ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцатый

№ 2 (78)

апрель - июнь 2016 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 2 (78), 2016 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2016 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.06.2016 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (78), апрель – июнь 2016 г.

Содержание

Живая математика: о подготовке к олимпиадам

А. И. Буфетов, А. Я. Канель-Белов

Авторы задаются вопросом о причинах неудачного выступления российской команды на Международной математической олимпиаде 2015 г., высказывают ряд положений общего характера об олимпиадном движении в целом, приводя ряд примеров; дают методические предложения об организации подготовки к олимпиаде.

Dieser unbedingte Wille zur Wahrheit: Was ist er? Ist es der Wille, sich nicht täuschen zu lassen? Ist es der Wille, nicht zu täuschen?

Friedrich Nietzsche,
Die fröhliche Wissenschaft (La gaya scienza)[1]

À ceux qui furent mes élèves à qui j'ai donné du meilleur de moi-même et aussi du pire...

A. Grothendieck,
"Fatuité et renouvellement", dédicace (fragment)[2].

1. Введение

В 2015-м году команда России на международной олимпиаде по математике заняла в командном зачёте восьмое место — самое низкое в истории РФ. При этом, также впервые в истории, команда нашей страны осталась без золотых медалей. Относительный рейтинг команды (93,20%) был ниже только в 1992-м году — первом году участия молодого государства в Международной олимпиаде. СССР опускался ниже 8го места лишь однажды — на 9-е в 1981-м году[3], а золотые медали брал на каждой международной олимпиаде, в которой участвовал, начиная с 1962-го года.

Беспрецедентно неудачное выступление команды России в 2015-м году произошло на фоне общего снижения в последние годы — после блестящего первого места в 1999-м году, трёх подряд вторых в 2000–2002, неудачного пятого в 2003-м, уверенного, в течение семи лет (2004–2010), нахождения в первой тройке, страна выпадает из неё в 2011-м и больше не возвращается. Впервые с 1998-го года Россия выпала из первой пятёрки.

Как объяснить это падение? Чем обусловлен провал-2015? «Большим уклонением», которое выправится через год, как в 2003-м? Изменением формата сборов? Появлением новых стран-лидеров, совершивших рывок в последние 10 лет? «Демографической ямой»? Общим снижением уровня школьного математического образования, особенно в том, что касается геометрии? Другими причинами?

[1]Эта безусловная воля к истине: что она такое? Это воля не давать себя обманывать? Это воля самому не обманывать? (Фридрих Ницше, Весёлая наука.)

[2]Ученикам, которым я передал лучшее, что было во мне, а вместе с ним и худшее... (А. Гротендик. Из посвящения первой части "Самодовольство и обновление" книги "Урожаи и посевы".)

[3]Командное место определяется общей суммой баллов, при этом в 1981 году в команде СССР было 6 человек, а не 8, как в других командах. В медальном зачёте команда СССР в 1981 году выступила сильно: 3 золотых, 2 серебряных, 1 бронзовая; для сравнения, в 1979 году команда СССР взяла 2 золотых, 4 серебряных, 1 бронзовую медаль и первое место в командном зачёте.

Очки, места и медали — до известной степени, конечно, условность (например, некоторым участникам команды-2015 до золотой медали не хватило одного балла), а результаты страны на международной олимпиаде никак, вообще говоря, не могут служить показателем уровня математического образования в ней — это хорошо видно на примере Франции[4].

Тем не менее, снижение показателей в последние годы и провал-2015 заставляют задуматься. Лишь очень небольшая доля школьников, вовлечённых в олимпиадное движение, участвует в заключительном этапе всероссийской олимпиады, и ещё гораздо меньшая — в сборах на международную. И все же эти два мероприятия оказывают, на наш взгляд, фундаментальное влияние на всю организацию работы с математически одарёнными детьми в нашей стране. Ориентация на центр традиционна для России. Членов жюри всероссийских олимпиад и тренеров сборов приглашают прочесть лекции и дать мастер-классы в различных регионах. Задачи всероссийских олимпиад и сборов служат эталоном для преподавателей. Соответственно, и в нашей заметке, посвященной олимпиадному движению в целом, мы заостряем внимание на заключительном этапе всероссийской олимпиады и сборах на международную.

В нашей заметке мы высказываем наше видение стратегии подготовки школьников к математическим олимпиадам в общем контексте математического образования и работы с одарёнными школьниками в России. Отнюдь не претендуя на окончательность выводов, мы в первую очередь хотели бы начать широкую дискуссию по этим важным вопросам. Наши предложения сформулированы в шестом разделе. Мы предлагаем рассматривать олимпиадное движение в следующих трех основных аспектах:

1) **Олимпиады как праздник математики.** Для нас олимпиада любого уровня — это в первую очередь праздник математики. Ключевую роль должна играть здесь, на наш взгляд, связь олимпиад с современной математикой. В частности, мы предлагаем как можно активнее привлекать творчески работающих математиков к сотрудничеству с олимпиадным движением на всех его этапах, включая заключительный всероссийский и сборы на международную.

2) **Олимпиады в долгосрочной перспективе.** Мы предлагаем рассматривать олимпиады, в том числе и самого высокого уровня, в широком контексте математического образования. Участие в олимпиадном движении оказывает гигантское влияние на всю будущую жизнь школьника. Легко привести примеры блестящих олимпиадников, ставших блестящими математиками. Вместе с тем, нам далеко не раз с болью приходилось видеть золотых медалистов Международной олимпиады, вступающих на первый курс университета совершенно перегоревшими, не готовыми ни к серьёзной учёбе, ни к творческой работе. Забота о долгосрочном будущем одарённых детей — долг и ответственность всего математического сообщества. Нас вдохновляют слова По-Шеня Ло (Po-Shen Lo), выпускника аспирантуры Принстонского Университета, профессора Университета Карнеги-Меллона, тренера международной команды Соединённых Штатов [11]: “The focus of our program

[4] До сравнительно недавнего времени во Франции не было вообще никакого специального отбора на Международную олимпиаду — в команду назначались ученики выпускных классов лицеев, показавшие лучшие результаты на традиционном Concours général des lycées, проводимом, начиная с 1747-го года, по французскому, греческому и латинскому языкам, математике, философии, истории и физике. Лауреатами по математике были, например, Галуа, взявший пятое место в 1829-м году, Пуанкаре и Адамар. В частности, нельзя было больше, чем однажды выступить на Международной олимпиаде. Результаты Concours général становятся известны в июне, а Международная олимпиада проводится в июле, тем самым, у членов команды оставалось буквально две-три недели на сборы в Париже под руководством преподавателей ведущих Classes préparatoires столицы. В последние годы эта схема пересмотрена в пользу более распространённого в мире отбора команды по итогам региональных олимпиад и других соревнований. Попадание в команду Франции и даже золотая медаль на Международной олимпиаде не дает фанцузскому лицеисту решительно никаких преимуществ (в частности, в Grandes Écoles он поступает по конкурсу на общих основаниях). Наши знакомые французские математики, в том числе успешные олимпиадники в прошлом, в целом склонны к определённому скепсису по отношению к олимпиадному движению в контексте математического образования. Как спинной хребет последнего традиционно воспринимаются Les Classes préparatoires aux grandes écoles.

should be to recognize that we have 54 of the most impactful high school students in terms of potential, and we should help them be successful long-term. That's the goal[5]."

3) **Красота олимпиад.** Э.Б. Винберг [7] пишет: «Очевидными целями школьного курса геометрии являются развитие представлений о геометрии окружающего мира и обучение решению некоторых стандартных задач. Но не менее важно, что этот курс может предоставить прекрасный материал для творчества и способствовать пониманию таких духовных ценностей, как истина и красота». На наш взгляд, то же самое может быть верно и про олимпиадное движение.

   Напротив того, плохая эстетика тренировочных задач тормозит развитие и может сломать учащихся, особенно при большой нагрузке.

   Здесь возникают неизбежно трудные вопросы вкуса. Генрих Густавович Нейгауз [12] пишет: «В конце эмоционального подхода к искусству стоит знаменитая теза: о вкусах не спорят (я лично считаю, что как раз тут-то и надо спорить, так как вкус бывает плохой или хороший).»

За свой вкус математик отвечает своей судьбой.

2. Праздник математики

На всесоюзных олимпиадах была атмосфера праздника. С большой теплотой участвовавшие в них вспоминают сборы, которые проводил А.М. Абрамов (интересно было бы собрать воспоминания о тех сборах и материалы к ним).

Эта праздничность представляется нам ключевой российской традицией работы со школьниками. При этом, как нам представляется, ключевую роль играет акцент на связи олимпиадной математики с профессиональной, чрезвычайно важный, по нашему мнению, на всех уровнях олимпиадного движения — включая заключительный всероссийский и сборы международной команды. Конкретно, нам казалось бы очень желательным участие профессиональных математиков, которые умеют заворожить яркими теориями, показать общую картину своей области, вдохновить учеников красивыми идеями, развить их интуицию. Выступления А.Н. Колмогорова перед участниками всесоюзных олимпиад запоминались, по их рассказам, на всю жизнь.

3. Подготовка к олимпиадам и долгосрочная перспектива

3.1. А.Н. Колмогоров и олимпиадное движение

Подготовка к заключительным этапам олимпиад, а также к международной олимпиаде, в СССР была вписана, как нам представляется, в общий контекст специализированного образования, почти индивидуального на тот момент — достаточно вспомнить стиль работы со школьниками Андрея Николаевича Колмогорова. Такое образование органично включало в себя и популяризацию науки, и знакомство с самыми современными на тот момент достижениями в гуманитарной сфере, при этом дополнялось концепцией единения человека с природой — не просто физкультура, не игровые виды спорта, а походы, путешествия и т.д. Культурная среда — дети проживали вместе, с ними работали и общались как почти сверстники-студенты, так и академики — формировала творческую личность. Олимпиады были соревновательным элементом мотивации.

Н.Б. Васильев и А.А. Егоров пишут в [6]: «Поддержав идею организации всероссийских олимпиад, А.Н. Колмогоров на долгие годы стал основным научным руководителем математической олимпиады. Позднее, когда был образован Центральный оргкомитет всесоюзной олимпиады по

[5]Нашей программе следует сфокусироваться на том, чтобы признать, что у нас занимаются пятьдесят четыре школьника, чей потенциал — из числа самых многообещающих [в Соединённых Штатах — *прим. перев.*]. Мы должны помочь им быть успешными в долгосрочной перспективе. В этом наша цель.

математике, физике и химии, А.Н. Колмогоров возглавил Методическую комиссию по математике при оргкомитете. Его заместителями были в 60-е и 70-е годы М.И. Башмаков и Н.Б. Васильев, в конце 70-х годов — также Н.Х. Розов и А.Н. Земляков, в 80-е годы — В.В. Вавилов и Ю.В. Нестеренко; председателем комиссии с 1983 г. стал академик АН УССР профессор МГУ Б.В. Гнеденко. (...) А.Н. Колмогоров несколько раз приезжал на заключительный тур, исполнял обязанности председателя жюри. С ним обсуждались все принципиальные вопросы — состав жюри, формы проведения олимпиад и их научная программа, содержание задач, итоги олимпиад. Андрей Николаевич считал очень важным участие в работе жюри молодых математиков, в том числе студентов — победителей прошлых олимпиад; тщательную подготовку к лекциям и разбору решений задач со школьниками; поощрение (в частности, упоминание в публикациях об олимпиадах) учителей, чьи ученики показали хорошие результаты. Живо интересовался Андрей Николаевич, отнюдь не лишенный спортивной жилки, и результатами «своих» учеников — школьников из ФМШ при МГУ. Несомненно, самый факт, что олимпиаду возглавляет академик А.Н. Колмогоров, помогал привлечь к участию в олимпиаде многих талантливых людей.»

3.2. Утилитаризм и спорт

На вес
кумир ты ценишь бельведерский
Ты пользы, пользы в нем не зришь.

А.С. Пушкин, Поэт и толпа

На наш взгляд, олимпиады — не самоцель, сама олимпиадная деятельность — этап воспитания будущих исследователей. При их очевидном значении, медали и очки — не главное. Гораздо важнее становление школьников как творческих личностей, реализация их способностей, получение опыта работы на границе возможного.

Мы категорически не согласны с представлением, согласно которому подготовка к олимпиаде высокого уровня — это прежде всего «натаскивание», имеющее мало общего с образованием и ещё меньше с наукой. При таком подходе самое главное — работать (чем больше, тем лучше), «отрешивая» задачи олимпиад, а красивая математика малополезна и не оправдывает затраченных ресурсов.

Тренировка, иногда по необходимости рутинная, и чисто спортивный элемент имманентны олимпиадному движению, однако цена для школьника может оказаться очень высокой.

3.3. Эмоциональное напряжение

Участие в олимпиадном движении вызывает колоссальное эмоциональное напряжение у школьника. Призыв бережно обращаться с талантом может показаться банальным, но мы просим у читателя разрешения поставить акцент на этой банальности.

Зачем нужны отдых и развлечения? Разумеется, для того, чтобы восстановить силы, снять напряжение. Но — далеко не только. Необходимо привести в порядок свои впечатления, нужно, чтобы материал был обработан подсознанием, созданы профессиональные мыслеобразы. Без этого невозможен энтузиазм. Нельзя кормить быстрее, чем переваривается.

4. Олимпиады в контексте математического образования

4.1. Культурная значимость олимпиад

Необходимо упомянуть о культурной значимости олимпиад, как для настоящего, так и для будущего школьника (см. напр. [10]). Например, олимпиадники, даже не ставшие профессиональными математиками, знают, что математика — это и шахматная доска, и графы, и логические парадоксы, и многое другое.

Решение олимпиадных задач разного уровня сложности служит основой для почти всех математических кружков. Подготовка к олимпиадам оказывает значительное влияние на занятия школьников математикой. Именно в решении трудной задачи может состоять достижение подростка. Здесь он оказывается в равном положении со взрослым, даже превосходит его — подготовленный школьник решит олимпиадную задачу быстрее профессора университета.

На трудных задачах вырабатывается интеллектуальная техника и соответствующие волевые качества. Ключевую роль играет сам факт достижения серьезной, но посильной цели в подростковом возрасте.

Олимпиадное движение стало важнейшим явлением в области современного математического образования. Речь идёт, во-первых, об обнаружении талантов, но далеко не только об этом. Благодаря олимпиадной математике удается увидеть роль типичных приемов мышления в работе над трудными задачами и описать их. Организованные единством метода подборки олимпиадных задач по темам «принцип Дирихле», «правило крайнего», «инварианты» и пр. стали частью математической культуры.

Знаменитые книги Д. Пойа [15], [16], [17] естесвенно воспринимать в контексте олимпиадного движения. В целом, на наш взгляд, облик так называемой «венгерской математики» (вспомним, например, Пола Эрдёша или Белу Боллобаша) сформировался во многом под влиянием олимпиад.

Учебник по комбинаторике похож, нам представляется, на олимпиадный самоучитель.

4.2. Примеры.

Мы предлагаем смотреть на олимпиадное движение с точки зрения современной математики, в частности, алгебры, теории чисел, комбинаторики, теории динамических систем. В этом разделе мы иллюстрируем наш тезис на конкретных примерах, взятых из вариантов международных олимпиад последних лет.

Начнём с задачи, близкой нашим собственным научным интересам (см. [2, 4, 5]).

2013.6. Александр Голованов и Михаил Иванов, Санкт-Петербург, РФ.

Пусть $n \geq 3$ — целое число. Рассмотрим окружность и $n+1$ точек на ней, разбивающих её па равные дуги. Рассмотрим все способы пометить эти точки числами $1, 2, \ldots, n$ так, что каждое число использовано ровно один раз. Два способа, отличающихся поворотом, считаются одинаковыми. Способ пометки называется красивым, если для любых четырех меток $a < b < c < d$ таких, что $a + d = b + c$, хорда, соединяющая точки с метками a и d, не пересекает хорду, соединяющую точки с метками b и c. Пусть M — количество красивых способов пометки. Пусть N — количество упорядоченных пар (x, y) натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $x + y \leq n$ и $\text{НОД}(x, y) = 1$. Докажите, что $M = N + 1$.

Эта задача открывает дверь в теорию символических динамических систем. От сюжета задачи идут нити, в частности, к цепным дробям и последовательностям Штурма, а, более широко, к теории динамических систем параболического типа, таких как подстановки, перекладывания отрезков, потоки на поверхностях и т.п.

Приведём примеры задач, иллюстрирующие связь недавних олимпиадных задач с современной комбинаторикой.

2014.6. Герхард Вегингер, Австрия.

Говорят, что прямые на плоскости находятся *в общем положении*, если никакие две из них не параллельны и никакие три из них не проходят через одну точку. Любые несколько прямых общего положения разбивают плоскость на части; ограниченными частями разбиения будем называть те из частей, которые имеют конечную площадь. Докажите, что для всех достаточно больших n в каждом множестве из n прямых общего положения можно покрасить не менее $\sqrt{n}$ прямых в синий цвет так, чтобы граница никакой из ограниченных частей разбиения не была полностью синей.

Замечание: за доказательство утверждения задачи, в котором $\sqrt{n}$ заменено на $c\sqrt{n}$, будут начисляться баллы, в зависимости от константы c.

Эта задача возникла из исследования [1], связанного с проблемами Эрдеша – Секереша и Сильвестра – Каллаи.

2012.3, Дэвид Артур, Канада.

Два игрока A и B играют в игру Угадай-ка. Правила этой игры зависят от двух положительных целых чисел k и n, и эти числа известны обоим игрокам. В начале игры A выбирает целые числа x и N такие, что $1 \leqslant x \leqslant N$. Игрок A держит число x в секрете, а число N честно сообщает игроку B. После этого игрок B пытается получить информацию о числе x, задавая A вопросы следующего типа: за один вопрос B указывает по своему усмотрению множество S, состоящее из целых положительных чисел (возможно, это множество уже было указано в одном из предыдущих вопросов) и спрашивает игрока A, принадлежит ли число x множеству S. Игрок B может задать столько вопросов, сколько он хочет. На каждый вопрос игрока B игрок A должен сразу ответить да или нет, при этом ему разрешается соврать столько раз, сколько он хочет; единственное ограничение состоит в том, что из любых $k+1$ подряд идущих ответов хотя бы один ответ должен быть правдивым. После того, как B задаст столько вопросов, сколько он сочтет нужным, он должен указать множество X, содержащее не более чем n целых положительных чисел. Если x принадлежит X, то B выиграл; иначе B проиграл.

Докажите, что:

1) Если $n \geqslant 2^k$, то B может гарантировать себе выигрыш.

2) Для всякого достаточно большого k найдется целое число $n \geqslant 1{,}99^k$, при котором B не сможет гарантировать себе выигрыш.

Пункт 2 значительно сложнее пункта 1. Игрок A может использовать случайную стратегию. Доказательство её корректности позволяет естественным образом придти к локальной лемме Ловаса (см. о ней статью [9] Д.Г. Ильинского, А.М. Райгородского и А.Б. Скопенкова). Подробное изложение связи задачи с локальной леммой Ловаса заинтересованный читатель найдёт в сообщении Карлоса ди Фиоре [8].

4.3. Краткий анализ варианта-2015.

Задача 2015.6, предложенная Россом Аткинсом и Иваном Гуо из Австралии, связана с симпатичным, пусть и несколько экзотическим, сюжетом — «математикой жонглирования» (заинтересованному читателю мы предлагаем обратиться, например, к популярной лекции “The Mathematics of Juggling” профессора Корнельского Университета Аллена Кнутсона (Allen Knutson), выложенной на сервер youtube).

В целом, вариант Международной олимпиады 2015 года показался нам интересным, ярким и содержательным. Нам запомнилась красивая третья задача по геометрии, предложенная украинскими задачными композиторами Даниилом Хилько и Михаилом Плотниковым. Пятая задача, на решение функционального уравнения, предложенная албанским задачным композитором Дорлиром Ахмети, показалась нам свежей, естественной и элегантной. Обе задачи вызвали не совсем понятные нам трудности у команды России.

5. Роль эстетического чувства

You praise the firm restraint with which they write —
I'm with you there, of course:
They use the snaffle and the curb all right,
But where's the bloody horse?

R. Campbell[6]

В любом трудном деле есть тактика, а есть стратегия и «надстратегия» или «философия». Без них невозможно решить трудную задачу, где важна архитектура мыслей. Для развития стратегического мышления особенно важна эстетика.

[6]Твой стиль суховатый и сдержанно краткий// без умолку хвалят друзья...// Уздечка нужна, чтобы править лошадкой.// Но где же лошадка твоя? (Р. Кэмпбелл, перевод С.Я. Маршака.)

Вклад математика определяется не только его «пробивной силой» (способностью решить трудную задачу), но и его вкусом.

