой начался этот процесс (1956 г. — 74% качественных знаний), знаем узловые точки резкого падения (в 3,5 раза — 1960 г.) и обвального падения качества (1978 г.), знаем конечный результат (менее 1% качественных знаний в 2013 г.) и знаем причины.

В сущности, все эти долгие годы последовательно реализовывалась **одна глобальная “ВТУ-реформа”**, задуманная группой “реформаторов” в 1936 г. и начатая ими в 1949 г. Все эти годы наше математическое образование (школьное и вузовское) находится под воздействием “реформаторской” идеи высокого теоретического уровня (ВТУ) преподавания математики (эта идея живёт в учебниках и программах). Задача “повышения ВТУ” была поставлена перед АПН А. И. Маркушевичем в 1949 г. Эта ложно-привлекательная цель подменила традиционную — дать учащимися глубокие и прочные знания. Сначала подменила, а затем уничтожила!

Этой идеей направлялись все “ВТУ-инновации”, которые внедрялись в образование на протяжении всех этих лет: 1) *вымывание* из обучения системы типовых арифметических задач; 2) беспредельная *перегрузка* программ высшей математикой и *смешение* её с элементарной математикой (*хаотизация*); 3) замена доступных учебников Киселёва и Рыбкина *непонятными* ВТУ-учебниками; 4) *теоретизация* программ и учебников, замена изложения, основанного на классических законах дидактики, “научным” изложением — абстрактным, строго формальным,

[20] Наш современник. - 2012. № 6. с.149.
[21] Российская газета. - 13 сентября 2012, с.7.
[22] Газета “Поиск”. - 1993, № 14, с.4.

противоречащим возможностям и возрастным особенностям наглядно-действенного мышления детей.

В предыдущих и в этой статьях мы проследили, как внедрение каждой из этих "инноваций" (и других, сопутствующих) последовательно опускало качество знаний учащихся (в 1957 г., 1960-м, 1969-м, 1978-м). Кое-кто высказывает мнение, будто отрицательные результаты вызваны плохим исполнением. Но мы видели, что все эти результаты были предсказаны учителями (отсутствие навыков, незнание арифметики, неумение решать простые задачи, неумение логически рассуждать, мыслить, понимать).

В чём же причина неизбежности таких результатов? В том, что все "реформаторские" идеи и "ВТУ-инновации" *противоречат законам* классической дидактики и методики. *Законам!* А нарушение законов природы всегда ведёт к катастрофам.

Это сразу понял академик Л. С. Понтрягин, который в 1980 г. по свежим следам реформы-70 поставил точный диагноз и назвал коренную причину провала реформы-70: "**главный порок, конечно же, в самом ложном принципе**" — принципе-ВТУ, в нашей терминологии [10, с. 106].

Наше исследование всесторонне обосновало этот диагноз: 1) раскрыло содержание принципа-ВТУ; 2) выявило жёсткую связь всех реформаторских "ВТУ-инноваций" с конкретными недостатками в знаниях учащихся; 3) установило их противоречие законам дидактики и принципам русской классической методики, выработанных столетием развития русской школы[23]; 4) вскрыло аморальные методы "реформаторов" и механизмы настойчивого, пренебрегающего предостережениями учителей и самой Практики, последовательного внедрения этого принципа в программы, учебники и методику преподавания.

8. Сегодняшняя роль РАО и ВШЭ

Главным инструментом "реформаторов" всегда была организация, созданная ими в 1943 г. для подготовки и реализации реформы-70 — Академия педагогических наук РСФСР (АПН, ныне РАО — Российская академия образования)[24]. "Научная" деятельность этой организации в интересах "реформаторов", абсурдность "инновационных" академических теорий и "систем обучения" раскрыта в четвёртой статье цикла [4, с. 3 – 4, 12 – 16].

Сохранение ВТУ-инноваций. Сегодня, в 2015 г. все "вирусы", внедрённые "реформаторами" в организм нашей школы (в программы, учебники, методику) продолжают жить в уже почти безжизненном теле нашего образования, и дополняются новыми — внедряются новые элементы высшей математики (теория вероятностей), готовятся для школы элементы топологии (В. И. Глизбург).

Закрепление образования без знаний. Вместо того, чтобы проанализировать причины

[23]Более того, принцип-ВТУ (вирус-ВТУ) жил и утверждал себя именно за счёт уничтожения всех классических принципов русской школы. Принципы эти А. И. Маркушевич объявил в 1961 г. "устаревшими" и призвал заменить "устаревшие методы преподавания, заимствованные нами по наследству из гимназий и реальных училищ" [7 (1961, № 4), с. 17]. Т.е. обозначил и озвучил цель *уничтожения традиций русской школы* и, тем самым, уничтожения самой Души Русской школы.

[24]Есть основания полагать, что "реформаторы" были скрытыми инициаторами создания АПН, — им был нужен этот социальный орган, с помощью которого, как мы знаем, они подготовили и осуществили в 1970-х гг. то, что замыслили в 1936 г. До сих пор историки педагогики считали, что идея создания АПН принадлежит наркому В. П. Потёмкину. Однако недавно автор обнаружил в Архиве РАО документ, из которого следует, что идею эту предложил наркому некто И. А. Каиров, специализировавшийся на сельскохозяйственной (?) педагогике в отделе школ ЦК (1933 – 1937), затем зав. кафедрой педагогики МГУ. Его доклад В. П. Потёмкину "встретил у последнего живейший отклик" [Науч. Арх. РАО. Ф. 25. Оп. 1л/д. Ед. хр. 4379. Л. 38]. Он же разработал проект Устава и стал первым вице-президентом, а в дальнейшем и Президентом АПН. Возникает естественный вопрос — а кто предложил идею АПН цековскому специалисту по с/х-педагогике? Учитывая факт, что в состав членов-учредителей АПН и в Президиум АПН сразу вошёл главный идеолог "реформы", профессор того же МГУ А. Я. Хинчин, и учитывая последующую его деятельность в АПН [4, с. 2 – 4], логично предположить, что он и был истинным инициатором (не автором, а инициатором).

краха “реформы-70” (табу?) и признать ложность принципа ВТУ[25], академической педагогией РАО на смену недостижимой цели повышения ВТУ выставлена в 1990-х гг. новая ложная цель — обеспечить *развитие* детей (А. Г. Асмолов) без знаний.

Теперь вот появился *компетентностный подход*. Опять же, *без знаний*. На базе этой “научной” концепции Высшая школа экономики (ВШЭ) подготовила “программу перевоспитания (?) отстающих (?) школ” (как всегда, нерусский язык). Вот как ставит новую цель идеолог проекта, зам. научного руководителя НИУ ВШЭ Е. Г. Ясина, доктор экономических наук Лев Любимов:

> “надо учить *не столько* и не только знаниям, сколько способам обращения (?) со знаниями (не имея их? — И.К.), их применения, поиска, отбора, извлечения и наделения (?) собственными (?) смыслами. То есть учить *компетентности*”[26].

Какая вопиющая бессмыслица! За кого нас держат?

Сегодня АПН-РАО продолжает оболванивать бездумных управленцев и послушных учителей разнообразными лжетеориями “развивающего обучения”, “личностно-ориентированного”, “деятельностной парадигмы”, “компетентностного подхода”, и пр., и пр. Все эти “теории” не являются результатом трудной работы углублённого понимания законов обучения, их авторы, как всегда, подхватывают обрывки идей, витающих на Западе, и “творчески” перерабатывают их в лабораториях РАО, оторванных от реалий современной школы. Причина их регулярного обновления — в необходимости для РАО доказывать обществу и власти свою небесполезность. Реальная же цель — не допустить возвращения нашей молодёжи ЗНАНИЙ и способности их ПОНИМАНИЯ.

Деградация методики. Обратим внимание на ещё один стратегический результат деятельности АПН — уничтожение подлинной методики и замена её “методической наукой”. “Отцом” этой схоластический “науки” является академик АПН А. Я. Хинчин, — в 1939 г. им была поставлена задача воспитания “новых методистов”, “научно апробированных”, задача организации “методической аспирантуры”, защиты диссертаций по методике математике и наделения соискателей учёными степенями [7 (1939, № 4), с. 6]. И решать эту задачу начал сам академик-секретарь в своём НИИ методов обучения, созданном в 1944 г. [4, с. 3 – 4].

За семьдесят лет был сгенерирован огромный корпус дипломированных методистов, которые “научно” изуродовали школьную методику, что ярко проявилось в методических уродствах “реформы-70” [4, с. 6 – 12]. Академик Л. С. Понтрягин отметил эту роль методистов ещё в 1980 г.:

> “Странно, что многие специалисты по методике преподавания математики, имеющие обширные научные знания, оказались бессильными понять непригодность для школы существующих программ” [10, с. 109].

Но нет, вовсе не странно, что дипломированные методисты оказались “бессильными понять”. Ведь их целью было не развитие методики, полезной школе, а диссертации, полезные себе любимому. Для этой цели надо было найти “диссертабельную тему” и открыть в ней что-то “новое”. А новизна могла быть получена только за счёт отрицания законов дидактики и классических методических принципов и достижений. Такова, к примеру, теория Эльконина-Давыдова, ставящая закон “от конкретного к абстрактному” с ног на голову, — “от абстрактного к конкретному” [4, с. 13 – 14].

И как же вся эта “методическая наука” отразилась, в конечном счёте, на нашем образовании? Вот заключение преподавателя с полувековым стажем Т. Ходот (РГПУ им. А. И. Герцена):

[25] Понятно, что признание обрушения образования страны в результате реформы, проведённой под идейным руководством АПН, равносильно признанию в государственном преступлении.

[26] Электронный ресурс. - Режим доступа: http://worldcrisis.ru/crisis/1823634

> "методика теперь в основном теоретическая (???) и преподавать её могут люди, никогда не работавшие в школе ... Сегодня выпускник педвуза ... не умеет учить детей ... мы уже имеем не только потерянное поколение детей, но и потерянное поколение учителей" [7 (2014, № 7), с. 12 – 13][27].

И разве может называться наукой "наука", абсолютно не связанная с практикой, не подтверждённая жизнью? В лучшем случае это схоластика, в худшем — ЛЖЕНАУКА[28].

Вариативный ХАОС. В 1990-х гг. на волне "плюрализма" расплодились и с помощью денег насильственно внедрились в школы "вариативные"[29] учебники и АПН-методы обучения ("по Давыдову" — от общего к частному, "по Занкову" — на высоком уровне трудности, "по Петерсон", и пр., и пр.). В предыдущих статьях мы показали антипедагогичность всех этих методов [4, с. 12 – 16]. Их цель — создание ХАОСА. Сегодня директора школ хватаются за голову — все учителя начальных классов учат по разным программам и разными методами, качество обучения проконтролировать невозможно.

На смену стройной системе советского образования пришёл созданный вечными "реформаторами" демократический ХАОС. Этот хаос обосновывается псевдогуманистическими соображениями — дать детям и учителям "свободу выбора". Очередная лицемерно-подленькая идея. Смысл всех подобных всё новых и новых идей — не допустить в обществе ясного осознания того, что наделали и продолжают делать вечные "реформаторы", увести мышление простодушных учителей, лишённых классической методической культуры, на новые ложные пути[30] — "пусть ищут то, чего там нет".

9. Уроки "реформ"

В предыдущих и в данной статьях мы исследовали длительный исторический процесс разнообразного реформирования советской школы: первое грубое внедрение ВТУ-программ 1918 г., поиски трудовой политехнической школы и педагогические "инновации" 1920-х гг., реставрация 1930-х, системное совершенствование классической методики и управления 1940 - 50-х гг., первая "перестройка" программ 1960-х гг., "коренная реформа" 1970-х гг., "демократические" реформы 1990-х и далее. Постараемся же понять уроки истории и сделать общие, стратегически важные выводы.

Урок первый. **Качество обучения тесно связано с сохранением педагогической традиции, и её недопустимо прерывать.** Разрыв традиции, подмена её совершенствования поиском "инноваций" закономерно ведёт к утрате исторически накопленных ценностей и достижений, а следовательно, к падению качества образования [2].

Подчеркнём, - данную формулировку не следует понимать или трактовать так, будто "инновации" должны быть исключены вообще. Речь о п о д м е н е, о сегодняшней политике замещения традиций инновациями.

Этот урок, этот закон развития образования был осознан руководителями страны в конце 1920-х гг. В начале 1930-х гг. образовательная политика государства была перенаправлена от

[27] О ВТУ-реформе педагогического образования, приведшей к такому результату, см. [12, гл. 10].

[28] Именно так — ЛЖЕПЕДАГОГИКА — оценивают все академические новации старые новочеркасские учителя В. К. Совайленко и О. В. Лебедева, которые на своём опыте испытали их результаты [13,14].

[29] Термин "вариативные учебники" ввёл академик РАО А. Г. Асмолов — доктор психологических наук, профессор МГУ, зам. министра-98, "гражданин Израиля" [15, с. 58]. Он же придумал концепцию "вариативного образования", которую изложил в докладе "Стратегия развития вариативного образования". Вот как оценивает его профессор В. Ю. Троицкий: "Доклад ... был направлен, как в нём сказано, против "единообразной школы — к личностно-ориентированному образованию, дифференциации учебных заведений". Между тем ... на деле навязывал ... систему стандартов и практически открывал дорогу многообразному невежеству, а не научной истине" [там же, с. 70]. И, добавим, — всеобщему ХАОСУ в образовании страны.

[30] См., например, методическую разработку урока геометрии алтайской учительницы Богдановой О. Н.: http://metodisty.ru/m/groups/view/matematika_v_shkole и http://www.proshkolu.ru/

прожектёрских “инноваций” на восстановление традиций и ценностей русской гимназии. Результат — через 6 лет, к 1937 г. высшая школа получила качественное пополнение [3, с. 7 – 8]. Совершенствование учебного процесса и управления *на базе традиций* привело через 20 лет к поразившему мир взлёту советской науки и техники (Спутник-1957, Гагарин-1961).

Этот урок был забыт руководителями образования в 1960-х гг. И история наказала плохих учеников и всю страну в 1978 г. Но даже такое очевидное наказание не прочистило сознания наших новых руководителей. У них оказался настолько узкий кругозор, что они в принципе не способны воспринимать уроки истории.

Сегодня продолжается ориентация управленцев на “инновации” при *полном забвении традиций*. Более того, — при сознательном блокировании попыток их восстановления. Так, вице-президент РАО Д. И. Фельдштейн предлагает признать

> “объективную исчерпанность классической педагогической парадигмы, что проявляется в неэффективности многих традиционных форм образования, его содержания. Сегодня система образования перестала (с каких же пор? — И.К.) удовлетворять предъявляемым ей требованиям (каким? — И.К.). Очевидна (?) необходимость чёткого осмысления тенденций развития общества и человека и именно в этом контексте определения ... целей и задач преподавания” [16, с. 5].

Как всегда, лукавые подмены и претензионная бессмыслица. Исчерпанность классической парадигмы? Да её давно нет, она не “исчерпана”, а уничтожена реформой-70. С ней уничтожено и качество образования.

Неэффективность традиционных форм и содержания? Педакадемик подменяет трёхсотлетнюю традицию классической педагогики реформаторской антипедагогической “традицией” нескольких последних десятилетий.

Как само собой разумеющееся, предполагает, что тенденции развития общества “и человека” (?) объективно прогрессивны, их надо учесть и найти какие-то новые пути и методы в образовании, удовлетворяющие каким-то не определённым, но “предъявляемым” требованиям. В то время как мы наблюдаем страшный регресс, причём, субъективно рукотворный, а не стихийно объективный. Нас настойчиво уводят от правильного понимания на ложные пути.

Следует заметить, что поставленную Д. И. Фельдштейном в 2012 г. задачу нового “определения целей преподавания” решила к 2015 г. ВШЭ в лице Льва Любимова: очередная[31] новая цель нашего образования — воспитание “конкурентноспособного гражданина”. (???) Какое дикое словосочетание!

Урок второй. **В обществе всегда есть силы, которые стремятся навязать свои ложные представления и идеи** о развитии общества (образования), и которые заинтересованы в их реализации[32]. Руководители государства должны это знать, уметь распознавать и

[31]Уместно вспомнить, какие цели ставились перед отечественной школой в разные времена? До революции — воспитание Человека! В 1920-х — “*нового* (?) человека”. В 1930-50-х гг. - всестороннее гармоническое развитие личности (плюс подготовка в вуз). Цель, близкая к цели дореволюционной, разница между ними — в масштабах и глубине. В 1950 – 60-х гг. — та же, плюс подготовка к практической деятельности (политехнизация). В 1970-х гг. “реформаторы” неявно поставили целью общеобразовательной школы воспитание научного математического человека, ВТУ-человека. В 1990-х гг. целью стало “изменение типа личности и народа” (?!) (Учительская газета. 1995. № 50). Эту цель заявил министр-демократ Э. Д. Днепров. В 2000-х гг. цель, в сущности, та же — *воспитание человека, “способного бороться* (с кем? — И.К.) *и самоутверждаться”* (за счёт других? — И.К.), плюс формирование у него мозаичного сознания, т.е. изготовление управляемого ЕГЭ-человека. В 2007 г. министр А. Фурсенко сообщил молодёжи, что *целью российского образования является “взрастить потребителя*, который сможет правильно использовать достижения и технологии, придуманные другими” (?!) (Цит. по: газета “Московские новости”, 14.12.2007). Надо осознавать, что из всех этих целей реально были в значительной мере достигнуты две: дореволюционная и советская (1931 – 1970), исключая политехнизацию. Истинная “реформаторская” цель 1970-х гг. состояла в уничтожении достижений советского образования. Последующие “демократические” — бессмысленные псевдоцели, скрываемая задача которых, — увести общество на ложные пути и не допустить восстановления качественного образования.

[32]Современная социологическая наука называет подобные социальные явления проявлением информационной войны, а идеи — вирусами (вирус ВТУ).

беспощадно пресекать такие тенденции. Как бы ни вопили обиженные о подавлении "свободы". И как бы ни поддерживали их западные "голоса" наших врагов.

Так в 1930-х гг. была пресечена широко развернувшаяся "научная" и практическая деятельность педологов, выброшены из школы ложные методы обучения (метод проектов и пр.), осуждена теория отмирания школы и отброшена вроде бы завещанная Лениным цель построения "трудовой" политехнической школы [3, с. 6 – 7].

В 1956 г. произошёл слом политической традиции, который породил эйфорию "обновления", привёл в управление новых людей[33], развязал руки "реформаторам", притупил бдительность власти. И власть не заметила, как произошла подмена цели образования (знания — на ВТУ). Не оценила всей опасности идей и деяний АПН. Хотя творческое бесплодие этой организации было замечено ещё в 1940-х гг. и власть тогда довольно жёстко критиковала её за отрыв от школьной практики. История показала, что это свойство имманентно присуще этой организации.

Урок третий. **Никакие государственные задачи не могут быть решены, если в управлении не стоит умная, широко образованная, профессионально грамотная и национально ориентированная элита**, если нет механизма воспроизводства такой элиты.

В 1930 – 40-х гг. к управлению образованием были привлечены профессионалы — опытные учителя и методисты, которые в тесном контакте с широкими массами учительства[34] повели сложную работу восстановления качества образования. И добились достижения цели.

С 1960-х гг. начался процесс бюрократизации управления (вымывание профессионалов, имитация решения проблем, игнорирование реалий жизни, утрата целей, процентомания, коррупция). И качество образования покатилось вниз.

Вот такие уроки нужно бы извлечь из истории. Наверное, можно найти и другие полезные уроки. Пусть читатель сам попытается это сделать и добавит в наш анализ свои выводы. Только остаётся открытым вопрос — кому сегодня нужны эти уроки?

10. Что делать?

Аналогичный вопрос встал перед США и Западом в 1957 г. после запуска советского Спутника. После двухгодичного изучения советской системы образования они дали ответ: "государства, самостоятельно соревнующиеся с СССР, впустую растрачивают свои силы и ресурсы в попытках, *обреченных на провал*", поскольку **"выдающиеся достоинства" советской системы образования** (одно из которых — её "относительная простота") "вытекают из централизованного контроля и планирования", который невозможен в условиях капитализма.

Выводы эти сделаны в Аналитической записке НАТО об образовании в СССР 1959 г.[35] В этом же году наши "реформаторы" начали менять программы обучения (не только в средней школе, а и в высшей педагогической, и высшей технической [12, гл. 10 – 11]).

Ну, а какой ответ можем дать мы в условиях современной России?

Прежде всего, уточним задачу. Эти два слова ("что делать?") предполагают поиск решения определённой задачи. В нашем контексте: *что делать, чтобы поднять качество образования?* Вопрос, часто звучащий и некорректно поставленный. Во-первых, — кому "делать"? Во-вторых,

[33]В 1956 г. в аппарат ЦК (помощник секретаря ЦК) вошёл С. П. Трапезников (1912 – 1984) - директор ВПШ Молдавии, историк КПСС по сельскому хозяйству, который управлял советской наукой (и школой) весь период подготовки, реализации и удержания результатов реформы-70 — с 1965 г. по 1983 г. Ровно столько же в этот же период управлял "просвещением" министр М. А. Прокофьев — с 1966 г. по 1984 г. Напомним, — в 1958 г. заместителем министра И. А. Каирова стал ведущий "реформатор" А. И. Маркушевич.

[34]Оказывается, простые учителя спасли нашу школу в 1937 г., когда "реформаторы" сделали первую попытку изменения программы. Автор недавно обнаружил в Научном Архиве РАО стенограмму [Арх. РАО. Ф. 11. Оп. 1. Д. 54] обсуждения московскими учителями проекта новой ВТУ-программы, представленной группой профессоров ЛГУ (руководитель профессор Г. М. Фихтенгольц). Стенограмма показывает, что уже тогда учителя поняли все вопиющие дефекты "реформаторской" идеологии и предсказали в с е негативные результаты её реализации, так страшно проявившиеся в 1970-х [17, с. 74 – 81]. И тогдашняя власть послушалась учителей!

[35]Электронный ресурс. - Режим доступа: http://statehistory.ru/4316/Analiticheskaya-zapiska-NATO-ob-obrazovanii-v-SSSR-1959-g-/ Источник: http://archive.s.nato.int/uploads/r/null/6/1/6109/AC_137-D_40_ENG.pdf.

— в каких условиях? В-третьих, — какими средствами? В зависимости от этих уточнений, задача может оказаться неразрешимой. Такова, например, математическая задача о трисекции угла средствами циркуля и линейки.

В наших условиях попытка уточнения задачи с точки зрения "кому делать"? (очевидно, министерству, управляющему образованием) сразу показывает, что задача неразрешима. Более того, сами управленцы даже декларативно не ставят такой задачи. Они решают противоположную задачу, поставленную перед ними внешними Управляющими, и получают за это большие деньги[36].

Хорошо, предположим, что во главе нашего образования чудесным образом появились иные управляющие — профессионально компетентные, ответственные и национально ориентированные. Что они должны делать? Прежде всего, изучить историю и понять, какие факторы привели к высшему качеству советского образования 1956 г., а какие затем — к полной деградации 2015 г. Если наши гипотетические управители это поймут, они сами найдут ответ на вопрос "что делать?". И ориентиром для них будет то, что делали управленцы 1930 – 40-х гг. Только с очень существенной поправкой на новые условия.

Главным отличием нового "демократического" российского общества от социалистического советского 1930 – 50-х гг. является его глубокое моральное и профессиональное разложение. В системе образования разложение проявляется в широчайшей коррупции, безответственности, лживости и циничном аморализме управленцев всех уровней, депрофессионализации корпуса учителей и массовом отвращении к учёбе детей. Возможно ли в этих условиях вернуть стране качественное образование? — Большой вопрос.

Что же, всё-таки, делать нам, — гражданам страны, которые болеют за образование: учителям, педагогам, преподавателям высшей школы, родителям? Что нам делать "здесь и сейчас"?

Конечно, неустанно протестовать против всех разрушительных управленческих "инноваций". Организовываться в широкие общественные движения. Но не размениваться на мелкие цели (ЕГЭ, ФГОСы, Фурсенко, Ливанов и пр.), не идти на поводу власти в заданных ею рамках. Надо ясно и определённо поставить перед собой и заявить власти стратегическую цель общества (пусть в ближайшей перспективе недостижимую) — **вернуть советскую СИСТЕМУ образования 1930 – 50-х гг.** В частности, вернуть в школы классическую методику преподавания, программы, построенные на принципах системности, фундаментальности и доступности, единые понятные учебники.

В математике эта методическая традиция сконцентрирована в учебниках А. П. Киселёва. Следовательно, необходимым (но, конечно, не достаточным) условием возрождения нашего математического образования является возвращение нашим детям понятных учебников А. П. Киселёва[37].

Литература

[1] Костенко И.П. Динамика качества математического образования. Причины деградации (статья первая) // Математическое образование. – 2011. – № 2(58).

[2] Костенко И.П. 1918 – 1930 гг. Первая коренная реформа русской школы (статья вторая) // Математическое образование. – 2012. – № 4 (64).

[3] Костенко И.П. 1930 – 1956 гг. Возрождение и рост русской школы (статья третья) // Математическое образование. – 2013. – № 1-2 (65-66).

[4] Костенко И.П. 1956 – 1965 гг. Подготовка второй "коренной" реформы советской школы: "перестройка" программ и "научное" обоснование ложных идей (статья четвёртая) // Математическое образование. – 2014. – № 2 (70).

[36] Председатель КПРФ Г. А. Зюганов, выступая на радиостанции "Эхо Москвы" 11 июля 2011 г., рассказал: "Я ему (Президенту. — И.К.) показал доклад, — доклад, подготовленный Всемирным банком еще в 1994 году, — "Реформа образования для нашей страны". Там написано: ЕГЭ ввести, угадайку; там написано — убрать профтехучилища; написано — распустить педвузы. За это получили 220 миллионов долларов."

[37] Педагогическое обоснование этого вывода сделано в [18, с. 12 – 17]. Статью эту можно найти в Интернете: http://www.portal-slovo.ru/impressionism/36366.php

[5] Костенко И.П. 1965 – 1970 гг. Организационная подготовка рефоромы-70: МП, АПН, кадры, программы, учебники (статья пятая) // Математическое образование. – 2014. – № 2 (70).

[6] Костенко И.П. 1970 – 1986 гг. Реализация реформы-70, удержание её результатов (статья шестая) // Математическое образование. – 2015. – № 2(74).

[7] Математика в школе. – 1939, № 4; 1950, № 1, 6; 1959, № 1; 1969, № 2; 1980, № 3; 1989, № 2; 2002, № 2; 2010, № 2, 10; 2011, № 3; 2013, № 3, 7; 2014, № 7.

[8] Сборник научно-методических статей по математике. – 1988. – вып. 15.

[9] Народное образование в СССР. Общеобразовательная школа: Сб. документов 1917 – 1973 гг. – М.: Педагогика, 1974.

[10] Понтрягин Л.С. О математике и качестве её преподавания // Коммунист, – 1980. – № 14.

[11] Ковалёва Г. Не впереди планеты всей // Народное образование. – 1998. – № 5.

[12] Костенко И.П. Проблема качества математического образования свете исторической ретроспективы. Монография. – М., 2013.

[13] Совайленко В.К., Лебедева О.В. Школа и дети в опасности // Педагогический вестник. – 1999. – № 5-7.

[14] Совайленко В.К. Лжепедагогика — причина перегрузки // Педагогический вестник. – 1996. – № 6.

[15] Троицкий В.Ю. Судьбы русской школы. – М.: Институт русской цивилизации, 2010.

[16] Фельдштейн Д.И. Проблемы психолого-педагогических наук в XXI в. // Педагогика. – 2013. – № 1.

[17] Костенко И.П. Первая попытка реформы математического образования (1937) и современность // Электронный журнал “Проблемы современного образования”. – 2015. – № 1. URL: http://www.pmedu.ru/res/2015_1_5.pdf (дата посещения 31.12.15).

[18] Костенко И.П. Почему надо вернуться к Киселёву? // Математическое образование. – 2006. – № 3(38).

Исправление в предыдущей статье. От автора. В предыдущей шестой статье “Математическое образование”, № 2(74), 2015, на стр. 8, 4-я строка сверху следует исправить ссылку: не на Архив РАН, а на книгу А. М. Абрамова [6, с.42].

Костенко Игорь Петрович,
г. Краснодар, доцент,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail:kost@kubannet.ru

Математика для старшеклассников: от фрагментарности к системности

А. А. Остапенко

Предложены графические средства обеспечения системности усвоения знаний учащимися старших классов. Приведено обоснование, почему указанные средства необходимы и могут быть достаточно эффективными.

С профессором В. В. Гузеевым мы неоднократно писали о том, что процессы усвоения знаний и освоения умений имеют разную психологическую природу. Так, оптимально, если *усвоение знаний будет осуществляться концентрированно во времени и системно* (от общего к частному) *по структуре содержания. Освоение же умений природосообразно вести распределённо во времени и фрагментарно* (от частных умений к общим) *по содержанию* — от простых навыков к сложным.

Содержание школьной математики предполагает и усвоение знаний (и представлений), и освоение навыков (и умений). Причём *в содержании начального математического образования явно преобладают умения и навыки, а в старших классах — знания и представления.* Так, после начальной школы ребёнок по преимуществу должен *уметь* считать, складывать, вычитать, умножать, делить, что-то решать. А старшеклассник уже должен *знать* аксиомы, теоремы, правила и формулы. Соотношение между объёмами усваиваемых математических знаний (представлений) и навыков (умений) с возрастом смещается к преобладанию первых. Если в начальной школе преобладают тренинговые процессы "нарешивания", то у старшеклассников доминируют процессы осмысления. Соответственно изменению этого соотношения *должна изменяться и организация математического образования*: от фрагментарности к системности, от распределённости во времени к концентрированности.

Должна-то, должна, но не тут-то было! **Структура урока математики в старшей школе мало чем отличается от структуры урока в начальной школе.** Разве что сложностью заданий. Старшеклассников всё так же учим «понемногу чему-нибудь и как-нибудь». Всё то же линейное попараграфное изложение учебного материала с последующим обобщением фрагментарных знаний.

Можно ли себе представить изучение химии без начального ознакомления с периодической системой Д. И. Менделеева? Можно ли допустить мысль, чтобы учитель, начиная преподавать курс физической географии, не показал глобус и карту мира? А вот математики почему-то могут! Видимо, потому, что у них нет математического «глобуса» и математической «таблицы Менделеева». Хотя совершенно очевидно, что изучение системных курсов алгебры и геометрии (а не начальной арифметики) *должно начинаться с изучения системного ядра предмета*, которое впоследствии должно постоянно «маячить» перед глазами и «держать» целое. Но, увы, в школьной математике это наглядное ядро (этот «глобус») практически никто не разрабатывал (разве что академик П. М. Эрдниев). В кабинете математики, увы, не висят таблицы, по степени системности и целостности напоминающие таблицу Менделеева. В привычных комплектах школьных таблиц по математике преобладают фрагментарные сведения (формулы сокращённого умножения, таблицы синусов или косинусов, и т.п.) Содержание математического образования старшей школы попараграфно «нашинковано на мелкой тёрке», а учебное время раздроблено поурочно так же, как и у первоклассников. Итог очевиден — отсутствие целостности и системности в видении мира и в его математическом описании. Повсеместный переход на тестовые формы контроля эту ситуацию только усугубляет.

А между тем ещё хорошо памятен опыт конспектно-системной наглядности учителя Шаталова и опыт укрупнения математических знаний академика Эрдниева. Оба и поныне работают (первый в Донецке, второй в Элисте), но почти забыты учительством на всём постсоветском пространстве. А между тем их опыт и опыт их последователей давали высокие результаты системности математического образования. Если соединить воедино опыт создания опорных конспектов как образной наглядности В. Ф. Шаталова [1] (а он создавал конспекты, не укрупняя материал), опыт укрупнения дидактических единиц П. М. Эрдниева [2] (а он особо не был озабочен созданием образной наглядности), а потом полученный дидактический «гибрид» укрупнённого опорного конспекта умножить опытом создания многомерных дидактических структур В. Э. Штейнберга [3], то мы получим стройную педагогическую ***технику графического сгущения*** (уплотнения, концентрации, компрессии) ***учебных знаний*** как часть нового направления в педагогике — ***дидактического дизайна*** [4]!

Эта техника графического сгущения состоит из трёх этапов: кодирования (почти по Шаталову), укрупнения (почти по Эрдниеву) и структурирования (отчасти по Штейнбергу). Все приёмы этой техники многократно описаны [5]. Главное состоит в том, что эта техника позволяет создавать графическую опорную крупномодульную наглядность, позволяющую держать «перед глазами» содержательное ядро целого курса либо большого его раздела. Приведём примеры создания такой наглядности для преподавания математики. Один пример из школьной алгебры, другой — из геометрии.

Пример первый. Полная линейно-матричная модель «Математические действия и их свойства, функции и их графики» (рис. 1). Эта «картинка» постоянно находится в кабинете математики и «держит» целостность и системность этой части математических сведений.

Пример второй. Таблично-матричная модель по теме «Объёмы и площади боковых поверхностей фигур» (рис. 2). Целостное и системное преподавание этой темы можно обеспечить с помощью применения крупномодульной наглядности, охватывающей в единую графическую опору несколько параграфов школьной геометрии.

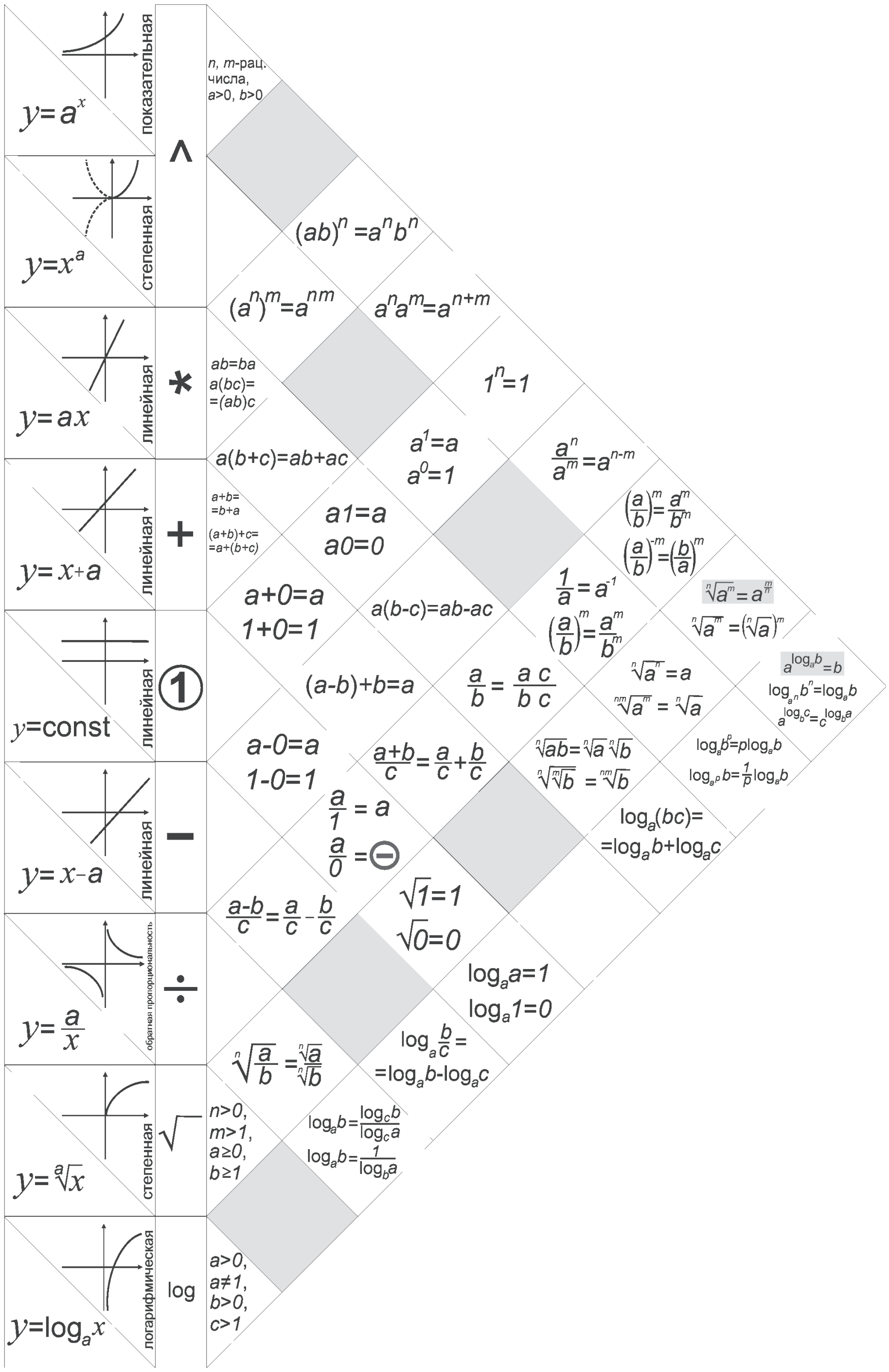
Пунктиром на рисунке изображены линии сгиба. Так, при горизонтальном складывании мы можем изучать только объёмы, а при вертикальном — только площади.

При полной развёртке таблицы видны все темы раздела.

Эта опора может использоваться как учителем в плакатном формате А1, так и учеником в формате А4 или А5. Её использование удобно как при объяснении нового материала, так и при его обобщении. При этом следует заметить, что эффективность применения такого типа наглядности при изложении новой темы в начале изучения раздела, естественно, выше, чем в конце изучения при обобщении.

Однако еще раз заметим, что описанные приёмы работают только при наличии учителя, способного ярко работать с подобной наглядностью и обладающего системным математическим мышлением. Именно учитель своей внутренней увлечённостью может «зарядить» такие таблицы зримой мыслью, в противном же случае безразличный взгляд ученика оставит и их без внимания.

Описанный подход многократно успешно апробирован, в частности в Азовской гимназии Краснодарского края. А подобная наглядность детально разработана как для математики, так и для других дисциплин [6].



$y=a^x$
показательная
$\wedge$
n, m-рац. числа, $a>0$, $b>0$
$y=x^a$
степенная
$(ab)^n=a^nb^n$
$(a^n)^m=a^{nm}$
$a^na^m=a^{n+m}$
$y=ax$
линейная
$*$
$ab=ba$
$a(bc)==(ab)c$
$1^n=1$
$a(b+c)=ab+ac$
$a^1=a$
$a^0=1$
$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
$y=x+a$
линейная
$+$
$a+b==b+a$
$(a+b)+c==a+(b+c)$
$a1=a$
$a0=0$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$
$a+0=a$
$1+0=1$
$a(b-c)=ab-ac$
$\frac{1}{a}=a^{-1}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$
$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$
$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$
$y=$const
линейная
①
$(a-b)+b=a$
$\frac{a}{b}=\frac{a\,c}{b\,c}$
$\sqrt[n]{a^n}=a$
$\sqrt[nm]{a^m}=\sqrt[n]{a}$
$a^{\log_a b}=b$
$\log_{a^n}b^n=\log_a b$
$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$
$a-0=a$
$1-0=1$
$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$
$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[nm]{b}$
$\log_a b^p=p\log_a b$
$\log_{a^p}b=\frac{1}{p}\log_a b$
$y=x-a$
линейная
$-$
$\frac{a}{1}=a$
$\frac{a}{0}=\ominus$
$\log_a(bc)==\log_a b+\log_a c$
$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$
$\sqrt{1}=1$
$\sqrt{0}=0$
$y=\frac{a}{x}$
обратная пропорциональность
$\div$
$\log_a a=1$
$\log_a 1=0$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$\log_a\frac{b}{c}==\log_a b-\log_a c$
$y=\sqrt[a]{x}$
степенная
$\sqrt{\ }$
$n>0$, $m>1$, $a\ge 0$, $b\ge 1$
$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$
$y=\log_a x$
логарифмическая
log
$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>1$

Рис. 1.

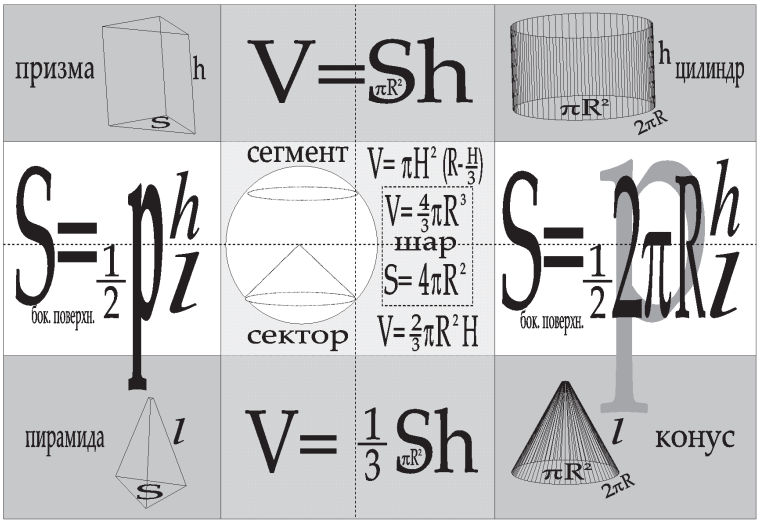


Рис. 2.

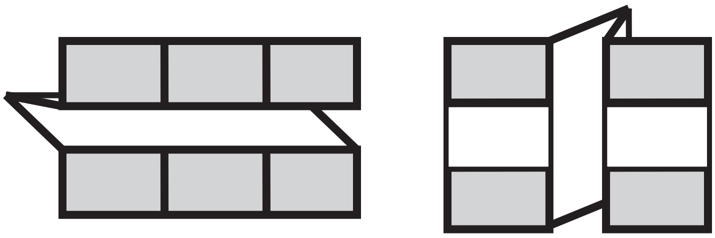


Рис. 3.

Литература

[1] *Шаталов В.Ф.* Эксперимент продолжается. — М.: Педагогика, 1989.

[2] *Эрдниев П.М.* Укрупнение дидактических единиц как технология обучения. В 2-х ч. Ч. 1. — М.: Просвещение, 1992.

[3] *Штейнберг В.Э.* Дидактические многомерные инструменты. Теория, методика, практика. — М.: Народное образование, Школьные технологии, 2002.

[4] *Ткаченко Е.В., Манько Н.Н., Штейнберг В.Э.* Дидактический дизайн — инструментальный подход // Образование и наука. - 2006. - № 1. - С. 58–65.

[5] *Грушевский С.П., Касатиков А.А., Остапенко А.А.* Техника графического уплотнения учебной информации // Школьные технологии. - 2004. - № 6. - С. 89–103.

[6] *Грушевский С.П., Остапенко А.А.* Сгущение учебной информации в профессиональном образовании. Монография. - Краснодар: Кубанск. гос. ун-т, 2012. - 188 с.

Андрей Александрович Остапенко,
доктор педагогических наук,
профессор Кубанского государственного университета,
г. Краснодар.

E-mail: ost101@mail.ru

Задачи математического конкурса в ЮУрГУ

А. Ю. Эвнин

В статье содержатся условия задач математических конкурсов, регулярно проводящихся в Южно-Уральском государственном университете начиная с 2009 г. Площадкой проведения конкурса является группа “Математический конкурс в ЮУрГУ” в социальной сети “В контакте”. Благодаря Интернету в число активных участников конкурса вошли не только студенты и аспиранты ЮУрГУ, но также студенты других вузов и взрослые любители математики из разных городов России и стран ближнего зарубежья. В каждом конкурсе шесть задач, разнообразных по тематике (от элементарной геометрии и алгебры до избранных глав математического анализа и дискретной математики) и сложности (от занимательных задач типа головоломок до задач, содержащих новые научные результаты).

Материалы первых 14 конкурсов представлены в книге [21]. Решения задач первых 25 конкурсов можно найти в книге [17], переведённой на испанский язык [33]. Развитие темы задач 6, 53, 120, 125, 132, 186 привело к научным публикациям [25] – [32].

Данную подборку задач можно использовать в работе студенческих и школьных математических кружков, для подготовки к олимпиадам и для самообразования. Задачи взяты, в основном, из книг, указанных в библиографическом списке, а также материалов школьных и студенческих олимпиад последних лет.

Условия задач

Конкурс 1

1. [Корова на привязи] К круглой силосной башне радиуса R прявязана корова. Длина верёвки равна половине длины окружности башни. Найдите площадь выпаса.

2. [Вечеринка] На вечеринке собрались n супружеских пар. Некоторые участники вечеринки обменялись рукопожатиями (супруги друг другу руки не пожимали). Мистер Браун опросил всех участников, сколько рукопожатий сделал каждый из них. Все названные числа оказались различными. Можно ли на основе указанной информации определить, сколько рукопожатий сделали миссис Браун и мистер Браун?

3. [Волейбол] Две равные по силе команды играют в волейбол до тех пор, пока каждая из них не одержит по n или более побед. Найдите вероятность того, что будет проведено ровно $2n+k$ партий.

4. [Гири] Имеются 6 гирь массой 1 г, 2 г, ..., 6 г. На каждой гире надписана масса в граммах, но надписи, возможно, перепутаны. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах можно выяснить, есть ли среди надписей неправильные (не важно, какие именно)?

5. [Точка в тетраэдре] Пусть $ABCD$ — произвольная треугольная пирамида, а O — точка внутри этой пирамиды. Лучи AO, BO, CO, DO пересекают противоположные грани в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что

$$\frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}+\frac{DO}{DD_1}=3.$$

6. [Число областей] На плоскости отмечено n точек. Через каждые две из этих точек проведена прямая. На какое наибольшее число частей может быть при этом разбита плоскость?

Конкурс 2

7. [Батон колбасы] Круглый батон колбасы завернули в лист бумаги, после чего разрезали колбасу плоскостью под углом 45° к её оси. Лист бумаги развернули и увидели линию среза. Напишите уравнение этой линии.

8. [Кемпинг] В кемпинге, находящемся на морском побережье, имеется 65 жилых номеров. Здание кемпинга одноэтажно; все номера располагаются в ряд вдоль общего коридора с одной его стороны и последовательно пронумерованы числами от 1 до 65. Каждый посетитель имеет право снять в кемпинге либо один номер на двое суток, либо два обязательно соседних номера на любое число суток. Стоимость одного номера в сутки равна 1 евро. Известно, что 10, 20 и 30 августа в кемпинге не был заселен 13-й номер. Докажите, что за август владельцы кемпинга выручили за сдачу номеров не более 2008 евро.

9. [Ряд] Найдите сумму ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{8}{2^6}+\frac{13}{2^7}+\frac{21}{2^8}+\frac{34}{2^9}+\ldots$$

(в числителях дробей — числа Фибоначчи, а в знаменателях — степени двойки).

10. [Интеграл] Вычислите интеграл

$$I(a)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\operatorname{tg}^a x}.$$

11. [Сумма] Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ — действительные числа и

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 x_k = 2, \quad \sum_{k=1}^{10}(k+1)^2 x_k = 22, \quad \sum_{k=1}^{10}(k+2)^2 x_k = 691.$$

Чему равна сумма $\sum\limits_{k=1}^{10}(k+3)^2 x_k$?

12. [Делители] Пусть $\sigma(a)$ — сумма всех натуральных делителей числа a. Докажите, что для каждого n уравнение

$$\sigma(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\sigma(x_1)+\sigma(x_2)+\cdots+\sigma(x_n)$$

разрешимо в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Конкурс 3

13. [Бикфордов шнур] Бикфордов шнур сгорает за 1 мин. Имеется два шнура. Как с их помощью отмерить ровно 45 секунд? [1]

14. [Необычные весы] Есть 4 камня, каждый весит целое число граммов. Есть чашечные весы со стрелкой, показывающей, на какой из двух чаш масса больше и на сколько граммов. Можно ли узнать про все камни, сколько какой весит, за 4 взвешивания, если в одном из этих взвешиваний весы могут ошибиться на 1 грамм?

---

[1] Интересный вариант формулировки этой задачи найден в Интернете.

Zen problem.

A Buddhist monk got an errand from his teacher: to meditate for exactly 45 minutes. He has no watch; instead he is given two inscent sticks, and he is told that each of those sticks would completely burn in 1 hour. The sticks are not identical, and they burn with variant yet unknown rates (they are hand-made). So he has these two inscent and some matches: can he arrange for exactly 45 minutes of meditation?

15. [Отрезки и лучи] На плоскости отмечена точка O. Требуется провести на плоскости несколько отрезков, не проходящих через O, так, чтобы всякий луч, выходящий из O, пересекал не менее k из этих отрезков. Каким наименьшим числом отрезков можно обойтись?

16. [Неравенство] Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geqslant 6abc.$$

17. [Степени собственных значений] Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A размера $n \times n$, все элементы которой — неотрицательные действительные числа. Докажите, что $\lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k \geqslant 0$ для любого натурального числа k.

18. [Арифметические прогрессии] Докажите, что множество $\{1, 2, 3, \ldots, 2170\}$ можно разбить на 4 части так, что ни одна из них не будет содержать арифметической прогрессии из 10 членов.

Конкурс 4

19. [Фирма] Каждый из 100 сотрудников фирмы либо всегда лжёт, либо всегда говорит правду. При этом не все лжецы, и каждый про каждого знает, лжец тот или нет. Новый управляющий хочет выяснить, кто из сотрудников лжец, а кто правдив. Для этого он решил раз в день собирать сотрудников (может быть, всех, или только одного) и спрашивать каждого из собравшихся, сколько правдивых в данной группе. За какое наименьшее число дней управляющий заведомо может справиться со своей задачей?

20. [Турнир] Шахматный турнир с n участниками проходил в два круга. В каждом круге каждый играет с каждым одну партию. За победу даётся одно очко, за ничью пол-очка, за поражение — ноль очков. После первого круга, а также по итогам всего турнира у всех участников было разное число очков. Возможно ли, чтобы по окончании турнира все участники расположились в порядке, обратном тому, какой был после первого круга? (Ответ зависит от n).

21. [Произведение] Докажите, что произведение всех правильных (включая сократимые) дробей со знаменателями не больше числа 2009, является квадратом рационального числа.

22. [Необычное равенство] Докажите равенство

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}.$$

Более аккуратная формулировка. Последовательности (a_n) и (b_n) задаются следующими соотношениями:

$$a_1 = b_1 = 1; \quad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}; \quad b_{n+1} = 1+\frac{1}{b_n}.$$

Докажите, что эти последовательности сходятся и имеют один и тот же предел.

23. [Дифференциальное уравнение] Докажите, что любое частное решение дифференциального уравнения

$$y' = \sqrt[2009]{\frac{y^{2008}+1}{x^{2010}+1}}$$

является ограниченной функцией.

24. [Равносторонние треугольники] На плоскости отмечены вершины выпуклого n-угольника. При этом имеется ровно k равносторонних треугольников со стороной 1 и с вершинами в отмеченных точках.

а) Докажите неравенство $k < 2n/3$.

б) Приведите пример, когда $k > 0{,}666n$.

Конкурс 5

25. [Сумма интегралов] Вычислите

$$\int_1^e \sqrt{\ln x}\,dx + \int_0^1 e^{x^2}\,dx.$$

26. [Тупые углы] Можно ли найти в пространстве $\mathbb{R}^3$ пять таких векторов, что все попарные углы между ними тупые?

27. [Червяк] На одном из концов резинового каната длиной один метр сидит червяк. В некоторый момент времени канат начинает равномерно растягиваться (любые два участка каната равной длины за равные промежутки времени удлиняются одинаково). При этом его концы удаляются друг от друга со скоростью 10 см/с. В этот же момент времени червяк начинает двигаться к противоположному концу каната со скоростью 1 см/с. Достигнет ли червяк противоположного конца каната? Если да, то за какое время?