Сильная идея является в обличии красоты, роль эстетики становится практически значимой. Важно развивать эстетическое чувство. Здесь помогает искусство, поэтому важна культурная программа.

Осмелимся вновь высказать банальность: роль красоты — вещь абсолютно универсальная для всех сфер человеческой деятельности. Многие выпускники мехмата МГУ рассказывали нам о сильных впечатлениях, которые на них произвели музыкальные вечера, организованные А.Н. Колмогоровым и П.С.Александровым. П.С. Александров вспоминал, что Ф. Хаусдорф и Л. Брауэр прекрасно играли на фортепиано. Ф. Хаусдорф — автор комедии, с успехом шедшей более, чем в тридцати немецких городах. Оперная музыка — одно из увлечений Г.Я. Перельмана.

Чисто технические упражнения не могут принести радость. Если человек не хочет что-то делать, следует задуматься — почему? Перефразируя вторую речь Сократа к Федру ([14], 246e–254a), представим себе карету, лошадь и извозчика. Извозчик (наше сознание и сознательная воля) сам может везти карету очень недолго, но он может управлять лошадью (подсознанием), которая и везет карету нашей судьбы.

Подлинный энтузиазм возникает, когда человек ощущает ценность того, что он делает. Именно такой энтузиазм позволяет лучше переносить нагрузки, оправдывает трудовые будни, мотивирует изучение техники, приносит удовлетворение от усилий.

Победа вдохновляет. Такие переживания очень нужны, но всё же недостаточны. Научная значимость результата придаёт смысл работе.

6. Наши предложения

1) Наше ключевое предложение состоит в том, чтобы методической работой последнего этапа всероссийской и сборов на международную олимпиаду руководил *творчески работающий математик*. Разумеется, он не может заменить собой тренеров и организаторов. Тем не менее, последнее слово в кадровых назначениях и при компоновке варианта, при составлении научного и культурного расписания олимпиады и сборов, а также роль арбитра при апелляции и в других спорных вопросах должны, на наш взгляд, принадлежать ему.

2) Мы предлагаем как можно шире привлекать профессиональное математическое сообщество к сотрудничеству с олимпиадным движением.

3) Нужно экономить силы учеников. Преподаватель СУНЦ МГУ В.В. Рождественский говорил: «Хороший репетитор и блестящий репетитор оба научат. Но последний сделает это, затратив меньше ресурсов ученика.»

4) Нужно создавать командный дух, — чтобы ребята общались, обменивались идеями, в некоторых случаях вместе работали над задачами.

5) Необходимо продумать досуг и культурное развитие школьников.

6) Нужно сочетать техническую подготовку с развитием вкуса и стратегического мышления.

7) Наконец, мы хотели бы обратиться ко всем заинтересованным лицам с просьбой сформулировать своё видение концепции подготовки к олимпиадам, в том числе, международной. Мы с глубокой благодарностью примем все комментарии. Их можно отправлять, например, в редакцию журнала “Математическое образование”.

7. Заключение

У нас была счастливая возможность работать с участниками команды России 2015-го года. На наш взгляд, эти блестяще одарённые молодые математики ничуть не слабее своих коллег — золотых медалистов прошлых лет. Мы очень болеем за нашу команду и горячо желаем ей успеха в 2016-м году.

Благодарности. Мы глубоко благодарны Э. Брейару, Ю.С. Ильяшенко, А.К. Ковальджи, Д.О. Орлову, С.Е. Рукшину, М.А. Островскому, В.В. Прасолову, М.Б. Скопенкову, В.А. Тиморину, В.М. Тихомирову, Б.Р. Френкину и А.И. Эстерову за полезные обсуждения.

Литература

[1] Bose R., Cardinal J., Collette S., Hurtado F., Korman M., Langerman S., Taslakian P., Coloring and Guarding Arrangements. - URL: arxiv:1205.5162.

[2] Канель-Белов А.Я., Чернятьев А.Л. Описание нормальных базисов граничных алгебр и факторных языков медленного роста // Математические заметки, принята в печать.

[3] Канель-Белов А.Я. Олимпиады: дверь в математику или спорт? // Математическое Просвещение. - Т. 15. - 2011. - С. 182-186.

[4] Bufetov A.I. Limit theorems for translation flows // Annals of Mathematics. - V. 179. - 2014. - № 2. - P. 431-499.

[5] Bufetov A.I., Solomyak B. On the modulus of continuity for spectral measures in substitution dynamics // Advances in Mathematics. - V. 260. - 2014. - P. 84-129.

[6] Васильев Н.Б., Егоров А.А Задачи Всесоюзных математических олимпиад. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 14 л. - (Б-ка мат. кружка; вып. 18).

[7] Винберг Э.Б. О концепции учебника геометрии А.В. Погорелова // Математическое Просвещение. - Т. 19. - 2015.

[8] Di Fiore C. A report on the third problem of IMO 2012. - URL: artofproblemsolving.com.

[9] Ильинский Д.Г., Райгородский А.М., Скопенков А.Б. Независимость и доказательства существования в комбинаторике // Математическое Просвещение. - Т. 19. - 2015.

[10] Константинов Н.Н. Турнир Городов и Математическая олимпиада // Математическое Просвещение. - Сер. 3. - Вып. 1. - 1997. - С. 164-174.

[11] Lamb E. Math Boot Camp Prepares U.S. Team for International Mathematical Olympiad. - URL: www.simonsfoundation.org.

[12] Нейгауз Г.Г. Святослав Рихтер (творческий портрет) // Советская культура. - 11.06.1960. (Цит. по Нейгауз Г.Г. Размышления, воспоминания, дневники, избранные статьи, письма к родителям. - Сов. композитор, 1975.

[13] Перельман Я.И. Живая математика, Математические рассказы и головоломки / Издание восьмое, переработанное и дополненное. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967.

[14] Plato, Phaedrus, Platonis opera II / Oxford Classical Texts. - Clarendon Press, 1922.

[15] Пойа Д. Как решать задачу. - М.: Учпедгиз, 1961.

[16] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. - М.: Наука, 1975.

[17] Пойа Д. Математическое открытие. - М.: Наука, 1976.

Буфетов Александр Игоревич,
профессор РАН, ведущий научный сотрудник
МИАН им. В.А. Стеклова,
ИППИ РАН им. А.А. Харкевича,
НИУ ВШЭ (Москва),
Национальный центр научных
исследований (Франция)

bufetov@mi.ras.ru

Канель-Белов Алексей Яковлевич,
Московский физико-технический институт,
университет Бар-Илана (Израиль),
доктор физ.-мат. наук.

kanelster@gmail.com

Решение четырехугольников

В. Б. Дроздов

В заметке показано, что задание четырех сторон a, b, c, d вписанного четырехугольника или трапеции однозначно определяет эти геометрические фигуры, ибо тогда, как увидим ниже, задаются диагонали e и f, а значит, и треугольники, на которые диагонали разбивают эти четырехугольники

По аналогии с треугольником, который тоже однозначно определяется длинами своих сторон, решим оба указанный четырехугольника — вписанный четырехугольник и трапецию — по длинам их сторон. То есть найдем:

а) длины диагоналей e и f;

б) длины отрезков диагоналей e_1, e_2, f_1, f_2;

в) углы четырехугольников A, B, C, D;

г) угол между диагоналями φ;

д) площадь четырехугольников S;

е) площади четырех треугольников S_1, S_2, S_3, S_4, на которые разбивается четырехугольник своими диагоналями;

ж) радиус описанной окружности R (только для вписанного четырехугольника).

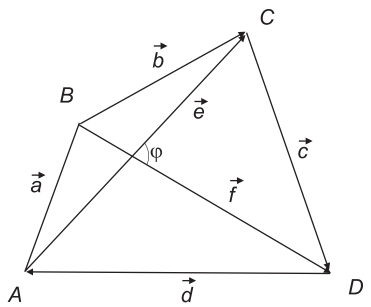

Рис. 1

Предварительно выведем некоторые важные формулы, верные для любого выпуклого четырехугольника, см. рис. 1.

Вычислим знакочередующуюся сумму квадратов сторон четырехугольника, учитывая, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля. Имеем:

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = (\vec{a}^2 - \vec{b}^2) + (\vec{c}^2 - \vec{d}^2) =$$
$$= (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{d}) + (\vec{c} - \vec{d}) = \vec{e} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{e} \cdot (\vec{c} - \vec{d}) =$$
$$= \vec{e}\big((\vec{a} + \vec{d}) - (\vec{b} + \vec{c})\big) = -2\vec{e} \cdot \vec{f} = -2ef\cos\varphi.$$

Считая угол φ между диагоналями (а не векторами, на них построенными) острым, запишем более удобную для нас формулу

$$|a^2 - b^2 + c^2 - d^2| = 2ef\cos\varphi. \tag{1}$$

Известно, что площадь S любого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} ef \sin\varphi. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) и основного тригонометрического тождества легко получаем:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}. \tag{3}$$

1. Решение вписанного четырехугольника

См. рис. 2.

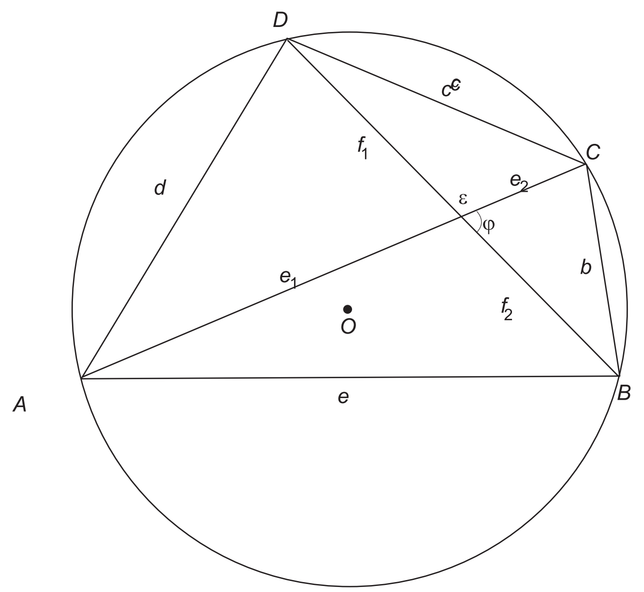

Рис. 2

а) Из треугольников ABC и ADC имеем соответственно по теореме косинусов:

$$\begin{cases} e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - D) = a^2 + b^2 + 2ab\cos D, \\ e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos D. \end{cases}$$

Исключая из данной системы уравнений $\cos D$, получим:

$$e^2(ab + cd) = c^2ab + d^2ab + a^2cd + b^2cd = ac(bc + ad) + bd(ad + bc) = (ad + bc)(ac + bd).$$

Следовательно,

$$e = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}. \tag{4}$$

Аналогично,

$$f = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}. \tag{5}$$

Из формул (4) и (5) сразу вытекает, что $ef = ac + bd$, что выражает классическую теорему Птолемея: произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.

б) Из подобия $\triangle AEB$ и $\triangle CED$ имеем: $e_1 = \frac{a}{c} f_1$. Из подобия $\triangle AED$ и $\triangle CEB$ имеем: $e_2 = \frac{c}{a} f_2$. Из очевидной системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a}{c} f_1 + \dfrac{c}{a} f_2 = e, \\ f_1 + f_2 = f \end{cases}$$

легко находим:

$$f_1 = \frac{c(ae - cf)}{(a+c)(a-c)}; \qquad f_2 = \frac{a(af - ce)}{(a+c)(a-c)}.$$

Но тогда

$$e_1 = \frac{a(af - ce)}{(a+c)(a-c)}; \qquad e_2 = \frac{c(af - ce)}{(a+c)(a-c)}.$$

Теперь выразим e_1 через стороны a, b, c, d:

$$e_1 = \frac{a}{(a+c)(a-c)} \left(a\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}} - c\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} \right) =$$

$$= \frac{a\sqrt{ac+bd}}{(a+c)(a-c)} \left(a\frac{\sqrt{ad+bc}}{\sqrt{ab+cd}} - c\frac{\sqrt{ab+cd}}{\sqrt{ad+bc}} \right) = ad\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}.$$

Аналогично:

$$e_2 = bc\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}; \quad f_1 = cd\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}; \quad f_2 = ab\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}.$$

в) Из треугольника ABD выражаем по теореме косинусов $\cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad}$. Нам проще и удобнее подсчитать $\operatorname{tg}^2 \dfrac{A}{2}$.

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{f^2 - (a-d)^2}{(a+d)^2 - f^2}.$$

С учетом формулы (5) получим:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{(ab+cd)(ac+bd) - (a-d)^2 \cdot (ad+bc)}{(a+d)^2 \cdot (ad+bc) - (ab+cd)(ac+bd)} = \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{(a+d)^2 - (b-c)^2} = \frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ — полупериметр четырехугольника. Аналогично,

$$\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} = \frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}, \qquad \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-d)}, \qquad \operatorname{tg}^2 \frac{D}{2} = \frac{(p-c)(p-d)}{(p-a)(p-b)}.$$

г) Из формул (1), (4) и (5) сразу выводим:

$$\cos\varphi = \frac{|a^2 - b^2 + c^2 - d^2|}{2(ac+bd)}.$$

д) Из формулы (3) и теоремы Птолемея имеем:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4(ac+bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2ac + 2bd + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(2ac + 2bd - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\big((a+c)^2 - (b-d)^2\big)\big((b+d)^2 - (a-c)^2\big)} =$$

$$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

е) Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 — площади треугольников AEB, BEC, CED, DEA соответственно. Из формул $S_1 = \frac{1}{2}e_1 f_2 \sin\varphi$ и $S = \frac{1}{2}ef\sin\varphi$ следует, что $S_1 = \frac{e_1 f_2}{ef}S$. Подставив сюда выражения e_1, f_2, e, f через стороны a, b, c, d, получим: $S_1 = \frac{a^2bd}{(ab+cd)(ad+bc)} \cdot S$. Аналогично

$$S_2 = \frac{b^2ac}{(ab+cd)(ad+bc)} \cdot S, \quad S_3 = \frac{c^2bd}{(ab+cd)(ad+bc)} \cdot S, \quad S_4 = \frac{d^2ac}{(ab+cd)(ad+bc)} \cdot S.$$

ж) Радиус описанной окружности четырехугольника R совпадает с радиусом окружности, описанной вокруг треугольника ABC (можно взять, конечно, и другой подходящий треугольник). Тогда $R = \frac{abe}{4(S_1+S_2)}$. Подставляя сюда выражения e, S_1, S_2 через стороны a, b, c, d, находим:

$$R = \frac{ab\sqrt{\dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}}{4ab \cdot \dfrac{ad+bc}{(ab+cd)(ad+bc)} \cdot S} = \frac{1}{4S}\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)^2 \cdot (ad+bc)^2}{(ab+cd)(ad+bc)^2}} =$$

$$= \frac{1}{4S}\sqrt{(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$$

2. Решение трапеции

См. рис. 3. Не умаляя общности, считаем для определенности, что a — большее основание трапеции ($a > c$).

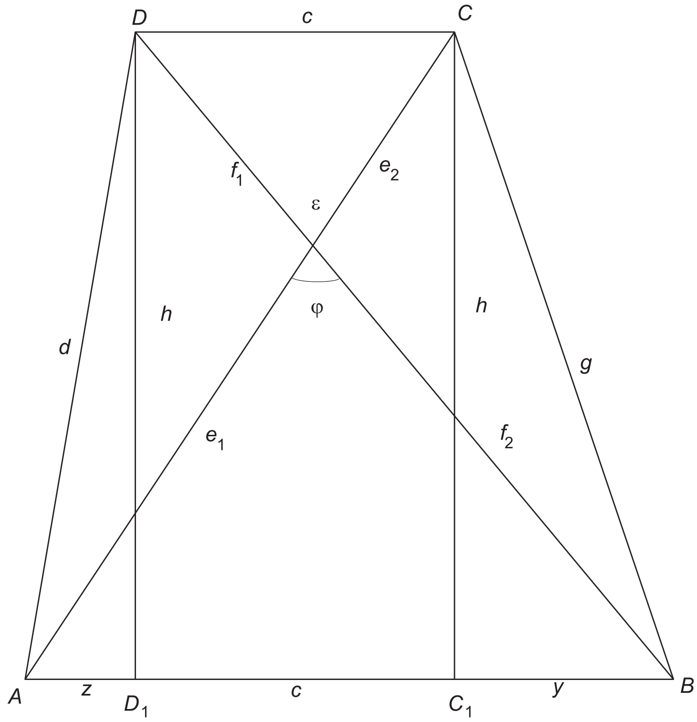

Рис. 3

а) Запишем теорему косинусов для треугольников BCD, BCA, BAD, CDA соответственно:

$$\begin{cases} f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C, \\ e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B, \\ f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A, \\ e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos D. \end{cases}$$

Учитывая, что $\cos C = -\cos B$ и $\cos D = -\cos A$, исключим из этих четырех равенств $\cos A, \cos B$. В результате получим систему двух уравнении, линейную относительно неизвестных e^2 и f^2:

$$\begin{cases} af^2 + ce^2 = a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2, \\ cf^2 + ae^2 = a^2c + d^2c + ac^2 + ad^2, \end{cases}$$

решение которой

$$\begin{cases} e^2 = ac + \frac{ad^2 - cb^2}{a-c}, \\ f^2 = ac + \frac{ab^2 - cd^2}{a-c}. \end{cases} \tag{6}$$

Сложив две последних формулы, придем к теореме: сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов её боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований:

$$e^2 + f^2 = 2ac + b^2 + d^2.$$

б) Из подобия треугольников AEB и DEC запишем пропорции

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{a}{c} \text{ и } \frac{f_1}{f_2} = \frac{c}{a}.$$

Кроме того, $e_1 + e_2 = e$ и $f_1 + f_2 = f$. Из этих уравнений легко получаем:

$$e_1 = \frac{ae}{a+c}, \qquad e_2 = \frac{ce}{a+c}, \qquad f_1 = \frac{cf}{a+c}, \qquad f_2 = \frac{af}{a+c}.$$

А диагонали e и f уже выражены через стороны a, b, c, d.

в) Проведем высоты трапеции $CC_1 = DD_1 = h$ и обозначим $AD_1 = x$ и $BC_1 = y$. Имеем очевидную систему уравнений:

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = d^2, \\ h^2 + y^2 = b^2, \\ x + y = a - c, \end{cases}$$

из которой сразу следует:

$$\begin{cases} x + y = a - c, \\ (y + x)(y - x) = b^2 - d^2 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x + y = a - c, \\ y - x = \dfrac{b^2 - d^2}{a - c}, \end{cases}$$

откуда

$$2x = (a - c) - \frac{b^2 - d^2}{a - c}. \tag{7}$$

Из треугольника ADD_1 выражаем

$$\cos A = \frac{x}{d} = \frac{(a-c)^2 - b^2 + d^2}{2d(a-c)},$$

Нам удобнее вычислить $\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}$:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{2d(a-c) - (a-c)^2 + b^2 - d^2}{2d(a-c) + (a-c)^2 - b^2 + d^2} =$$

$$= \frac{b^2 - (d - a + c)^2}{(d - a + c)^2 - b^2} = \frac{(b + d - a + c)(b - d + a - c)}{(d + a - c + b)(d + a - b - c)}.$$

Введя полупериметр $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, получим

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-a)(p-(c+d))}{(p-c)(p-(c+b))}.$$

Аналогично,

$$\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} = \frac{(p-a)(p-(c+b))}{(p-c)(p-(c+d))}.$$

Поскольку $\dfrac{D}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$ и $\dfrac{C}{2} = 90^\circ - \frac{B}{2}$, то очевидно, что:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{(p-c)(p-(c+d))}{(p-a)(p-(c+b))} \text{ и } \operatorname{tg}^2 \frac{D}{2} = \frac{(p-c)(p-(c+b))}{(p-a)(p-(c+d))}.$$

г) Из формул (1) и (6) сразу выводим:

$$\cos\varphi = \frac{|a^2+c^2-b^2-d^2|}{2\sqrt{\left(ac + \dfrac{ad^2-cb^2}{a-c}\right)\left(ac + \dfrac{ab^2-cd^2}{a-c}\right)}}.$$

д) Известно, что $S = \left(\dfrac{a+c}{2}\right) \cdot h$, где h — высота трапеции. Применим к треугольнику BCC_1 теорему Пифагора с учетом формулы (7). Эти вычисления ясны и приводят к такому результату:

$$S = \frac{a+c}{4(a-c)}\sqrt{2(b^2+d^2)\cdot(a-c)^2 - (b^2-d^2)^2 - (a-c)^4}. \tag{8}$$

Подкоренное выражение в формуле (8) можно разложить на множители, и формула (8) преобразуется:

$$S = \frac{a+c}{4(a-c)}\sqrt{(a-b-c+d)(-a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)}.$$

Введя полупериметр p, найдем:

$$S = \frac{a+c}{(a-c)}\sqrt{(p-a)(p-c)(p-(b+c))(p-(c+d))}. \tag{9}$$

Формула (9) не является симметрической функцией от a, b, c, d. Это и понятно, так как основания и боковые стороны трапеции неравноправны. Но эта формула имеет ясную структуру. От величины p в скобках вычитаются: одно основание, другое основание, меньшее основание вместе с одной боковой стороной, меньшее основание с другой боковой стороной. Положив в формуле (9) $c = 0$, получим формулу Герона, как и должно быть.