28. [Круглый стол] В зале находится 2009 человек. Каждый из них знает не менее 45 человек из присутствующих. Докажите, что среди всех людей найдутся 4 человека, которых можно усадить за круглый стол так, что рядом с каждым будет сидеть знакомый ему человек.

29. [Предел функции] Функция f непрерывна на положительной полуоси. Известно, что при любом фиксированном $x > 0$ последовательность $f(x+n) \to 0$ при $n \to +\infty$. Следует ли отсюда, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$?

30. [Целые расстояния] Дано бесконечное множество точек. Все расстояния между точками — целые числа. Докажите, что все точки данного множества расположены на одной прямой.

Конкурс 6

31. [Сыр] Имеется 31 кусок сыра разного веса. Всегда ли можно один из этих кусков разрезать на две части и разложить сыр в два пакета так, чтобы пакеты весили одинаково, а кусков сыра было в них поровну?

32. [Семь семёрок] Пусть $a\hat{\ }b$ обозначает число a^b. В выражении $7\hat{\ }7\hat{\ }7\hat{\ }7\hat{\ }7\hat{\ }7\hat{\ }7$ надо расставить скобки, чтобы определить порядок действий (всего будет 5 пар скобок). Можно ли расставить эти скобки двумя разными способами так, чтобы получилось одно и то же число?

33. [Средние величины] Пусть H, G, A, Q — соответственно среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратическое двух положительных чисел a и b:

$$H = \frac{2ab}{a+b}, \quad G = \sqrt{ab}, \quad A = \frac{a+b}{2}, \quad Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Как известно, если $a \neq b$, то

$$H < G < A < Q.$$

А что больше: HQ или AG?

34. [Граф] Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ существует простой граф с n вершинами, в котором ровно две вершины имеют одинаковую степень.

35. [Объём] Пусть для каждого натурального n фигура Φ_n образована точками $M(x,y,z)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$3|x|^n + 8|y|^n + |z|^n < 1.$$

Найдите объём пересечения и объём объединения всех таких фигур.

36. [Три полуплоскости] Докажите, что если несколько полуплоскостей покрывают плоскость, то из них всегда можно выбрать такие три полуплоскости, которые также покрывают всю плоскость.

Конкурс 7

37. [Чай и пряники] До повышения цен чай с двумя пряниками стоил 1 руб. Когда все цены выросли (на одинаковое число процентов), рубля стало хватать только на чай с одним пряником. Потом цены опять выросли, причём на столько же процентов, как и в первый раз. Хватало ли после этого рубля хотя бы на чай?

38. [Целочисленные длины] Найти бесконечно много попарно неподобных прямоугольных треугольников ABC, у которых длины катета AC, гипотенузы BC и медианы AM выражаются целыми числами.

39. [Под прямым углом] Найти геометрическое место точек плоскости, из которых под прямым углом видны
а) парабола $x^2 = 2py$;
б) эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
в) гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

40. [Проекции граней] Доказать, что для любого тетраэдра найдётся плоскость, площади ортогональных проекций граней на которую равны.

41. [Неравенство] Доказать, что если $a, b, c > 0$, то

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a+c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{b+a}} > 2.$$

42. [Шесть девочек] Шесть девочек обмениваются подарками по почте. Каждая хочет послать каждой из остальных по подарку к 8 марта. Времени у них достаточно. Каким наименьшим количеством посылок девочки могут обойтись, если в посылке помещается не более двух подарков?

Конкурс 8

43. [Сыр] Купившему головку сыра весом a кг магазин предлагает призовую игру. Покупатель режет головку на n кусков, а продавец выбирает какие-то из этих кусков (не меньше одного) и раскладывает их на одну или на обе чаши весов. При неравновесии продавец обязан за счет магазина добавить призовой кусок сыра, уравновешивающий чаши. Продавец старается сделать приз поменьше, а покупатель — побольше. Каков вес призового куска при наилучших действиях сторон? (Ответ зависит от a и n.)

44. [Графики] Функция $f(x)$ такова, что любая прямая на плоскости Oxy имеет с графиком $y = f(x)$ столько же общих точек, сколько с параболой $y = x^2$. Докажите, что $f(x) = x^2$.

45. [Куб] Вершины куба занумеровали числами от 1 до 8, после чего для каждого ребра вычислили произведение номеров вершин на его концах. Найдите наибольшую возможную сумму полученных 12 произведений.

46. [Вероятность исчезновения] В некоторой стране каждый гражданин, достигнув зрелого возраста, вступает в брак, и у каждой семейной пары рождается двое детей. Каждому ребенку присваивается фамилия отца. В данный момент все супружеские пары имеют различные фамилии. Какова вероятность того, что данная фамилия исчезнет через несколько поколений? (Вероятность рождения как мальчика, так и девочки принимаем равной 0,5.)

47. [Из пункта A в пункт B] Пешеход, бегун и мотоциклист одновременно направляются из пункта A в пункт B. Мотоциклист может подвезти одного из путешественников (пешехода или бегуна) от пункта A до некоторого пункта на дороге между A и B и, высадив его, вернуться, чтобы подобрать и довезти другого пассажира до пункта B. Скорости пешехода, бегуна и мотоциклиста (с пассажиром и без) постоянны, причем скорость мотоциклиста больше скорости бегуна, а скорость бегуна больше скорости пешехода. Определите, кого мотоциклист должен подвозить первым (пешехода или бегуна), чтобы все названные путешественники прибыли одновременно в пункт B за наименьшее время.

48. [ЛНДУ] Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции, если известны три частных решения этого уравнения: $y_1 = \operatorname{arctg}(x^2+1)$, $y_2 = \ln(x^4+1)$ и $y_3 = x^6 + 1$.

Конкурс 9

49. [Куренью — бой] На медосмотре Змею Горынычу сообщили, что если он будет выкуривать в день по две пачки сигарет, то жить ему осталось всего 5 лет, если же он будет курить по полпачки в день, то проживёт вдвое больше. Сколько лет проживёт Змей Горыныч, если бросит курить? (Считаем, что все годы одинаковой продолжительности, а каждая сигарета сокращает жизнь на одно и то же время).

50. [Цветная триангуляция] Можно ли равносторонний треугольник разрезать на равносторонние треугольники и раскрасить их в синий, красный и зелёный цвет так, чтобы треугольников всех трёх цветов было поровну, причём треугольники одинакового цвета были одинакового размера, а треугольники разного цвета — разного размера?

51. [Тупоугольные треугольники] Можно ли на плоскости отметить 1000 точек так, чтобы любые три из них были вершинами тупоугольного треугольника?

52. [Снова треугольники] Каких треугольников больше — разносторонних, которые можно составить из отрезков длиной 1, 2, ..., 100, или треугольников (не обязательно разносторонних), длины сторон которых целые числа, не превосходящие 97?

53. [Демидович-673] Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ \pi - \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Верно ли, что функция, обратная к данной, непрерывна в некоторой точке?

54. [Демидович-2796] Пусть (r_k) — последовательность всех рациональных чисел отрезка $[0;1]$. Докажите, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

обладает следующими свойствами: 1) непрерывна; 2) дифференцируема в иррациональных точках и недифференцируема в рациональных точках.

Конкурс 10

55. [Старая готовальня] В некоторых готовальнях старого образца в состав принадлежностей входила металлическая пластинка с прорезью в форме кривой $\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y}$ $(y > 0)$. Объясните, как можно использовать эту пластинку для деления угла на n равных частей, где n — любое наперёд заданное натуральное число.

56. [Нулевой определитель] Имеется числовая матрица $A = (a_{ij})$ размером 2011×2011. Известно, что если $i + j$ чётно, то $a_{ij} = 0$. Докажите, что определитель матрицы A равен нулю.

57. [Последовательность] Последовательность (a_n) задана так:

$$a_0 = 2011, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = a_{n-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Сходится ли эта последовательность? Если сходится, то найдите её предел.

58. [Минимизация функционала] Среди всех кусочно-гладких непрерывных функций $y = f(x)$, таких что $f(-2) = f(2) = 0$ и $f(x) \geqslant 1$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, найдите функцию, минимизирующую интеграл $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

59. [Неравенство] Пусть $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$. Докажите, что для любых натуральных чисел m и n выполнено неравенство

$$(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geqslant 1.$$

60. [Спасите принцессу!] Могучему герою, чтобы освободить прекрасную принцессу, надо было вычислить произведение $A'A$, где A — матрица размера 3×2, составленная из действительных чисел, A' — транспонированная матрица. Но растяпа богатырь перепутал порядок множителей и вычислил произведение

$$AA' = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

а когда злой волшебник указал ему на ошибку, оказалось, что матрицу A наш доблестный воин потерял. Найдите $A'A$, спасите принцессу!

Конкурс 11

61. [Кубические часы] Настольные часы с часовой и минутной стрелками (минутная стрелка длиннее часовой) имеют форму куба с круглым циферблатом (с минутными делениями) в центре одной из граней. На часах нет чисел и каких-либо пометок, показывающих, где у них верх. Поэтому можно случайно поставить их на бок или даже вверх ногами. Есть ли в сутках хотя бы один такой момент, когда нельзя будет определить, какое время показывают эти часы?

62. [Цифростишия] В книге А. Е. Попова “Цифростишия” приводятся интересные равенства:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2; \quad 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2.$$

Для произвольного k найдите $k + 1$ последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых равна сумме квадратов следующих за ними k натуральных чисел.

63. [Раскраска плоскости] Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что существует треугольник с одноцветными вершинами, у которого меньшая сторона длины 1, а углы находятся в отношении $1 : 2 : 4$.

64. [Многочлен] Докажите, что многочлен

$$P(x) = x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \cdots - 2nx + (2n + 1)$$

не имеет действительных корней.

65. [Косинусы] Рассмотрим четыре угла между плоскостями граней правильного тетраэдра и некоторой фиксированной плоскостью. Докажите, что

1) косинусам этих углов можно приписать знаки так, что их сумма будет равна нулю;

2) сумма квадратов косинусов этих углов равна $\dfrac{4}{3}$.

66. [Циклическое неравенство] Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1+1}{a_2+1}+\frac{a_2+1}{a_3+1}+\cdots+\frac{a_{n-1}+1}{a_n+1}+\frac{a_n+1}{a_1+1} \leqslant \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}.$$

Конкурс 12

67. [Две мухи] Из пунктов A и B, расстояние между которыми 100 км, одновременно со скоростями соответственно 20 км/ч и 30 км/ч выезжают навстречу друг другу два велосипедиста. Вместе с ними со скоростью 50 км/ч вылетают мухи, летят до встречи друг с другом, поворачивают и летят обратно до встречи с велосипедистами, снова поворачивают и т. д. Сколько километров в направлении из A в B пролетит каждая муха до того момента, когда велосипедисты встретятся?

68. [Три квадрата и два куба] Может ли сумма квадратов трёх последовательных целых чисел равняться сумме кубов двух последовательных целых чисел?

69. [Два треугольника] На стороне AC треугольника ABC во внешнюю сторону построен правильный треугольник ACD. Известно, что $\angle ABC = 30°$. Докажите, что $BD^2 = AB^2 + BC^2$.

70. [Додекаэдр] Какова величина двугранного угла додекаэдра?

71. [Уравнение маятника] Докажите, что уравнение движения маятника $y'' + \sin y = 0$ имеет такое частное решение $y(x)$, отличное от константы, что $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \pi$.

72. [Треугольники в графе] В простом графе $n \geqslant 3$ вершин и $m > \frac{n^2}{4}$ рёбер. Докажите, что в графе не менее $\left[\frac{n}{2}\right]$ треугольников.

Конкурс 13

73. [12-й стул] Предположим, что Клавдия Ивановна (тёща Кисы) спрятала бриллианты в одном из 12 стульев с вероятностью 90%, а с вероятностью 10% не спрятала их вовсе. Предположим также, что мы вскрыли 11 стульев и ни в одном из них бриллиантов не нашли. Какова вероятность того, что мы найдём их в последнем, 12-м, стуле?

74. [Хитрые лжецы] На остров рыцарей и лжецов приехал капитан Кук. Он собирает по 50 жителей и спрашивает каждого, сколько рыцарей среди присутствующих. При каком наибольшем числе рыцарей на острове лжецы могут договориться отвечать так, чтобы Кук слышал один и тот же набор ответов, каких бы 50 островитян он ни опрашивал? (На острове более 100 жителей, и не все они рыцари. Напомним, что рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.)

75. [НОК] Пусть $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ — натуральные числа, N — их наименьшее общее кратное. Докажите, что $N \geqslant na_1$.

76. [Шестиугольник] Существует ли шестиугольник, который одним прямолинейным разрезом разбивается на четыре равных треугольника?

77. [Неравенство]
Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$. Докажите, что

$$\frac{x_1}{x_1^3+4}+\frac{x_2}{x_2^3+4}+\cdots+\frac{x_n}{x_n^3+4} \leqslant \frac{n}{5}.$$

78. [Четыре точки] В белый круг наудачу бросаются четыре чёрные точки. Найдите вероятность того, что этот круг можно разбить на четыре одинаковых сектора так, чтобы в каждом секторе оказалось по одной чёрной точке.

Конкурс 14

79. [Сахар и кофе] Есть стакан, кружка и кофейник объёмом 200, 300 и 400 мл соответственно. В кружке 200 мл кофе и один кусок сахара, в кофейнике — 300 мл кофе и два куска сахара. Стакан пуст. Можно ли с помощью переливаний уравнять количество сахара в кружке и кофейнике так, чтобы стакан в итоге вновь оказался пустым? (Дополнительных ёмкостей и средств измерений нет.)

80. [Оценка интеграла] Пусть $a < b$. Докажите, что

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}dx \geqslant e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

81. [Теорема Стюарта] В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка D. Пусть $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $AD = p$, $BD = m$, $DC = n$. Докажите, что

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

82. [Мальчики и девочки] В шахматном турнире по круговой системе участвовали мальчики и девочки. Каждый участник ровно половину своих очков набрал в партиях с девочками. Докажите, что общее количество участников является точным квадратом.

83. [Матрицы] Пусть A, B, C — квадратные матрицы одинакового размера, причём матрица A невырожденная. Докажите, что если $(A - B)CA = B$, то $AC(A - B) = B$.

84. [Уравнение в целых числах] Решите в целых числах уравнение

$$x^4 - 3y^4 = 1.$$

Конкурс 15

85. [Средний камень] Имеется прибор, который за одно испытание для любых пяти камней определяет среди них средний по весу. Можно ли найти средний из 7 камней разного веса не более чем за 5 испытаний?

86. [Два ребра] В тетраэдре $ABCD$ ребро AC видно из вершин B и D под прямым углом. Докажите, что $BD < AC$.

87. [Две суммы] На доске записано несколько чисел. Учитель попросил Мишу поделить каждое из чисел на сумму всех остальных. У Мити было другое задание: делить квадрат каждого числа на сумму остальных чисел. Сумма чисел, полученных Мишей, оказалась равной 1. Какой может быть сумма чисел, вычисленных Митей?

88. [Предел интеграла] Вычислите

$$\lim_{x\to 1} \int\limits_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

89. [Ряд] Существует ли биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2}?$$

90. [Детектор радиоактивности] Среди 2^n+1 шаров (n — натуральное число) ровно два являются радиоактивными. В детектор можно положить любое количество шаров, но он сработает, только если среди этих шаров есть оба радиоактивных. Докажите, что минимальное количество применений детектора, позволяющих гарантированно найти хотя бы один радиоактивный шар, равно n.

Конкурс 16

91. [Верблюд] Земля по экватору плотно обтянута верёвкой. Верёвку удлинили на метр, после чего её взяли в одной точке и натянули вверх. Пройдёт ли, не склоняя головы, под этой верёвкой верблюд? (Считаем, что Земля — идеальный шар радиусом 6400 км.)

92. [Медианы и высоты] Существует ли треугольник, в котором все высоты меньше 1 мм, а все медианы больше 1 м?

93. [Двойной интеграл] Вычислите интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \sin(x^2)\cos(y^2)\,dx\,dy.$$

94. [Определитель] Пусть $A = (a_{ij})$ — ортогональная матрица размером 3×3, причём все её элементы отличны от нуля. Составим матрицу $B = (b_{ij})$ с общим элементом $b_{ij} = \dfrac{1}{a_{ij}}$. Докажите, что определитель этой матрицы равен нулю.

95. [Вращающиеся прямые] На плоскости вокруг двух точек A и B с одинаковой угловой скоростью в противоположных направлениях вращаются две прямые, проходящие через эти точки. Какую линию описывает точка пересечения этих прямых?

96. [Оценка произведения] Пусть среднее арфметическое n действительных чисел равно нулю, а среднее арфметическое их квадратов равно единице. Какое наибольшее значение может принимать произведение этих чисел?

Конкурс 17

97. [Песочные часы] Есть двое песочных часов: на 2 мин и на 5 мин. В первых часах в данный момент времени часть песка находится в верхней половине, а часть — в нижней. Во вторых часах весь песок находится в нижней половине. Можно ли с помощью этих часов отмерить ровно 8 мин, начиная прямо с текущего момента времени?

98. [Перпендикулярные касательные] Пусть A и B — точки на параболе такие, что касательные к параболе, проведённые в данных точках, перпендикулярны друг другу. Докажите, что произведение расстояний от точек A и B до оси параболы не зависит от выбора этих точек, а зависит только от параметра параболы.

99. [Функциональное уравнение] Найдите все функции f, непрерывные на $[0;+\infty)$, для которых

$$\forall x \geqslant 0 \quad \sin\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right) = \frac{x}{x+1}.$$

100. [Кузнечик и блоха] Кузнечик ловит блоху, прыгающую по точкам плоскости Oxy с рациональными координатами. Блоха в моменты времени $t = 0, 2, 4, 6, \ldots$ прыгает на некоторый фиксированный вектор $\boldsymbol{a}$, а кузнечик в каждый из моментов $t = 1, 3, 5, \ldots$ может прыгнуть в любую точку плоскости. Сможет ли он поймать блоху, если её не видно, а начальное положение блохи и вектор $\boldsymbol{a}$ неизвестны?

101. [Оценка произведения] Пусть

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

Докажите, что для любого натурального n выполняются неравенства: а) $a_n < 2{,}72$; б) $a_n < 2{,}5$.

102. [Матрица] Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ — фиксированные векторы, причём $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Докажите, что найдётся симметричная вещественная матрица размера $n \times n$ и ранга не больше 2, такая, что $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Конкурс 18

103. [Трое детей] Встретились два математика, не видевшие друг друга после окончания вуза. Сергей говорит: “У меня трое сыновей. Произведение их возрастов равно количеству лет, сколько мы не виделись. Мой младший сын — просто ангелочек!” Григорий замечает, что этих сведений недостаточно, чтобы определить возраст детей. Тогда Сергей добавляет, что у его старшего сына голубые глаза. “Теперь всё ясно!” — восклицает Григорий. Определите возраст сыновей Сергея, если известно, что Григорию меньше ста лет.

104. [Модуль числа] Модули комплексных чисел a, b и c равны r. Какие значения может принимать модуль числа $\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$?

105. [Тройной интеграл] Пусть фигура G задаётся неравенствами $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Вычислите интеграл

$$\iiint\limits_G \frac{x+y}{x+y+z}\,dx\,dy\,dz.$$

106. [Обидно уйти без подарка] В комнате n ящиков, в каждом лежит по одному подарку. По очереди в комнату заходит m детей, каждый из которых случайным образом выбирает ящик и забирает оттуда подарок, если таковой там ещё есть. Сколько в среднем детей уйдут без подарка?

107. [Бесконечная система неравенств] Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \cos x < 0; \\ \cos 2x < 0; \\ \cos 4x < 0; \\ \dots \\ \cos 2^n x < 0; \\ \dots . \end{cases}$$

108. [Хвастливый барон] Барон Мюнхгаузен утверждает, что он нарисовал многоугольник и поставил вне его точку O так, что любая прямая, проходящая через точку O (и лежащая в плоскости многоугольника), делит площадь многоугольника пополам. Не обманывает ли барон?

Конкурс 19

109. [Какие весы лучше?] Есть 101 банка консервов массами 1001 г, 1002 г, $\dots$, 1101 г. Этикетки с указанием веса потерялись, но завхозу кажется, что он помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедиться в этом за наименьшее число взвешиваний. Есть двое чашечных весов — точные и грубые. За одно взвешивание можно сравнить по весу две банки. Точные весы показывают, какая банка тяжелее, а грубые — только если разница больше 1 г (иначе они показывают равновесие). Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать?

110. [Точка на медиане] Точка K лежит на медиане BM треугольника ABC, причём углы AKM и MBC равны. Докажите, что $AK = BC$.

111. [Кубическое уравнение] Найдите все действительные корни уравнения

$$2x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}.$$

112. [Вероятность остроугольности] Среди вершин правильного $(2n+1)$-угольника случайным образом выбираются три различные точки. Они соединяются отрезками. С какой вероятностью получится остроугольный треугольник?

113. [Сумма дробей] Пусть p — простое число, а комплексное число $x \neq 1$ является корнем p-й степени из 1. Найдите все значения, которые может принимать (в зависимости от p) сумма $\sum\limits_{k=1}^{p-1} \dfrac{x^{2k}}{x^k - 1}$.

114. [Много гирь] Для каждого натурального n у нас есть одна гиря массой $1/n^2$ г. Никаких других гирь у нас нет. Какие массы мы можем взвесить на чашечных весах с помощью этих гирь? Гири (их может быть и бесконечное число) помещаются на одну чашку, а груз — на другую.

Конкурс 20

115. [Свечи] Большая свеча сгорает за час и стоит 60 рублей, а маленькая сгорает за 11 минут и стоит 11 рублей. Можно ли с помощью этих свечек отмерить минуту, затратив не более 150 рублей?

116. [Многочлен] На рисунке 1 изображён график многочлена пятой степени $P(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$. Этот график имеет центр симметрии — точку A. Определите знаки всех коэффициентов многочлена.

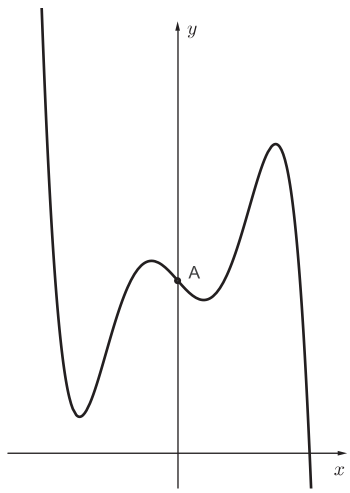


Рис. 1.

117. [Трапеция] Равнобокая трапеция описана вокруг окружности единичного радиуса. Какие значения может принимать длина диагонали этой трапеции?

118. [Ряд] Вычислите сумму ряда

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \ldots$$

119. [Последовательность] Бесконечная последовательность $f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ состоит из натуральных чисел, и при этом $f(f(n)) = f(n+1) + f(n)$ для всех натуральных n. Докажите, что все члены этой последовательности попарно различны.

120. [Сумма периодических функций] Можно ли функцию $y = e^x$ представить в виде суммы конечного числа периодических функций?

Конкурс 21

121. [Фишки] Какое а) наименьшее; б) наибольшее количество фишек можно поставить на шахматную доску, чтобы в каждом квадрате 3×3 клеток стояло ровно три фишки?

122. [Треугольники] Любой ли треугольник можно разрезать на три меньших треугольника так, чтобы любую из получившихся частей можно было покрыть двумя другими?

123. [Сложные радикалы] Является ли рациональным число

$$\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}?$$

124. [Действительный корень] Коэффициенты многочлена $P(x) = a_0x^{2012}+a_1x^{2011}+\dots+a_{2012}$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{a_0}{2013}+\frac{a_2}{2011}+\frac{a_4}{2009}+\dots+\frac{a_{2010}}{3}+a_{2012}=0.$$

Докажите, что многочлен $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

125. [Дружинники] На улице Дружинников стоят в ряд n домов, в каждом из которых живёт одна семья: отец, мать, сын и дочь. Жители этих домов все вместе ходят патрулировать свою улицу, разбившись на пары. Каждую пару составляют либо члены одной семьи, либо двое мужчин, две женщины, двое юношей или две девушки, живущие в соседних домах. Сколько существует способов составить такие пары?

126. [Периодичность в точке] Будем говорить, что функция f, определённая на всей числовой прямой, является *периодической в точке* x_0, если существует такое положительное число T, что при любом целом k выполнено равенство $f(x_0+kT) = f(x_0)$. Верно ли, что всякая функция, периодическая в каждой точке числовой прямой, является периодической и в обычном смысле?

Конкурс 22

127. [Кто старше?] Андрей, Боря, Вася, Гриша и Дима имеют (в каком-то другом порядке) фамилии Андреев, Борисов, Васильев, Григорьев и Дмитриев. Известно, что Андрей на 1 год старше Андреева, Боря на 2 года старше Борисова, Вася на 3 года старше Васильева, Гриша на 4 года старше Григорьева. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?

128. [Окружность и многоугольник] Даны многоугольник и окружность. Окружность пересекает каждую сторону многоугольника в двух точках, причём эти точки делят сторону на три равных отрезка. Обязательно ли многоугольник правильный?

129. [Кубик и плоскость] Через центр кубика Рубика провели плоскость, перпендикулярную его диагонали. Сколько маленьких кубиков пересекла эта плоскость?

130. [Дифференциальное уравнение] Пусть функция $f(x)$ такова, что для любого x выполняется равенство $f'(x) = f(-x)$. Найдите $f(x)$, если $f(0) = 1$.

131. [n-кратный интеграл] Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^1 dx_2 \dots \int\limits_0^1 \min(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n.$$

132. [Пифагоровы штаны] Имеется треугольник ABC. На его сторонах внешним образом строятся квадраты (см. рис. 2).

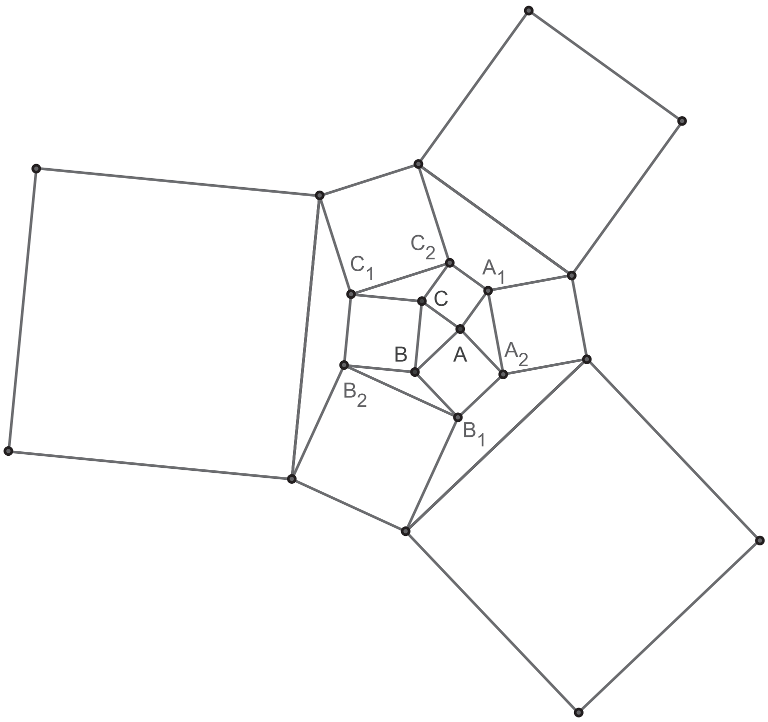


Рис. 2.

Соединим отрезками точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. На сторонах A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 полученного шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ внешним образом построим квадраты. После соединения соответствующих вершин этих квадратов получается новый шестиугольник, на трёх сторонах которого строятся новые квадраты.

Повторение этой процедуры даёт последовательность троек квадратов. Найдите S_n — отношение суммарной площади n-й тройки квадратов к суммарной площади первой тройки.

Конкурс 23

133. [Гирьки в кучках] 27 гирек в 1, 2, ..., 27 г разложили на кучки, в каждой из которых самая тяжёлая гирька весит столько же, сколько и все остальные гирьки этой кучи вместе взятые. Сколько было кучек?

134. [Касающиеся окружности] В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = p$ и $BC = q$ окружности, вписанные в треугольники ACD и ACB, касаются друг друга. Найдите длину боковой стороны трапеции (т. е. выразите её через p и q).

135. [Любителям интегралов] Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}\,dx.$$

136. [Матричное равенство] Пусть A и B — квадратные матрицы одинакового размера, причём матрица A — невырожденная. Возможно ли равенство $AB - BA = A$?

137. [Помогите Вовочке] Вовочка написал на доске равенство $101 = 11011$. Учитель информатики сказал, что это равенство будет верным, если понимать его как запись одного и того же числа, но в разных системах счисления. Найдите основания этих систем. (Укажите все возможные варианты.)

138. [Любителям тригонометрии] Докажите тождества

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi k}{2n+1} = (2n+1)n; \qquad \prod_{k=1}^{n} \operatorname{tg} \frac{\pi k}{2n+1} = \sqrt{2n+1}.$$

Конкурс 24

139. [Найти фальшивые монеты] Среди 25 монет ровно две фальшивые. В детектор можно поместить две монеты, и он покажет, сколько из них фальшивых. Какое наименьшее число раз нужно использовать детектор, чтобы гарантированно найти обе фальшивые монеты?

140. [Дружная пятёрка] В ряд стоят $n > 5$ человек. Сколько способов выбрать из них пять человек, чтобы для каждого из этой пятёрки нашёлся в ней хотя бы один сосед (по ряду)?

141. [Неравенство] Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Докажите, что

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant 4(x_1 - x_n).$$

142. [ЕГЭ С4] Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые AB и DC пересекаются в точке O. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники AOD и BOC равны соответственно a и b, угол AOD равен α. Найдите площадь треугольника AOD.

143. [Локализация корня] Докажите, что уравнение

$$\int_0^x e^{-t}\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{100}}{100!}\right) dt = 50$$

имеет корень $x_0 \in (50; 100)$.

144. [Зажечь лампочки!] В каждой клетке прямоугольника $m \times n$ находится лампочка, которая в любой момент времени находится в одном из двух состояний: горит или не горит. Нажав на любую лампочку, мы меняем её состояние, а также всех лампочек, находящихся в той же строчке и в том же столбце. За какое наименьшее число нажатий можно зажечь все лампочки, если вначале они все не горят? (Ответ зависит от m и n).

Конкурс 25

145. [Кошки–мышки] Две кошки и одна мышка бегают по плоскости, максимальные скорости у всех одинаковы. В каждый момент скорость мышки направлена в сторону, противоположную ближайшей кошке (а если кошки на одинаковом расстоянии от мышки, то в сторону, противоположную любой из них). Всегда ли умные кошки смогут поймать мышку?

146. [Найти угол] В треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H, а медианы — в точке M. Найдите угол ABC, если известно, что биссектриса этого угла перпендикулярна MH.

147. [500 цифр] Найдите последние 500 цифр числа

$$2013^{2000!}.$$

148. [Оценка факториала] Докажите, что для любого натурального $n > 1$ выполняется неравенство

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

149. [Предел] Последовательность (a_n) задаётся соотношениями $a_0 = 10$ и $a_{n+1} = a_n + \sin a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

150. [Многочлен или не многочлен?] Пусть $f : F \times F \to F$ — функция от двух переменных, являющаяся многочленом по каждой из переменных (т. е. для любого $x_0 \in F$ функция $f(x_0, y)$ — многочлен от y с коэффициентами из F и для любого $y_0 \in F$ функция $f(x, y_0)$ — многочлен от x с коэффициентами из F). Верно ли, что f — многочлен от двух переменных, если а) $F = \mathbb{Z}$; б) $F = \mathbb{R}$?

Конкурс 26

151. [Восьмиугольник] Существует ли такая фигура F, что из любого количества фигур, равных F, можно сложить восьмиугольник?

152. [Четвёртая ножка] Имеется табуретка с очень тонкими ножками, перпендикулярными сидению (основания ножек образуют квадрат). Гриша отпилил от каждой ножки по кусочку. После этого табуретка стала стоять наклонно, но по-прежнему касалась пола всеми ножками. Длины трёх отпиленных кусочков 5, 6 и 10 см. Какой могла быть длина четвёртого кусочка?

153. [Три прямые] Дан треугольник ABC. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC, прямая, проходящая через середины сторон AB и BC, и биссектриса угла ACB пересекаются в одной точке.

154. [2013-я производная] Пусть

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2013x^{2012}}.$$

Найдите $f^{(2013)}(0)$.

155. [Переносы] К числу, записанному в k-чной системе счисления и первоначально равному нулю, прибавляется шаг за шагом по единице до получения значения $k^n - 1$. Сколько при этих сложениях происходит переносов единицы в старший разряд?

156. [Непересекающиеся леденцы] Объединение отрезка AB и круга с центром в точке B назовём *леденцом* с основанием в точке A. Существуют ли в плоскости Oxy попарно непересекающиеся леденцы, основания которых — все точки с координатами вида $(x; 0)$, где x — рациональное число из отрезка $[0; 1]$?

Конкурс 27

157. [Два преобразования] Существуют ли на плоскости две ограниченные фигуры ненулевой площади A и B такие, что B можно получить из A как поворотом вокруг некоторой точки на $20°$, так и параллельным переносом на вектор длиной 13 см?

158. [Интересная последовательность] Последовательность (a_n) задаётся рекуррентным соотношением

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1} + 1}{a_k}$$

с начальными условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 2013$. Найдите a_{2013}.

159. [Делимость на 2013] Натуральные числа выписывают в порядке возрастания без пробелов:

$$123456789101112131415161718192021222324252627282930313233\ldots.$$

Докажите, что для некоторого k число, образованное первыми k цифрами этой последовательности, делится на 2013.

160. [Много радикалов] Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x-2}{2011}}+\sqrt{\frac{x-3}{2010}}+\sqrt{\frac{x-4}{2009}}=\sqrt{\frac{x-2011}{2}}+\sqrt{\frac{x-2010}{3}}+\sqrt{\frac{x-2009}{4}}.$$

161. [Дифференциальное уравнение] Существует ли решение дифференциального уравнения

$$(y')^2-2y'-4y+4x+1=0,$$

удовлетворяющее граничным условиям $y(0)=\frac{1}{4}$; $y(1)=1$?

162. [Мины] В некоторых клетках поля размером $m\times n$ расставлены мины, при этом каждая клетка (в том числе и заминированная) граничит по стороне ровно с одной заминированной клеткой. При каких m и n это возможно? А если возможно, сколько расставлено мин?

Конкурс 28

163. [Три таблицы] Имеется три таблицы 3×3. В клетки каждой таблицы расставляются числа от 1 до 9. Можно ли это сделать так, чтобы любые два номера встретились в соседних (по стороне) клетках хотя бы одной из таблиц?

164. [Найдите угол] Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка P такая, что $\angle PAC=60^\circ$; $\angle PCA=\angle PBA=30^\circ$. Пусть M — середина AC, N — середина BC. Найдите величину угла PNM.

165. [Наименьший НОК] Пусть сумма четырёх натуральных чисел равна 2013. Какое наименьшее значение может быть у наименьшего общего кратного этих четырёх чисел?

166. [Две функции] Функции φ и f таковы, что при некотором α для любого числа a

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi(at)}{t^\alpha}=f(a).$$

Известно также, что $f(1)=1$. Докажите, что $f(x)=x^\alpha$.

167. [Неравенство] Пусть функции f и g определены и непрерывны на отрезке $[0;1]$. Докажите неравенство

$$\left(\int\limits_0^1 f(x)dx\right)^2+\left(\int\limits_0^1 g(x)dx\right)^2\leqslant\left(\int\limits_0^1\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}dx\right)^2.$$

168. [Найдите верхнюю границу] Пусть $n\geqslant 2$. Найдите наибольшее p, для которого неравенство

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\cdots+x_n^2\geqslant p(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\cdots+x_{n-1}x_n)$$

выполняется при всех $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Конкурс 29

169. [Числа на гранях] На гранях куба записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 2013. Найдите сумму чисел на гранях куба.

170. [Описанная сфера] В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине D прямые. Выразите радиус сферы, описанной вокруг $ABCD$, через длины рёбер $DA=a$, $DB=b$, $DC=c$.

171. [Интеграл] Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{2014}-1}{\ln x}dx.$$

172. [Целая часть] Пусть n — натуральное число. Найдите целую часть суммы $2n$ слагаемых

$$\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}+\cdots+\sqrt{n^2+2n}.$$

173. [Пятёрки и семёрки] Сколько существует 15-значных чисел, в записи которых присутствуют только цифры 5 и 7 и которые делятся и на 5, и на 7?

174. [Уравнение в натуральных числах] Найдите все тройки натуральных чисел x, y и z, для которых выполнено равенство

$$(y-z)(xy+xz+1)=(x+y-z)^2.$$

Конкурс 30

175. [Пловцы] В 50-метровом бассейне тренируются два пловца — мастер спорта Вася и начинающий спортсмен Петя. Они стартуют одновременно с одного бортика и плывут по соседним дорожкам с постоянными, но различными скоростями. Доплыв до бортика, пловец немедленно поворачивается и плывёт назад, а проплыв 1 км, заканчивает тренировку. Известно, что за время тренировки пловцы встретились 13 раз (если один пловец догнал другого — это тоже встреча; момент старта встречей не считается). Во сколько раз Вася плывёт быстрее Пети?

176. [Найдите углы] В плоскости правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $\angle AOC=90^\circ$, $\angle BOC=75^\circ$. Найдите углы треугольника, который можно составить из отрезков AO, BO и CO.

177. [Функция от шести переменных] Найдите наибольшее значение функции

$$F(a,b,c,d,e,f)=(c-a)(f-b)-(e-a)(d-b),$$

если

$$\begin{cases} a^2-4a+b^2-2b+2\leqslant 0,\\ c^2-4c+d^2-2d+2\leqslant 0,\\ e^2-4e+f^2-2f+2\leqslant 0.\end{cases}$$

178. [Начинающим алгебраистам] Существует ли группа из 12 элементов, в которой порядки элементов равны соответственно 6, 6, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1?

179. [Теорема?] Докажите или опровергните следующее утверждение: количество способов представить натуральное число n в виде суммы последовательных натуральных чисел равно количеству нечётных делителей числа n.

180. [Функциональное неравенство] Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что

$$\forall x,y\quad f(f(x+y))\geqslant f(f(y))+yf(x).$$

Конкурс 31

181. [365 треугольников] Существует ли прямоугольный треугольник, который можно разрезать на 365 одинаковых треугольников?

182. [Удивительный предел] Пусть a_n — произведение всех чисел в n-й строке треугольника Паскаля, т. е. $a_n = \prod\limits_{k=0}^{n} C_n^k$. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2}$.

183. [Уравнение с тремя переменными] Найдите все тройки (x, y, z) действительных чисел, для которых выполнено равенство

$$x \cdot 2^y + y \cdot 2^z + z \cdot 2^x = y \cdot 2^x + z \cdot 2^y + x \cdot 2^z.$$

184. [Задача из Южной Кореи] Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{1}{a^2 - 4a + 9} + \frac{1}{b^2 - 4b + 9} + \frac{1}{c^2 - 4c + 9},$$

если $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 1$.

185. [За круглым столом] m мужчин и n женщин садятся случайным образом за круглый стол. Найдите математическое ожидание числа пар людей разного пола, которые окажутся соседями.

186. [В городе N] В городе N у любых двух жителей есть общий знакомый. Докажите, что можно составить городскую Думу из не более чем $\sqrt{1 + n\ln n}$ людей (где n — количество жителей в N) так, что любой житель города, не вошедший в Думу, имеет хотя бы одного знакомого думца.

Конкурс 32

187. [Переправа] К переправе перешли Дон Кихот и Санчо Панса с жёнами и n монахинь. Есть двухместная лодка, грести могут только Санчо и его жена. Никто из женщин не желает оказаться на берегу в одиночестве. Правила этикета запрещают женщинам быть в лодке или на берегу с другими мужчинами, если рядом нет мужа или другой женщины. При каких n все могут переправиться?

188. [Угол] На стороне AB треугольника ABC взяты точки P и Q такие, что $AP = BC$ и $BQ = AC$. Пусть M, N, K — середины отрезков AB, CP, CQ соответственно. Найдите угол NMK, если $\angle ACB = 114°$.

189. [Оценка сверху] Докажите, что для любых положительных чисел x и y выполняется неравенство

$$\frac{1}{x + y + 1} - \frac{1}{(x + 1)(y + 1)} < \frac{1}{11}.$$

190. [Объём] Что представляет собой фигура, заданная в декартовых координатах неравенством

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 \leqslant 36(x^2 + y^2)?$$

Найдите её объём.

191. [Определитель] Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размером $n \times n$ с общим членом

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} k^{i+j}.$$

Вычислите определитель этой матрицы.

192. [Игра на деньги] Двое играют в такую игру. Один загадывает целое число от 1 до 144, а второй пытается его отгадать, задавая вопросы, на которые первый (честно) отвечает «да» или «нет». В случае ответа «да» второй игрок платит 1 рубль, в случает ответа «нет» — два рубля. Как должен играть второй игрок, чтобы сделать свой проигрыш в наихудшей ситуации минимальным? Решите задачу и в общем случае (заменив в условии 144 на n).

Конкурс 33

193. [Четыре числа] Александр Васильевич задумал четыре различных двузначных числа, одно из которых равно сумме трёх остальных. Зная этот факт, а также три задуманных числа, ни один из четырёх мудрецов не смог назвать недостающее число (мудрецам сообщались разные тройки чисел). А сможете ли вы назвать все четыре числа?

194. [Иррациональный корень] При каких натуральных n уравнение

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = n^2$$

имеет положительный иррациональный корень?

195. [Перестановочные матрицы] Докажите, что если произведение двух квадратных вещественных матриц равно их сумме, то эти матрицы перестановочны.

196. [Постоянный интеграл] Существует ли непрерывная на промежутке $(1; +\infty)$ функция $f(x)$ такая, что

$$\forall x > 1 \quad \int\limits_{x}^{x^3} f(t)\,dt = 1?$$

197. [Среднее число слагаемых] Складывают значения случайной величины, равномерно распределённой на отрезке [0;1], до тех пор, пока их сумма не превысит 1. Каково математическое ожидание числа слагаемых в такой сумме?

198. [Задача о знакомствах] Собралось n человек. Известно, что если двое из них знакомы, то у них больше нет общих знакомых, а если двое незнакомы, то у них ровно один общий знакомый. При этом нет никого, кто был бы знаком со всеми.

0) Приведите пример, когда $n = 5$ и $n = 10$.

1) Докажите, что $n - 1$ — квадрат целого числа.

2) Докажите, что если $n > 5$, то $n = (t^2 + t + 1)^2 + 1$ для некоторого целого t.

Конкурс 34

199. [Сапёр] Таблица 10×10 заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

200. [Условное тождество] Положительные числа удовлетворяют равенству $a + b + c + d = abcd\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$. Докажите, что $\frac{a+b}{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+b^2}} = \frac{c+d}{\sqrt{1+c^2}\cdot\sqrt{1+d^2}}$.

201. [Квадраты миноров] Пусть A — произвольная ортогональная матрица размером $n \times n$. Докажите, что сумма квадратов всех миноров второго порядка матрицы A равна $\frac{n(n-1)}{2}$.

202. [Путь пчелы] Пчела находится в центре правильного треугольника со стороной 1. Одна сторона треугольника намазана мёдом, другая — вареньем, а третья посыпана сахаром. Пчела должна понемножку попробовать мёда, варенья и сахара и вернуться в исходную точку. Найдите длину её кратчайшего пути.

203. [Ликбез: несобственные интегралы] Вычислите интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2-4}{x^2+4} \cdot \frac{\sin 2x}{x} dx.$$

204. [Цветные числа и треугольники] Каждое положительное действительное число покрашено в один из трёх цветов, причём для каждого цвета найдётся число этого цвета. Назовём треугольник *трёхцветным*, если длины его сторон — числа всех трёх цветов. 1) Докажите, что при произвольной раскраске существует хотя бы один трёхцветный треугольник. 2) Обязательно ли существует прямоугольный трёхцветный треугольник?

Конкурс 35

205. [Девять точек] Отметьте на плоскости девять точек, обладающих таким свойством: как ни раскрашивать эти точки в два цвета, найдутся три точки одного цвета, являющиеся вершинами правильного треугольника.

206. [Равные диагонали] Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, точка E — середина BC, точка F — середина AD. Известно, что $AE = BF$, а $DE = CF$. Докажите, что $AC = BD$.

207. [Приводимый многочлен] Найдите все действительные a, при которых многочлен

$$P(x) = x^4 - 2(a+2)x^2 + (a-2)^2$$

представим в виде произведения двух многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами.

208. [Обобщение тождества Кассини] Последовательность (a_n) задана так: $a_0 = A$, $a_1 = B$ и $a_{n+1} = ka_n + a_{n-1}$ для любого натурального n. Докажите, что

$$|a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2| = const.$$

209. [Трёхцветные додекаэдры] Мы хотим покрасить грани додекаэдра в три цвета (каждая грань красится одним цветом, каждый из трёх цветов должен быть использован хотя бы один раз). Сколько у нас способов сделать это, если не различать между собой раскраски, получающиеся друг из друга в результате вращения додекаэдра?

210. [Совершенное паросочетание] На научный конгресс приехали $2n$ участников, каждый из которых имеет среди других участников ровно $n-1$ знакомых. При каких n всех участников конгресса можно гарантированно разбить на пары так, чтобы в каждой паре были знакомые между собой люди?

Конкурс 36

211. [Сложить квадрат] Придумайте такую фигуру, чтобы и из 16, и из 18 её экземпляров можно было сложить квадрат.

212. [Уравнение с 4 переменными] Решите в положительных числах уравнение

$$3(x+y+z+t)^2 = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + 1024.$$

213. [Минимум суммы] Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-9)^2+4} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(y-3)^2+9}.$$

214. [Неравенство] Докажите, что при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ выполнено неравенство

$$\operatorname{tg} x \cdot \sin x > x^2.$$

215. [Двойной ряд] Вычислите

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2 n}{3^m(n\cdot 3^m+m\cdot 3^n)}.$$

216. [Фокус на шахматной доске] Ассистент и фокусник показывают следующий фокус. Зритель из зала раскрашивает в чёрный или белый цвет каждую клетку шахматной доски, а ещё он указывает ассистенту одну из клеток. После этого ассистент перекрашивает какую-то клетку доски (по своему выбору). Затем входит фокусник. Он, глядя на доску, угадывает, на какую клетку указал зритель. Докажите, что такой фокус действительно возможен.

Конкурс 37

217. [Разрезать квадрат] Как разрезать квадрат на 25 частей, из которых можно сложить 17 одинаковых квадратов?

218. [Равные углы] На высоте CD остроугольного треугольника ABC отмечена точка O. Лучи AO и BO пересекают стороны BC и AC соответственно в точках K и N. Докажите, что $\angle NDC=\angle KDC$.

219. [Существует или не существует?] Существует ли функция, непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0;1]$ и такая, что

$$f(0)=0,\quad f(1)=3,\quad \int_0^1 (f'(x))^2dx\leqslant 5?$$

220. [Может или не может?] Пусть $f(x,y)$ — непрерывная функция, заданная на $\mathbb{R}^2$. Известно, что для любого отрезка L длиной 1 криволинейный интеграл по длине

$$\int\limits_L f(x,y)dl$$

равен нулю. Может ли значение функции f в какой-то точке плоскости Oxy быть отличным от нуля?

221. [Высокие детсадовцы] В группе детского сада n человек разного роста. Они встали в круг. Ребёнок скажет, что он высокий, если он выше двух своих соседей. Сколько в среднем детсадовцев назовут себя высокими?

222. [Победителям — торты] Однокруговой волейбольный турнир $2n$ команд продолжался $2n-1$ дней. Каждый день проходило n игр, каждая команда в один день проводила ровно одну игру. По окончании турнира организаторы решили наградить тортами некоторые команды: за каждый игровой день торт вручается какой-то команде, победившей в этот день. Всегда ли организаторы смогут осуществить свой выбор таким образом, чтобы только одна команда осталась без торта?

Конкурс 38

223. [Сложить квадрат] Разрежьте прямоугольник 2×5 на 5 частей, из которых можно сложить квадрат.

224. [Не точные квадраты] Пусть $x=2\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot 523\cdot 541$ (произведение первых ста простых чисел). Докажите, что числа $x-1$ и $x+1$ не являются точными квадратами.

225. [Задача от Змея Горыныча] На сторонах треугольника AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки E и F (рис. 3). Известно, что $\angle CAF=70^\circ$, $\angle FAB=10^\circ$, $\angle ACE=60^\circ$, $\angle ECB=20^\circ$. Найдите $\angle AFE$.

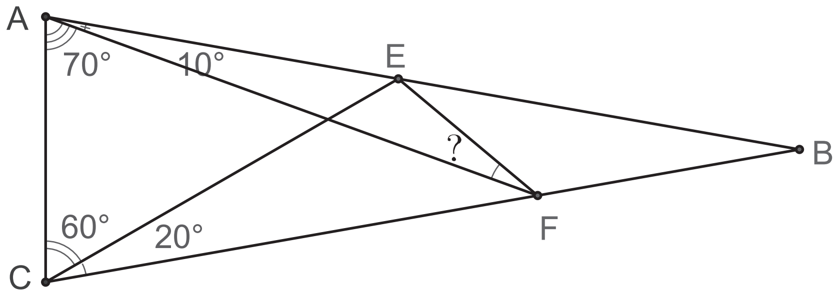


Рис. 3.

226. [Сходящийся ряд] Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2.$$

227. [Неравенство с арктангенсами] Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \operatorname{arctg} x_k \geqslant \frac{\pi n}{4}.$$

228. [Сильно регулярный граф] Существует ли простой граф, в котором у любых двух вершин ровно две общие смежные вершины и при этом степень каждой вершины равна а) 5; б) 6?

Конкурс 39

229. [Две трапеции] У двух трапеций равны соответственно углы и диагонали. Обязательно ли эти трапеции равны?

230. [НОКи] Можно ли какие-нибудь 9 последовательных натуральных чисел разбить на два множества с одинаковыми наименьшими общими кратными?

231. [Правильный треугольник] M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 в треугольнике ABC. Известно, что $\angle ABC = 60°$, $\angle AMC = 120°$. Докажите, что ABC — правильный треугольник.

232. [Задача от ДЮКа] Сумма $2n$ действительных чисел равна нулю. Каково наименьшее возможное количество пар этих чисел, имеющих неотрицательную сумму?

233. [Функциональное уравнение] Найдите все дифференцируемые функции f такие, что

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) + f(xy) + f(1) = f(x) + f(y) + f(xy+1).$$

234. [Таблица] В таблице 10×11 расставлены числа 0, 1 и 2 так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке делится на 3. Какое наибольшее число единиц может быть в этой таблице?

Конкурс 40

235. [Комары] Смена в летнем лагере длилась 11 дней. Каждый день ровно 10% отдыхающих кормили комаров. Для любых двух последовательных дней больше 1% отдыхающих кормили комаров оба этих дня. Обязательно ли найдётся отдыхающий, ни разу не кормивший комаров?

236. [Три касания] Можно ли расположить на плоскости а) 15; б) 16 одинаковых кругов так, чтобы каждый из них касался ровно трёх других?

237. [Треугольник и парабола] Дана парабола. Рассмотрим всевозможные прямоугольные треугольники с таким свойством: их вершины лежат на параболе, причём гипотенуза перпендикулярна оси параболы. Докажите, что высоты этих треугольников, опущенные на гипотенузу, равны между собой.