е) Наконец, пусть S_1, S_2, S_3, S_4 — площади треугольников AEB, BEC, CED, DEF соответственно. Их вычисление весьма прозрачно:

$$S_1 = \frac{1}{2}e_1 f_1 \sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2ef}{(a+c)^2}\sin\varphi = \frac{a^2}{(a+c)^2}\cdot S,$$
$$S_2 = \frac{1}{2}e_2 f_2 \sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{acef}{(a+c)^2}\sin\varphi = \frac{ac}{(a+c)^2}\cdot S,$$
$$S_3 = \frac{1}{2}e_2 f_1 \sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2ef}{(a+c)^2}\sin\varphi = \frac{c^2}{(a+c)^2}\cdot S,$$
$$S_4 = \frac{1}{2}e_1 f_1 \sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{acef}{(a+c)^2}\sin\varphi = \frac{ac}{(a+c)^2}\cdot S,$$

где $S = \dfrac{1}{2}ef\sin\varphi$ — площадь трапеции $ABCD$.

Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.

Обобщение и специализация свойств геометрических фигур при решении планиметрических задач

С. В. Жаров

Данная тема возникла на основе ряда лекций, прочитанных в разное время перед учителями и школьниками города Ярославля ученым-методистом профессором З.А. Скопецом, которому в 2017 году исполняется 100 лет со дня рождения. Как пример логического единства, рассматриваются задачи на взаимное расположение двух окружностей, при этом одна простая школьная задача является исходным материалом для множества более сложных примеров.

Имя широко известного ученого-геометра и методиста, автора многочисленных учебников для средней школы, профессора Захара Александровича (Залмана Алтеровича) Скопеца надолго остается в памяти многочисленных его учеников. Автору этой статьи также удалось прикоснуться к таланту этого великого учителя и под его руководством проработать более 10 лет на кафедре геометрии Ярославского государственного педагогического института (ныне университета). Вспоминаются многочисленные консультации как по темам курсовых и дипломной работ, так и по кандидатскому исследованию. Эти встречи нередко превращались в прогулки по городу, когда решались геометрические задачи, при этом прохожие немного удивлялись, всматриваясь в человека, что-то рукой проводящего перед собой и мысленно соединяющего точки или проводящего окружности.

Надо отметить интереснейшие открытые уроки З.А. Скопеца в школах города и области, где он тщательно апробировал авторские учебники по геометрии на учениках старших классов. Рядом всегда были его ученики-аспиранты по геометрии и методике преподавания математики. Это была большая геометрическая школа, известная по проведенным Школам алгебраической геометрии и выступлениям в московских вузах. Удивительно, когда вообще Захар Александрович отдыхал, он мог позвонить как около 12 ночи, так и в 7 утра, его работоспособность удивляет до сих пор. Даже когда совершали многочисленные поездки в поезде на московские семинары или по вопросам журнала “Математика в школе”, все время проводили в решении задач.

При кафедре работали два семинара, один из которых был методическим, где решались интересные школьные задачи. В память о великом учителе хотелось бы рассмотреть одну из многочисленных методических идей, связанную с геометрией двух окружностей.

Учение об окружности занимает большое место в элементарной геометрии. Со времен Евклида элементарная планиметрия рассматривалась как наука, изучающая прямые линии, окружности и простейшие фигуры вроде треугольников. З.А. Скопец всегда подчеркивал, что в геометрии всегда присутствует логическое единство, которое позволяет вместо одной сложной задачи решить десяток других задач, из которых исходная задача вытекает, как простое следствие.

Необходимо выделить следующий факт, что рассматриваемые ниже задачи тесно связаны с *проективной геометрией*; еще в 1852 году вышел “Трактат о высшей геометрии” М. Шаля, где изучалась геометрия конических сечений (кривых второго порядка). В данной работе можно увидеть евклидову интерпретацию известной теоремы Штурма: если три конических сечения имеют две общие точки, то другие три пары точек пересечения кривых образуют прямые, проходящие через одну точку. С точки зрения евклидовой геометрии общие хорды (или их продолжения) трех пересекающихся между собой окружностей проходят через одну точку.

Рассмотрим ряд на первый взгляд простых задач, которые связаны с геометрией двух окружностей, и показывают их логическую взаимосвязь.

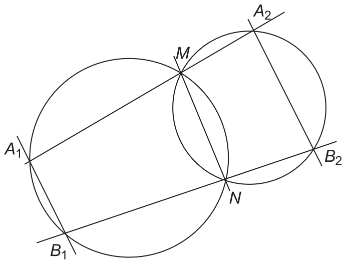

Рис. 1

Задача 1. Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и N. Через эти точки проведены две произвольные секущие (A_1A_2) и (B_1B_2). Доказать, что $(A_1B_1) \parallel (A_2B_2)$, рис. 1.

Это и есть основная тема всех задач. Доказательство — школьное, через углы: имеем два вписанных четырехугольника, поэтому суммы противоположных углов равны по 180°, тогда поскольку при точке М сумма углов равна 180°, то и сумма углов B_1A_1M и B_2A_2M равна 180°, т.е. прямые (A_1B_1) и (A_2B_2) параллельны. При этом положение исходных секущих на вывод задачи не влияет.

Задача 2. Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и N. Через эти точки проведены две параллельные секущие (A_1A_2) и (B_1B_2). Доказать, что длины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 равны: $|A_1B_1| = |A_2B_2|$, рис. 2.

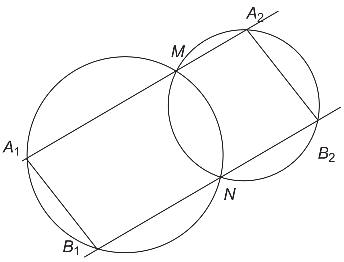

Рис. 2

Решение непосредственно вытекает из предыдущей задачи, но с учетом того, что четырехугольник $A_1A_2\ B_2B_1$ является еще и параллелограммом.

Задача 3. Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и N. Из точки S одной из окружностей проведены секущие SM и SN, которые пересекают вторую окружность соответственно в точках A и B. Доказать, что прямая AB параллельна касательной к окружности в точке S.

В данном случае имеем предельный переход задачи 1, если учесть, что точки A_2 и B_2 могут совпадать в одной точке S.

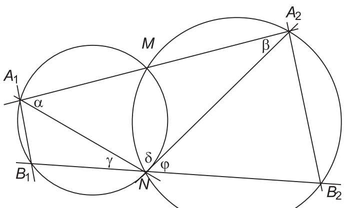

Рис. 3.

Задача 4. Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и N. Через эти точки проведены две произвольные секущие (A_1A_2) и (B_1B_2). Доказать, что если вращать отрезок A_1B_1 по первой окружности, сохраняя его длину $|A_1B_1| = d = \mathrm{const}$, то отрезок A_2B_2 также сохранит свою длину, рис. 3.

Так как углы α и β опираются на одну и ту же хорду MN, то их величины постоянны, значит и угол δ тоже постоянный. По условию задачи угол $\gamma = \mathrm{const}$, поэтому углу φ остается быть постоянным, а отсюда в свою очередь следует, что хорда $|A_2B_2| = \mathrm{const}$ независимо от положения хорды A_1B_1. Эта задача имеет очень красивый предельный случай, когда точки A_2 и B_2 сливаются в одну точку.

Задача 5. Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и N. Из точки S одной из окружностей проведены секущие SM и SN, которые пересекают вторую окружность соответственно в точках A и B. Найти множество середин хорд AB.

Если представить, что длина одной из данных хорд предыдущей задачи равна нулю, то отсюда непосредственно следует, что вторая хорда также имеет постоянную длину, значит, середины этих хорд описывают окружность, концентрическую данной, так как по известному свойству все хорды одной и той же длины находятся на равном расстоянии от центра окружности.

Задача 6. Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и N. Проведены две произвольные параллельные секущие (A_1B_1) и (A_2B_2). Доказать, что углы A_1MA_2 и B_1NB_2 равны, рис. 4.

В данном примере после небольшого дополнительного построения видно, что прямые A_2B_2 и CD параллельны между собой и прямой A_1B_1, поэтому из равенства дуг CA_1 и DB_1 следует равенство углов CMA_1 и DNB_1, а отсюда в свою очередь и равенство смежных углов.

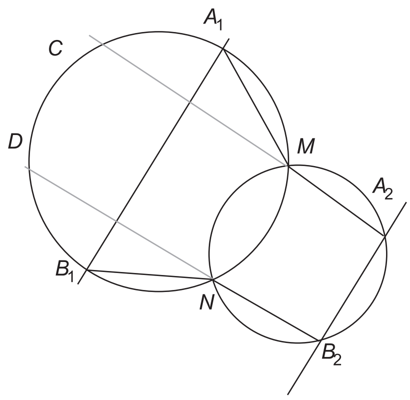

Рис. 4.

Данная задача имеет интересный частный случай, который можно рассматривать как отдельную задачу 7. Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и N. Проведены две произвольные параллельные касательные в точках A и B, принадлежащих разным окружностям. Доказать равенство углов AMB и ANB. Ход доказательства ясен из предыдущей задачи.

Если пару параллельных касательных задачи 7 представить в виде общей касательной двух окружностей, то получаем другой вариант этой задачи, которую можно сформулировать следующим образом в виде задачи 8: даны две окружности, пересекающиеся в точках M и N, проведена их общая касательная AB (A, B — точки касания). Доказать, что сумма углов AMB и ANB равна $180°$, рис. 5.

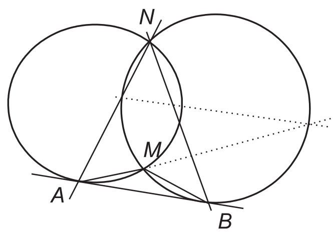

Рис. 5.

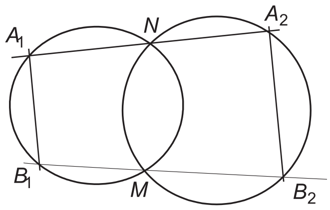

Рис. 6.

Если продолжить прямую AM до пересечения с окружностью, то сразу же увидим вариант задачи 1, а дальше и пару дополнительных углов исходной задачи. Интересное продолжение данная задача имеет в случае касания окружностей: точки A и B видны из точки касания под прямым углом!

Сформулированная последовательность задач уже является достаточно сильным аппаратом для решения многих планиметрических задач, связанных с окружностями. Необходимо отметить, что задача 1 имеет и другое продолжение, которое можно назвать обратной задачей 9: даны также две окружности, пересекающиеся в точках M и N, и через точку M проведена произвольная секущая (A_1A_2), в свою очередь через точки A_1 и A_2 проведены соответственно две параллельные хорды (A_1B_1) и (A_2B_2). Доказать, что прямая (B_1B_2) проходит через точку M (рис. 6).

Доказательство непосредственно следует из задачи 1, если применить известный метод от противного: провести прямую (B_1N), построить новую точку B_2' и получить противоречие с постулатом параллельных. Эту задачу можно назвать задачей о замыкании. Она имеет свое продолжение, если вместо двух окружностей рассмотреть более сложную конфигурацию из трех окружностей.

Задача 10. Даны три окружности, проходящие через одну и ту же точку M и пересекающиеся соответственно в точках N_{12}, N_{23} и N_{13}. На первой окружности взята произвольная точка X, проведена прямая (XN_{12}), пересекающая вторую окружность в точке Y. Далее через точку Y проводится прямая (YN_{23}), пересекающая третью окружность в точке Z. Требуется доказать, что точка N_{13} принадлежит прямой XZ, рис. 7.

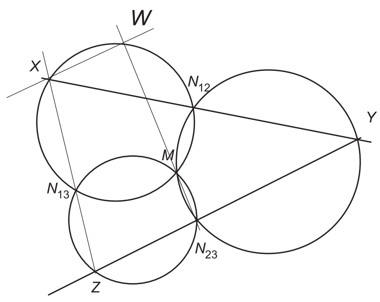

Рис. 7.

В данной задаче ее условие занимает больше места, чем само доказательство. Проводим прямую (MN_{23}) до пересечения с первой окружностью в точке W. Совершенно ясно, что прямая (XW) параллельна прямой (YZ), и применяя предыдущую задачу 9 (о замыкании), получаем искомый результат, что точка N_{13} принадлежит прямой XZ. Представляет интерес обобщить данную задачу на большее количество окружностей.

Подобное обобщение уже относится к применению индукции в геометрии и изучению закономерностей взаимного расположения геометрических фигур.

Последняя задача является основой для известной конфигурации, известной в планиметрии, как прямая Симсона. Сама формулировка на первый взгляд не имеет ничего общего с предыдущими задачами.

Задача 11. Произвольный треугольник ABC вписан в окружность. Из точки P, лежащей на окружности, проведены высоты к прямым, содержащим стороны треугольника. Доказать, что основания высот принадлежат одной прямой (прямая Симсона), рис. 8.

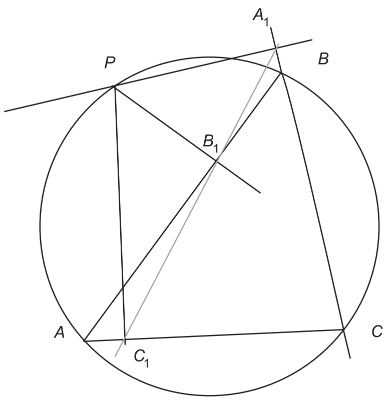

Рис. 8.

Данная геометрическая задача относится к достаточно трудным, но имея в распоряжении запас сведений из предыдущих задач, нетрудно усмотреть, что кроме данной окружности можно провести еще две: одну через точки P, A, C_1, B_1, а вторую — через точки P, C, B_1, A_1. Чтобы не загромождать рисунок, эти окружности проводить не будем, но предложим внимательному читателю это сделать и затем увидеть решение предыдущей задачи, но с другими обозначениями.

В заключение хотелось бы отметить, что на этом цепочка задач на две окружности не заканчивается, имеются еще несколько десятков задач, которые могут быть использованы как в школьной практике на факультативных занятиях, так и в вузовских занятиях с целью показать тесное геометрическое единство в преподавании геометрии. С величайшим мастерством геометрические тайны раскрывал в свое время выдающийся педагог профессор З.А. Скопец.

Продолжение данной темы наблюдается в двух направлениях. Первое относится к тому, что любые две окружности гомотетичны, а отсюда следует ряд задач на пропорциональность отрезков. Другое направление было предложено профессором З.А. Скопецом: вместо двух окружностей рассмотреть две параболы и тогда должна прослеживаться связь с *флаговой геометрией*[1]. Последнее направление является большой темой для отдельного исследования.

Литература

1. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1940. – 152 с.
2. Durel C.V. Elementary Geometry. – London: G. Bell&Sons, 1948. – 326 P.

Жаров Сергей Викторович,
доцент Ярославского
государственного педагогического
университета им. К.Д. Ушинского,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: szharv@rambler.ru

[1]Флаговая геометрия получается изменением одной из аксиом в аксиоматике Вейля евклидовой геометрии — *прим. ред.*

Опровержение одного алгоритма решения иррациональных уравнений, основанного на применении неравенства Коши

С. И. Калинин

В работе рассматриваются контрпримеры, которые опровергают корректность взятого из учебного пособия В.А. Далингера алгоритма решения некоторых иррациональных уравнений посредством неравенства Коши.

В недавно вышедшем учебном пособии В. А. Далингера [1] для студентов математических факультетов педагогических институтов и университетов, а также учителей математики школ, лицеев, гимназий на странице 78 обсуждается способ решения уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{q(x)} = g(x), \tag{1}$$

основанный на использовании неравенства Коши между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных величин. Из соображений удобства для читателя воспроизведем дословно данный способ.

“Сначала оценивают каждый арифметический корень левой части уравнения с учетом показателя степени корня, для чего подкоренное выражение представляют в виде произведения множителей, количество которых определяется показателем степени корня. Например,

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{f(x)\cdot 1} \le \frac{f(x)+1}{2}, \quad \sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x)\cdot 1} \le \frac{q(x)+1}{2}.$$

Затем складывают полученные оценки и записывают неравенство

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{q(x)} \le \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \dfrac{f(x)+1}{2} + \dfrac{q(x)+1}{2}$. Таким образом, получают систему

$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} + \sqrt{q(x)} = g(x), \\ \sqrt{f(x)} + \sqrt{q(x)} \le \varphi(x), \end{cases}$$

а из нее – неравенство $g(x) \le \varphi(x)$. Теперь остается определить, при каких x достигается равенство в соотношении $g(x) \le \varphi(x)$” [1, с. 78].

В качестве примера реализации воспроизведенного алгоритма автор пособия рассматривает задачу 94 [1, с. 78], которая звучит следующим образом: решите уравнение

$$\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} = x^2-x+2. \tag{2}$$

При ее решении сначала им оцениваются арифметические корни левой части уравнения (2) по неравенству Коши

$$\sqrt{x^2+x-1} = \sqrt{(x^2+x-1)\cdot 1} \le \frac{\left(x^2+x-1\right)+1}{2} = \frac{x^2+x}{2},$$

$$\sqrt{x-x^2+1} = \sqrt{(x-x^2+1)\cdot 1} \le \frac{\left(x-x^2+1\right)+1}{2} = \frac{x-x^2+2}{2},$$

после чего полученные неравенства складываются:

$$\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} \le \frac{x^2+x}{2} + \frac{x-x^2+2}{2} = \frac{2x+2}{2} = x+1.$$

“С учетом исходного уравнения” записывается система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} = x^2-x+2, \\ \sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} \le x+1. \end{cases}$$

Далее автор пишет: “Отсюда $x^2 - x + 2 \le x + 1$, или

$$x^2 - 2x + 1 \le 0 \Rightarrow (x-1)^2 \le 0.$$

Полученное неравенство при $x = 1$ превращается в равенство, следовательно, $x = 1$ является единственным решением уравнения” [1, с. 79].

Затем автором выписывается ответ, и более никакая работа с задачей не проводится. В частности, им не оговаривается сама возможность применения неравенства Коши при получении оценки

$$\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} \le x+1, \tag{3}$$

не находится область определения неизвестного в рассматриваемом уравнении, не производится и проверка найденного значения на предмет удовлетворения уравнению. Кстати, упоминаемая проверка подтверждает: $x = 1$ – корень уравнения (2).

Оставим на время уравнение (2) и обратимся к другому уравнению вида (1) из цитируемого учебного пособия – уравнению [1, с. 35, задача 26]

$$\sqrt{x^2+x-16} + \sqrt{x-x^2+16} = x^2 - 7x + 17. \tag{4}$$

Несмотря на то, что это уравнение в содержании пособия предшествует описанному алгоритму решения уравнений вида (1), решается оно именно по данному алгоритму. Автор поступает так: сначала он получает оценки по неравенству Коши

$$\sqrt{x^2+x-16} = \sqrt{(x^2+x-16)\cdot 1} \le \frac{(x^2+x-16)+1}{2} = \frac{x^2+x-15}{2},$$

$$\sqrt{x-x^2+16} = \sqrt{(x-x^2+16)\cdot 1} \le \frac{(x-x^2+16)+1}{2} = \frac{x-x^2+17}{2},$$

которые позволяют записать оценку левой части уравнения (4):

$$\sqrt{x^2+x-16} + \sqrt{x-x^2+16} \le x+1.$$

Далее он пишет [1, с. 36]: “Значит, и правая часть исходного уравнения должна быть не больше $x + 1$, что дает неравенство $x^2 - 7x + 17 \le x + 1$, или $(x-4)^2 \le 0$, т. е. $x = 4$”.

Но давайте проверим, является ли в действительности $x = 4$ решением уравнения (4)? При подстановке данного значения в уравнение мы обнаруживаем, что оно уравнению не удовлетворяет. Таким образом, мы не можем заключать, что $x = 4$ — решение уравнения (4).

Рассмотрим еще пару уравнений, которые будем решать, следуя предлагаемому учебным пособием [1] алгоритму.

Задача 1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = x + 1 + \sqrt{2}. \tag{5}$$

“Решение” по алгоритму. Легко проверить, что уравнение (5) задано на отрезке $[-1; 2]$. На этом отрезке его левую часть оценим сверху по неравенству Коши так, как предписывает уже “обкатанный” алгоритм:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{(x+1)\cdot 1} + \sqrt{(2-x)\cdot 1} \le$$

$$\le \frac{(x+1)+1}{2} + \frac{(2-x)+1}{2} = \frac{5}{2}.$$

“С учетом исходного уравнения запишем систему”

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}=x+1+\sqrt{2}, \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}\le \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Отсюда имеем $x+1+\sqrt{2}\le\frac{5}{2}$, или $x\le\frac{3}{2}-\sqrt{2}$. "Полученное неравенство при" $x=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ "превращается в равенство, следовательно" $x=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ должно быть решением уравнения (5).