238. [Итерации] Пусть $f(x) = x(4-x)$. Решите уравнение

$$f(f(f(x))) = x.$$

239. [Абсолютная сходимость] Последовательность (a_n) задана условием

$$a_n = a_{n-1} - \frac{2}{n}a_{n-2}$$

при $n \geqslant 2$ (a_0, a_1 — произвольные действительные числа). Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится.

240. [Двойная сумма] Докажите тождество

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k}k^n C_{n+1}^{j-k}\right) = n!$$

Ответы

1. $\dfrac{5\pi^3R^2}{6}$. **2.** Да. Они сделали по $n-1$ рукопожатий. **3.** $C_{2n+k-1}^{n-1}\cdot 0{,}5^{2n+k-1}$. **4.** За 2 взвешивания. **6.** $\dfrac{n-1}{8}\cdot(n^3-5n^2+18n-8)$. **7.** $y = r + r\sin\frac{x}{r}, x \in [0, 2\pi r]$. **9.** 2. **10.** $\dfrac{\pi}{4}$. **11.** 2009. **14.** Можно. **15.** $2k+1$. **19.** За два дня. **20.** Возможно при нечётном, невозможно при чётном n. **25.** e. **26.** Нельзя. **27.** Червяк доползёт до конца каната через $10(e^{10}-1)$ секунд. **29.** Не следует. **31.** Всегда. **32.** Можно. **33.** $HQ < AG$. **35.** Объём пересечения $\frac{1}{18}$, объём объединения 18. **37.** Да. **39.** а) Прямая $y = -\dfrac{p}{2}$; б) окружность $x^2+y^2 = a^2+b^2$; в) окружность $x^2+y^2 = a^2-b^2$. **42.** 20. **43.** $\dfrac{a}{2^n-1}$. **45.** 264. **46.** 1. **47.** Первым можно подвозить любого. **48.** $y = y_1 + C_1(y_1-y_3) + C_2(y_2-y_3)$. **49.** 15 лет. **50.** Можно. **51.** Неверно. **52.** Их одинаковое количество. **57.** Последовательность сходится к нулю.

58. $f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ если } x \leqslant -1; \\ 1, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2-x, \text{ если } x \geqslant 1 \end{cases}$ **60.** $A'A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. **61.** Нет. **62.** Для любого k искомые числа: $2k^2+k, 2k^2+k+1, \ldots, 2k^2+2k$. **67.** 70 км и 20 км. **68.** Нет. **70.** $180^\circ - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **73.** $\frac{3}{7}$. **74.** 9. **76.** Да. **78.** $\frac{3}{8}$. **79.** Нельзя. **84.** $x = \pm 1, y = 0$. **85.** Да. **87.** 0. **88.** $\ln 2$. **89.** Нет. **91.** Да. **92.** Да. **93.** $\frac{1}{2}\pi(1-\cos(R^2))$. **95.** Равностороннюю гиперболу. **96.** 1 при n, кратном 4; $\dfrac{n-2}{n+2}$ при чётном $n > 2$, не кратном 4; $\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ при нечётном $n > 1$. **97.** Да. **99.** $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$. **100.** Да. **103.** 1, 2, 8. **104.** r. **105.** $\frac{\pi}{9}$. **106.** Без подарков уйдут в среднем $m - n\left(1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^m\right)$ детей. **107.** $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. **108.** Барон не обманывает! **109.** Грубые весы. **111.** $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+1}$.

112. $\dfrac{n+1}{4n-2}$. **113.** $\dfrac{p-3}{2}$. **114.** $\left(0; \dfrac{\pi^2}{6}-1\right] \cup \left[1; \dfrac{\pi^2}{6}\right]$. **115.** Да. **116.** $a_0 < 0$, $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, $a_3 = 0$, $a_4 < 0$, $a_5 > 0$. **117.** Множество значений длины диагонали $(2\sqrt{2}; +\infty)$. **118.** $\dfrac{\pi-3}{4}$. **120.** Нет. **121.** а) 16; б) 27. **122.** Да. **123.** Да. **125, 132.** $a_n = \frac{1}{7}\left(\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^{n+1} + 2\cdot(-1)^n\right)$. **126.** Нет. **127.** Дмитриев старше Димы на 10 лет. **128.** Да. **129.** 19. **130.** $f(x) = \sin x + \cos x$. **131.** $\dfrac{1}{n+1}$. **133.** 9. **134.** $\dfrac{p+q}{2}$. **135.** $\frac{\pi \ln 2}{8}$. **136.** Нет. **137.** 18 и 4. **139.** 13. **140.** $(n-4)^2$. **142.** $\dfrac{a^3}{b}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ или $ab\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. **144.** mn, если m и n — чётные числа; $\min(m,n)$, если m и n — нечётные числа; m, если m — нечётное, n — чётное; n, если m — чётное, n — нечётное. **145.** Да. **146.** 60°. **147.** $\underbrace{00\ldots0}_{499}1$. **149.** 3π. **150.** а) Нет; б) да. **151.** Да. **152.** 1, 9 или 11 (см). **154.** 2014! **155.** $k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k + 1 - n$. **156.** Да. **157.** Да. **158.** 1007. **160.** 2013. **161.** Да. **163.** Нет. **164.** 90°. **165.** 660. **168.** $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$. **169.** 75. **170.** $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. **171.** $\ln 2015$. **172.** $2n^2+n$. **173.** 2 340. **174.** $(2a-1; a+1; a)$, $a \in \mathbb{N}$. **175.** В 3 раза. **176.** 15°, 30°, 135°. **177.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **178.** Нет. **180.** $f(x) = 0$. **181.** Да. **182.** e. **183.** $(a,a,b), (a,b,a), (b,a,a)$, $a, b \in \mathbb{R}$. **184.** $\dfrac{7}{18}$. **185.** $\dfrac{2mn}{m+n-1}$. **187.** При $n = 0$ и $n \geqslant 4$. **188.** 33°. **190.** Тор; $6\pi^2$. **191.** $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} k!\right)^2$. **193.** 10, 11, 33, 54. **194.** При $n = 1$. **196.** Да. **197.** e. **199.** Нет. **202.** $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$. **203.** $\pi\left(\dfrac{1}{e^4} - \dfrac{1}{2}\right)$. **204.** 2) Нет. **207.** $a = n^2, a = 2n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. **209.** 8 814. **210.** При чётных n. **212.** $(8,8,8,8)$. **213.** 13. **215.** $\dfrac{9}{32}$. **219.** Нет. **220.** Нет. **221.** $\dfrac{n}{3}$. **222.** Да. **225.** 20°. **228.** а) Нет; б) да. **229.** Нет. **230.** Нет. **232.** $2n-1$. **233.** Многочлены степени не выше второй. **234.** 96. **235.** Да. **236.** а) Нет; б) да. **238.** $2 + 2\cos\frac{\pi(2k-1)}{9}$, $k = 1,2,3,4,5$; $2 + 2\cos\frac{\pi(2m-1)}{7}$, $m = 1,2,3$.

Авторы задач Н. И. Авилов (50), И. В. Акулич (159), Е. В. Бакаев (127), Д. А. Баранов (14), С. Л. Берлов (85, 90, 206), С. Г. Волчёнков (151), Г. А. Гальперин (128, 152), К. Н. Гасанов (183), А. Г. Гейн (108), А. В. Грибалко (133, 163), О. Ю. Дмитриев (236), Р. Г. Женодаров (223), Е. И. Знак (205, 240), К. Э. Каибханов (46), Т. В. Караваева (97), В. И. Каскевич (47), К. А. Кноп (211), В. Р. Крашенинников (78, 185), М. А. Кунгожин (188), Ю. Б. Мельников и Г. Л. Ходак (161), А. Р. Миротин (189), И. П. Нагель (164), Ф. Н. Назаров (42), С. В. Нестеров и В. А. Сендеров (41), Н. Н. Осипов (84, 174), И. С. Рубанов (175), А. П. Савин (158), В. Салихов (107), С. И. Токарев (4, 12, 228), А. К. Толпыго (32), Д. Г. Фон-Дер-Флаас (45, 181), Р. Хорнсбергер (194), А. И. Храбров (66, 77), А. В. Шаповалов (43, 44, 115, 169, 187, 193), В. А. Шевяков (79), Л. А. Штейнгарц (126), А. Ю. Эвнин (52, 96, 100, 120, 125, 132, 138, 140, 147, 186, 199, 200, 208, 210, 212, 217, 221), В. А. Ясинский (24).

Победители конкурсов Д. Агеев (15, 17, 19, 20), Е. Аникина (11, 12, 16, 18, 19, 21–24, 29–31, 33, 38-40), А. Белов (21), И. Богатырев (1, 2, 5, 8, 10), Т. Бычкова (6), Р. Гайнетдинов (13), С. В. Глотов (36), В. Л. Дорофеев (26, 34, 35), И. Зыков (29), Р. Карандашов (24, 27), Е. Подивилова (1, 6), Н. Сапронов (33, 35, 39, 40), А. Семеняк (4–8, 11), К. Хайрисламов (9, 20), М. Хайрисламов (9, 20), Р. Хайруллин (27, 28, 30–39), Д. А. Швед (3), А. Шпонько (4).

Литература

[1] Айгнер, М. *Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времён Евклида до наших дней* / М. Айгнер, Г. Циглер. — М.: Мир, 2006. – 256 с.

[2] Акопян, А. *Геометрические свойства кривых второго порядка* / А. В. Акопян, А. А. Заславский. — М.: МЦНМО, 2011. – 152 с.

[3] Башмаков, М. *О постулате Бертрана* / М. Башмаков // Квант. – 1990. – № 1. – С. 59–62.

[4] Веретенников, Б. М. *Студенческие олимпиады УГТУ-УПИ по математике* / Б. М. Веретенников, Л. П. Мохрачева, А. Б. Соболев, Г. Л. Ходак. — Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. – 233 с.

[5] *Вся высшая математика:* учебник / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко и др. — М.: КомКнига, 2012. – Т.7 – 208 с.

[6] Демидович, Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу* / Б. П. Демидович. — М.: АСТ, 2009.

[7] Игнатов, Ю. А. *Задачи студенческих математических боёв* / Ю. А. Игнатов, В. А. Шулюпов, А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005. – 43 с.

[8] *Казанские студенческие олимпиады по математике:* сборник задач / сост.: И. С. Григорьева. — Казань: Казанский университет, 2011. – 48 с.

[9] Курляндчик, Л. *Приближение к экстремуму* / Л. Курляндчик. // Квант. – 1981. – № 1. – С. 21–25.

[10] *Олимпиада МГУ «Ломоносов» по математике (2005–2008)* / Под ред. И. Н. Сергеева. — М.: МЦНМО, 2009. – 56 с.

[11] Понарин, Я. П. *Элементарная геометрия. – Т. 1: Планиметрия* / Я. П. Понарин. — М.: МЦНМО, 2008. – 312 с.

[12] Понарин, Я. П. *Элементарная геометрия. – Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства* / Я. П. Понарин. — М.: МЦНМО, 2006. – 256 с.

[13] Протасов, В. *Теорема Хелли и вокруг неё* / В. Протасов // Квант. — 2009. — № 3. — С. 8–14.

[14] Седракян, Н. *Неравенства. Методы доказательства* / Н. М. Седракян, А. М. Авоян. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

[15] Толпыго, А. К. *Тысяча задач Международного математического Турнира городов* / А. К. Толпыго. — М.: МЦНМО, 2009. – 456 с.

[16] Филиппов, А. Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям* / А. Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1979. – 128 с.

[17] Эвнин, А. Ю. *Сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков.* — М.: КРАСАНД, 2014. – 224 с.

[18] Эвнин, А. Ю. *150 красивых задач для будущих математиков* // Математика в школе. – 2014. – № 9. – С.69–72.

[19] Эвнин, А. Ю. *Вокруг теоремы Холла* / А. Ю. Эвнин. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 88 с.

[20] Эвнин, А. Ю. *Задачник по дискретной математике.* Стереот. изд. / А. Ю. Эвнин. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. — 264 с.

[21] Эвнин, А. Ю. *Математический конкурс в ЮУрГУ* / А. Ю. Эвнин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. – 86 с.

[22] Эвнин, А. Ю. *Метод масс в геометрии треугольника* // Математика в школе. – 2014. – № 8. – С.53–61.

[23] Эвнин, А. Ю. *Метод масс в задачах* // Математическое образование. – 2015. – № 1(73). – С. 27–47.

[24] Эвнин, А. Ю. *Практикум по математике* / А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Взгляд, 2009. – 256 с.

[25] Эвнин, А. Ю. *Элементы теории чисел* / А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 54 с.

[26] Эвнин, А. Ю. *Весовой метод решения одного класса задач комбинаторной геометрии* / А. Ю. Эвнин // Наука ЮУрГУ: материалы 62-й научной конференции. Секции естественных наук. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – С.82–85.

[27] А. Ю. Эвнин *Две задачи и одна последовательность* / А. Ю. Эвнин // Математика в профильной школе. Фрактал. – 2013. – № 1. – С.106–113.

[28] А. Ю. Эвнин *Оценка числа доминирования в графах диаметра 2* // Наука ЮУрГУ: материалы 66-й научной конференции. Секции естественных наук. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – С.225–228.

[29] Эвнин, А. Ю. *О числе доминирования в графах диаметра 2* // Математика в школе. – 2014. – № 10. – С.71–73.

[30] Эвнин, А. Ю. *Представимость функций в виде суммы конечного числа периодических функций* / А. Ю. Эвнин, Д. А. Швед // Математика в школе. – 2013. – № 5. – С.72–74.

[31] Эвнин, А. Ю. *Многочлен как сумма периодических функций* // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математика. Механика. Физика". – 2013. – Т. 5. – № 2. – С.178–179.

[32] Эвнин, А. Ю. *Пример всюду разрывного биективного отображения* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *обратное к которому непрерывно в счётном множестве точек* / А. Ю. Эвнин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10. – С.37–38.

[33] Evnin, A.Yu. 150 elegantes problemas para futuros matematicos: Con soluciones detalladas. Пер. с рус. — М.: KRASAND, 2015. – 240 pp. (Spanish)

[34] Shved, D. *An exercize in transfinite magic* / Dan Shved // `http://danshved.wordpress.com/2013/04/30/an-exercise-in-transfinite-magic/`

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики
Южно-Уральского государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

О принципе предельной амплитуды для одномерного нелинейного волнового уравнения

Т. В. Дудникова[1]

В статье рассматривается система уравнений, состоящая из бесконечной струны, взаимодействующей с нелинейной пружиной. Для этой системы изучается задача Коши с периодическими начальными данными. Основная цель — доказать сходимость решений при $t \to \infty$ к периодическим по времени решениям.

Статья может быть доступна студентам физико-математических факультетов, освоившим курс уравнений в частных производных с применением элементов теории обобщенных функций.

1. Введение

Рассмотрим следующую задачу для функции $u \in C(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned} \mu\ddot{u}(x,t) &= \varkappa u''(x,t) + \delta(x)F(u(x,t)), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, && (1)\\ u\,|_{t\le 0} &= p(x-at), \quad x\in\mathbb{R}. && (2)\end{aligned}$$

Здесь $a = \sqrt{\varkappa/\mu}$, $\mu, \varkappa > 0$; $\dot{u} \equiv \partial u/\partial t$, $u' \equiv \partial u/\partial x$. По определению, уравнение (1) эквивалентно следующей системе:

$$\mu\ddot{u}(x,t) = \varkappa u''(x,t), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{3}$$

$$F(y(t)) + \varkappa[u'(0+,t) - u'(0-,t)] = 0, \quad t>0, \tag{4}$$

где

$$y(t) = u(0-,t) = u(0+,t). \tag{5}$$

Физически, задача (1) описывает малые поперечные колебания бесконечной струны, натянутой вдоль оси Ox и взаимодействующей с нелинейной пружиной. Через μ обозначается линейная плотность струны, $\varkappa$ — ее натяжение, $F(y)$ — внешнее (вообще говоря, нелинейное) силовое поле, действующее на пружину перпендикулярно к оси Ox. В линейном случае, т.е. когда $F(y) = -ky$, эта модель впервые была рассмотрена Лэмбом [1]. В случае нелинейной силы $F(y)$ система (3)–(5) была изучена Комечем в статье [2], где было доказано сходимость к стационарным состояниям для решений с конечной энергией. В данной работе изучается долго-временное поведение решений $u(x,t)$ с бесконечной энергией, удовлетворяющим пространственно-периодическим начальным условиям. Главная цель статьи — доказать, что каждое решение системы при больших временах близко к периодическому по времени решению.

Перейдем к точной формулировке результата. На внешнюю силу $F(y)$ и начальную функцию $p(x)$ накладываются следующие условия.

Обозначим через $V(y) = -\int F(y)\,dy$ потенциал внешней силы, $F(y) = -V'(y)$, $y \in \mathbb{R}$. Предполагается, что

$$F(y) \in C^1(\mathbb{R}), \quad F(y) \to \mp\infty \quad \text{при } y \to \pm\infty. \tag{6}$$

Очевидно, что из условия (6) вытекает, что

$$V \in C^2(\mathbb{R}), \quad V(y) \to \infty \quad \text{при } |y| \to \infty. \tag{7}$$

Функция $p(x)$ из уравнения (2) удовлетворяет условиям **P1** и **P2**:

P1 $p \in C(\mathbb{R})$, $p \in C^1(-\infty, 0)$.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ-15-01-03587

P2 Существуют числа $\omega > 0$ и $p_0 \in \mathbb{R}$ такие, что $F(p_0) = 0$ и

$$p(z-\omega) = p(z) \ \text{ при } z < 0, \quad p(z) = p_0 \ \text{ при } z \geq 0.$$

Функция $p(x-at)$ из уравнения (2) называется *приходящей периодической волной*. Заметим, что эта функция является решением уравнения (1) при $t < 0$. Поэтому, мы можем рассматривать уравнение (1) (и, соответственно, систему (3)–(4)) при $t \in \mathbb{R}$.

Введем класс $\mathcal{E}$ решений уравнения (1) с локально конечной энергией.

Определение 1.1. *Функция $u(x,t)$ принадлежит классу $\mathcal{E}$, если $u(x,t) \in C(\mathbb{R}^2)$, а $\dot{u}, u' \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, где производные понимаются в смысле обобщенных функций.*

Для функций $u(x,t) \in \mathcal{E}$ система (3)–(4) определяется следующим образом (см. [2]). Для $u \in C(\mathbb{R}^2)$ уравнение (3) понимается в смысле распределений в области $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$. Кроме того, так как $u \in C(\mathbb{R}^2)$, уравнение (3) эквивалентно разложению Даламбера

$$u(x,t) = f_\pm(x-at) + g_\pm(x+at), \quad \pm x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где $f_\pm, g_\pm \in C(\mathbb{R})$. Из равенства (8) вытекает, что

$$u'(x,t) = f'_\pm(x-at) + g'_\pm(x+at), \quad \text{если } \ \pm x > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

где все производные понимаются в смысле обобщенных функций.

Теперь поясним уравнение (4). Для функции $u(x,t) \in C(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющей уравнению (3), положим

$$u'(0\pm,t) := f'_\pm(-at) + g'_\pm(at), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Заметим, что условие $u(x,t) \in \mathcal{E}$ эквивалентно тому, что $f'_\pm, g'_\pm \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

Лемма 1.2. *Пусть выполнено условие (6). Тогда для любой функции $p(x)$, удовлетворяющей условиям* **P1**–**P2**, *задача Коши (1)–(2) имеет и притом единственное решение $u(x,t) \in \mathcal{E}$.*

Доказательство леммы 1.2 см. в разделе 2.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия (6) и* **P1**–**P2**. *Тогда для любого решения $u(x,t) \in \mathcal{E}$ задачи (1)–(2) существует решение $b(x,t) \in \mathcal{E}$ уравнения (1) такое, что*

$$b(x,t+\omega/a) = b(x,t) \ \text{ при } \ (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{10}$$

и для любого $R > 0$,

$$\int\limits_{|x|<R} \Big(|\dot{u}(x,t) - \dot{b}(x,t)|^2 + |u'(x,t) - b'(x,t)|^2 \Big)\, dx + \max_{|x|<R} |u(x,t) - b(x,t)| \to 0 \tag{11}$$

при $t \to \infty$.

Доказательство теоремы 1.3 см. в разделе 3.

2. Существование решений

В этом разделе докажем лемму 1.2. Метод построения решений с конечной энергией для задачи (1)–(2) был разработан Комечем в работе [2]. Мы применим этот метод в случае начальных условий вида (2). Подставляя разложение (8) в начальное условие (2), получаем

$$\begin{aligned} &f_-(z)=p(z), && g_-(z)=0 \ \text{ при } z<0,\\ &f_+(z)=p(z)=p_0, && g_+(z)=0 \ \text{ при } z>0. \end{aligned} \tag{12}$$

С другой стороны, подставляя разложение (8) в (5), имеем

$$y(t)=f_-(-at)+g_-(at)=f_+(-at)+g_+(at) \quad \text{при } t\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

Мы рассмотрим только случай $t>0$. Случай $t<0$ может быть исследован аналогично. Применяя уравнение (13), определим функции g_- и f_+ следующим образом

$$g_-(at)=y(t)-f_-(-at), \quad f_+(-at)=y(t)-g_+(at), \quad t>0. \tag{14}$$

Следовательно, в силу определения (9), имеем

$$\begin{aligned} u'(0+,t) &:= f'_+(-at)+g'_+(at)=2g'_+(at)-\dot y(t)/a,\\ u'(0-,t) &:= f'_-(-at)+g'_-(at)=2f'_-(-at)+\dot y(t)/a. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (4) принимает вид

$$F(y(t))+2\varkappa[g'_+(at)-f'_-(-at)-\dot y(t)/a]=0, \quad t>0. \tag{15}$$

Более того, в силу формулы (12), имеем

$$g'_+(at)-f'_-(-at)=-p'(-at), \quad t>0. \tag{16}$$

Следовательно, из формул (15) и (16) получаем следующее эволюционное уравнение для $y(t)$:

$$\dot y(t)=\frac{a}{2\varkappa}F(y(t))-ap'(-at), \quad t>0, \tag{17}$$

которое можно переписать в эквивалентной интегральной форме

$$y(t)=\frac{a}{2\varkappa}\int\limits_0^t F(y(s))\,ds+p(-at)-p_0+y(0), \quad t\ge 0. \tag{18}$$

Из равенств (12) вытекает следующее начальное условие для $y(t)$:

$$y(0)=f_\pm(0)+g_\pm(0)=p_0. \tag{19}$$

Лемма 2.1. *Пусть все условия леммы 1.2 выполнены. Тогда уравнение (18) имеет и притом единственное решение $y(t)\in C(0,\infty)$ такое, что $\dot y(t)\in L^2_{loc}(0,\infty)$. Более того,*

$$\sup_{[0,\tau]} V(y(t))\le C_1\tau+C_2 \quad \textit{для любого } \tau>0.$$

Доказательство. Из принципа сжимающих отображений вытекает, что для каждого фиксированного начального значения $y(0)$ уравнение (18) имеет и притом единственное решение $y(t)$ на некотором интервале $t \in [0, \varepsilon)$ с $\varepsilon > 0$. Чтобы доказать существование глобального решения, выведем априорную оценку для $y(t)$. Для этого умножим равенство (17) на $\dot{y}(t)$ и получим

$$\frac{d}{dt} V(y(t)) = -2\varkappa p'(-at)\dot{y}(t) - \frac{2\varkappa}{a}\,\dot{y}^2(t) \leq \frac{a\varkappa}{2}|p'(-at)|^2.$$

Интегрирование приводит к априорной оценке вида

$$V(y(t)) \leq V(y(0)) + C\int\limits_0^t |p'(-as)|^2\,ds = \mathcal{O}(t) \quad \text{при } \ t \to \infty. \tag{20}$$

Лемма 2.1 доказана.

Доказательство леммы 1.2. Пусть $t > 0$. Подставляя формулы (12) и (14) в уравнение (8), получаем

$$u(x,t) = \begin{cases} p_0 & \text{при} \quad x > at, \\ y(t - x/a) & \text{при} \quad 0 < x < at, \\ y(t + x/a) + p(x - at) - p(-x - at) & \text{при} \quad -at < x < 0, \\ p(x - at) & \text{при} \quad x < -at. \end{cases} \tag{21}$$

Следовательно, из леммы 2.1 немедленно вытекает утверждение леммы 1.2.

Из неравенства Гронуолла и априорной оценки (20) вытекает следующий результат.

Лемма 2.2. *Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — два решения уравнения (17) с начальными данными $y_1(0)$ и $y_2(0)$, соответственно. Тогда для любого $\tau > 0$,*

$$\int_0^\tau |\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)|^2 dt + \max_{[0,\tau]} |y_1(t) - y_2(t)| \leq C(\tau)|y_1 - y_2|,$$

где константа $C(\tau)$ ограничена для ограниченных значений y_1 и y_2.

3. Периодическая по времени асимптотика

В этом разделе докажем теорему 1.3, используя методы работ Плисса [3, 4].

Сначала проверим, что решения уравнения (17) ограничены при всех $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.3. Тогда существуют числа y_- и y_+ ($y_- < y_+$) такие, что для любого решения уравнения (17) справедлива оценка $y(t) \in I := [y_-, y_+]$ при всех $t \in \mathbb{R}$.*

Действительно, обозначим $q = \max_{t\in\mathbb{R}} |p'(-at)| < \infty$. Тогда в силу условия (6) существуют числа $y_- < 0$ и $y_+ > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} F(y)/(2\varkappa) - q > 0 \quad &\text{при } \ y \leq y_-, \\ F(y)/(2\varkappa) + q < 0 \quad &\text{при } \ y \geq y_+. \end{aligned}$$

Следовательно, если $y(t) \geq y_+$, то $\dot{y}(t) < 0$ (см. уравнение (17)), а если $y(t) \leq y_-$, то $\dot{y}(t) > 0$. Отсюда вытекает утверждение леммы 3.1.

Введем теперь преобразование Пуанкаре $P:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$Py = y(\omega_0), \quad \omega_0 := \omega/a,$$

где $y(t)$ — решение уравнения (17) с начальным условием $y(0)=y$. Так как $F\in C^1(\mathbb{R})$, то правая часть уравнения (17) — непрерывно дифференцируема по y. Поэтому P — непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Так как задача (17), (19) обратима по времени, то существует обратное непрерывно дифференцируемое отображение P^{-1}. Поэтому P — диффеоморфизм $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Обозначим через $\mathcal{Z}$ множество неподвижных точек преобразования P:

$$\mathcal{Z} = \{y\in\mathbb{R}:\ Py = y\}.$$

Из леммы 3.1 и теоремы Брауэра вытекает, что $\mathcal{Z}$ — непустое замкнутое ограниченное множество. Следовательно, оно содержит точки

$$z_- = \inf_{z\in\mathcal{Z}} z, \quad z_+ = \sup_{z\in\mathcal{Z}} z.$$

Лемма 3.2. *(см. [3, §2.9]) Пусть выполнены условия теоремы 1.3. Тогда для любого $y\in\mathbb{R}$ существует $z=z(y)\in\mathcal{Z}$ такое, что*

$$P^n y \to z(y) \quad \text{\textit{при}} \ \ n\to\infty. \tag{22}$$

Доказательство. Так как Py — монотонная функция, то из леммы 3.1 следует, что $Py<y$ при $y>y_+$ и $Py>y$ при $y<y_-$. Пусть y — произвольная точка прямой. Тогда из леммы 3.1 вытекает, что существует $N=N(y)\in\mathbb{N}$ такое, что при всех $n>N(y)$ $P^n y\in I\equiv[y_-,y_+]$. Поэтому, без ограничения общности, предположим, что $y\in I$. Если $y\in\mathcal{Z}$, то сходимость (22) очевидна. Для $y\notin\mathcal{Z}$ возможны три случая:

(i) $\quad y\in(z_+,y_+)$,
(ii) $\quad y\in(y_-,z_-)$,
(iii) $\quad y\in(z_1,z_2)$, где $z_1,z_2\in I$ – две соседние точки множества $\mathcal{Z}$.

В первом случае, $Py<y$ при всех $y\in(z_+,y_+)$. Поэтому, $P^n y$ — монотонно убывающая последовательность, ограниченная снизу z_+. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} P^n y = \inf_{n\in\mathbb{N}} P^n y = y_s, \quad y_s\in[z_+,y_+).$$

Кроме того, $Py_s = \lim_{n\to\infty} P^{n+1}y = y_s$. Так как z_+ — крайняя правая неподвижная точка преобразования P, то $y_s = z_+$.

Аналогично, в случае (ii) последовательность $P^n y$ является ограниченной монотонно возрастающей последовательностью, и $P^n y\uparrow z_-$ при $n\to\infty$. В третьем случае возможны два варианта:

$$\begin{array}{lll} (a) & z_1<y<P(y)<z_2 & \text{при} \ \ y\in(z_1,z_2) \\ (b) & z_1<P(y)<y<z_2 & \text{при} \ \ y\in(z_1,z_2). \end{array}$$

Если выполнено (a), то аналогично случаю (ii), имеем $P^n y\uparrow z_2$ при $n\to\infty$. Если выполнено (b) (см. случай (i)), $P^n y\downarrow z_1$ при $n\to\infty$. Лемма 3.2 доказана.

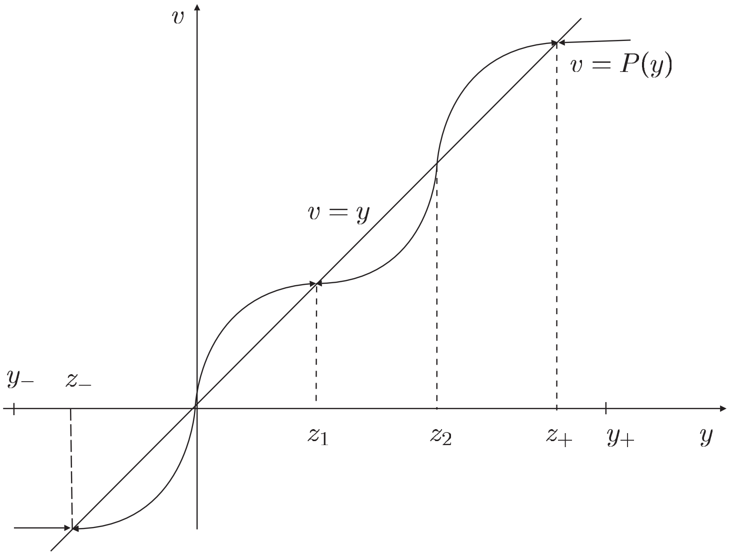


Рис. 1. Рисунок к доказательству леммы 3.2

Из лемм 2.2 и 3.2 вытекает следующий результат.

Следствие 3.3. *Пусть* $y(t)$ *— решение уравнения (17) с* $y(0) = p_0$*, и* $\overline{y}(t)$ *— периодическое решение уравнения (17) с начальным условием* $\overline{y}(0) = z(p_0)$*. Тогда для любого* $R > 0$*,*

$$\int_t^{t+R} |\dot{y}(t) - \dot{\overline{y}}(t)|^2 dt + \max_{[t,t+R]} |y(t) - \overline{y}(t)| \to 0 \quad \text{при } t \to \infty. \tag{23}$$

Доказательство теоремы 1.3. Продолжим $y(t) \equiv p_0$ при $t < 0$ и введем функцию

$$b(x,t) = \begin{cases} \overline{y}(t - x/a) & \text{при} \quad x > 0,\ t \in \mathbb{R}, \\ \overline{y}(t + x/a) + p(x - at) - p(-x - at) & \text{при} \quad x < 0,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тогда $b(x,t) \in \mathcal{E}$, и $b(x,t)$ является решением уравнения (1). Более того, тождество (10) справедливо в области $|x| < at$. Продолжим $b(x,t)$ на всю плоскость переменных (x,t), используя (10). Тогда сходимость (11) вытекает из формул (21) и (23). Теорема 1.3 доказана.

Литература

[1] H. Lamb, On a peculiarity of the wave-system due to the free vibrations of a nucleus in an extended medium, *Proc. London Math. Soc.* **32** (1900), 208–211.

[2] A.I. Komech, On stabilization of string–nonlinear oscillator interaction, *J. Math. Anal. Appl.* **196** (1995), 384–409.

[3] В.А. Плисс. *Нелокальные проблемы теории колебаний.* — М.: Наука, 1964, 368 с.

[4] В.А. Плисс. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.* — М.: Наука, 1977, 304 с.

Дудникова Татьяна Владимировна,
профессор Электростальского политехнического института
(филиала Университета машиностроения),
доктор физ.-мат. наук.
E-mail: tdudnikov@mail.ru

Упражнения по экспериментальной геометрии (окончание)

Т. Эренфест-Афанасьева

Завершаем публикацию книги Татьяны Эренфест-Афанасьевой — автора, сочетавшего профессиональные занятия теоретической физикой с преподаванием математики в средней школе. Хотя книга издана довольна давно — оригинальное издание на немецком языке "Ubungensammlung zu einer geometrishen propädeuse, von T. Ehrenfest-Afanassjewa, Haag, Martinus Nijhoff вышло в 1931 году, она может быть интересна современным читателям, особенно учителям геометрии, оригинальной концепцией содержания учебного предмета геометрия, изложенной автором во введении, а также интересной подборкой неформальных геометрических упражнений.

Перевод с немецкого Б. Ямрома.

В предыдущем номере журнала опубликованы предисловия переводчика и автора, а также введение и методические указания к использованию упражнений. В настоящем номере идут сами упражнения.

I. Длина

Для учеников эти упражнения могут быть представлены в виде спортивного состязания в глазомере. Однако учитель должен иметь в виду, что, одновременно с действительно очень ценным умением делать оценки, эти упражнения заставят учеников воспринять серию геометрических форм, быть уверенными в их существовании, и ознакомиться с терминами, которые они встретят в начале систематического курса, такими как: бо́льший, ме́ньший, откладывание, сравнение, измерение, содержаться в, находиться в пропорции, и т.д., как абстракциями, вызванными жизненным опытом.

1. Приглядитесь к этому столу и скажите, сколько таких столов поместятся вплотную друг к другу вдоль этой стены? (Запишите различные ответы учеников, а также количество голосов, полученных для каждого из них). Как мы можем проверить, какой из ответов наилучший? Действительно ли необходимо иметь много столов и поставить их вдоль стены для проверки ответа?

a. Замерьте длину стола с помощью шнурка и затем отложите его вдоль стены (это *немедленно* даст *целую часть* искомого числа. Вначале следует оперировать только целыми числами: "мы не хотим более точного ответа".)

b. Определите длину стола и стены с помощью шагов — более надежно с помощью ступней — и разделите одно число на другое. Ответы могут различаться, если длина стола не укладывается в целое число ступней и мы округляем в большую или меньшую сторону. В курсе последующих упражнений это следует обсудить подробнее, здесь же следует лишь заметить. "В предыдущем случае мы измеряли стену столом: *стол* был нашей единицей длины".

c. Измерьте стол и стену дециметром и обратите внимание на неточность такой процедуры; если дециметр не укладывается целое число раз вдоль стола и стены обсудите какую пару целых чисел следует взять чтобы получить ответ или наверняка больший, или наверняка меньший.

d. Проделайте измерения с помощью меры, укладывающейся в длине стола целое число раз. В чем преимущество этого метода по сравнению с предыдущим?

e. Найдите общую меру обеих длин. (Само собой разумеется, во время *первых упражнений* не следует вводить все методы и все детали, они приведены здесь, с тем чтобы быть постепенно усвоенными учениками в процессе упражнений). Сравните различные оценки с конечным результатом измерения. Сравните средний ответ и его отклонение от результата измерения.

2. На какую часть (более чем 1/2? 1/3? 2/3?) длина этой стены больше, чем длина той? Каким образом легче всего это увидеть? Сделайте оценки и затем измерьте. Где измерять — на этой стене или противоположной? Если есть выступы, чем помочь? Где откладывать мерку: на полу или на некоторой высоте — где меньше хлопот? Как и в предыдущем случае, определите среднюю ошибку полученного ответа. На какую часть одна стена длиннее другой? Сколько частей — и каких — одной стены содержит другая? Сколько частей другой стены содержит первая? "*Отношение*" как дробь.

3. Оцените и затем измерьте разнообразные длины, различно ориентированные в пространстве. Сравните средние ошибки оценок горизонтальных и вертикальных длин.

4. То же самое для больших расстояний снаружи школьного здания.

5. То же самое для очень маленьких предметов.

6. То же самое для диаметров круглых предметов: крышка круглого стола, тарелки, стаканы, монеты; стволы деревьев, карандаши, мячи, и т.д. Какой монетой можно полностью покрыть шестизначное число на денежной банкноте?

7. Сравните средние ошибки оценок маленьких предметов по сравнению с большими.

8. Относительные ошибки. Влияние абсолютной величины на относительные ошибки. Удобные способы измерения длин маленьких предметов (с помощью инструментов): измерьте длину группы одинаковых маленьких предметов, положенных в ряд и касающихся друг друга, и разделите на количество предметов.

9. Оцените на глаз и потом измерьте длины некоторых частей тела: расстояние между зрачками обоих глаз; длину среднего пальца; длину размаха обеих рук; шага, ступни.

Определить измерения собственного тела, имея в виду, что оно растет! — для того, чтобы постоянно иметь их при себе.

10. Какую часть среднего роста взрослого человека составляет средний рост 3-х, 6-и, 10-и летнего ребенка? Проверьте это на нескольких примерах.

11. Когда говорят "узкий", когда говорят "тонкий" — "толстый" и "широкий"?, "короткая стена", "низкая стена"? Что является "длиной" параллелепипеда, его "шириной" и "толщиной"?

12. Какие звери имеют длинный хвост, какие короткий? У кого хвост длиннее, у мыши или слона?

II. Угол

13. Можно ли определить время по часам с неразборчивыми цифрами на циферблате? Какие признаки следует при этом использовать? Что является *равным* на ручных часах и на стенных часах, когда они показывают одно и то же время?

14. Нарисуйте от руки угол, на который продвинется минутная стрелка за *десять минут*. Вырежьте этот угол из бумаги и наложите на часы для сравнения. Скорректируйте и используйте скорректированный "десятиминутный угол" в качестве масштабного угла.

15. Сложите два карандаша, образуя угол, на который продвинется минутная стрелка за двадцать минут. Положите их на бумагу и обведите карандашом. Проверьте с помощью бумажного масштаба.

16. Откладывая бумажный масштаб, изобразите углы, на которые продвинется минутная стрелка за 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 минут.

17. Наименования: вершина, сторона; развернутый, выпуклый, вогнутый углы. Какие из нарисованных углов выпуклые, вогнутые, развернутые — как можно их характеризовать словами? Каким знаком мы можем отличить развернутый угол от прямой линии? Сделайте бумажную модель вогнутого угла.

18. Вырежьте из бумаги четыре 20-и минутных угла и склейте вместе — сделайте модель угла, бо́льшего полного оборота.

19. С помощью 10-минутного угла сделайте 5-минутный угол; затем 15-минутный.

20. Нарисуйте большой треугольник на доске и аналогичный — "уменьшенную копию" — на листе бумаги. Во сколько раз уменьшились стороны? А углы?

21. На всевозможных предметах найдите углы в 15 минут — "прямые углы". Сделайте прямой угол без помощи циферблата часов, просто складывая бумагу.

22. Нарисуйте два угла, имеющих только общую вершину. Сколько получилось не налегающих друг на друга углов? Обозначим углы буквами, чтобы было удобнее о них говорить. Условимся всегда ставить букву, обозначающую вершину, между двумя другими.

23. Нарисуйте два угла с общей вершиной и одной стороной. Ученики должны найти разницу между такими произвольными парами и теми, которые учитель назовет "*смежными*". Учитель рисует смежные и несмежные пары углов в разной ориентации и при этом объясняет, какие он называет смежными. Определение должно вытекать из анализа того, что видно. Сколько смежных углов можно указать для данного угла? Сравните их размеры.

24. Определите понятие "прямого угла", основываясь на анализе его построения с помощью складывания бумаги.

25. Наименования: острый, прямой, тупой угол. Если два смежных угла не являются прямыми, каким будет каждый из них?

26. Сопоставьте числа для раннее нарисованных углов, принимая прямой угол за единицу. Какова величина развернутого угла?

27. Какова величина нашего масштабного угла (10 минут на часах) в единицах прямого угла? "Градус" в качестве новой единицы измерения. Сколько градусов в угле, на который сдвинется минутная стрелка за одну минуту? "Градус" — "Минута" — "Секунда". Как относится новая "минута" к углу, на который сдвинется минутная стрелка за одну минуту?

28. Ученик должен встать перед классом лицом к окну, затем повернуться лицом к доске. На какой угол он повернулся? Он должен повернуться на один, два, четыре, пять прямых углов; на -1, -2, +3, -4, ... прямых углов. Каким символом можно отличить на рисунке $+a$ и $-a$?

29. Установите общую формулу для всех углов, стороны которых совпадают со сторонами данного угла ABC (принимая во внимание направление вращения). Сделайте модели таких углов. Может быть использовано выражение "сравнение по модулю 4-х прямых углов".

30. На какой угол повернется человек с момента, когда он стоит у подножия лестницы до момента, когда он окажется на следующем этаже? Когда он окажется еще этажом выше? (Осторожно!)

31. Некто идет вдоль сторон прямоугольного поля, начиная в середине одной из сторон. На какой угол он повернется, когда вернется в начальную точку? В случае треугольного поля, пятиугольного, или круглого? Тот же вопрос для случая пути в виде цифры восемь.

32. Ученик должен изобразить на листе картона все углы, на которые он повернулся, огибая уличные углы по дороге из дома в школу. Проверить на плане города. Укажите на возможные ошибки в случае, если путь содержит непрямолинейные участки. В качестве предварительного упражнения проделайте этот эксперимент внутри здания школы.

33. Расстояние между соседними витками винтовой нарезки винта 4 мм. Его ввинтили в доску на глубину 2 см. На какой угол он повернулся?

34. С каким "углом" — образованным какими прямыми линиями — имели мы дело в предыдущих упражнениях? Пусть ученик снова повернется от окна к доске: один раз вытянув руку горизонтально, другой раз слегка подняв ее вверх, и, наконец, совершенно вертикально. Во всех трех случаях определите угол между начальным и окончательным положением руки. Который из этих трех углов соответствует углу, который мы анализировали, называется "углом вращения"?

35. Как присоединить прямую линию к винту так, чтобы угол вращения этой прямой был бы так же углом вращения винта? — *просто покажите.*

36. Во сколько раз быстрее вращается минутная стрелка по сравнению с часовой? Какая скорость вращения больше: Земли вокруг своей оси или часовой стрелки?

37. Какие длины дуг (просто понимаемые: измеренные шнурком!) описывают разные точки минутной стрелки за десять минут? Могут быть длины часовой и минутной стрелок выбраны так, что длины дуг, описываемые их концами, были бы одинаковыми за одинаковые промежутки времени?

38. На сколько прямых углов в секунду вращается колесо, если длина его окружности один метр и оно катится по прямой линии со скоростью три метра в секунду? Вращается оно быстрее или медленнее, чем секундная стрелка часов?

39. Нарисуйте на доске косую прямую линию. Ученик должен нарисовать "*перпендикуляр*" к ней, проходящий через данную точку. Через ту же точку он должен нарисовать "*вертикаль*". (Может он сделать то же самое, если сама доска наклонена?) Два ученика произвольно натягивают веревку в классе. Два других должны натянуть другую через определенную точку на первой и перпендикулярно к ней. Сколькими способами может быть натянута вторая веревка?

III. Прямая как ось вращения

40. Исследуйте структуру простого механизма. Какие части вращаются относительно других? Вращается ли каждая вращающаяся часть вокруг проходящего через нее стержня?

41. Закрепите твердое тело между двумя неподвижными точками. Как после этого могут двигаться различные его точки? Есть ли еще другие неподвижные точки кроме тех двух? "*Ось вращения*". Что произойдет, если мы зафиксируем *еще одну* точку? (На оси, вне оси).

42. Выберете такое тело, чтобы часть оси вращения была видна при подходящем выборе зафиксированных точек. Для ясности раскрасьте разные места на поверхности тела в яркие краски.

43. Обсудите упражнения (34) и (35), используя понятие "ось вращения" и укажите, какой угол упомянутая там прямая (рука) должна составлять с осью вращения.

44. Какую поверхность будет вырезать прямая (швейная игла, лезвие ножа, ...) в песке, масле, и т.д., если она проходит через ось вращения под разными углами? В случае, если она не проходит через ось вращения?

45. Сделайте веревочные модели поверхностей вращения (цилиндр, конус, однополостный гиперболоид вращения, плоскость). Понаблюдайте за их вращением на гончарном круге.

46. Совершает ли винт простое вращение, когда его ввинчивают (в стену)? Есть у него неподвижные точки? Что происходит с его осью вращения?

47. На каком принципе основан токарный станок, гончарный круг? Изготовление глиняной посуды на гончарном круге? Сопоставьте с сосудами овальной формы.

48. Проверка прямолинейности острия ножа.

49. Проверка линейки:

a. скользя ею вдоль двух точек, фиксированных на бумаге;

b. поверните ее на 180 в плоскости бумаги;

c. поверните ее на 180° в пространстве вокруг двух фиксированных точек.

Объсните недостатки каждого метода (a — может быть также *дуга окружности*; b — может быть произвольной центрально-симметричной фигурой; c — линейка имеет толщину и при вращении ее на 180° второй край коснется бумаги). Скомбинируйте два первых метода.

50. Аналогия между прямыми линиями на плоскости и большими кругами на сфере: "прямейшая" линия! Предлагается экспериментально отличить с помощью метода, аналогичного (49), большие круги от других линий на сфере. (Очень желательно показать черный шар с большим кругом, нарисованным мелом. Диаметр 50 см).

IV. Наименьшее расстояние между двумя точками

51. Каково расстояние от точки A у подножия известной ученикам горы, дюны, холма до расположенной выше станции B? Как следует идти по склону, чтобы путь оказался наикратчайшим? Будет ли это наименьшим расстоянием между A и B?

52. Найдите расстояние между Москвой и Берлином на основании железнодорожных справочников[1]. Оцените воздушное расстояние между этими городами с помощью глобуса. Будет ли это наикратчайшим расстоянием?

53. В каком направлении должен лететь самолет, покидая Берлин, чтобы прибыть в Москву по кратчайшему пути? То же самое для полета Берлин – Ява. Определить это на глобусе с помощью натянутого шнура. Является ли дуга широты кратчайшим расстоянием между ее конечными точками?

54. Жук ползет из точки A на одной стене в точку B на другой стене. Найдите для него кратчайший путь.

55. Нарисуйте кратчайший путь между двумя произвольными точками на (1) цилиндре, (2) конусе. Сделайте эти поверхности из бумаги.

56. Какую форму принимает натянутая нитка? Толстая веревка? Понаблюдайте как это используется различными рабочими. Как должны лежать два конца каната, чтобы его можно было натянуть прямолинейно?

V. Прямая как луч света

57. Три ученика должны встать перед классом в одну линию, не используя никаких инструментов; четвертый ученик должен проверить это, опять не пользуясь инструментами. — На основании чего выполнимо это задание?

58. Сделайте отверстия в двух кусках картона и расположите их один перед другим, так чтобы сквозь эти отверстия была видна определенная точка в классе. Убедитесь, что от этой точки может быть протянута прямая веревка проходящая через два отверстия.

59. Один ученик должен расположить свой палец на некотором расстоянии от глаза так, чтобы он закрывал определенную точку; другие ученики должны убедиться, что глаз, палец, и удаленная точка расположены на прямой линии.

60. Ученик наблюдает в зеркале отражение определенной точки; затем он закрывает пальцем отражённую в зеркале точку. Каким-либо способом зафиксируйте положение глаза, пальца, и наблюдаемой точки. Натяните нить между этими тремя точками и убедитесь в законе отражения. Изменяйте положение наблюдаемой точки, зафиксировав положение глаза. Направление перпендикуляра к зеркалу может быть определено с помощью карандаша, приклеенного воском так, что карандаш и его отражение составляют одну прямую линию.

61. Сделайте схематические рисунки последних трех экспериментов.

62. Определите, на каком расстоянии от глаза надо держать предмет (например, монету), так чтобы он точно закрывал определенный удаленный предмет. Сделайте схематический рисунок.

63. Почему предметы кажутся нам меньше, когда мы удаляемся от них? *Что* при этом уменьшается? Сделайте схематические рисунки — например, дерево, которое человек видит с различных расстояний. Что должно присутствовать на рисунке, какие части предмета существенны *для нашего вопроса*?

64. Определите угол, под которым видна доска с различных точек в классе. Проверьте с помощью самодельного инструмента для измерения углов: бумажная трубка, прикрепленная к куску картона и вращающаяся параллельно ему; отметьте положения трубки на картоне и измерьте угол между полученными прямыми. В будущем очень желательно иметь более точные инструменты! — На этом этапе знакомства с углами очень важно обратить внимание на *стороны* угла. Только позднее измерение углов может быть заменено измерением дуг.

[1] Сейчас можно воспользоваться Интернетом (прим. переводчика).

65. Оцените и затем измерьте угловое расстояние между различными точками пространства — между двумя звездами, когда они высоко в небе и когда они близко к горизонту.

66. Когда солнце или луна близко от горизонта и вот-вот исчезнут за каким-либо предметом (например, стволом дерева, трубой), оцените, закроются ли они полностью. Подождите, когда это произойдет; объясните, какую величину вы в действительности оцениваете.

67. Что мы видим под бо́льшим углом: Солнце или Луну?

68. Нарисуйте луну на фотографии пейзажа такой величины, какой она предстает нам в реальности. Сравните с фотографией похожего пейзажа, на котором есть луна! (Этот эксперимент был произведен журналом "Nature").

69. Почему луна бежит за нами? Почему, когда мы едем на поезде, близкие предметы движутся мимо нас быстрее более удаленных? — Сделайте схематический рисунок.

70. Стереоскопическое зрение.

VI. Плоскость и линейчатые поверхности

71. С помощью натянутой веревки убедитесь, что стол *плоский.*

72. Имеется две пластинки (плитки) и никаких других вспомогательных средств. Можете ли вы определить, что они плоские? Какое может возникнуть непонимание? Сколько пластинок необходимо для разрешения вопроса? (Сравните с № 49). Почему при шлифовании плоских стекол одно об другое требуется *три* стекла? Почему двух будет недостаточно?

73. Является ли плоскость единственной поверхностью, на которой через каждую точку можно провести прямую? — Разные поверхности — с именами или без, — которые получаются изгибанием листа бумаги. В частности: цилиндр, конус (круговой или нет), геликоид[2], лист Мёбиуса[3]. Найдите такие поверхности на подходящих предметах; постройте модели.

74. Что характеризует плоскость среди всех "*линейчатых поверхностей*"?

75. Определите цилиндр и конус.

76. Линейчатые поверхности, которые нельзя сделать из бумаги. Модели: стопка книг или игральных карт сдвинутых по отношению друг к другу в виде спирали; спиральная лестница, однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид. Сделайте их с помощью веревки.

VII. Бесконечность прямой. Параллельные прямые

77. Мысленно проведите прямую через две фиксированные точки в середине класса и представьте, в какой точке она пройдет через границу комнаты и куда пойдет дальше.