Мы сознательно много цитируем автора пособия [1], подчеркивая тем самым свое неукоснительное следование алгоритму, предложенному им.

Спросим себя, является ли значение $x=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$, принадлежащее, очевидно, отрезку $[-1;2]$, решением уравнения (5)? После его подстановки в уравнение имеем:

$$\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}+1}+\sqrt{2-\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)}=\frac{3}{2}-\sqrt{2}+1+\sqrt{2},\text{ или }\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{2}}=\frac{5}{2}.$$

Сравнение квадратов левой и правой частей последнего равенства дает соотношение $\sqrt{2\sqrt{2}-\frac{3}{4}}=\frac{13}{8}$, откуда получаем условие $2\sqrt{2}=\frac{169}{4}+\frac{3}{4}$.

Однако полученное числовое равенство не является верным (иррациональное число не может равняться рациональному).

Итак, найденное по "рецепту" значение $x=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ не является корнем уравнения (5)! Повторилась ситуация предыдущего уравнения (4). Подчеркнем, при решении уравнения (5) мы указали его область задания и в этой области действовали строго по алгоритму.

Рассмотрим еще одну задачу.

Задача 2. Решите уравнение

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{-x-1}=x^2. \tag{6}$$

"Решение". Уравнение (6) имеет вид (1), поэтому при его решении опять будем придерживаться рассмотренного алгоритма. Оценивая корни левой части уравнения по неравенству Коши и складывая получаемые неравенства, имеем оценку

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{-x-1}=\sqrt{(x-1)\cdot 1}+\sqrt{(-x-1)\cdot 1}\le$$
$$\le\frac{(x-1)+1}{2}+\frac{(-x-1)+1}{2}=0.$$

Отсюда заключаем, что для правой части уравнения (6) должно выполняться условие $x^2\le 0$. Согласно алгоритму можно делать вывод: значение $x=0$ есть корень уравнения (6).

Но можно ли в действительности сделать такой вывод? Подстановка значения $x=0$ в уравнение (6) показывает, что в точке $x=0$ уравнение (6) даже не определено. Более того, легко видеть, что областью определения неизвестного уравнения (6) является пустое множество, данное уравнение вообще бессмысленно решать.

Итак, рассматриваемый алгоритм помог нам найти корень уравнения (2), но он не сработал в отношении уравнений (4), (5) и (6). Где же допускалась ошибка в ходе решений уравнений (4)–(6)? Возникает также вопрос: корректно ли воспроизведенное из учебного пособия решение уравнения (2)? Ответ на эти вопросы лежит в основе анализа условий, при которых может применяться неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных величин при решении уравнений вида (1).

Напомним, неравенством Коши от 1821 г. между средним арифметическим $A_n=\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ и средним геометрическим $G_n=\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$ положительных чисел $a_1,\ldots,a_n$ называется неравенство

$$G_n\le A_n, \tag{7}$$

в котором равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = ... = a_n$.

Нетрудно видеть, что неравенство (7) справедливо и в случае, когда числа $a_1, ..., a_n$ будут неотрицательными.

Осмыслим сейчас внимательно использование неравенства Коши при решении приведенных уравнений. Начнем с уравнения (2).

При его решении сначала необходимо понять корректность оценки (3). Сделаем это в данном месте. Уравнение (2) задано на множестве, описываемом системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 \geq 0, \\ x - x^2 + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что областью задания уравнения (2) является отрезок $\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Следовательно, оценка (3) справедлива для x, принадлежащих найденному отрезку.

А когда в оценке (3) достигается равенство? Оно будет достигаться только тогда, когда неотрицательные величины $x^2 + x - 1$ и $x - x^2 + 1$ будут равны 1. Последнее, легко видеть, имеет место только при $x = 1$. Подчеркнем при этом, что точка $x = 1$ принадлежит промежутку $\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

Поскольку для правой части уравнения (2) оценка

$$x^2 - x + 2 \leq x + 1 \tag{8}$$

выполняется только при $x = 1$, то $x = 1$ – действительно единственный корень этого уравнения.

Подчеркнем еще раз: только при $x = 1$ обеспечивается выполнение оценок (8) и (3) одновременно, причем со знаком равенства. Именно это условие позволяет нам заключить, что $x = 1$ является единственным корнем уравнения (2).

Таким образом, автор учебного пособия [1] при решении уравнения (2) получает верный ответ, однако предложенное им решение является формальным.

Перейдем к уравнению (4). Область определения неизвестного этого уравнения – отрезок $\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2}\right]$. Осмыслим на данном отрезке выше полученную оценку

$$\sqrt{x^2 + x - 16} + \sqrt{x - x^2 + 16} \leq x + 1 \tag{9}$$

левой части уравнения по неравенству Коши на предмет достижения в ней равенства. Равенство в (9) будет достигаться только при условии

$$\begin{cases} x^2 + x - 16 = 1, \\ x - x^2 + 16 = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Но нетрудно убедиться в том, что система (10) решений не имеет, значит, оценка (9) на отрезке $\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2}\right]$ будет строгой.

Следовательно, искомые решения должны удовлетворять условию $x^2 - 7x + 17 < x + 1$, или $(x - 4)^2 < 0$, что на отрезке $\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2}\right]$ невозможно. Таким образом, уравнение (4) решений не имеет.

На самом деле уравнения (2) и (4) можно решить без всякого обращения к тому алгоритму, что помещается в пособии [1, с. 78]. Это можно сделать на основе метода отделяющей функции, описанного, например, в учебном пособии [2, с. 23]: если на множестве X, справедливы неравенства

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x), \tag{11}$$

то уравнение $f(x) = g(x)$ на множестве X равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ g(x) = \varphi(x). \end{cases}$$

Если хотя бы одно из неравенств в (11) строгое, то уравнение $f(x) = g(x)$ на множестве X корней не имеет. Функция $\varphi(x)$ и есть *отделяющая* функция.

Оценка левой части каждого из уравнений (2), (4) по неравенству Коши позволяет определить отделяющую функцию $\varphi(x) = x + 1$ для этих уравнений. Для уравнения (2) на отрезке $\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ будет справедливо двойное неравенство

$$\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} \le x + 1 \le x^2 - x + 2,$$

а для уравнения (4) на отрезке $\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2}\right]$ – неравенство

$$\sqrt{x^2 + x - 16} + \sqrt{x - x^2 + 16} \le x + 1 \le x^2 - 7x + 17. \tag{12}$$

Следовательно, уравнение (2) на отрезке $\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x + 1, \\ x^2 - x + 2 = x + 1, \end{cases}$$

или системе

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = 1, \\ x - x^2 + 1 = 1, \\ x^2 - x + 2 = x + 1. \end{cases} \tag{13}$$

Про уравнение (4) сразу можно сказать, что оно решений не имеет, поскольку в (12) левое неравенство в действительности является строгим (это мы показали выше).

Решая систему (13), находим единственный корень уравнения (2).

Что касается уравнения (5), то заметим следующее. Применение неравенства Коши при получении оценки $\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} \le \frac{5}{2}$ его левой части не обеспечивает нахождение отделяющей функции (константа $\frac{5}{2}$ не будет отделяющей). Заметим, к тому же, что данная оценка будет в области задания уравнения строгой. Следовательно, для искомых решений x уравнения (5) должно выполняться условие $x + 1 + \sqrt{2} < \frac{5}{2}$.

Таким образом, в отношении уравнения (5) метод неравенства Коши не является эффективным, следует искать иной способ его решения. Адресуем читателю задание самостоятельного поиска такого способа.

И в заключение в назидание студентам и школьникам, активно изучающим учебную литературу, позволим себе заметить, как важно информацию поглощать неформально! Как важно математику изучать доказательно!

Литература

1. Далингер В.А. Классические неравенства и решение задач с их использованием: учебное пособие. – Омск: Изд-во “Амфора”, 2013. – 132 с.

2. Чучаев И.И. Нестандартные (функциональные) приемы решения уравнений: Учеб. пособие. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2001. – 168 с.

Калинин Сергей Иванович,
профессор кафедры фундаментальной
и компьютерной математики Вятского
государственного университета,
доктор педагогических наук.

E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Метод математической индукции. Статья 1. Возможности и ограничения метода математической индукции

С. В. Костин

В статье отмечается, что при преподавании математики необходимо обращать внимание школьников и студентов не только на сильные, но и на слабые стороны изучаемых методов и приемов. Обсуждаются возможности и ограничения метода математической индукции при решении задач о делимости целых чисел.

Как специалисты в области методики преподавания математики, так и педагоги-практики неоднократно отмечали тот факт, что в процессе обучения школьников и студентов математике значительно полезнее решить одну задачу несколькими разными способами, чем решить одним способом несколько однотипных задач. Тщательный разбор и анализ нескольких, иногда принципиально различных, решений одной и той же задачи расширяет кругозор учащихся, показывает им красоту и внутреннее единство математики, помогает глубже понять возможности различных математических методов и подходов и точнее представить себе тот круг задач, при решении которых, как можно ожидать, именно данный метод окажется более эффективным, чем все остальные методы.

Одним из чрезвычайно эффективных инструментов решения самых разнообразных математических задач и доказательства самых разнообразных математических утверждений является метод математической индукции. Этот метод хорошо зарекомендовал себя и успешно применяется для доказательства тождеств (скажем, для доказательства хорошо известной формулы для суммы квадратов всех натуральных чисел от 1 до n), для доказательства неравенств (скажем, для доказательства очень важного и часто используемого в математике неравенства Бернулли), для доказательства формулы общего члена рекуррентно заданной последовательности (скажем, для доказательства формулы Бине для общего члена последовательности Фибоначчи) и т. д.

Одной из важных сфер применения метода математической индукции являются разнообразные задачи на доказательство делимости целых чисел. Приведем здесь в качестве примера несколько достаточно типичных задач (если относительно n ничего не сказано, то это означает, что $n \in \mathbb{N}$; если написано $n \geqslant n_0$, то это означает, что утверждение надо доказать при $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant n_0$).

Задача 1. Доказать, что при всех n число $x_n = 12^{2n-1} + 11^{n+1}$ делится нацело на число $y = 133$.

Задача 2. Доказать, что при всех n число $x_n = (a+1)^{2n-1} + a^{n+1}$ делится нацело на число $y = a^2 + a + 1$ (здесь a — произвольное целое число).

Задача 3. Доказать, что при всех n число $x_n = 11^n + 4^{2n} + 50n$ заканчивается на группу цифр $\ldots 77$.

Задача 4. Доказать, что при всех $n \geqslant 0$ число $x_n = 2^{3^n} + 1$ делится нацело на число $y_n = 3^{n+1}$.

Задача 5. Доказать, что при всех $n \geqslant 0$ число $x_n = 54\,\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ раз}}\,9$ делится нацело на число $y = 61$.

Все эти пять задач достаточно легко могут быть решены с помощью метода математической индукции.

Задача 1 относится, по нашим наблюдениям, к числу наиболее популярных задач у авторов книг и пособий по математике. Она приводится если не во всех, то во всяком случае в очень многих книгах, в которых речь идет о методе математической индукции. Однако важно понимать, что задача 1 является частным случаем (при $a = 11$) значительно более общей задачи 2. При других значениях параметра a из задачи 2 можно получить другие, также достаточно интересные задачи. Например, при $a = 8$ из задачи 2 получается следующая задача:

Задача 1′. Доказать, что при всех n число $x_n = 9^{2n-1} + 8^{n+1}$ делится нацело на число $y = 73$.

Задача 3 была составлена автором специально для данной статьи. Ее можно переформулировать следующим образом:

Задача 3′. Доказать, что при всех n число $x_n = 11^n + 4^{2n} + 50n - 77$ делится нацело на число $y = 100$.

Задача 3′ является достаточно типичной задачей на делимость и может быть решена с помощью метода математической индукции.

Задачи 4 и 5 также несложно решить с помощью метода математической индукции. База индукции (то есть справедливость утверждений при $n = 0$) проверяется непосредственно, а шаг индукции основан на следующих выкладках:

$$x_{n+1} = 2^{3^{n+1}} + 1 = 2^{3^n \cdot 3} + 1 = (2^{3^n})^3 + 1 = (2^{3^n} + 1)\left[(2^{3^n})^2 - 2^{3^n} + 1\right] = x_n\left[x_n^2 - 3 \cdot 2^{3^n}\right]$$

(отсюда следует, что если $x_n \,\vdots\, 3^{n+1}$, то $x_{n+1} \,\vdots\, 3^{n+2}$) и

$$x_{n+1} = 54\underbrace{22\ldots2}_{n+1 \text{ раз}}9 = 54\underbrace{22\ldots2}_{n \text{ раз}}29 = 54\underbrace{22\ldots2}_{n \text{ раз}}90 - 61 = 10x_n - 61$$

(отсюда следует, что если $x_n \,\vdots\, 61$, то $x_{n+1} \,\vdots\, 61$).

Человеку, прорешавшему с помощью метода математической индукции много однотипных задач на делимость целых чисел (а в некоторых задачниках, к сожалению, приводятся подборки именно однотипных, похожих одна на другую как две капли воды, задач), может показаться, что метод математической индукции всегда является высокоэффективным и всегда быстро приводит к желаемому результату. Однако это не так. Возможности метода математической индукции, к сожалению, далеко не безграничны, и этот факт, по нашему мнению, не следует утаивать от учащихся, а наоборот, надо вместе с ними рассмотреть также задачи, при решении которых метод математической индукции оказывается малоэффективным или совершенно неэффективным. Хорошим примером, по нашему мнению, здесь может служить следующая задача.

Задача. Доказать, что при всех $n \in \mathbb{N}$ число $x_n = (a+b+c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1}$ делится нацело на число $y = (a+b)(a+c)(b+c)$ (здесь a, b, c — произвольные целые числа, сумма любых двух из которых не равна нулю).

Наиболее естественное для математика решение этой задачи получается, если считать известными определенные сведения из области теории многочленов от нескольких переменных, а именно, если считать известными следующие три утверждения (для простоты мы формулируем утверждения для многочленов от трех переменных):

Утверждение 1. Если многочлен[1] $\mathcal{P}(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ обращается в нуль в каждой точке пространства $\mathbb{Q}^3$, в которой обращается в нуль линейный многочлен $\mathcal{R}(X_1,\ X_2,\ X_3) = k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 + l$ (здесь $k_1,\ k_2,\ k_3,\ l \in \mathbb{Q}$, $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 > 0$), то многочлен $\mathcal{P}(X_1,\ X_2,\ X_3)$ делится на многочлен $\mathcal{R}(X_1,\ X_2,\ X_3)$ в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$.

Утверждение 2. Если многочлен $\mathcal{P}(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на попарно взаимно простые многочлены $\mathcal{R}_1(X_1,\ X_2,\ X_3)$, $\mathcal{R}_2(X_1,\ X_2,\ X_3)$, $\ldots$,

[1] В нашей статье для того, чтобы более четко отделить многочлены от других математических объектов, мы обозначаем многочлены рукописным шрифтом.

$\mathcal{R}_s(X_1,\ X_2,\ X_3)$, то многочлен $\mathcal{P}(X_1,\ X_2,\ X_3)$ делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на произведение

$$\mathcal{R}(X_1,\ X_2,\ X_3) = \mathcal{R}_1(X_1,\ X_2,\ X_3)\,\mathcal{R}_2(X_1,\ X_2,\ X_3)\,\ldots\,\mathcal{R}_s(X_1,\ X_2,\ X_3) \tag{1}$$

этих многочленов.

Утверждение 3. Если многочлен $\mathcal{P}(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Z}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на примитивный многочлен $\mathcal{R}(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Z}[X_1,\ X_2,\ X_3]$, то частное $\mathcal{U}(X_1,\ X_2,\ X_3)$ лежит в $\mathbb{Z}[X_1,\ X_2,\ X_3]$. (Многочлен $\mathcal{R}(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Z}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ называется *примитивным*, если его коэффициенты в совокупности взаимно просты.)

Утверждение 1 доказано, например, в книге [1] (см. лемму 2 на стр. 434). Несколько более подробно это доказательство изложено в книге [2] (см. теорему 6 на стр. 82).

Утверждение 2 является следствием того, что кольцо $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ факториально (см., например, [3], следствие 2 на стр. 121).

Утверждение 3 может быть доказано с помощью так называемой леммы Гаусса (см., например, [3], лемма 1 на стр. 120).

Считая утверждения 1, 2, 3 известными, переходим непосредственно к решению задачи.

Решение 1. Рассмотрим следующие многочлены в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$:

$$\mathcal{P}(X_1,\ X_2,\ X_3) = (X_1 + X_2 + X_3)^{2n-1} - X_1^{2n-1} - X_2^{2n-1} - X_3^{2n-1}, \tag{2}$$

$$\mathcal{R}_1(X_1,\ X_2,\ X_3) = X_1 + X_2, \tag{3}$$

$$\mathcal{R}_2(X_1,\ X_2,\ X_3) = X_1 + X_3, \tag{4}$$

$$\mathcal{R}_3(X_1,\ X_2,\ X_3) = X_2 + X_3. \tag{5}$$

Линейный многочлен $\mathcal{R}_1$ обращается в нуль в точках $\langle\alpha,\ -\alpha,\ \beta\rangle \in \mathbb{Q}^3$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$). В этих точках, как легко видеть, обращается в нуль и многочлен $\mathcal{P}$. Следовательно, согласно утверждению 1, многочлен $\mathcal{P}$ делится на многочлен $\mathcal{R}_1$ в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$. Аналогично доказывается, что многочлен $\mathcal{P}$ делится на многочлены $\mathcal{R}_2$ и $\mathcal{R}_3$ в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$.

Линейные многочлены $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ являются попарно взаимно простыми. Поскольку многочлен $\mathcal{P}$ делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на каждый из многочленов $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, то, согласно утверждению 2, он делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на произведение этих многочленов, то есть на многочлен

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X_1,\ X_2,\ X_3) &= \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 = (X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3) = \\ &= X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2^2X_1 + X_2^2X_3 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + 2X_1X_2X_3.\end{aligned} \tag{6}$$

Многочлен $\mathcal{P}$ делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на многочлен $\mathcal{R}$. Поскольку многочлен $\mathcal{P}$ — это многочлен с целыми коэффициентами, а многочлен $\mathcal{R}$ — это примитивный многочлен с целыми коэффициентами, то из утверждения 3 следует, что частное $\mathcal{U}$ — это многочлен с целыми коэффициентами.

Заменим в равенстве $\mathcal{P}(X_1,\ X_2,\ X_3) = \mathcal{R}(X_1,\ X_2,\ X_3)\,\mathcal{U}(X_1,\ X_2,\ X_3)$ переменную X_1 на целое число a, переменную X_2 на целое число b, а переменную X_3 на целое число c. В результате мы получим равенство

$$(a + b + c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1} = (a + b)(a + c)(b + c)\mathcal{U}(a,\ b,\ c). \tag{7}$$

Поскольку $\mathcal{U}$ — многочлен с целыми коэффициентами, то число $\mathcal{U}(a,\ b,\ c)$ является целым числом. Следовательно, число $x_n = (a+b+c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1}$ делится нацело на число $y = (a + b)(a + c)(b + c)$.

Утверждение задачи доказано. □

Как мы уже сказали выше, приведенное решение является, по-видимому, наиболее естественным для профессионального математика. Единственный недостаток этого решения заключается в том, что в нем существенно используются факты и утверждения из общей теории многочленов от нескольких переменных, а также факты и утверждения из общей теории колец, которые достаточно далеко выходят не только за рамки школьного курса математики, но и за рамки курса математики стандартного технического вуза.

Можно ли решить данную задачу, оставаясь в рамках известной из школы теории многочленов от одной переменной и используя лишь хорошо известное для таких многочленов следствие из теоремы Безу (о том, что если число x_0 является корнем многочлена $\mathcal{P}(X)$, то многочлен $\mathcal{P}(X)$ делится нацело на линейный многочлен $\mathcal{R}(X) = X - x_0$), а также тот факт, что если многочлен $\mathcal{P}(X)$ с целыми коэффициентами делится нацело на линейный многочлен $\mathcal{R}(X) = X - x_0$, где x_0 — целое число, то в частном снова получается многочлен с целыми коэффициентами?

Да, можно. Соответствующее решение весьма поучительно и заслуживает, по нашему мнению, очень тщательного разбора на занятии с учащимися. Приведем это решение (его можно найти, например, в книге [4] на стр. 129–131).

В этом решении нам понадобятся следующие два хорошо известных учащимся (как школьникам, так и студентам) утверждения.

Утверждение 4. Для любых x, $y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, имеют место равенства:

(4а) $x^k - y^k = (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + x^{k-3}y^2 + \ldots + y^{k-1})$;

(4б) $x^{2k-1} + y^{2k-1} = (x+y)(x^{2k-2} - x^{2k-3}y + x^{2k-4}y^2 - \ldots + y^{2k-2})$.

Утверждение 5. Если $\mathcal{P}(X)$ — многочлен с целыми коэффициентами и целое число x_0 является корнем многочлена $\mathcal{P}(X)$, то существует многочлен с целыми коэффициентами $\mathcal{R}(X)$ такой, что $\mathcal{P}(X) = (X - x_0)\mathcal{R}(X)$.

После этого краткого напоминания приступаем непосредственно к решению задачи.

Решение 2.

Если $n = 1$, то $x_1 = 0$ и делимость $x_1 \,\vdots\, y$ имеет место.

Далее рассматриваем случай $n \geqslant 2$.

Необходимо по-отдельности рассмотреть два случая: случай, когда все три целых числа a, b, c равны друг другу и случай, когда хотя бы два из этих чисел различны.

Случай 1. Все три числа a, b, c равны друг другу: $a = b = c \neq 0$.

Имеем:

$$x_n = (a+a+a)^{2n-1} - a^{2n-1} - a^{2n-1} - a^{2n-1} = (3a)^{2n-1} - 3a^{2n-1} =$$

$$= 3a^{2n-1}(3^{2n-2} - 1) = 3a^{2n-1}[(3^2)^{n-1} - 1] = 3a^{2n-1}[9^{n-1} - 1^{n-1}]; \tag{8}$$

$$y = (a+a)(a+a)(a+a) = (2a)^3 = 8a^3. \tag{9}$$

Разность $9^{n-1} - 1^{n-1}$ делится на $9 - 1 = 8$ (это вытекает из утверждения 4а), а число a^{2n-1} делится на a^3. Поэтому число x_n делится на y.

Рассмотрение случая 1 закончено.

Случай 2. Хотя бы два из чисел a, b, c различны. Не ограничивая общности, можно считать, что $b \neq c$.

Рассмотрим следующий многочлен от одной переменной X:

$$\mathcal{P}(X) = (X+b+c)^{2n-1} - X^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1}. \tag{10}$$

Применим утверждение 4а к разности $(X+b+c)^{2n-1} - X^{2n-1}$, а утверждение 4б к сумме $b^{2n-1} + c^{2n-1}$. В результате получим, что $(X+b+c)^{2n-1} - X^{2n-1} = (b+c)\mathcal{R}(X)$, где $\mathcal{R}(X)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами, а $b^{2n-1} + c^{2n-1} = (b+c)R$, где R — некоторое целое число. Итак,

$$\mathcal{P}(X) = (b+c)\mathcal{R}(X) - (b+c)R = (b+c)\mathcal{U}(X), \tag{11}$$

где $\mathcal{U}(X) = \mathcal{R}(X) - R$ — многочлен с целыми коэффициентами.

Число $x = -b$ является корнем многочлена $\mathcal{P}(X)$, а значит, и корнем многочлена $\mathcal{U}(X)$. Следовательно, согласно утверждению 5, $\mathcal{U}(X) = (X + b)\mathcal{U}_1(X)$, где $\mathcal{U}_1(X)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Итак,

$$\mathcal{P}(X) = (b + c)(X + b)\mathcal{U}_1(X). \tag{12}$$

Число $x = -c$ является корнем многочлена $\mathcal{P}(X)$, а значит, и корнем многочлена $\mathcal{U}_1(X)$. Следовательно, согласно утверждению 5, $\mathcal{U}_1(X) = (X + c)\mathcal{U}_2(X)$, где $\mathcal{U}_2(X)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Итак,

$$\mathcal{P}(X) = (b + c)(X + b)(X + c)\mathcal{U}_2(X). \tag{13}$$

Заменим в этом равенстве переменную X на число a. В результате мы получим равенство

$$(a + b + c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1} = (a + b)(a + c)(b + c)\mathcal{U}_2(a). \tag{14}$$

Поскольку $\mathcal{U}_2$ — многочлен с целыми коэффициентами, то число $\mathcal{U}_2(a)$ является целым числом. Следовательно, число $x_n = (a + b + c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1}$ делится нацело на число $y = (a + b)(a + c)(b + c)$.

Рассмотрение случая 2 закончено.

Утверждение задачи доказано. □

Мы привели два решения задачи. И первое, и второе решение основывалось на различных свойствах многочленов (в первом решении — многочленов от нескольких переменных, во втором решении — многочленов от одной переменной).

А что же метод математической индукции — можно ли его тоже каким-либо образом применить для решения рассматриваемой задачи?

Автор статьи долго размышлял над этим вопросом, прежде чем ему удалось наконец найти решение рассматриваемой задачи, основанное на методе математической индукции.

Сразу оговоримся, что это решение оказалось достаточно громоздким. Тем не менее, мы считаем полезным как с учебной, так и с методической точки зрения разобрать с учащимися и это решение. Наша цель здесь заключается в том, чтобы помочь учащимся как можно точнее и полнее осознать возможности и ограничения, достоинства и недостатки такого важного инструмента решения математических задач, каким является метод математической индукции.

Итак, мы переходим к третьему решению задачи, на этот раз, к решению, основанному на методе математической индукции.

Решение 3.

Символом $\mathcal{P}_n$ мы будем обозначать следующий симметрический многочлен от трех переменных X_1, X_2, X_3:

$$\mathcal{P}_n = X_1^n + X_2^n + X_3^n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{15}$$

(многочлен $\mathcal{P}_n$ называется *n-й степенной суммой от трех переменных*).

Лемма. При любых числах n, r, s таких, что $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}$, $r(n - 3) - s > 0$, имеет место следующее тождество:

$$\mathcal{P}_{rn-s} = \mathcal{P}_r\mathcal{P}_{r(n-1)-s} - \mathcal{M}_r\mathcal{P}_{r(n-2)-s} + \mathcal{N}_r\mathcal{P}_{r(n-3)-s}, \tag{16}$$

где $\mathcal{M}_r = X_1^rX_2^r + X_1^rX_3^r + X_2^rX_3^r$, $\mathcal{N}_r = X_1^rX_2^rX_3^r$.

Доказательство. Путем непосредственного раскрытия скобок и приведения подобных членов легко убедиться в справедливости следующего равенства:

$$X_1^{rn-s} = \mathcal{P}_rX_1^{r(n-1)-s} - \mathcal{M}_rX_1^{r(n-2)-s} + \mathcal{N}_rX_1^{r(n-3)-s}. \tag{17}$$

Складывая это равенство с аналогичными равенствами, которые получаются в результате замены переменной X_1 на переменную X_2 и на переменную X_3, получаем требуемое равенство.

Замечание. При $r = 1$, $s = 0$, $n \geqslant 3$, тождество (16) принимает следующий вид:

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_{n-1} - \mathcal{M}_1\mathcal{P}_{n-2} + \mathcal{N}_1\mathcal{P}_{n-3}, \tag{18}$$

где $\mathcal{P}_1 = X_1 + X_2 + X_3$, $\mathcal{M}_1 = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3$, $\mathcal{N}_1 = X_1X_2X_3$.

Формула (18) — это не что иное как известная *формула Ньютона для симметрических многочленов* от трех переменных (см., например, [3], стр. 117; [5], стр. 46). Входящие в эту формулу многочлены $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{N}_1$ (в литературе их часто обозначают символами σ_1, σ_2, σ_3) называются *элементарными симметрическими многочленами* от трех переменных.

Запишем тождество (16) при $r = 2$, $s = 1$, $n = k$, $k \geqslant 4$:

$$\mathcal{P}_{2k-1} = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_{2k-3} - \mathcal{M}_2\mathcal{P}_{2k-5} + \mathcal{N}_2\mathcal{P}_{2k-7}, \tag{19}$$

где $\mathcal{P}_2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$, $\mathcal{M}_2 = X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_3^2$, $\mathcal{N}_2 = X_1^2X_2^2X_3^2$.

Заменим в этом равенстве переменную X_1 на целое число a, переменную X_2 на целое число b, а переменную X_3 на целое число c. В результате мы получим равенство

$$P_{2k-1} = P_2P_{2k-3} - M_2P_{2k-5} + N_2P_{2k-7}, \tag{20}$$

где $P_n = a^n + b^n + c^n$ (в частности, $P_2 = a^2 + b^2 + c^2$), $M_2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$, $N_2 = a^2b^2c^2$.

Собственно, для дальнейшего решения задачи нам понадобится только формула (20), которую можно было бы доказать просто с помощью громоздкой выкладки (раскрыв все скобки и приведя подобные члены). Тем не менее, мы посчитали целесообразным вывести формулу (20) в несколько более общем контексте, заодно перекинув мостик от этой формулы к хорошо известной формуле Ньютона для симметрических многочленов.

Теперь мы переходим собственно к доказательству утверждения задачи с помощью метода математической индукции.

База индукции. При $n = 1, 2, 3$ утверждение задачи верно. Это проверяется непосредственно (автор данной статьи, чтобы самому не производить громоздкие выкладки, использовал пакет Maple):

1) если $n = 1$, то $x_1 = (a+b+c)^1 - a^1 - b^1 - c^1 = 0$ делится нацело на число $y = (a+b)(a+c)(b+c)$;

2) если $n = 2$, то $x_2 = (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(a+c)(b+c)$ делится нацело на число $y = (a+b)(a+c)(b+c)$;

3) если $n = 3$, то $x_3 = (a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 = 5(a+b)(a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$ делится нацело на число $y = (a+b)(a+c)(b+c)$.

Шаг индукции. Пусть $k \geqslant 4$. Предположим, что утверждение задачи верно при $n = k-1$, $n = k-2$, $n = k-3$, и докажем, что тогда утверждение задачи будет верно также при $n = k$. Имеем:

$$\begin{gathered}
x_k = (a+b+c)^{2k-1} - a^{2k-1} - b^{2k-1} - c^{2k-1} = (a+b+c)^{2k-1} - P_{2k-1} = \\
= (a+b+c)^{2k-1} - P_2P_{2k-3} + M_2P_{2k-5} - N_2P_{2k-7} = \\
= (a+b+c)^{2k-1} - P_2[(a+b+c)^{2k-3} - x_{k-1}] + \\
+ M_2[(a+b+c)^{2k-5} - x_{k-2}] - N_2[(a+b+c)^{2k-7} - x_{k-3}] = \\
= P_2x_{k-1} - M_2x_{k-2} + N_2x_{k-3} + \\
+ (a+b+c)^{2k-7}\{(a+b+c)^6 - P_2(a+b+c)^4 + M_2(a+b+c)^2 - N_2\}.
\end{gathered} \tag{21}$$

Числа x_{k-1}, x_{k-2}, x_{k-3} делятся нацело на число y по предположению индукции. Тот факт, что число x_k делится нацело на число y, будет доказан, если мы докажем, что ¡¡фигурная скобка¿¿ в последней строке формулы (21) делится нацело на y.

Это действительно так. Проще всего в этом убедиться с помощью какого-либо математического пакета (например, с помощью пакета Maple):

$$\{\ldots\} = (a+b+c)^6 - (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^4 +$$

$$+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)(a+b+c)^2-a^2b^2c^2=$$

$$=(a+b)(a+c)(b+c)(a+b+2c)(a+c+2b)(b+c+2a)\,\vdots\, y. \tag{22}$$

База индукции и шаг индукции доказаны. Итак, согласно принципу математической индукции, утверждение задачи верно при всех $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Обратим внимание на то, что в данном решении был использован несколько усложненный вариант метода математической индукции, когда для доказательства справедливости утверждения задачи при $n = k$ мы предполагали справедливость утверждения задачи при трех предыдущих значениях n ($n = k-1$, $n = k-2$ и $n = k-3$), а не только при $n = k-1$. (Этот вариант метода математической индукции называется *индукцией глубины 3*.)

Еще одна особенность этого решения заключается в привлечении вычислительной техники, без которой проведение выкладок стало бы чрезмерно утомительным.

Это еще раз говорит о том, что современный математик (как, впрочем, вообще любой современный исследователь) должен активно использовать весь арсенал доступных средств и способов решения задачи. Вычислительная техника, кстати, часто помогает не только произвести громоздкие и рутинные вычисления, но также помогает обнаружить важную закономерность, построить объект или конфигурацию с требуемыми свойствами, сконструировать контрпример к какому-либо утверждению.

Подводя итог нашей статьи, мы хотели бы отметить три обстоятельства. Во-первых, крайне важно, чтобы учащиеся владели различными модификациями метода математической индукции (например, встречаются задачи, в которых надо делать шаг индукции от $n = k-2$ к $n = k$; встречаются задачи, где используется возвратная индукция и т. д.). Во-вторых, при применении метода математической индукции крайне важно правильно сформулировать доказываемое утверждение. Встречаются ситуации, когда более сильное утверждение с помощью метода математической индукции доказывается проще, чем более слабое (так называемый “парадокс индукции”). В-третьих, и это, наверное, самое главное, крайне важно, чтобы учащиеся четко понимали, что метод математической индукции не всесилен, встречаются задачи, в которых он не приводит к цели или же приводит к неоправданному усложнению решения. Опыт, приобретаемый в процессе решения математических задач, а также математическая интуиция помогают понять, целесообразно или нет в данной задаче применять метод математической индукции.

Автор надеется, что данная статья заинтересовала читателей, и будет очень благодарен за любые комментарии или замечания по затронутым нами вопросам.

Литература

[1] Винберг Э.Б. Курс алгебры. — 2-е изд., стер. — М.: МЦНМО, 2013. — 590 с.

[2] Винберг Э.Б. Алгебра многочленов. — М.: Просвещение, 1980. — 174 с.

[3] Зуланке Р., Онищик А.Л. Алгебра и геометрия: В 3 т. Т. 1. Введение. — М.: МЦНМО, 2004. — 408 с.

[4] Волков Ю.В., Ермолаева Н.Н., Козынченко В.А., Курбатова Г.И. Практические занятия по алгебре. Комплексные числа, многочлены. — СПб.: Лань, 2014. — 192 с.

[5] Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2002. — 240 с.

Костин Сергей Вячеславович,
старший преподаватель кафедры высшей математики
Московского технологического университета (МИРЭА)
E-mail: kostinsv77@mail.ru

К определению системы комплексных чисел

С. В. Шведенко

В заметке обсуждаются некоторые логические тонкости определения системы комплексных чисел.

Система $\mathbb{C}$ *комплексных чисел* есть результат присоединения к системе $\mathbb{R}$ *действительных чисел* так называемой «мнимой единицы» i — дополнительного элемента с договоренностью оперировать с ним как с *действительной переменной*, но с учетом соотношения $i^2 = -1$. В ходе *сложений* и *перемножений* элемента i и действительных чисел возникают сочетания вида[1] $a+bi$, т. е. «многочлены» *не выше первой степени* (относительно i) со всевозможными действительными коэффициентами. Замечательное свойство этих «многочленов» состоит в том, что они обладают привычными атрибутами *чисел*: их можно *складывать, вычитать, перемножать и делить*[2], получая в результате «многочлены» такого же вида:

$$\begin{aligned}
&(a+bi) \pm (c+di) = a + bi \pm c \pm di = (a \pm c) + (b \pm d)i,\\
&(a+bi)(c+di) = ac + bic + adi + bidi = (ac - bd) + (ad + bc)i,\\
&\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac + bic - adi - bidi}{cc + dic - cdi - didi} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i
\end{aligned}$$

(*деление* в предположении $c+di \neq 0$, когда $c^2+d^2 \neq 0$).

Среди этих «многочленов» — а это и есть *комплексные числа*[3] — те из них, которые имеют *нулевую* степень, есть не что иное, как *действительные числа*, «многочлены» же $a+bi$ *первой* степени (с $b \neq 0$) получили название *мнимых чисел*, а их разновидности bi — *чисто мнимых*.

Данный подход к понятию *комплексного числа* вполне согласуется с мнением Гаусса[4] на этот счет, высказанным им в следующем фрагменте его публикации 1831 г. ([**1**], Bd. II, S. 102):

«Поле комплексных чисел $a+bi$ содержит:

I. Действительные числа, у которых $b=0$, и среди них, в зависимости от того, каково a,

1) нуль,

2) положительные числа,

3) отрицательные числа.

II. Мнимые числа, у которых $b \neq 0$. Здесь снова различают:

1) мнимые числа без действительной части, т. е. те, у которых $a=0$,

2) мнимые числа с действительной частью — у которых и $b \neq 0$, и $a \neq 0$.

Первые при желании можно называть чисто мнимыми числами, а вторые смешанными мнимыми числами».[5]

---

[1] С возможностью перестановки в них *слагаемых* и *сомножителей* и записью $a-bi$ вместо $a+(-b)i$.

[2] При сохранении привычных свойств этих операций (выполнении для них *аксиом поля*).

[3] В терминологии Гаусса, о чем чуть ниже.

[4] Gauss, Carl Friedrich, 1777–1855.

[5] В латинском оригинале:

«Campus numerorum complexorum $a+bi$ continet

I. numeros reales, ubi $b=0$, et, inter hos, pro indole ipsius a

1) cifram

2) numeros positivos

3) numeros negativos

II. numeros imaginarios, ubi b cifrae inaequalis. Hic iterum distinguuntur

1) numeri imaginarii absque parte reali, i. e. ubi $a=0$

2) numeri imaginarii cum parte reali, ubi neque b neque $a=0$.

Priores si placet numeri imaginarii puri, posteriores numeri imaginasrii mixti vocari possunt.»

Отчетливо видно, что Гаусс вовсе не противопоставлял *комплексные* числа *действительным*, но напротив, считал последние разновидностями первых.

На с. 12 своей монографии[6] [**2**] ирландский математик Га́мильтон[7] предложил следующую интерпретацию *комплексных чисел*:

«The more general expression of algebra, $a_1 + \sqrt{-1}a_2$, for any (so called) imaginary root of a quadratic or other equation, … interpreted as being a symbol of the number-couple which I had otherwise denoted by (a_1, a_2) , … its multiplication by another number-couple is expressed by the formula

$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1a_1 - b_2a_2, b_2a_1 + b_1a_2).\text{''}$$

В результате предложения Гамильтона широко распространилось определение *комплексных чисел* как *упорядоченных пар* действительных чисел с *умножением* по представленной формуле и покоординатным *сложением*. Формальную безупречность этого определения несколько портит возникающий при его принятии терминологический казус: поскольку (согласно Гауссу) *действительные* числа — это разновидности *комплексных* чисел, приходится делать не украшающий математику вывод: действительное число есть *пара* действительных чисел.

Литература

[**1**] Gauss C. F. Werke. Göttingen, 1863–1933.

[**2**] Hamilton W. R. Lectures on quaternions. London–Cambridge, 1853.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук

E-mail: sershvedenko@mail.ru

[6] В ней среди прочего впервые было внятно сформулировано понятие *вектора*.
[7] Hamilton, William Rowan, 1805–1865.

О содержании курса элементарной геометрии

А. М. Прерис

В статье указаны недостатки учебников (как старых, так и вышедших во время и после реформы математического образования) элементарной геометрии с точки зрения наполнения геометрическим материалом. Предлагается, с ориентацией на профессии, основанные на практической геометрии, — инженер, конструктор, архитектор, дизайнер и т.п. — ввести в основной курс элементы начертательной геометрии с использованием ортогональной проекции на различные плоскости. В качестве примера рассмотрены решения ряда стандартных задач стереометрии методом преобразования плоскостей проекции

Длительное время предмет геометрии изучался по учебнику А.П. Киселева. Изложение представленного в нем материала соответствовало уровню восприятия учащихся, что обеспечивало его успешное усвоение. Однако в 60–70 годы была проведена реформа системы образования в направлении повышения научного уровня подготовки школьников по математике, которая привела лишь к резкому падению уровня подготовки по математике в целом и, особенно, по геометрии. Поэтому с легкой руки академика В.И. Арнольда получила распространение идея: «Вернуться к Киселеву». Однако академик А.Н. Тихонов [1] и ряд других математиков, отмечая простоту, доходчивость и логичность изложения материала в учебнике геометрии А.П. Киселева, считают, что он по содержанию уже не соответствует требованиям современной школы. И действительно, просмотр его содержания показал, что в нем отсутствует необходимая с точки зрения логики геометрии информация по ряду вопросов. Просмотр содержания других созданных до реформы учебников показал, что все они содержат тот же *геометрический* материал, что и учебник А.П. Киселева, и отличаются от него лишь уровнем строгости изложения, расположением материала и рядом других непринципиальных особенностей. А сравнение их содержания с содержанием «Начал» Евклида [2] дало основание академику А.Д. Александрову [3] заметить, что все они представляют собой популярную переработку «Начал». Но и просмотр содержания созданных в соответствии с программой реформы учебников и учебных пособий показал, что они содержат тот же *геометрический* материал, что и дореформенные учебники. А их характерными особенностями стал неоправданно высокий научный уровень изложения, а также включение в них не мотивированных потребностями элементарной геометрии разделов векторного исчисления, аналитической геометрии, преобразования пространства и др., что оказалось несовместимым с уровнем восприятия школьников. Таким образом, *все школьные учебники содержат один и тот же геометрический материал* и поэтому с точки зрения содержания обладают одними и теми же недостатками.

Так, в их вводной части отсутствует определение геометрии как науки, а также определение формы и ее геометрической интерпретации, что имеет решающее значение для понимания этой науки. В разделе планиметрии отсутствует, за исключением окружности, информация о свойствах плоских кривых линий. А раздел стереометрии представлен лишь двумя фрагментами. В первом из них представлены формулировки общего характера о свойствах точек, прямых и плоскостей и их взаимном расположении в пространстве (пересечении, параллельности и перпендикулярности). Однако не содержится информации о том, как их использовать для решения метрических и позиционных задач с участием упомянутых геометрических объектов. Во втором фрагменте представлена информация о свойствах наиболее употребительных геометрических тел (призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара). В то же время отсутствует информация о свойствах пространственных кривых линий, а также поверхностей, которые являются основными формообразующими геометрическими объектами. Ведь все окружающие человека реальные объекты имеют ту или иную форму, которая представляет собой совокупность разнообразных поверхностей. А основной задачей геометрии, как декларируется, является изучение именно форм и их отношений.

Отсутствие в «Началах» перечисленной информации объясняется тем, что ко времени их создания в ней не было потребности и поэтому ее просто не существовало. Потребность в ней возникла примерно две тысячи лет спустя, когда возникновение и развитие промышленного способа производства потребовало предварительного создания конструкторских документов, в которых должно было содержаться описание формы изделия, а также другие необходимые для изготовления данные. Изделия представляют собой расположенные в пространстве трехмерные объекты. А наиболее информативным описанием форм трехмерных объектов является их изображение. Однако обычный рисунок для этого не годится, так как не позволяет рассматривать изделие с разных сторон. Кроме того, в процессе конструирования возникают задачи по определению геометрических свойств конструируемого изделия и его элементов (размеров, площадей, объемов и др.). Поэтому требуемое решение должно было содержать метод, позволяющий получать удовлетворяющие производство изображения изделий, а также решать возникающие в процессе конструирования пространственные задачи по определению их геометрических свойств.

Такое решение было предложено французским геометром Г. Монжем [4]. Это решение оказалось настолько удачным и своевременным, что практически с момента опубликования курс начертательной геометрии стал теоретической основой технического чертежа и обязательным предметом изучения во всех учебных заведениях технического профиля. Однако это создало начертательной геометрии ореол этакого побочного продукта настоящей геометрии, пригодного лишь для использования в технических приложениях, и как следствие, явилось причиной пренебрежения начертательной геометрией со стороны авторов различных руководств и школьных учебников по элементарной геометрии. К тому же, немалый вклад в пренебрежение начертательной геометрией внесло и тяжеловесное представление, которое требовало для ее освоения достаточно развитого уровня пространственного представления. В послевоенные годы проф. Н.Ф. Четверухин с коллегами переработали курс начертательной геометрии и представили его в доступном виде для пользователя, не обладающего высоким уровнем пространственного представления [5]. Однако этот факт остался не замеченным авторами послевоенных учебников школьной геометрии и курс элементарной геометрии по содержанию так и остался до наших дней на уровне «Начал» Евклида.

Г. Монж так формулирует задачи созданного им труда: «Начертательная геометрия преследует две цели: во-первых, дать методы для изображения на листе чертежа, имеющего только два измерения, а именно длину и ширину, любых тел природы, имеющих три измерения — длину, ширину и высоту, при условии, однако, что эти тела могут быть точно заданы. Во-вторых, дать способ на основании точного изображения определять формы тел и выводить все закономерности, вытекающие из их формы и их взаимного расположения».

Как следует из второй цели, задачей начертательной геометрии является исследование свойств геометрических объектов в пространстве. А в руководствах по элементарной геометрии и справочных изданиях, например, в Математическом энциклопедическом словаре, содержится следующее определение стереометрии: «...это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве». Из сравнения определений стереометрии и начертательной геометрии следует, что это одно и то же. Но, по-видимому, Г. Монж не знал термина «стереометрия» и назвал созданный им труд начертательной геометрией, что и привело в последующем к сложившейся ситуации. Тем не менее, Г. Монж ушел дальше, нежели создатели раздела стереометрии в курсах элементарной геометрии: в стереометрии, как об этом упоминалось, отсутствует механизм исследования свойств геометрических объектов в пространстве, а в начертательной геометрии он имеется. К тому же, этот механизм по своей идеологии является геометрическим, носит общий характер и является мощным средством развития пространственного представления, необходимого любому человеку, особенно специалисту технического профиля, архитектору, скульптору, модельеру, дизайнеру и др. К тому же, он прост в изучении и применении.

Сущность этого механизма в следующем.

Пусть в трехмерной прямоугольной системе координат задан некоторый объект (рис. 1). С помощью параллельной ортогональной проекции создадим его двухмерные изображения на плоскостях системы координат. Если сейчас изъять объект, то останется его трехкартинный пространственный чертеж (рис. 2). Он дает достаточно полное представление об объекте, однако неудобен для практического использования. Поэтому его преобразуют в плоский чертеж (рис. 3). Для этого пространственный чертеж мысленно разрезают вдоль оси y, затем горизонтальную плоскость проекций Π_1 поворачивают вокруг оси x вниз до совпадения с продолжением фронтальной плоскости проекций Π_2. А профильную плоскость проекций Π_3 поворачивают вокруг оси z вправо до совпадения с продолжением фронтальной плоскости проекций Π_2. В результате образуется плоское трехкартинное изображение, которое называется комплексным чертежом. На нем границы отсеков плоскостей пространственной системы координат показаны лишь для лучшего восприятия рассматриваемого метода. Поэтому в дальнейшем можно отказаться от их использования.

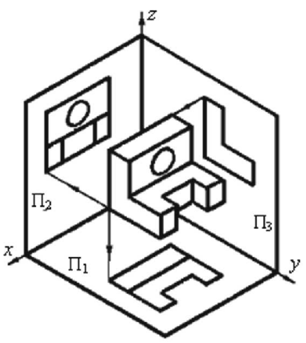

Рис. 1

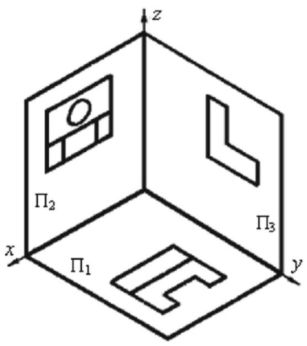

Рис. 2

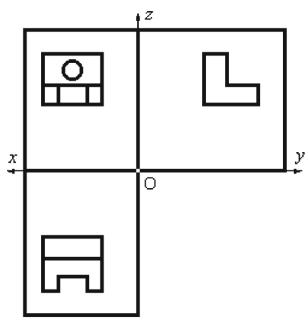

Рис. 3

Комплексный чертеж обладает малой наглядностью, однако этот недостаток легко устраняется в процессе изучения курса начертательной геометрии. В то же время метод начертательной геометрии обладает рядом достоинств, важнейшим из которых является возможность исследования свойств геометрических объектов в пространстве.

Идея решения стереометрических задач состоит в следующем. Если интересующий нас объект (отрезок прямой или отсек плоскости) не параллелен ни одной из координатных плоскостей, то он проецируется на них с искажением. Поэтому для определения их истинной величины достаточно перейти из заданной в такую же систему координат, в которой он будет параллельным какой-либо из координатных плоскостей. Этот переход осуществляется несложным преобразованием комплексного чертежа. В его основе лежит техника преобразования комплексного чертежа точки.

Пусть в системе плоскостей проекций Π_1, Π_2 задана точка А (рис. 4).

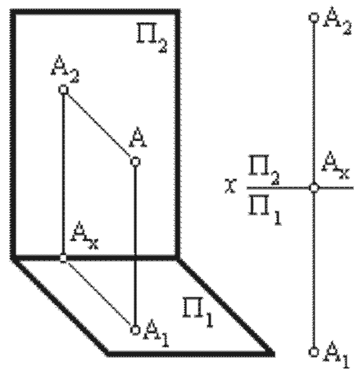

Рис. 4.

Введем произвольную, но перпендикулярную одной из исходных плоскостей проекций, например, плоскости Π_1, дополнительную плоскость проекций Π_4 (рис. 5). Спроецируем точку А на плоскость Π_4 и получим ее проекцию A_4. В результате пересечения дополнительной плоскости проекций Π_4 с плоскостью проекций Π_1 образуется новая координатная ось $s_{1,4}$. Повернем плоскости Π_2 и Π_4 соответственно вокруг осей x и $s_{1,4}$ до совмещения с плоскостью Π_1 и получим комбинированный комплексный чертеж точки А в системах плоскостей проекций Π_1, Π_2 и Π_1, Π_4. При этом заметим, что поскольку $\Pi_4 \perp \Pi_1$, то $A_4A_S = A_2A_X$. Из этого следует, что на комплексном чертеже необходимо провести новую координатную ось, из проекции точки, которая сохраняется, провести новую линию связи, перпендикулярную новой координатной оси, и отложить на ней от новой координатной оси расстояние, равное расстоянию от старой координатной оси до проекции точки, которая исключается.

Взаимное положение координатных осей x и $s_{1,4}$ не влияет на технику преобразования. А из этого следует, что новую координатную ось можно всегда ориентировать так, как это нужно для решения задачи.

Расстояние от проекции точки, которая сохраняется, до новой координатной оси также не влияет на технику преобразования. Из этого следует, что новую координатную ось можно проводить на произвольном расстоянии от проекции точки, которая сохраняется.

Если теперь исключить проекцию A_2 с ее линией связи с проекцией A_1 и координатную ось x, то мы получим комплексный чертеж точки А в системе плоскостей проекций Π_1, Π_4 (рис. 6). Таким образом, в результате проведенных операций осуществлен переход из системы координатных плоскостей Π_1, Π_2 в систему Π_1, Π_4 путем замены плоскости проекций Π_2 на плоскость Π_4, поэтому этот способ преобразования комплексного чертежа получил название способа замены плоскостей проекций.

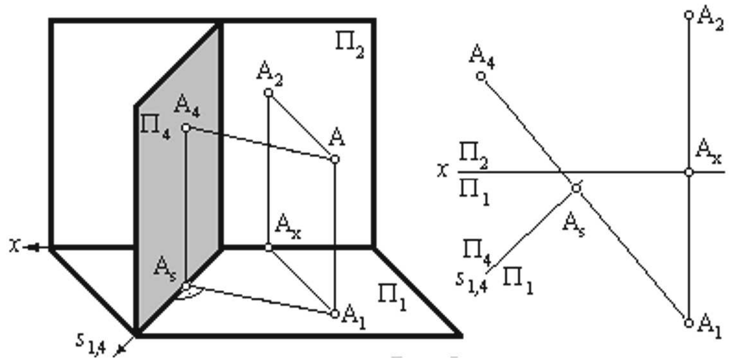

Рис. 5.

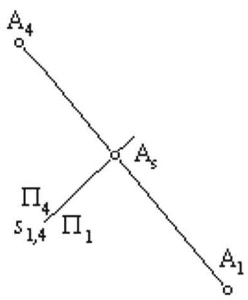

Рис. 6.

Очевидно, что для преобразования комплексного чертежа отрезка прямой достаточно преобразовать комплексный чертеж двух принадлежащих ему точек, а отсека плоскости — трех.

Теперь рассмотрим технику решения типовых задач.

1. Длина отрезка прямой

Пусть в системе плоскостей проекций Π_1, Π_2 задан отрезок общего положения AB (рис. 7). Необходимо определить его истинную величину.

Заданный отрезок проецируется на обе плоскости проекций с искажением. Поэтому для определения его истинной величины необходимо перейти в такую систему плоскостей проекций, в которой он будет по отношению к одной из них занимать положение линии уровня (то есть, будет ей параллельным). Поэтому введем дополнительную плоскость проекций Π_4, параллельную заданному отрезку и перпендикулярную, например, горизонтальной плоскости проекций Π_1. Спроецируем отрезок AB на плоскость Π_4. Теперь в системе плоскостей проекций Π_1, Π_4 отрезок AB занимает положение линии уровня по отношению к плоскости Π_4 и поэтому проекция A_4B_4 будет его истинной величиной. В результате пересечения плоскости Π_4 с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 образуется координатная ось $s_{1,4}$, параллельная горизонтальной проекции отрезка A_1B_1. Повернув последнюю вокруг координатной оси $s_{1,4}$ до совмещения с плоскостью Π_1, получим комплексный чертеж отрезка уровня в системе плоскостей проекций Π_1, Π_4 (рис. 8).

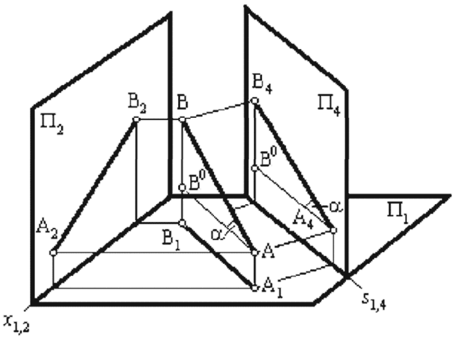

Рис. 7.

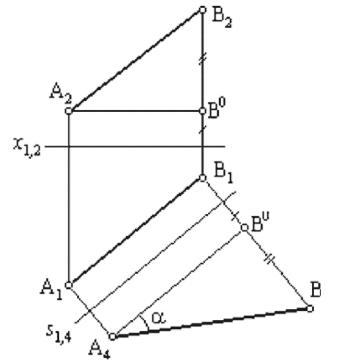

Рис. 8.

Для реализации этого плана на комплексном чертеже необходимо провести новую координатную ось $s_{1,4} \parallel A_1B_1$, преобразовать комплексные чертежи точек A и B, а затем соединить их проекции A_4 и B_4 отрезком прямой. Более того, в результате проведенного преобразования получен еще угол наклона α заданного отрезка к плоскости проекций Π_1.

Из рассмотренного, в частности, также следует, что для определения истинной величины отрезка достаточно построить прямоугольный треугольник, у которого одним катетом будет одна из его проекций, например, A_1B_1, а вторым — разность расстояний от другой плоскости проекций, в данном случае отрезок BB^0.

2. Расстояние от точки до прямой, между параллельными и скрещивающимися прямыми

Расстоянием от точки до прямой является перпендикуляр, опущенный из нее на прямую, а расстоянием между параллельными и скрещивающимися прямыми — их общий перпендикуляр. Эти расстояния будут проецироваться в истинную величину на ту плоскость проекций, которой перпендикулярна одна или обе прямые (рис. 9, 10, 11). Следовательно, для определения этих расстояний достаточно преобразовать комплексный чертеж так, чтобы в новой системе плоскостей проекций одна или обе прямые занимали проецирующее (перпендикулярное плоскости проекций) положение. Поэтому сначала рассмотрим порядок преобразования комплексного чертежа отрезка уровня в комплексный чертеж проецирующего отрезка.

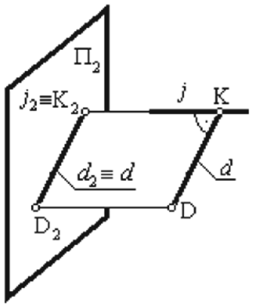

Рис. 9.

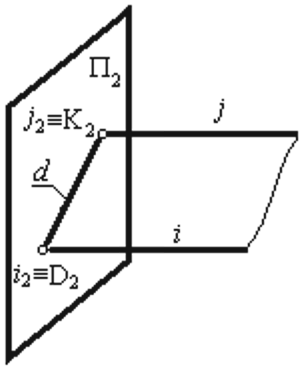

Рис. 10.

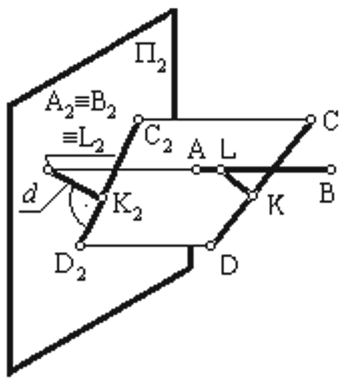

Рис. 11.

Пусть, например, в системе плоскостей проекций Π_1, Π_2 задан отрезок уровня AB, параллельный плоскости проекций Π_2 (рис. 12). Введем новую плоскость проекций Π_4, перпендикулярную плоскости проекций Π_2 и отрезку AB. Образуется новая координатная ось $s_{2,4}$, перпендикулярная фронтальной проекции отрезка A_2B_2. Следовательно, на комплексном чертеже (рис. 13) необходимо провести новую координатную ось $s_{2,4} \perp A_2B_2$ и преобразовать комплексные чертежи точек A и B.

Сразу преобразовать комплексный чертеж отрезка общего положения в комплексный чертеж проецирующего отрезка невозможно. Однако эту задачу можно решить последовательным двукратным преобразованием (рис. 14): на первом этапе комплексный чертеж отрезка общего положения преобразуется в комплексный чертеж отрезка уровня, а на втором этапе — комплексный чертеж отрезка уровня преобразуется в комплексный чертеж проецирующего отрезка.

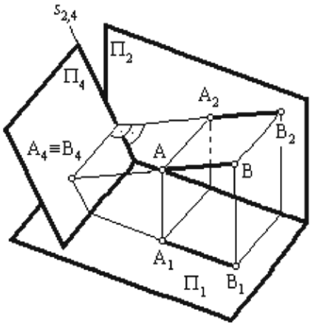

Рис. 12.

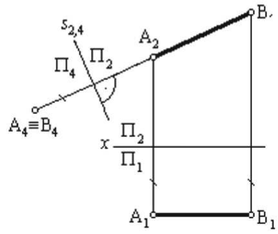

Рис. 13.

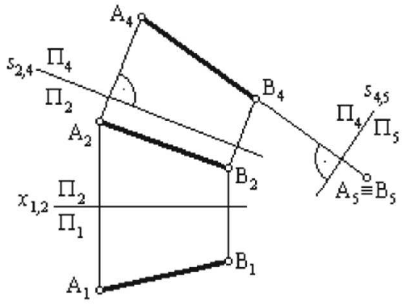

Рис. 14.

Пример определения расстояния от точки до отрезка прямой общего положения представлен на рис. 15, между двумя параллельными отрезками общего положения — на рис. 16, между скрещивающимися отрезками общего положения — на рис. 17.

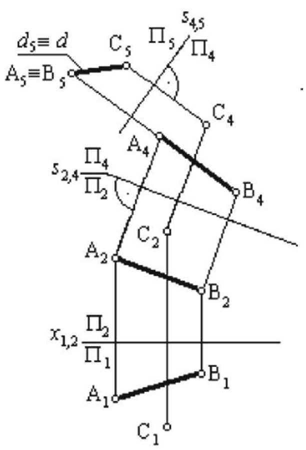

Рис. 15.

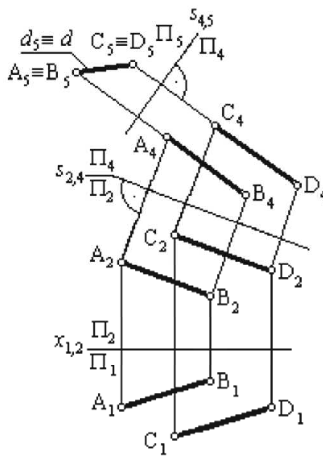

Рис. 16.

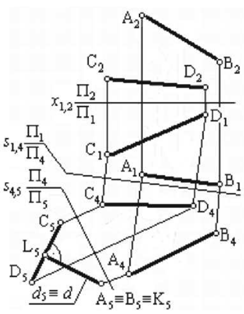

Рис. 17.

3. Перпендикулярные прямые

Построение перпендикуляра к прямой регламентируется теоремой о проецировании прямого угла: прямой угол проецируется в истинную величину и на ту плоскость проекций, которой параллельна хотя бы одна из его сторон (рис.18).

Пусть задан отрезок AB и фронтальная проекция B_2C_2 отрезка ВС, перпендикулярного отрезку AB (рис. 19). Необходимо построить горизонтальную проекцию B_1C_1 отрезка BC.

Из того, что фронтальная проекция A_2B_2 отрезка AB параллельна координатной оси x, заключаем, что отрезок AB является отрезком горизонтального уровня. Следовательно прямой угол должен проецироваться в истинную величину на горизонтальную плоскость проекций Π_1. Поэтому из точки B_1 под прямым углом к отрезку A_1B_1 (рис. 20) проведем прямую, а из точки C_2 — вертикальную линию связи. На их пересечении получим точку C_1. Соединим ее отрезком прямой с точкой B_1 и получим искомую проекцию B_1C_1 отрезка B_1C_1.

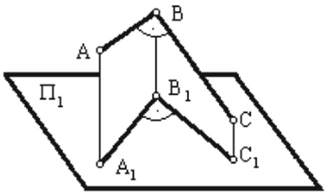

Рис. 18.

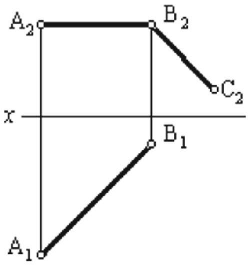

Рис. 19.

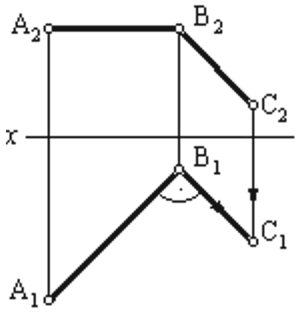

Рис. 20.

4. Параллельные прямые

Пусть задан отрезок общего положения AB и точка C (рис. 21). Необходимо построить прямую m, параллельную отрезку AB и проходящую через точку C.

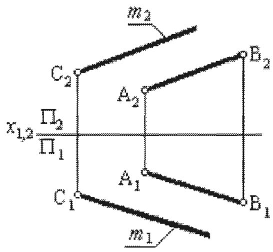

Рис. 21

Проекциями параллельных прямых являются параллельные прямые. Поэтому на комплексном чертеже достаточно через проекции C_1 и C_2 заданной точки провести прямые $m_1 \parallel A_1B_1$ и $m_2 \parallel$ $\parallel A_2B_2$.

5. Угол между пересекающимися прямыми

Две пересекающиеся прямые задают плоскость. Поэтому для определения угла между ними достаточно на каждой из прямых выбрать произвольную точку и соединить эти точки отрезком прямой. Образуется треугольный отсек плоскости. Если теперь определить его истинную величину, то тем самым определим и искомый угол. Порядок определения истинной величины отсека плоскости рассмотрен ниже.

6. Истинная величина отсека плоскости

Пусть задан треугольный отсек плоскости ABC (рис. 22), перпендикулярный плоскости проекций Π_1, но наклоненный под некоторым углом к плоскости проекций Π_2.

Заданный отсек плоскости проецируется на плоскость проекций Π_2 с искажением, а на плоскости проекций Π_1 вообще вырождается в отрезок прямой. Поэтому введем дополнительную плоскость проекций Π_4, параллельную заданному треугольнику и перпендикулярную плоскости Π_1. Спроецируем заданный треугольник на плоскость Π_4 и получим его истинную величину $A_4B_4C_4$.

В результате пересечения плоскостей Π_1 и Π_4 образуется новая координатная ось $s_{1,4}$, параллельная вырожденной проекции треугольника $A_1B_1C_1$. Поэтому на комплексном чертеже достаточно провести новую координатную ось $s_{1,4} \parallel A_1B_1C_1$, преобразовать комплексные чертежи точек A, B и C и соединить их проекции A_4, B_4 , C_4 отрезками прямых (рис. 23).

Сразу преобразовать комплексный чертеж отсека плоскости общего положения в комплексный чертеж отсека уровня невозможно. Но можно решить эту задачу последовательным двукратным преобразованием: на первом этапе комплексный чертеж отсека общего положения преобразовать в комплексный чертеж проецирующего (перпендикулярного плоскости проекций) отсека, а на втором этапе — комплексный чертеж проецирующего отсека преобразовать в комплексный чертеж отсека уровня.

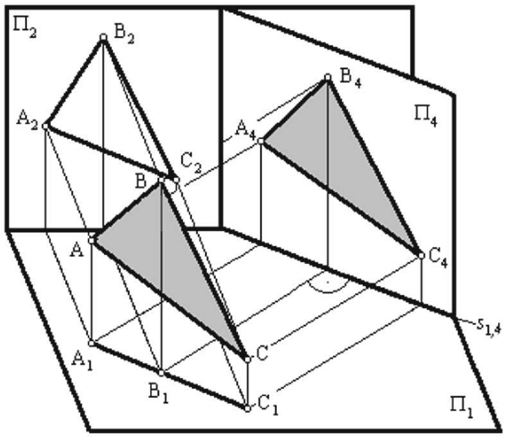

Рис. 22.

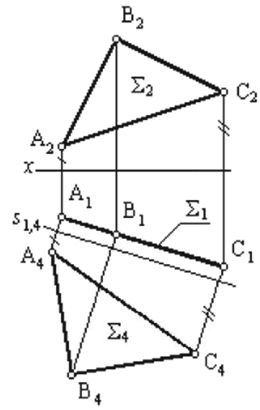

Рис. 23.

Рассмотрим порядок преобразования комплексного чертежа плоскости общего положения в комплексный чертеж проецирующей плоскости.

Пусть (рис. 24) в системе плоскостей проекций $\Pi_1\Pi_2$ задан треугольник ABC, занимающий в пространстве общее положение. Проведем в нем, например, через точку B, прямую h, параллельную плоскости проекций Π_1. Затем введем дополнительную плоскость проекций Π_4, перпендикулярную этой линии уровня и плоскости проекций Π_1. Спроецируем заданный треугольник на плоскость Π_4. Теперь в системе плоскостей проекций Π_1, Π_4 заданный треугольник занимает проецирующее положение, о чем свидетельствует его вырожденная проекция. $A_4B_4C_4$ на плоскости Π_4.

Поскольку в результате пересечения плоскостей Π_4 и Π_1 образуется новая координатная ось $s_{1,4}\perp h_1$, то для решения задачи на комплексном чертеже достаточно провести новую координатную ось $s_{1,4}\perp h_1$ и преобразовать комплексные чертежи точек A, B и C (рис. 25).

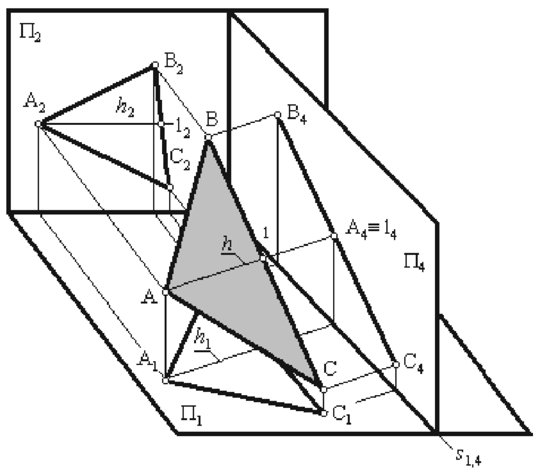

Рис. 24.

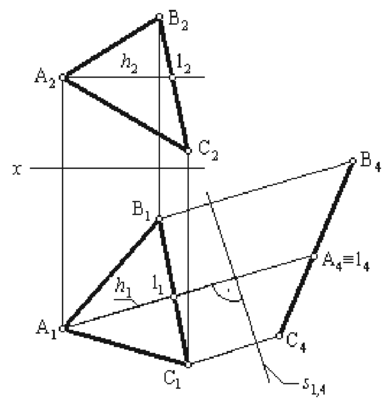

Рис. 25.

Теперь рассмотрим порядок преобразования комплексного чертежа отсека плоскости общего положения в комплексный чертеж отсека уровня.

Пусть в системе плоскостей проекций Π_1, Π_2 задан комплексный чертеж треугольника общего положения ABC (рис. 26) Проведем в нем линию горизонтального уровня h (сначала $h_2 \parallel x$, а затем h_1), далее проведем новую координатную ось $s_{1,4}\perp h_1$, и преобразуем заданный комплексный чертеж в комплексный чертеж проецирующего отсека. Затем введем новую координатную ось $s_{4,5} \parallel A_4B_4C_4$ и перейдем на плоскость проекций Π_5. Проекция отсека $A_5B_5C_5$ и будет его истинной величиной.

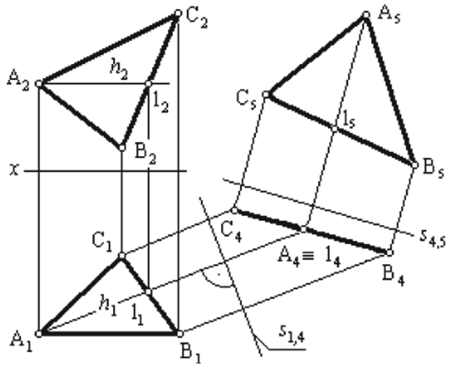

Рис. 26

7. Сечение геометрического тела

Сечение геометрического тела представляет собой отсек плоскости. Поэтому его истинная величина может быть определена тем же способом, что и любого другого отсека плоскости.

Пусть необходимо построить истинную величину сечения трехгранной пирамиды Θ фронтально проецирующей (перпендикулярной фронтальной плоскости проекций) плоскостью T. См. рис. 27.

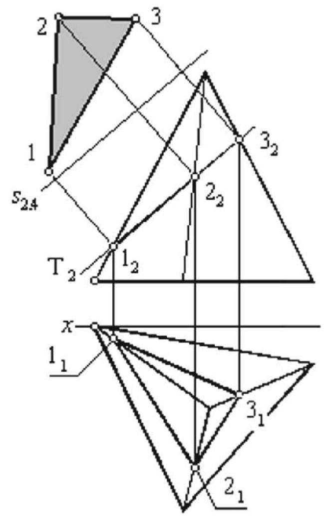

Рис. 27

8. Расстояние от точки до плоскости, между параллельными прямой и плоскостью и между параллельными плоскостями

Расстоянием от точки до плоскости является перпендикуляр, опущенный из этой точки на плоскость. Очевидно, что этот перпендикуляр будет проецироваться в истинную величину на ту плоскость проекций, к которой перпендикулярна заданная плоскость (рис. 28).

Пусть задан комплексный чертеж треугольника общего положения и точки D в системе плоскостей проекций Π_1, Π_2 (рис. 29). Проведем в треугольнике линию фронтального уровня f (сначала $f_1 \parallel x$, а затем f_2), проведем новую координатную ось $s_{2,4} \perp f_2$, и преобразуем заданный комплексный чертеж. Тогда перпендикуляр D_4K_4, опущенный из проекции D_4 точки D на вырожденную проекцию отсека $A_4B_4C_4$ и будет искомым расстоянием.

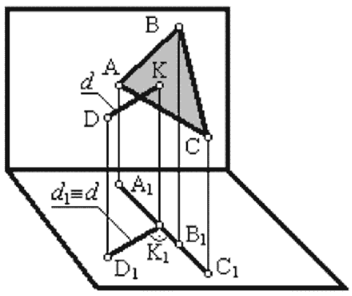

Рис. 28.

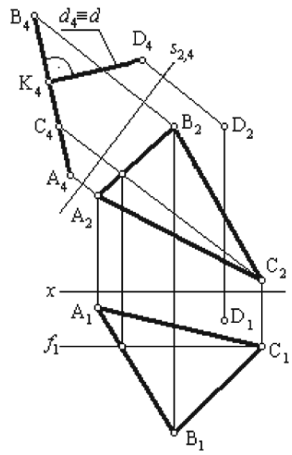

Рис. 29.

Из рассмотренного следует, что для определения расстояния между параллельными прямой и плоскостью достаточно на прямой выбрать произвольную точку и определить расстояние от нее до плоскости. Аналогично решается и задача по определению расстояния между параллельными плоскостями.

9. Параллельность прямой и плоскости

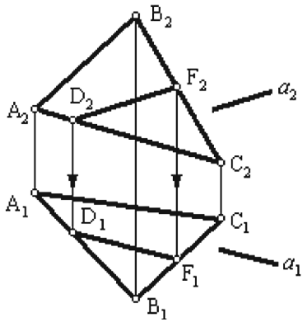

Рис. 30

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их не продолжали. Из этого следует, что если прямая параллельна плоскости, то в плоскости всегда можно выбрать прямую, параллельную заданной.

Пусть необходимо определить, параллельна ли прямая a плоскости $\Theta(\Delta ABC)$ — рис. 30.

В плоскости Θ выбираем такой произвольный отрезок DF, фронтальная проекция D_2F_2 которого была бы параллельна фронтальной проекции a_2 прямой a. Определяем горизонтальную проекцию D_1F_1 отрезка DF. Поскольку $D_1F_1 \parallel a_1$, то делаем вывод, что прямая a параллельна плоскости $\Theta(\Delta ABC)$.

10. Пересечение прямой с плоскостью

В результате пересечения прямой с плоскостью образуется их общая точка, которую принято называть точкой встречи прямой с плоскостью.

Пусть в системе плоскостей проекций Π_1, Π_2 (рис. 31) задан комплексный чертеж треугольника общего положения ABC и отрезка DE. Преобразуем его таким образом, чтобы в новой системе плоскостей проекций треугольник ABC занимал проецирующее положение. Тогда на пересечении его вырожденной проекции $A_4B_4C_4$ с проекцией D_4E_4 отрезка определится проекция K_4 точки встречи. Остальные ее проекции можно получить с помощью линий связи.

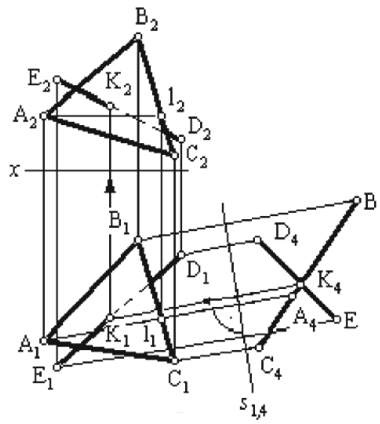

Рис. 31

11. Перпендикуляр к плоскости

Для построения перпендикуляра к плоскости достаточно построить прямую, перпендикулярную двум пересекающимся прямым этой плоскости. Однако для построения перпендикуляра к прямой необходимо, чтобы эта прямая была линией уровня. Поэтому для построения перпендикуляра к плоскости достаточно провести в ней прямые, параллельные обеим плоскостям проекций, и построить прямую, перпендикулярную этим линиям уровня (рис. 32).

Пусть необходимо из точки D провести перпендикуляр к плоскости Θ, заданной треугольником ABC (рис. 33).

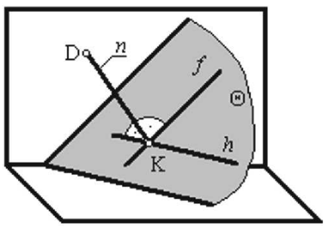

Рис. 32.

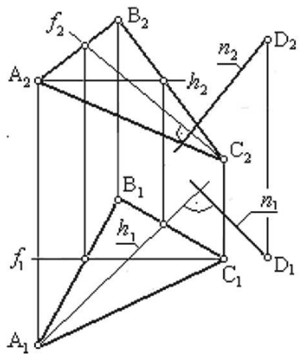

Рис. 33.

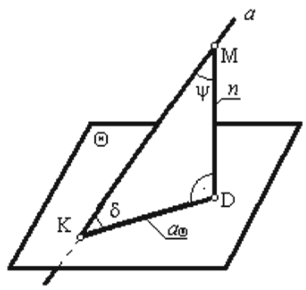

Рис. 34.

В заданной плоскости проводим горизонталь h и фронталь f. Из фронтальной проекции D_2 точки D проводим прямую n_2, перпендикулярную f_2, а из горизонтальной проекции D_1 точки D проводим прямую n_1, перпендикулярную h_1.

12. Угол между прямой и плоскостью

Пересекаясь с плоскостью, прямая образует с ней некоторый угол δ (рис. 34), который находится между прямой a и ее проекцией a_Θ на заданную плоскость Θ (но не на плоскость проекций!). Этот угол может находиться в пределах от 0 до 90°. Для его определения выберем на прямой a произвольную точку M и опустим из нее перпендикуляр n на плоскость Θ. Соединим основание перпендикуляра D с точкой K и получим прямоугольный треугольник MDK с прямым углом в точке D. Тогда $\delta + \psi = 90^\circ$, откуда $\delta = 90^\circ - \psi$.

Пусть необходимо определить угол наклона прямой a к плоскости $\Theta(\Delta ABC)$ — рис. 35.

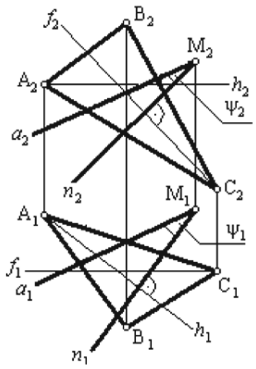

Рис. 35.

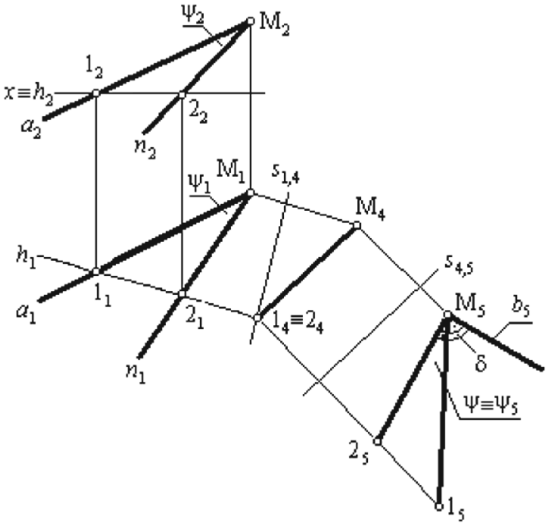

Рис. 36.

На прямой a выберем произвольную точку M и опустим из нее перпендикуляр n на плоскость Θ. Определяем истинную величину угла ψ при точке M. Для удобства рассмотрения вынесем прямые a и n на отдельный рисунок (рис. 36). Поскольку прямые a и n пересекаются, то они задают некоторую плоскость Ω. Угол ψ принадлежит этой плоскости. Поэтому для определения его истинной величины необходимо из системы плоскостей проекций Π_1, Π_2 перейти в такую систему плоскостей проекций, в которой плоскость Ω занимала бы положение плоскости уровня. Поскольку в заданной системе плоскостей проекций плоскость Ω занимает общее положение, то для этого необходима последовательная двукратная замена. В результате получим истинную величину угла при точке M_5: $\psi_5 = \psi$. Если из точки M_5 провести прямую b_5, перпендикулярную отрезку $2_5 M_5$, то между ней и отрезком $1_5 M_5$ будет находиться искомый угол δ.

13. Линия пересечения плоскостей

Если две плоскости пересекаются, то существует их общая прямая, которую называют линией пересечения плоскостей. Принадлежащие ей точки определяют с помощью плоскостей, которые называют посредниками. Пусть, например, заданы плоскости Θ и Ω (рис. 37), которые пересекаются по прямой d. Произвольной вспомогательной плоскостью Ψ^1 пересечем заданные плоскости соответственно по прямым a^1 и b^1. Поскольку эти прямые принадлежат одной и той же плоскости Ψ^1, то они пересекаются в некоторой точке K^1, принадлежащей линии пересечения заданных плоскостей. Если взять другую вспомогательную плоскость-посредник Ψ^2 и выполнить все описанные выше действия, то мы получим вторую принадлежащую линии пересечения заданных плоскостей точку K^2. Соединив полученные точки K^1 и K^2 прямой, получим искомую линию пересечения d.

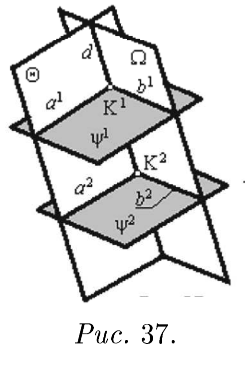

Рис. 37.

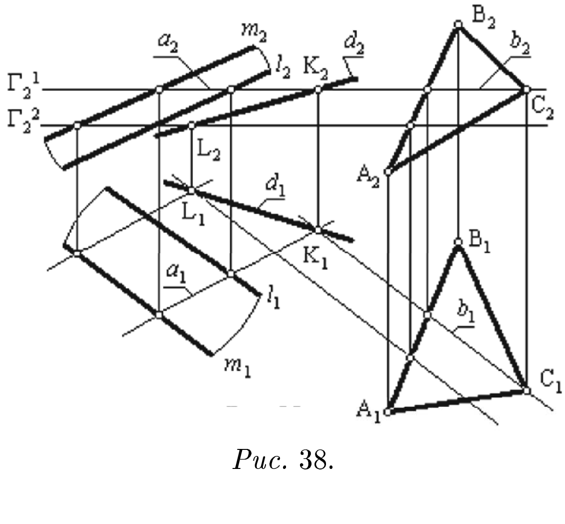

Рис. 38.

В качестве примера (рис. 38) на комплексном чертеже для построения линии пересечения плоскостей Θ и Ω, заданных соответственно параллельными прямыми m и l и треугольником ABC, использованы секущие плоскости-посредники горизонтального уровня (параллельные горизонтальной плоскости проекций Π_1) Γ^1 и Γ^2.

14. Угол между двумя плоскостями

При пересечении двух плоскостей образуется двугранный угол. Он измеряется линейным углом δ, который можно получить, если заданные плоскости пересечь плоскостью, перпендикулярной их линии пересечения d. Поэтому для определения угла δ достаточно преобразовать комплексный чертеж таким образом, чтобы в новой системе плоскостей проекций линия их пересечения занимала положение проецирующей (рис. 39). Пример решения задачи представлен на рис. 40.

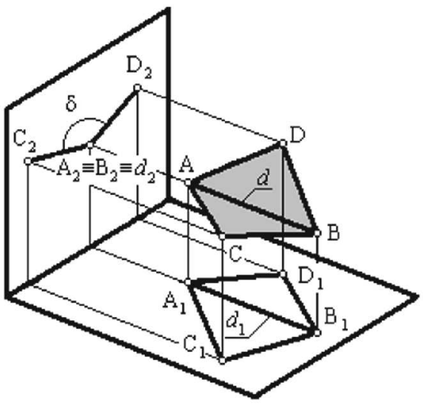

Рис. 39.

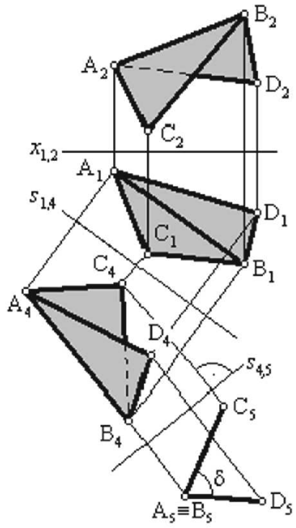

Рис. 40.

Если линии пересечения плоскостей нет или по каким-либо причинам ее невозможно построить, то угол между плоскостями можно определить следующим путем (рис. 41). Пусть плоскости Θ и Ω пересекаются по некоторой прямой. Выберем в пространстве произвольную точку M и проведем из нее перпендикуляры n^1 и n^2 соответственно к плоскостям Θ и Ω. Эти перпендикуляры задают некоторую плоскость Λ, перпендикулярную линии пересечения плоскостей и пересекающую ее в некоторой точке K. В результате пересечения плоскостей Θ и Ω плоскостью Λ образуется четырехугольник DMEK. Обозначим углы в точках M и K соответственно через ψ и δ. Сумма внутренних углов плоского выпуклого четырехугольника равна 360°. Но по условию углы в точках D и E прямые, поэтому $\delta + \psi = 180°$, откуда $\delta = 180° - \psi$. Таким образом, задача сводится к определению угла ψ между пересекающимися прямыми n^1 и n^2.

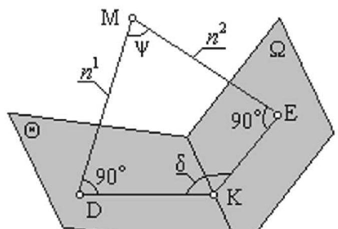

Рис. 41.

15. Перпендикулярность плоскостей

Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то каждая из них содержит перпендикуляр к другой плоскости. Из этого следует, что перпендикулярную к заданной плоскость можно задать двумя пересекающимися прямыми, одна из которых должна быть перпендикуляром к заданной плоскости, а вторая — произвольной прямой.

Пусть задан отрезок ML и отсек плоскости $\Theta(\Delta ABC)$ — рис. 42. Необходимо через точку M провести плоскость Ω, перпендикулярную плоскости Θ .

Через точку M проведем перпендикуляр n к плоскости Θ. Прямая n и отрезок ML, как две пересекающиеся прямые, и задают искомую плоскость Ω. При этом прямая n обеспечивает перпендикулярность плоскостей, а отрезок ML — ориентацию плоскости Ω в пространстве.

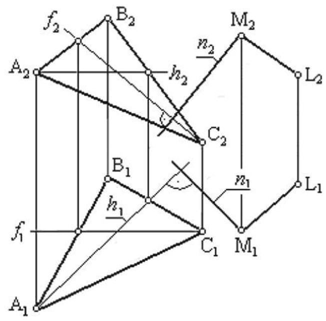

Рис. 42.

16. Параллельность плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Пусть заданы плоскость $\Theta(\Delta ABC)$ и точка D (рис. 43). Через точку D необходимо провести плоскость Ω, параллельную плоскости Θ.

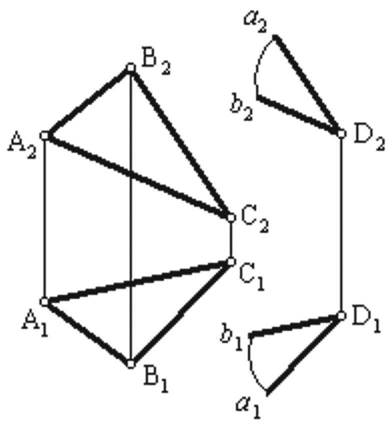

Рис. 43

Через точку D проведем прямые a и b, соответственно параллельные сторонам AC и BC треугольника ABC. Поскольку прямые a и b пересекаются в точке D, то они задают искомую плоскость Ω.

17. Развертка поверхности

Развернуть поверхность — это значит, совместить ее с плоскостью без складок и разрывов. При этом длины линий, величины углов и площадей, взятых на поверхности, должны быть равны таким же элементам, взятым на плоскости. Поверхности, допускающие такие преобразования, называют развертывающимися. К ним относятся все гранные поверхности, а также линейчатые поверхности с одной направляющей — торсы, конические и цилиндрические поверхности. Остальные поверхности относятся к неразвертывающимся. Поэтому в случае необходимости строят их приближенные развертки. Для этого в них вписывают развертывющиеся поверхности, строят их развертки и принимают их за развертки неразвертывающихся поверхностей.

Основным способом построения разверток развертывающихся поверхностей является способ триангуляции или, как еще его называют, способ треугольников. Его суть сводится к следующему. Все грани заданной поверхности с помощью диагоналей разбивают на треугольники. Определяют истинные величины сторон каждого из них, а затем линейными засечками строят на плоскости систему истинных величин сомкнутых треугольников, не нарушая их взаимного положения.

Рассмотрим пример: построить развертку трехгранной усеченной пирамиды (рис. 44).

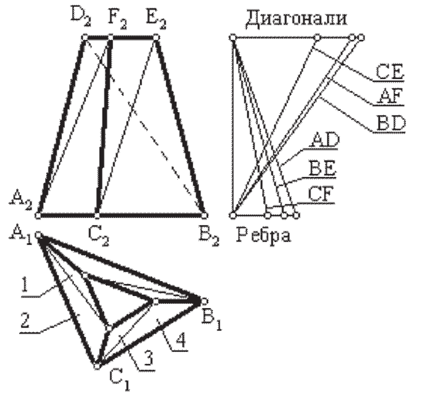

Рис. 44

Верхнее и нижнее основания пирамиды параллельны горизонтальной плоскости проекций Π_1, поэтому истинные величины сторон треугольников, лежащих в этих основаниях, равны их горизонтальным проекциям. Боковые грани пирамиды представляют собой четырехугольники $ADFC$, $CFEB$, $BEDA$. С помощью диагоналей AF, CE, BD разбиваем каждый из них на два треугольника. В итоге получаем шесть треугольников.

Определяем истинные величины сторон каждого из них. Боковые ребра пирамиды и диагонали граней являются отрезками общего положения. Их истинные величины целесообразно определять способом прямоугольного треугольника. Для этого достаточно построить прямоугольные треугольники, одним катетом которых будет горизонтальная проекция отрезка, а другим — разность высот его концов. Поскольку таких треугольников должно быть шесть, то это приведет к накоплению значительного количества неупорядоченных линий на горизонтальной проекции пирамиды, что будет усложнять дальнейшую работу. Поэтому естественным является стремление вынести построение этих треугольников за границы горизонтальной проекции пирамиды и упорядочить. Это возможно, так как одним из их катетов является одна и та же величина — разность высот концов ребер и диагоналей, равная высоте пирамиды. Поэтому примем этот катет общим для всех треугольников. Отложим его параллельно высоте пирамиды рядом с ее фронтальной проекцией, а перпендикулярно к нему — горизонтальные проекции ребер и диагоналей (для большего удобства работы горизонтальные проекции ребер будем откладывать с одной стороны, а диагоналей — с другой). Полученный чертеж называют диаграммой истинных величин.

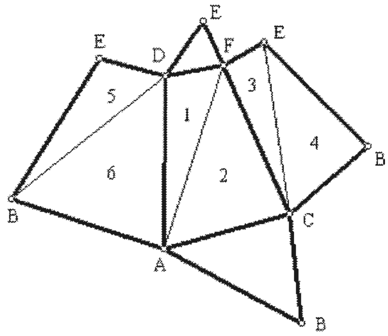

Рис. 45.

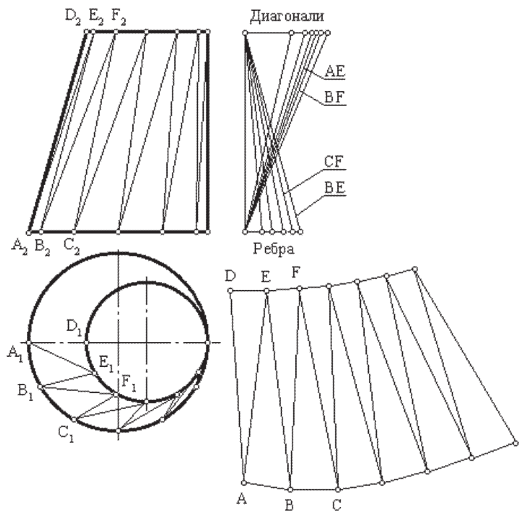

Рис. 46.

Проведем произвольную прямую (рис. 45) и отложим на ней истинную величину какого-либо ребра, например ВЕ. Чтобы получить треугольник BED, необходимо построить точку D. Для этого из точки E проведем дугу окружности радиусом, равным истинной величине стороны ED, а из точки B — радиусом, равным истинной величине диагонали BD. На пересечении этих дуг и будет находиться точка D. Соединив ее с точками B и E, получим истинную величину треугольника BED. Сделав засечки из точек B и D истинными величинами соответственно сторон BA нижнего основания и ребра DA, получим точку A и, следовательно, треугольник BDA. Продолжив построение треугольников, получим полную развертку пирамиды.

Рассмотрим еще один пример: построить развертку конической поверхности (рис. 46).

Как уже упоминалось, коническая поверхность относится к развертывающимся поверхностям. Однако в ряде случаев можно ограничиться ее приближенной разверткой.

Предположим, что для достижения заданной точности построения развертки в заданную коническую поверхность достаточно вписать двенадцатигранную пирамиду. Заданная поверхность имеет плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций Π_2, поэтому построим развертку только ее передней половины.

Разбиваем верхнее и нижнее основания конической поверхности на двенадцать соответственно равных частей (необходимость разбиения оснований на равные части диктуется стремлением добиться постоянной степени искажения при переходе от искривленной поверхности к гранной поверхности). Полученные точки каждого из оснований соединяем хордами (на рисунке хорды не показаны). Проводим ребра пирамиды. Грани пирамиды являются четырехугольниками, поэтому разбиваем их диагоналями на треугольники. Таким образом, половина поверхности описывается двенадцатью треугольниками. Строим диаграмму истинных величин ребер и диагоналей вписанной пирамиды.

Строим развертку половины боковой поверхности пирамиды. Отложим истинную величину ребра AD пирамиды. Из точки D радиусом, равным длине хорды верхнего основания, сделаем засечку, а из точки A сделаем засечку радиусом, равным длине диагонали AE. Получим точку E. Соединив ее с точками A и D, получим треугольник ADE. Из точки A сделаем засечку хордой нижнего основания, а из точки E — радиусом, равным длине ребра BE. Получим точку B. Соединив ее с точками А и Е, получим треугольник ABE. Продолжая построение треугольников, получим развертку передней половины пирамиды.

Литература

1. Киселев А.П. Элементарная геометрия. Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1980. – 287 с.

2. Евклид. Начала (в трех книгах) / Серия «Классики естествознания». Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М.-Л., ГИТТЛ, 1949–1950.

3. Математика. Ее содержание, методы и значение. Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 297 с.

4. Монж Гаспар. Начертательная геометрия / Серия «Классики науки». Перевод В.Ф. Газе. Комментарии и редакция проф. Д.И.Каргина. Под общей редакцией члена-корреспондента АН СССР Т.П. Кравца. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. – 292 с.

5. Четверухин Н.Ф., Левицкий В.С. и др. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1963.

Прерис Анатолий Маркович,
канд. техн. наук, доцент,
г. Харьков.

E-mail: anatolypreris@rambler.ru

Библиографические материалы к юбилейным датам 2016 года. II полугодие

Р. З. Гушель

Календарь юбилейных дат второй половины 2016 г., связанных с именами известных деятелей в области математики и математического образования, а также с важнейшими событиями в этой сфере. После краткой информации о человеке или событии приводится небольшой список литературы.

1 июля — 110 лет со дня рождения французского математика, члена Парижской АН, одного из основателей группы Н. Бурбаки **Жана Александра Дьедонне** (умер 29 ноября 1992 г.). Его труды относятся к математическому анализу, топологии, алгебре, теории групп, алгебраической геометрии.

1. Медведев Ф.А. Ж. Дьедонне: математика и действительность // ВИЕТ. - 1992. - № 1. - С. 60-69.
2. Юшкевич А.П., Демидов С.С. Математик, историк математики и просто человек Жан Дьедонне // ВИЕТ. - 1993. - № 3. - С. 107-113.
3. Дьедонне Ж. История гармонического анализа // ИМИ. - 1973. - Вып. 18. - С. 31-54.
4. Дьедонне Ж. О деятельности Бурбаки // УМН. - 1973. - Т. 28. - Вып. 3.
5. Дьедонне Ж. О прогрессе математики // ИМИ. - 1976. - Вып. 21.

1 июля — 370 лет со дня рождения немецкого математика и философа, одного из основоположников математического анализа, создателя научной школы, к которой принадлежали, в частности, братья Я. и И. Бернулли, Г.Ф. Лопиталь и Л. Эйлер, **Готфрида Вильгельма Лейбница**. 14 ноября исполняется 300 лет со дня его смерти.

1. Герье В. Лейбниц и его век. - СПб., 1868.
2. Герье В. Отношение Лейбница к России и Петру Великому. - СПб., 1871.
3. Погребысский И.Б. Готфрид Вильгельм Лейбниц. - М., 1971.
4. Филиппов М.М. Лейбниц, его жизнь и деятельность. - М., 1983.
5. Фрейман Л.С. Творцы высшей математики. - М., 1968.
6. Юшкевич А.П. Лейбниц и обоснование исчисления бесконечно малых // УМН. - 1948. - Т. 3. - Вып. 1. - С. 150-164.
7. Лейбниц Г.В. Избранные отрывки из математических сочинений // УМН. - 1948. - Т. 3. - Вып. 1. - С. 165-204.
8. Лейбниц Г.В. Новые опыты о человеческом разуме. - М.-Л., 1936.

3 июля — 80 лет со дня рождения профессора Московского областного педагогического института, доктора физико-математических наук, ученика профессора П.К. Рашевского, одного из руководителей семинара по векторному и тензорному анализу, Заслуженного деятеля науки РФ (1996) **Олега Васильевича Мантурова** (умер 23 июля 2011 г.).

1. Манутров О.В. Курс высшей математики. Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной. Численные методы. Теория вероятностей. - М., 1991. - 448 с.

2. Мантуров О.В. Николай Иванович Лобачевский (к двухсотлетию со дня рождения) // УМН. - 1993. - Т. 48. - Вып. 2 - С. 5-16.

3. Мантуров О.В. Об однородных римановых несимметрических пространствах с неприводимой группой вращений // ДАН СССР. - 1961. - Т. 141. - Вып. 4. - С. 792-795.

4. Мантуров О.В. Об умножении в комплексном К-функторе // Изв. АН СССР. - Сер. матем., 1971. - Т. 35. - Вып. 3. - С. 627-654.

5. Мантуров О.В. Однородные римановы пространства с неприводимой группой вращений // Труды семинара по вект. и тензорн. анализу. - М., 1966. - Т. 13. - С. 68-145.

6. Мантуров О.В. Элементы тензорного исчисления. - М., 1991. - 254 с.

15 июля — 110 лет со дня рождения отечественного математика и историка науки, создателя советской научной школы по истории математики, члена Международной академии истории наук (с 1961) и её президента (1965-1968), Заслуженного деятеля науки РСФСР (1966) **Адольфа Павловича Юшкевича** (умер 17 июля 1993 г.).

1. Адольф Павлович Юшкевич (1906-1993) // ИМИ. - 1995. - Вып.1(36). - № 1. - С. 9-19.

2. Башмакова И.Г. и др. Адольф Павлович Юшкевич. К 60-летию со дня рождения // УМН. - 1967. - Т. 22. - Вып. 1. - С. 187-194.

3. Рожанская М.М. О работах А.П. Юшкевича по истории математики средних веков // ИМИ. - 1996. - Вып. 1 (36). - № 2. - С. 12-37.

4. Юшкевич А.П. Академик С. Гурьев и его роль в развитии русской науки // Труды ИИЕ. - 1947. - Т. 1. - С. 219-268.

5. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года. - М., 1967. - 591 с.

6. Юшкевич А.П. История математики в средние века. - М., 1961. - 448 с.

7. Юшкевич А.П. Математика в Московском университете за первые сто лет его существования // ИМИ. - 1948. - Вып. 1. - С. 43-140.

8. Юшкевич А.П. Математика и её преподавание в России XVII-XIX веков // МШ. - 1947-1949 (цикл из 12 статей).

9. Юшкевич А.П. О достижениях китайских учёных в области математики // ИМИ. - 1955. - Вып. 8. - С. 539-572.

10. Юшкевич А.П. Развитие понятия предела до Вейерштрасса // ИМИ. - 1986. - Вып. 30. - С. 11-81.

11. Юшкевич А.П., Розенфельд Б.А. Омар Хайям. - М., 1965. - 191 с.

24 июля — 160 лет со дня рождения французского математика, члена Парижской АН (с 1889) и её президента (с 1910); члена Лондонского Королевского общества (с 1909), чл.-корр. Петербургской АН (с 1895), Почётного члена АН СССР (с 1925) **Шарля Эмиля Пикара** (умер 11 декабря 1941 г.). Основные работы посвящены теории функций, теории дифференциальных уравнений, теории бесконечных прерывных групп. Занимался историей и философией математики.

1. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций // Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. - М., 1981. - С. 115-255.

2. Пикар Э. О развитии за последние сто лет некоторых основных теорий математического анализа. - Харьков, 1912. - 99 с.

27 июля — 140 лет со дня рождения отечественного математика, профессора Варшавского, а затем Ростовского университета, переводчика на русский язык “Начал” Евклида, специалиста в области теории дифференциальных уравнений, теории чисел, геометрии и истории математики **Дмитрия Дмитриевича Мордухай-Болтовского** (умер 7 февраля 1952 г.).

1. Минковский В.Л. К пятидесятилетию научно-педагогической деятельности профессора Д.Д. Мордухай-Болтовского // МШ. - 1949. - № 2. - С. 45-47.

2. Черняев М.П. и др. Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876-1952). Некролог // УМН. - 1953. - Т. 8. - Вып. 4. - С. 131-139.

3. Мордухай-Болтовской Д.Д. Из прошлого пятой книги “Начал” Евклида // МОб. - 1916. - № 7-8.

4. Мордухай-Болтовской Д.Д. Об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений. - Варшава, 1910.

5. Мордухай-Болтовской Д.Д. О кривизне пространственных кривых в пространстве Лобачевского // МСк. - 1952. - Т. 30 (72). - Вып. 3. - С. 483-508.

6. Мордухай-Болтовской Д.Д. О штейнеровских построениях на сфере // МСк. - 1935. - Т. 42. - С. 535-546.

7. Мордухай-Болтовской Д.Д. Психология математического мышления // ВФП. - 1908. - Кн. 94. - С. 491-535.

8. Мордухай-Болтовской Д.Д. Философия. Психология. Математика. - М., 1998. - 560 с.

9. Евклид. Начала / Перевод и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. - М.-Л., 1948-1950. - Т. 1-3.

14 августа — 150 лет со дня рождения бельгийского математика, члена Бельгийской АН (с 1909), чл.-корр. Парижской АН (с 1945), специалиста в теории множеств, теории тригонометрических рядов, теории приближения функций полиномами **Шарля Жана де Ла Валле-Пуссена** (умер 2 марта 1