78. Зафиксируйте третью точку и проведите вторую линию до пересечения с первой. Проиллюстрируйте с помощью двух натянутых веревок. Определите угол между двумя прямыми. Сделайте на доске схематический рисунок. Начните вращать вторую прямую вокруг третьей точки так, чтобы точка её пересечения с первой прямой двигалась в одном направлении. Наблюдайте, как меняется угол между прямыми линиями. Отметьте на доске несколько положений второй линии. Представьте себе до какого крайнего положения может повернуться вторая прямая, чтобы не пересекать первую. — Где точка пересечения двух прямых в крайнем положении? — Повторите то же самое, вращая прямую в противоположном направлении. Снова представьте крайнее положение и отметьте на доске. Сколько будет крайних положений? Дайте каждому ученику возможность *самостоятельно* ответить на вопрос и определите статистику ответов!

79. Какую поверхность описывает вторая прямая в предыдущем примере? Найдите "*параллельные*" и не параллельные прямые в классе, на улице. Как следует определить "параллельные линии"?

80. Сделайте перспективный рисунок, можно набросок, — передней стены класса, двух боковых стен, потолка и пола.

[2]Кусок такой поверхности образуется, если радиально разрезать кольцо между двумя концентрическими кругами и поднять один конец разреза над другим, чтобы образовалась часть спирали.

[3]См. сноску к вопросу 192.

81. Через прямоугольное отверстие в вертикальном экране взгляните на два стержня, расположенные перпендикулярно к экрану. Держите глаз около центра отверстия и зафиксируйте пару стержней последовательно на разной высоте: на уровне нижнего края, на уровне 1/3, середины высоты, на уровне верхнего края. Сделайте перспективный рисунок для каждой позиции. Перспективная “*точка схода*”.

VIII. Взаимное расположение прямой и плоскости

82. Измерьте угол, образованный наклонно поставленным на пол стержнем и прямой на полу, проходящей через его основание. Найдите другую прямую на полу, проходящую через его основание и образующую такой же угол со стержнем. Есть ли третья такая прямая, образующая такой же угол? Как меняется угол между стержнем и прямой на полу, если менять её направление? Какая из этих прямых образует максимальный и какая минимальный угол? Как они расположены по отношению к друг к другу?

83. Как меняются эти два экстремальных угла при изменении наклона стержня?

84. Можно ли всегда провести на полу линию, перпендикулярную к стержню? Как расположен второй перпендикуляр? Можно ли так расположить стержень, чтобы ещё одна прямая на полу была перпендикулярна ему? Каковы два экстремальных угла в этом случае? “*Прямая, перпендикулярная к плоскости*”. (Подготовка к точной теории).

85. Найдите в вашем окружении пример прямой и плоскости, перпендикулярных друг к другу. Исследуйте карандаш, приставленный к зеркалу, и его отражение.

86. Проведите прямую на плоскости. Зафиксируйте точку вне плоскости и проведите через нее прямую, пересекающую первую. Поверните прямую вокруг фиксированной точки до положения, в котором она станет параллельна первой прямой. Будет ли она все ещё иметь общую точку с плоскостью?

87. Нарисуйте параллельные линии для плоскостей в различном положении. Найдите примеры в классной комнате.

88. Сколько *параллельных* плоскости прямых проходит через одну точку? Сколько плоскостей, *параллельных* прямой, проходит через одну точку?

89. Тот же вопрос по отношению к *перпендикуляру*!

90. Проведите плоскость, проходящую через прямую, параллельную другой плоскости. Вращайте её вокруг прямой и наблюдайте линию пересечения двух плоскостей. “*Параллельные плоскости*” — плоскости, которые не пересекаются. Как расположена линия пересечения двух плоскостей (когда они пересекаются) по отношению к первой прямой?

IX. Положение прямых и плоскостей по отношению к горизонту

91. “*Вертикальная*” линия — направление веревки с подвешенным на ней грузом. “*Горизонтальная*” (линия или плоскость) — перпендикулярная вертикали. Нарисуйте поверхность воды в наклонённом стакане (сечение). Поверхность воды в океане: взгляните на глобус, нарисуйте поперечное сечение.

92. Линия горизонта и горизонтальная линия. Какая между ними связь?! Какую форму имеет линия горизонта (например, для наблюдателя в открытом море) и почему?

93. “*Вертикальная плоскость*”. — Теперь ученики, умеющие благодаря интуиции и опыту отличать вертикальную проскость от наклонной, должны дать характеристику вертикальной плоскости.

94. Сколько вертикальных плоскостей можно провести через данную точку? Примеры: дверь, окно, и т.д. — найдите их сами!

95. Можно ли провести вертикальную плоскость через произвольную прямую линию? Сколько? Можно ли провести горизонтальную плоскость через произвольную прямую линию?

96. Содержит ли каждая плоскость горизонтальную (вертикальную) прямую?

97. Примеры предметов, вращающихся вокруг горизонтальной; вертикальной; наклонной осей. — Найдите сами!

X. Плоские сечения поверхностей. Тени. Перспективные изображения

98. Какую форму принимает поверхность воды в различно наклоненном стакане? — Представьте себе, нарисуйте, понаблюдайте.

99. То же самое для воронки.

100. То же самое для сосудов любой формы.

101. Держите стакан так, чтобы его кромка виделась как прямая линия (смотрите *одним* глазом!). Затем его медленно опускайте. Как кромка выглядит теперь? Как следует её рисовать? — Поместите стеклянную пластинку между глазом и стаканом и нарисуйте на ней кромку стакана, как вы его видите. — Как следует держать стакан, чтобы на стеклянной пластинке кромка представлялась точным кругом?

102. Существует ли предмет, рисунок которого будет кругом при любой его ориентации?

103. Какую часть сферической поверхности мы видим с разных расстояний? С какого расстояния мы будем видеть её точную половину? — Проделайте эксперимент с черным глобусом. — Сделайте схематический рисунок.

104. Какую форму может принять тень сферы на стене — если освещается точечным источником света? Представьте себе, затем проделайте эксперимент. Сравните с поверхностью воды в воронке (какие варианты при этом отсутствуют?).

105. Возьмите зеленый и красный точечные источники света. Представьте себе тени в случае только зеленого, только красного; обоих источников света. Проверьте экспериментально. Многочисленные точечные источники света. Обсудите полутени, сделайте рисунки, проверьте экспериментом.

106. Какую ширину может иметь тень узкого цилиндра (кроме полутени!)?

107. Почему солнечная тень предмета становится резче когда предмет приближается к стене?

108. Точечный источник света бросает на стену круглую тень. Как выглядит предмет, отбрасывающий тень?

109. Представьте пространство теней данного предмета — при различной ориентации предмета относительно источника света. Меняйте расстояние от предмета до источника света. Меняйте расстояние от предмета до стены.

XI. Двугранные и трехгранные углы

110. Откройте две книги так, что их передняя и задняя обложки образуют одинаковые углы — одинаковые “*двугранные углы*”. Какие двугранные углы можно назвать “развернутыми”, “прямыми”, “острыми”, “тупыми”, “вогнутыми”? — Найдите такие углы в окружающих предметах. Один “*градус*”. Плоскости, “*перпендикулярные*” по отношению друг к другу.

111. Какие углы образуют края обложки, когда передняя и задняя обложки образуют прямой двугранный угол? — “Линейный угол” двугранного угла — как его определить? Убедитесь: равенству двугранных углов соответствует равенство их линейных углов — линейный угол как мера двугранного угла.

112. Как могут быть расположены три плоскости по отношению друг к другу? — Представьте себе все случаи, постройте модели из картона. — Окружающие примеры.

113. Найдите в классной комнате “*трехгранные углы*” которые можно видеть или “изнутри”, или “снаружи”.

114. Из трех пар соответственно равных плоских углов постройте два трехгранных угла, которые невозможно совместить друг с другом (используйте картон). Пара перчаток. Предмет и его зеркальное отражение. Два сферических треугольника с одинаковыми сторонами, но расположенными в разном порядке. — Сравните с плоскими треугольниками.

115. Сколько комнат могут быть смежными с этим углом потолка? Сколько на этом этаже, сколько на следующем? — Сколько трехгранных углов, не перекрывающих друг друга, могут образовать три пересекающиеся плоскости?

116. Мысленно меняйте взаимное расположение плоскостей. Постройте модели: из кусков картона, приложенных под углом друг к другу, из трех проволочных окружностей — как пересечение их плоскостей с шаром; нарисуйте эти окружности на черном глобусе.

117. Есть ли среди тех восьми трехгранных углов пары равных? — "Конгруэнтный". — "Симметричный". ("Равный" следует употреблять для *величин*).

XII. Симметрия

118. Вырежьте из сложенной бумаги фигуры, обладающие симметрией. Что получится, если бумага сложена один раз, два или более раз?

119. Предугадайте результаты вырезания и нарисуйте их. Отразите данную фигуру в данной прямой. "*Линия симметрии*" (*не ось* симметрии).

120. Раскрасьте симметричную фигуру так, что она потеряет (соответственно, сохранит) свойство симметрии по отношению к цвету.

121. Найдите в классе поверхности с линией симметрии; на фасаде здания или его части найдите линии симметрии или те элементы, которые нарушают симметрию.

122. Сформулируйте, какая фигура имеет линию симметрии.

123. Предмет и его отражение в зеркале. Определите "*плоскость симметрии*". Найдите её на различных предметах. Симметрия человеческого тела или животных. Симметричны ли все рыбы снаружи?

124. "*Центр симметрии*" плоской фигуры — определите его для учеников и попросите привести примеры.

125. Дайте определение правильного многоугольника и попросите учеников решить, какой симметрией они обладают.

126. Дополните данную плоскую фигуру до симметричной по отношению к указанному центру симметрии.

127. Фигуры с (1) линией симметрии, (2) центром симметрии на поверхности глобуса. Для каких из них одна половина может быть совмещена с другой?

128. "*Ось симметрии второго порядка*" как распространение понятия "центр симметрии" плоских фигур. Имеет ли каждый параллелепипед ось симметрии второго порядка? — Найдите поблизости предметы с осью симметрии второго порядка.

129. Оси симметрии третьего, четвертого, ..., n-го порядка. Найдите все оси симметрии 2-го, 3-го, 4-го порядка на кубе. Симметрии правильной пирамиды.

130. Обладает ли косой параллелепипед какой-либо симметрией? "*Центральная симметрия*". Вспомните центры симметрии плоских (или сферических) фигур — сравните! Может ли косой параллелепипед быть разбит на две части, которые могут быть совмещены друг с другом? Обладает правильный тетраэдр центром симметрии?

XIII. Геометрия механизмов

131. Сделайте схематический рисунок ножного привода токарного станка или швейной машины. Нарисуйте от руки эскиз пути двух концевых точек шатуна.

132. Как себя ведут другие точки шатуна? Сделайте из полосок картона модель этого механизма; положите его на белую бумагу и через дырки в полоске сделайте рисунки разных путей точек шатуна. Представьте, как при движении наблюдаемой точки вдоль шатуна один путь непрерывно переходит в другой.

133. Меняйте соотношение длин полосок и исследуйте влияние этого изменения на пути конечных точек шатуна. Трансформация кругового в прямолинейное движение. Где четвертая вершина соответствующего четырехугольника? Рассмотрите различные формы таких четырехугольников в механизмах.

134. Передачи — цилиндрические и конические. Какая цель конической формы? Найдите в механизмах.

135. Какие пути могут описывать различные точки плоскости, если одна точка зафиксирована и плоскость может двигаться только в себе? — Лист бумаги на столе. Аналогичный вопрос по отношению к сферической оболочке, прикрепленной в одной точке к глобусу. Есть ли ещё неподвижные точки в этом случае?

136. Может лист бумаги двигаться по столу так, что *все* его точки описывают круги *одинакового размера*? Есть ли в этом случае неподвижные точки? Может подобное быть сделано со сферической оболочкой? Центробежный сепаратор. Почему не рекомендуется сепаратору вращаться только вокруг одной фиксированной оси?

137. Какие пути могут описывать различные точки твердого тела, если зафиксировать две его точки? когда зафиксирована одна точка?

138. Дайте общую характеристику поступательного движения и приведите примеры.

139. Какой путь описывает точка винта при ввинчивании — когда она расположена на его оси, вне оси?

XIV. Степени свободы

140. Сколько величин надо знать для нахождения точки на поверхности? (Где закопаны сокровища в поле, где следует посадить дерево, где расположен город на поверхности земли).

141. Сколько величин определяют положение точки в пространстве? (Точное положение самолета, птицы в полете, предмета в комнате).

142. Типы различных данных. Геометрические места. Ученики дают данные (координаты) выбранного ими предмета и другие ученики должны определить предмет по этим данным.

143. Сколько величин требуется для определения положения и пространственной ориентации стержня? — То же самое для полоски картона на поверхности стола.

144. Сколько величин требуется для определения положения точки на глобусе? ориентации глобуса, закрепленного в центре?

145. Сколько величин можно выбрать произвольно (“*степени свободы*”) для точного определения положения и пространственной ориентации следующих предметов: точки в пространстве, точки на плоскости, на поверхности шара, внутри шара; полоски картона на столе; то же для случая одной фиксированной точки; а также в случае ограничения на два граничных направления, составляющие определенный угол друг с другом; глобуса, экватор которого может двигаться в одной плоскости; двух стержней, один из которых зафиксирован в одной точке, а второй скреплен с ним вращающимся шарниром; колеса с закрепленной осью колеса, катящегося по заданной колее; колеса неподвижного автомобиля; швейной машины.

146. Степени свободы различных частей тела.

XV. Определенные, неопределенные, и переопределенные задачи

Упражнения следующих трех частей имеют своей целью указать, как систематическое обсуждение может помочь находить точные ответы и таким образом могут быть использованы в качестве введения в систематический курс, а также в качестве иллюстрации к систематическому курсу.

147. Три ученика должны встать так, чтобы расстояния между каждой парой из них были одинаковы. Используйте веревку и мел в качестве вспомогательных средств. Сделайте схематический рисунок на доске.

148. Может ли это упражнение быть распространено на *четверых* учеников? На четырех птиц в воздухе? На пять птиц?

149. С помощью линейки и циркуля нарисуйте треугольник с заданными сторонами. Дайте ученикам самим выбрать заранее длины сторон треугольника! Могут они быть совершенно произвольными? То же упражнение на черном глобусе.

150. Постройте четырехугольник с четырьмя заданными сторонами. Сравните это упражнение с предыдущим. Сколько степеней свободы у треугольника с фиксированными сторонами?

Сколько у нашего четырёхугольника? Найдите дополнительные данные, делающие задачу определенной (так, что и четырёхугольник не имеет более степеней свободы).

151. Постройте треугольник с данной стороной и одним прилегающим углом. Геометрические места третьей вершины. Определяется треугольник однозначно выбором третьей вершины? Какими данными этого можно достичь? — Подобная задача для сферического треугольника. Будет треугольник и в этом случае однозначно определен *любым* выбором третьей вершины? — Аналогичная задача для цилиндрической поверхности (круговой, например).

152. Задайте разными способами две величины в треугольнике и опишите геометрическое место третьей вершины. Аналогично для сферического треугольника.

153. На сфере задайте два угла и меняющуюся длину стороны между ними, исследуйте третий угол; задайте определенное значение величины третьего угла — *нащупайте руками* — определите треугольник; убедите себя, что это *определенная* задача.

154. Аналогично для плоского треугольника. Почему случай плоского треугольника неопределенный?

XVI. Аксиома параллельных и ее следствия

155. Большая поверхность пола (не обращая внимания на края) покрывается плитками одинаковой формы и размера. Какой они могут быть формы? Могут они быть треугольниками, четырехугольниками, пятиугольниками? Могут они иметь произвольные углы?

156. Можно покрыть поверхность глобуса произвольным числом равносторонних треугольников одного размера?

157. Какие возможны правильные многогранники?

158. Что мы называем “уменьшенным изображением” фигуры на плоскости или “масштабной моделью” протяженного предмета в пространстве? Примеры фигур с соответственно равными углами, но стороны которых не пропорциональны; с пропорциональными сторонами, но неравными углами.

159. Могут быть подобны на поверхности глобуса треугольники разного размера? четырехугольники, пятиугольники?

160. Получите на плоскости и сфере фигуру из треугольника путем “умножения” (увеличения сторон на один множитель). Получается при этом “прямолинейная” фигура на сфере (т.е. ограниченная дугами больших кругов)?

161. Найдите расстояние до недоступной точки (например, дерева, стоящего на другом берегу реки; угла на потолке; вершины дерева).

162. Схематический рисунок метода определения радиуса Земли; расстояния до Луны, зная радиус Земли; расстояние то Солнца, зная расстояние до Луны; расстояние до Сириуса, зная расстояние до Солнца.

163. Все стороны треугольника увеличены в отношении $1 : n$. В каком отношении увеличится его площадь?

164. Все ребра параллелепипеда увеличиваются в 2, 3, 4, ... раза. Как увеличится его площадь поверхности, объем?

165. Почему считается более экономичным построить *один* дом с восемью квартирами одинакового размера, чем восемь домов с одной квартирой в каждом?

166. В продаже имеется два сорта яиц. Диаметр яиц одного сорта в полтора раза больше другого, но они стоят в два раза дороже. Какие более выгодно покупать? с какой точки зрения?

167. Требуется заполнить ящик как можно полнее определенным веществом, имеющимся в форме шаров двух размеров: маленьких и больших. Какие вы выберете?

168. Некто вывел формулу $S = 3ab + bc$ для некоторого рода “величины” твердого тела и известно, что a, b, c являются некоторыми *линейными* размерами этого тела и S — или площадь поверхности, или объем. Можно по виду формулы определить, какой из величин является S?

XVII. Окружность

169. Требуется обвязать веревкой пакет цилиндрической формы. Какой длины должна быть веревка? — определите на глаз! Одна сторона цилиндрического пакета должна быть покрыта бумагой — какой формы и длины должен быть кусок бумаги?

170. Требуется сшить юбку и брюки одинаковой длины. Что требует больше ткани? Приблизительно оцените, сделав эскиз, в котором юбка изображается одним цилиндром, а брюки — двумя.

171. Имеется три коробки цилиндрической формы одинаковой высоты, одна из которых в два раза шире двух других. Боковую поверхность широкой коробки надо покрыть красной бумагой, а боковые поверхности узких надо покрыть зеленой бумагой. Оцените, какой бумаги потребуется больше.

172. Вообразите веревку вокруг экватора шара размером с Землю. Теперь представьте, что веревку удлинили на один метр, образуя окружность, концентрическую с экватором. Оцените, на каком расстоянии она будет отстоять от поверхности шара.

173. Какие пуговицы лучше: плоские или толстые? В форме круглой пластинки или сферической формы? Для какого типа пуговиц одинакового диаметра надо сделать петли бо́льшего размера, и в каком отношении?

174. Сквозь круглое отверстие в листе бумаги протащите монету большего размера, чем отверстие. Оцените, насколько маленьким при этом может быть отверстие.

XVIII. Поверхности и сечения

175. Вырежьте из листа картона развертку куба.

176. Отрежьте от углов прямоугольного листа картона части так, чтобы из оставшегося можно было сделать открытую коробку. Какой формы будут отрезанные куски?

177. Нарисуйте абажур конической формы с основанием 8-угольника, n-угольника, окружности.

178. Придумайте различные модели, развертку которых можно сделать из одного куска картона.

178a[4]**.** Нарисуйте горизонтальную проекцию крыши дома, заданного его внешними стенами, при условии что все части крыши имеют одинаковый наклон по отношению к горизонтальной плоскости. Как меняется проекция гребня крыши при изменении угла наклона скатов? Какую форму имеют различные скаты крыши? (План дома: квадрат; прямоугольник; прямоугольник с вырезанными углами; восьмиугольник).

179. Полуцилиндрический горизонтальный желоб состоит из двух частей, соединенных под углом друг к другу. Какова форма линии пресечения частей?

180. Куб пересечен плоскостью, перпендикулярной его пространственной диагонали. Какова форма сечения? Как она зависит от расстояния точки пересечения от угла куба?

XIX. Топология

181. Нарисуйте эскиз узла.

182. Структура обычной веревки – электрического кабеля (большое количество нитей, скрученных между собой так, что каждая одинаково расположена по отношению к поверхности кабеля).

183. Цепи, которые можно разнять.

184. Нарисуйте лассо.

184a. На бумаге n точек попарно соединены линиями. Может ли такая конфигурация быть нарисована, не отрывая карандаша от бумаги без повторений? в случае $n = 4, 5, 6, \ldots$? — Могут

[4]В оригинале номер 178 присутствует дважды. Для сохранения последующей нумерации упражнений в переводе второй пункт под номером 178 заменен на 178a. Такая же замена сделана для одного из пунктов 184 оригинала.

ли быть таким образом прослежены ребра тетраэдра, октаэдра, куба? Попробуйте изобрести другие "графы", для которых это возможно (соответственно, невозможно).

185. Раскрасьте разными красками круг, разделенный на два, четыре, шесть секторов так, чтобы никакие две смежные части не были раскрашены в один и тот же цвет. Какое минимальное число красок требуется для этого?

186. То же самое для трех, пяти, семи секторов.

187. То же для двух концентрических кругов, когда внешнее кольцо (соответственно, внутренний круг) разделены радиальными линиями на две, три, четыре, пять частей.

188. Разбейте квадрат на такие части, что для их раскраски потребуется две, три, четыре, пять, ... красок (по-прежнему раскрашивая смежные части в разные цвета).

189. Раскрасьте тетраэдр, куб, октаэдр так, что смежные грани окрашены в разные цвета.

190. Прикрепите цветные бусинки к вершинам тетраэдра, куба, октаэдра таким образом, чтобы бусинки на одном ребре были разного цвета. Сколько потребуется разных цветов? — Сравните с предыдущим упражнением.

191. Разбейте поверхность тора на пять, шесть, семь частей так, что для их раскраски потребуется соответственно пять, шесть, семь красок.

192. Из полоски бумаги сделайте цилиндр и раскрасьте его внутреннюю и внешнюю поверхности в разный цвет. Из подобной бумаги сделайте лист Мёбиуса[5] и попробуйте раскрасить его таким же способом.

193. Прикрепите вдоль каждого края цилиндра узкую цветную полоску. То же самое для листа Мёбиуса!

194. Разрежьте лист Мёбиуса вдоль линии, параллельной краю. То, что получилось, разрежьте снова. Сколько краев создается каждым разрезом?

Перевод с немецкого:

Ямром Борис,
Нью-Йорк, 2015 г.

E-mail: yamrom@optonline.net

[5]Пусть A, B, C, D — углы соответствующей полоски бумаги. Цилиндр получается склеиванием сторон AD и BC, так что угол A склеивается с углом B и угол D склеивается с углом C. Лист Мёбиуса получается путем склеивания тех же сторон, но угол A совмещается с углом C и B — с D.

Библиографические материалы к юбилейным датам 2016 года. I полугодие

Р. З. Гушель

Календарь юбилейных дат первой половины 2016 г., связанных с именами известных деятелей в области математики и математического образования, а также с важнейшими событиями в этой сфере. После краткой информации о человеке или событии приводится небольшой список литературы.

14 января — 100 лет со дня рождения известного отечественного математика и историка математики, специалиста в области теории чисел **Ильи Григорьевича Мельникова** (умер в 1979 г.).

1. Мельников И.Г. Вопросы теории чисел в творчестве Ферма и Эйлера // ИМИ. - 1974. - Вып. 19. - С. 9-38.

2. Мельников И.Г. Выдающийся польский математик Вацлав Серпинский // Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. - М., 1968. - С. 3-13.

3. Мельников И.Г. Два доказательства кубического закона взаимности с помощью теории эллиптических функций // Уч. зап. ЛГПИ. - Физ.-мат. Фак. - 1955. - Т. 1. - С. 57-81.

4. Мельников И.Г. Леонард Эйлер и его арифметические работы // ИМИ. - 1957. - Вып. 10. - С. 211-228.

5. Мельников И.Г. Леонард Эйлер о математической строгости // ИМИ. - 1966. - Вып. 17. - С. 289-298.

6. Мельников И.Г. О работах В. Я. Буняковского по теории чисел // Труды ИИЕТ. - 1957. - Т. 17. - С. 270-286.

18 января — 160 лет со дня рождения итальянского математика, профессора университета в Пизе (с 1886), чл.-корр. Парижской АН и ряда других академий мира, известного специалиста в метрической дифференциальной геометрии, теории чисел и математическом анализе **Луиджи Бианки** (умер 6 июня 1928 г.).

1. Глаголев Н.А. Работы Luigi Bianchi по многомерной геометрии кривых пространств // Труды геом. кружка (НИИ мат. и мех. при 1-ом МГУ). - М., 1930. - Вып. 1. - С. 37-48.

2. Крылов Н.М. Луиджи Бианки (1856-1928). Некролог // Изв. АН СССР. - Отд. Физ.-мат. наук. - 1929. - № 10. - С. 855-859.

3. Сретенский Л.Н. Работы Luigi Bianchi по преобразованию поверхностей // Труды геометр. кружка. - М., 1930. - Вып. 1. - С.27-36.

4. Фиников С.П. Luigi Bianchi как геометр // Там же. - С. 1-14.

23 января — 210 лет со дня рождения профессора Дерптского университета (с 1843), почетного члена Петербургской АН (с 1879), специалиста в теории поверхностей и теории абелевых функций **Фердинанда Готлибовича Миндинга** (умер 13 мая 1885 г.).

1. Галченкова Р.И., Лумисте Ю.Г., Ожигова Е.П., Погребысский И.Б. Фердинанд Миндинг. - Л., 1970. - 224 с.

2. Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. - М., 1981. - С. 19-23.

3. Сорокина Л.А. О работах Фердинанда Миндинга по теории абелевых интегралов // ИМЕН. - 1982. - Вып. 29. - С. 144-151.

25 января — 280 лет со дня рождения замечательного французского математика и механика, члена Французской АН (с 1772), президента Берлинской АН (1766-1787) **Жозефа Луи Лагранжа** (умер 10 апреля 1813 г.). Его исследования посвящены геометрии, механике, теории дифференциальных уравнений и другим разделам математики.

1. Гиндикин С.Г. Жозеф Луи Лагранж // Квант. - 1986. - № 9.

2. Жозеф Луи Лагранж. Сборник статей. - М.-Л., 1937.

3. Крылов А.Н. Жозеф Луи Лагранж. 1736-1813 // УМН. - 1936. - Т. 2. - С. 3-16.

4. Тюлина И.А. Жозеф Луи Лагранж. 1736-1813. - М., 1977.

5. Чеботарев Н.Г. О значении работ Лагранжа по теории чисел и алгебре // УМН. - 1936. - Т. 2. - С. 17-31.

6. Лагранж Ж. Аналитическая механика. - М.-Л., 1950. - Т. 1, 2.

30 января — 180 лет со дня рождения известного отечественного математика и механика, профессора Московского университета (с 1862), президента Московского математического общества (1886-1891) **Василия Яковлевича Цингера** (умер в 1907 г.).

1. Андреев К.А. Василий Яковлевич Цингер. - М., 1909.

2. Жуковский Н.Е. О работах В. Я. Цингера по механике // МСк. - 1911. - Т. 28. - Вып. 1. - С. 50-53.

3. Лопатин А.М. Философские взгляды В. Я. Цингера // Там же. - С. 54-62.

4. Млодзеевский Б.К. Труды В. Я. Цингера по математике // Там же . - С. 40-49.

5. Цингер В.Я. К вопросу о точке наименьшего расстояния // МСк. - 1892. - Т. 16. - Вып. 2. - С. 317-341.

6. Цингер В.Я. Недоразумения во взглядах на основания геометрии // ВФП. - 1894. - Кн. 2(22). - Отд. 2. - С. 199-213.

7. Цингер В.Я. Об основой теореме высшей геометрии // МСк. - 1869. - Т. 4. - Отд. 2. - Вып. 1. - С. 23-37.

8. Цингер В.Я. Построение плоской кривой по десяти данным точкам // МСк. - 1868. - Т. 3. - С. 290-309.

31 января — 120 лет со дня рождения известного отечественного историка и философа математики, крупного специалиста в области математической логики **Софьи Александровны Яновской** (умерла 24 октября 1966 г.).

1. Башмакова И.Г. Софья Александровна Яновская (к 70-летию со дня рождения) // УМН. - 1966. - Т. 21. - Вып. 3. - С. 244-247.

2. Башмакова И.Г., Демидов С.С., Успенский В.А. Жажда ясности // ВИЕТ. - 1996. - № 4. - С. 108-119.

3. Бычков С.Н. Геометрия и аксиоматический метод (к 100-летию С. А. Яновской) // ИМИ. - 1996. - Вып. 1(36). - № 2. - С. 195-204.

4. Яновская С.А. Из теории аксиоматики // ИМИ. - 1958. - Вып. 11. - С. 63-96.

5. Яновская С.А. Методологические проблемы науки. - М., 1972.

6. Яновская С.А. Мишель Ролль как критик анализа бесконечно малых // Труды ИИЕ. - 1947. - Т. 1. - С. 327-346.

7. Яновская С.А. Научное наследие П. Л. Чебышева // Труды ИИЕ. - 1947. - Т. 1. - С. 417-424.

8. Яновская С.А. О философских вопросах математической логики // Проблемы логики. - М., 1963. - С. 3-17.

2 февраля — 250 лет со дня рождения отечественного математика, учителя академика М. В. Остроградского, профессора и ректора Харьковского университета (1813-1820) **Тимофея Федоровича Осиповского** (умер 24 июня 1832 г.).

1. Бахмутская Э.Я. Тимофей Федорович Осиповский и его “Курс математики” // ИМИ. - 1952. - Вып. 5. - С. 28-74.

2. Кравец М.Н. Т. Ф. Осиповский — выдающийся русский ученый и мыслитель. - М., 1955.

3. Прудников В.Е. Русские педагоги-математики 18-19 веков. - М., 1956.

4. Симонов Р.А. Борьба Т. Ф. Осиповского против мистики в математике // МШ. - 1955. - № 5. - С. 11-14.

5. Чириков Г.С. Тимофей Федорович Осиповский // Русская старина. - 1876. - Ноябрь.

6. Осиповский Т.Ф. Курс математики. СПб., 1802-1803. - Ч. 1-3.

7. Осиповский Т.Ф. О пространстве и времени // ИМИ. - 1952. - Вып.5. - С. 9-17.

2 февраля — 120 лет со дня рождения польского математика, члена Польской АН (с 1954), президента Польского математического общества (1946-1953), иностранного члена АН СССР (с 1966), крупного специалиста в теории множеств и топологии **Казимежа Куратовского** (умер 18 июня 1980 г.).

1. Александров П.С. Памяти К. Куратовского //УМН. - 1981. - Т. 36. - Вып. 6. - С. 243-244.

2. Доморадзки С. К теореме Куратовского о 14 множествах // ИМИ. - 2006. - Вып. 11(46). - С. 234-239.

3. Синкевич Г.И. Георг Кантор и польская школа теории множеств. - СПб., 2012. - 347 с.

4. Куратовский К. Десятилетие Математического института // Журнал Польской Академии Наук. - Варшава, 1959. - Т. 4. - Вып. 3(15). - С. 16-32.

5. Куратовский К. Вацлав Серпиньски (1882-1969). Некролог // Журнал Польской Академии Наук. - Варшава, 1970. - Т. 1. - Вып. 1(57). - С. 123-125.

6. Куратовский К. Топология. - М., 1966, 1969. - Т. 1,2.

11 февраля — 125 лет со дня рождения профессора Московского университета, чл.-корр. АН СССР (с 1939), занимавшегося теорией функций действительного переменного, теорией рядов и конформными отображениями **Ивана Ивановича Привалова** (умер 13 июля 1941 г.).

1. Кузнецов П.И., Соломенцев Е.Д. Иван Иванович Привалов. К 90-летию со дня рождения // УМН. - 1982. - Т. 37. - Вып. 4. - С. 193-211.

2. Степанов В. Иван Иванович Привалов (1891-1941) // Изв. АН СССР. - Сер. математ. - 1941. - Т. 5. - № 6. - С. 389-394.

3. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. - М., 1954. - Изд. 9. - 444 с.

4. Привалов И.И. Граничные свойства однозначных аналитических функций. М., 1941. - 256 с.

5. Привалов И.И. О сходимости сопряженных тригонометрических рядов // МСк. - 1925. - Т. 32. - С. 357-363.

6. Привалов И.И. Приложения понятия гармонической меры множества к некоторым проблемам теории функций // МСк. - 1938. - Т. 3(45). - С. 527-534.

7. Привалов И.И. Ряды Фурье. М.-Л., 1934. - Изд. 3. - 164 с.

16 февраля — 125 лет со дня рождения академика АН Грузинской ССР и её президента (1941-1972), академика АН СССР (с 1939), директора Математического института Грузинской ССР, крупного специалиста в теории функций комплексного переменного, теории интегральных уравнений и теории упругости **Николая Ивановича Мусхелишвили** (умер 15 июля 1976 г.).

1. Векуа И.Н. Академик Н. И. Мусхелишвили. - Новосибирск, 1961.

2. Гокиели Л.П. Николай Иванович Мусхелишвили // МШ. - 1961. - № 4. - С. 72-74.

3. Мусхелишвили Николай Иванович (к 80-летию со дня рождения) // УМН. - 1972. - Т. 27. - Вып. 4. - С. 3-20.

4. Соболев С.Л. Николай Иванович Мусхелишвили // Вестн. АН СССР. - 1938. - № 11-12. - С. 41-44.

5. Мусхелишвили Н.И. Исследование новых интегральных уравнений плоской теории упругости // ДАН. - 1934. - № 3. - С. 73-77.

6. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. - М., 1967. - Изд. 4. - 655 с.

7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб. - М., 1966. - Изд. 5. - 707 с.

23 февраля — 110 лет со дня рождения отечественного математика и историка науки, члена-корреспондента Международной академии истории науки (с 1963), сотрудника ИИЕТ АН СССР (с 1962) **Иосифа Бенедиктовича Погребысского** (умер 20 мая 1971 г.).

1. Иосиф Бенедиктович Погребысский. Некролог // УМН. - 1972. - Т. 27. - Вып. 1. - С. 227-235.

2. Штокало И.З., Боголюбов А.Н. И. Б. Погребысский. К 60-летию со дня рождения // Вопр. ИЕТ. - 1967. - Вып. 21. - С. 129-130.

3. Погребысский И.Б. Галилей и математика // Вопр. ИЕТ. - 1964. - Вып. 16. - С. 34-37.

4. Погребысский И.Б. Готфрид Вильгельм Лейбниц. М., 1971.

5. Погребысский И.Б. К истории качественных методов в теории дифференциальных уравнений // ИМИ. - 1997. - Вып. 2(37). - С. 283-292.

6. Кляус Е.М., Погребысский И.Б., Франкфурт У.И. Паскаль. - М., 1971.

7. Погребысский И.Б., Марон И.А. О педагогическом наследии М. В. Остроградского // Михаил Васильевич Остроградский. - М., 1961. - С. 7-31.

2 марта — 110 лет со дня рождения профессора Московского университета (с 1965), специалиста в области качественной теории дифференциальных уравнений и автора широко известных руководств по математическому анализу **Бориса Павловича Демидовича** (умер 23 апреля 1977 г.).

1. Ефимов Н.В. и др. Памяти Демидовича Бориса Павловича // УМН. - 1978. - Т. 33. - Вып. 2. - С. 169-174.

2. Левитан Б.М., Пануш П.Н. Борис Павлович Демидович (к 60-летию со дня рождения) // УМН. - 1966. - Т. 21. - Вып. 6.

3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М., 1967. - 472 с.

4. Демидович Б.П. О некоторых теоремах осреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений // МСк. - 1954. - Т. 35(77). - С. 73-92.

5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М., 1977. - Изд. 9. - 528 с.

6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. - М., 1963. - Изд. 2. - 400 с.

16 марта — 170 лет со дня рождения шведского математика, одного из инициаторов международных математических конгрессов, почетного председателя Международного математического союза (с 1924), основателя журнала “Acta Mathematica” (1871) **Магнуса Густава Миттаг-Леффлера** (умер 7 июля 1927 г.).

1. Кочина П.Я. Гёста Миттаг-Леффлер. - М., 1987.

2. Математический институт супругов Миттаг-Леффлер // ВОФЭМ. - 1916. - № 664-665.

3. Ожигова Е.П. Миттаг Леффлер и русские математики // Вопр. ИЕТ. - 1979. - Вып. 64-66. - С. 43-44.

4. Юбилей Миттаг-Леффлера // ВОФЭМ. - 1916. - № 664-665.

18 марта — 220 лет со дня рождения немецкого математика, члена Берлинской АН (с 1834), профессора Берлинского университета, крупного специалиста в области проективной геометрии **Якоба Штейнера** (умер 1апреля 1863 г.).

1. Адлер А. Теория геометрических построений. - Одесса, 1910.

2. Клейн Ф. Высшая геометрия. - М.-Л., 1939.

3. Мордухай-Болтовской Д.Д. О штейнеровских построениях на сфере // МСк. - 1935. -Т. 42. - С. 535-546.

4. Синцов Д.М. Я. Штейнер как преподаватель // ВОФЭМ. - 1910. - № 510. - С. 137-140.

5. Яглом И. М. Якоб Штейнер (из истории геометрии) // Квант. - 1998. - № 7. - С. 2-9.

6. Штейнер Я. Геометрические построения. - Харьков, 1910.

7. Штейнер Я. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга. - М., 1939. - 80 с.

31 марта — 420 лет со дня рождения французского философа и математика, заложившего основы аналитической геометрии и буквенной алгебры, основоположника картезианства **Рене Декарта** (умер 11 февраля 1650 г.).

1. Асмус В.Ф. Декарт. - М., 1956.

2. Бендукидзе А.Д. Как Декарт проводил касательные // Квант. - 1986. - № 8.

3. Грот Н.Я. О жизни и личности Декарта // ВФП. - 1896. - Кн. 35. - С. 645-659.

4. Делоне Б.Н. Развитие аналитической геометрии от Декарта до наших дней // Природа. - 1950. - № 9. - С. 77-80.

5. Дорофеева А.В. Декарт и его "Геометрия" // Квант. - 1987. - № 9.

6. Матвиевская Г.П. Рене Декарт. 1596-1650. - М., 1976.

7. Шаль М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. - М., 1883.

8. Декарт Р. Геометрия. - М.-Л., 1938.

9. Декарт Р. Рассуждение о методе. - М.-Л., 1953.

7 апреля — 150 лет со дня рождения шведского математика, профессора Стокгольмского университета (с 1906 г.), известного трудами по теории линейных интегральных уравнений и теории операторов (эти труды были отмечены премией Парижской АН) **Эрика Ивара Фредгольма** (умер 17 августа 1927 г.).

1. Бурбаки Г. Очерки по истории математики. - М., 1963.

2. Сретенский Л.Н. Ивар Фредхольм // ИМЕН. - 1966. - Вып. 5.

28 апреля — 110 лет со дня рождения известного математика, члена Национальной АН США, профессора Парижского университета (с 1953), крупного специалиста в области математической логики и теории множеств **Курта Гёделя** (умер 14 января 1978 г.).

1. Артемов С.Н. Подход Колмогорова и Гёделя к интуиционистской логике и работы последнего десятилетия в этом направлении // УМН. - 2004. - Т. 59. - Вып. 2. - С. 9-36.

2. Крайзель Г. Биография Курта Геделя // УМН. - 1988. - Т. 43. - Вып. 2. - С. 175-216; Вып. 3. - С. 203-238.

3. Кузичева З.А. К истории теорем о неполноте // ИМЕН. - 1970. - Вып. 9. - С. 182-189.

4. Паршин А.Н. Размышления над теоремой Гёделя // ИМИ. - 2000. - Вып. 5(40). - С. 26-55.

5. Успенский В.А. Теорема Геделя о неполноте. - М., 1982.

6. Гёдель К. Расселовская математическая логика // Рассел Б. Введение в математическую философию. - М., 1996.

7. Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств // УМН. - 1948. - Т. 3. - Вып. 1. - С. 96-149.

30 апреля — 100 лет со дня рождения американского математика и инженера, члена Национальной АН США (с 1956), одного из создателей теории информации **Клода Элвуда Шеннона** (умер 24 февраля 2001 г.).

1. Серый С. Клод Элвуд Шеннон // Компьютерные вести. - 1998. - № 21.

2. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. - М., 1963. - 830 с.

6 мая — 180 лет со дня рождения известного отечественного педагога-математика, председателя С.-Петербургского педагогического общества, автора многочисленных руководств по математике и методике ее преподавания в средней школе **Василия Андриановича Евтушевского** (умер 23 сентября 1888 г.).

1. Ельницкий К.В. Русские педагоги второй половины XIX столетия. - СПб., 1904.

2. Прудников В.Е. Василий Андрианович Евтушевский // МШ. - 1956. - № 5. - С. 15-20.
3. Евтушевский В.А. Методика арифметики. СПб., 1885.
4. Евтушевский В.А. Сборник арифметических задач и численных примеров. - СПб., 1877. - Ч. I. - Целые числа.
5. Евтушевский В.А. Методика приготовительного курса алгебры. СПб., 1876.

6 мая — 110 лет со дня рождения французского математика, члена Парижской АН, одного из основателей группы математиков Н. Бурбаки **Андре Вейля** (умер 6 августа 1998 г.). Основные исследования относятся к алгебраической геометрии. Развил (1948) теорию алгебраических кривых и абелевых многообразий.

1. Вейль А. Арифметика алгебраических многообразий // УМН. - 1937. - Т. 3. - С. 101-112.
2. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения. - М., 1950. - 222 с.
3. Вейль А. Математические науки во Франции // УМН. - 1936. - Т. 1. - С. 267-270.
4. Вейль А. Основы теории чисел. - М., 1972.
5. Вейль А. Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру. - М., 1978.

7 мая — 120 лет со дня рождения отечественного математика, академика АН СССР (с 1953), президента Московского математического общества (1932-1964), создателя советской топологической школы **Павла Сергеевича Александрова** (умер 16 ноября 1982 г.).

1. Демидов С.С. К 100-летию со дня рождения П.С. Александрова // ВИЕТ, 1996. - № 1.
2. Колмогоров А.Н. Воспоминания о П. С. Александрове // УМН. - 1986. - Т. 41. - Вып. 6. - С. 187-203.
3. Нейман Л. Радость открытия. - М., 1972.
4. Пархоменко А.С. Павел Сергеевич Александров // МШ. - 1966. - № 3. - С. 69-75.
5. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. - М., 1977.
6. Александров П.С. Избранные труды. - М., 1978-1979. - Т. 1-3.
7. Александров П.С. Общая теория гомологий // Уч. зап. МГУ. - 1940. - Вып. 45. -С. 3-60.
8. Александров П.С. Современное состояние теории размерности // УМН. - 1951. - Т. 6. - Вып. 5. - С. 43-68.

10 мая — 270 лет со дня рождения французского математика, члена Французской АН (с 1783 г.), основателя и профессора Политехнической школы в Париже, автора основополагающих трудов по начертательной и дифференциальной геометрии **Гаспара Монжа** (умер 28 июля 1818 г.).

1. Боголюбов А.Н. Гаспар Монж. - М., 1978. -183 с.
2. Выгодский М.Я. Возникновение дифференциальной геометрии // АИНТ. - М., 1935. - Вып. 6. - С. 63-96.
3. Демьянов В.П. Геометрия и марсельеза. - М., 1979.
4. Каргин Д.И. Гаспар Монж — творец начертательной геометрии // Природа. - 1947. - № 2. - С. 65-73.
5. Шаль М. Руководство высшей геометрии. - М., 1910.
6. Монж Г. Начертательная геометрия. - Л., 1947.
7. Монж Г. Приложение анализа к геометрии. - М., 1936.
8. Монж Г. Сборник статей к двухсотлетию со дня рождения. - М., 1947.

5 июня — 70 лет со дня рождения известного отечественного педагога-математика, чл.-корр. РАО (с 1992), основателя и директора Московского института развития образовательных систем (МИРОС) (1990-2002), члена редколлегии журнала "Математика в школе", ученика академика А. Н. Колмогорова **Александра Михайловича Абрамова** (умер 24 мая 2015 г.).

1. Бунимович Е.А. Не стало Александра Михайловича Абрамова // МШ. - 2015. - № 6. - С. 2.
2. Абрамов А.М. Аксиома подвижности и её следствия // Преподавание геометрии в 6-8 классах /Сост. В. А. Гусев - М. - 1979. - С. 247-278.
3. Абрамов А.М. Логические основы курса планиметрии // МШ. - 1974. - № 5. - С. 51-62.

4. Абрамов А.М. О педагогическом наследии А. Н. Колмогорова // УМН. - 1988. - Т. 43. - Вып. 6. - С. 39-74.

5. Абрамов А.М. О положении с математическим образованием в средней школе (1987-2003). - М., 2003. - 72 с.

6. Абрамов А.М. Об издании трудов А. Н. Колмогорова // Труды VII Международных Колмогоровских чтений. - Ярославль., 2009. - С.45-49.

7. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Вейц Б.Е. и др. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / Под. ред. А. Н. Колмогорова. - М., 1982. - Изд. 3.

8. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М. К вопросу о проведении первых занятий по теме "Векторы" // МШ. - 1981. - № 3.

14 июня — 160 лет со дня рождения академика Петербургской АН (с 1896 г.), профессора Петербургского университета (с 1886 г.), признанного специалиста в области теории чисел, теории вероятностей и математического анализа **Андрея Андреевича Маркова (старшего)** (умер 20 июля 1922 г.).

1. Ахиезер Н.И. Русский математик А. А. Марков // Природа. - 1947. - № 8. - С. 76-81.

2. Гнеденко Б.В. Андрей Андреевич Марков // Люди русской науки. - М., 1961. - С. 193-199.

3. Стеклов В.А. Андрей Андреевич Марков (некролог) // Изв. АН. - 1923. - Т. 17. - С. 19-34.

4. Юшкевич А.П. Петербургская математическая школа // МШ. - 1949. - № 1. - С. 7-18.

5. Марков А.А. Двухсотлетие закона больших чисел // ВОФЭМ. - 1914. - № 603.

6. Марков А.А. Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей. - Л., 1951. - 719 с.

7. Марков А.А. К вопросу о преподавании математики в средних учебных заведениях // ЖМНП. - 1915. - № 3. - С. 126-130.

25 июня — 220 лет со дня рождения отечественного математика, чл.-корр. Петербургской АН (с 1855 г.), профессора Московского университета (с 1834 г.), основателя Московского математического общества и журнала "Математический сборник" (1866 г.) **Николая Дмитриевича Брашмана** (умер 25 мая 1866 г.).

1. Биография Н. Д. Брашмана // МСк. - 1866. - Т. 1. - С. XI-XXVI.

2. Лихолетов И.И., Майстров Л.Е. Н. Д. Брашман. - М., 1971.

3. Шевелев Ф.Я. К истории Московского математического общества // ИМЕН. - 1966. - Вып. 5. - С. 62-74.

4. Брашман Н.Д. О трансцендентных функциях Абеля // Уч. зап. Имп. Моск. ун-та. - 1834. - Ч. 6. - № 6. - С. 325-340.

5. Брашман Н.Д. Решение задачи на исчисление вероятностей // Уч. зап. Имп. Моск. ун-та. - 1835. - Ч. 10. - № 6. - С. 523-525.

27 июня — 210 лет со дня рождения шотландского математика, члена Лондонского королевского общества, одного из создателей формальной логики, основателя и первого президента (с 1866 г.) Лондонского математического общества **Огастеса де Моргана** (умер 18 марта 1871 г.).

1. Кроткова Н.Г. Обобщение комплексного числа у У. Р. Гамильтона и де Моргана // ИМЕН. - 1973. - Вып. 14. - С. 127-130.

2. Кузичева З.А. Алгебра логики в "Формальной логике" Августа де Моргана // ИМЕН. - 1980. - Вып. 25. - С. 88-97.

3. Кузичева З.А. Становление и развитие математической логики // Очерки по истории математики. - М., 1997. - С. 339-422.

4. Черкасова Е.В. Определение группы преобразований в работе де Моргана "Об основаниях алгебры" // ВИЕТ. - 1992. - № 1. - С. 90-92.

Список сокращений

АИНТ — Архив истории науки и техники. Сборник статей.

ВИЕТ (Вопр. ИЕТ) — Вопросы истории естествознания и техники. Журнал. (До 1980 г. — одноименный сборник).

ВОФЭМ — Вестник опытной физики и элементарной математики. Журнал, выходил в Одессе до 1917 г.

ВФП — Вопросы философии и психологии. Журнал, выходивший в 1890-1918 гг.

ДАН — Доклады Академии наук. Журнал.

ЖМНП — Журнал Министерства народного просвещения. Выходил в 1834-1917 гг.

Изв. АН СССР — Известия Академии наук СССР. Журнал.

ИМИ — Историко-математические исследования. Сборник статей.

ИМЕН — История и методология естественных наук. Сборник статей.

МШ — Математика в школе. Журнал.

МСк — Математический сборник. Журнал, выходящий с 1866 г.

Труды ИИЕТ (Труды ИИЕ) — Труды Института истории естествознания и техники (до 1954 г. Институт истории естествознания).

УМН — Успехи математических наук. Журнал.

Гушель Ревекка Залмановна,
г. Ярославль, научный сотрудник отдела
Истории математики и математического образования
Научно-практического центра
“Математическое просвещение”.

E-mail: gushelr@yandex.ru

О деятельности ФМОП в 2015 г.

От редакции

В 2015 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся старших классов ГОУ СОШ № 179 и учебного комплекса № 2090 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов.
- Выпуск журнала “Математическое образование”, учредителем которого ФМОП является; в 2014 г. вышли номера 1(73), 2(74), 3(75), 4(76).
- Поддержка выпуска книги “Загадка магнита” о жизни и деятельности М.Фарадея.
- Поддержка издания брошюр “32-й Международный математический Турнир Городов”, “33-й Международный математический Турнир Городов”.
- Приобретение книг для награждения участников педагогической Олимпиады ФПО МГУ, февраль.
- Предоставление изданий Фонда для участников конференции преподавателей математики в МГУ, г. Москва, май.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников регионального тура Всероссийской Олимпиады школьников, г. Королев, май.
- Предоставление изданий Фонда для участников XIII Колмогоровских чтений, г. Ярославль, май.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников Космической Олимпиады школьников, г. Королев, октябрь.
- Приобретение учебных пособий, в частности, материалов для подготовки к ЕГЭ для учащихся старших классов нескольких школ г. Москвы.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал “Математическое образование” ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал "Математическое образование".

www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанным адресам.

Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2015 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2015 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

I. Kostenko. Lessons of the Reform-70, the Final Paper № 7 2

The lessons of the reform of the math education in the USSR and Russia are analyzed.

A. Ostapenko. Mathematics for High School Students: from Fragmentariness to Systemacy 22

On some graphical tools for systematization of mathematics for high school students.

A. Evnin. Problems of Math Competition of the South Ural State University 26

A collection of problems of the mathematics competition for higher school students. The competition is arranged online by the South Ural State University.

T. Dudnikova. On the Limit Amplitude Principle for the 1D Non-Linear Wave Equation 53

The limit amplitude principle for the 1D non-linear wave equation is proven.

T. Ehrenfest-Afanassjewa. Exercises in Experimental Geometry, finished 59

A collection of exercises in experimental geometry prepared by the famous theoretical physicist and teacher of mathematics Tatjana Ehrenfest-Afanassjewa. The original book was written in 1931 in German. Translated in 2015 by Boris Yamrom. Finished.

R. Gushel. Bibliography for Anniversary Dates of 2016, the First Half 72

Anniversary dates for the first half of 2016 connected to some outstanding people and events of mathematics or math education are given. A short description of a person or an event is followed by bibliographic list.

Information. On the Activities of the Math Education and Enlightenment Foundation in 2015 80

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >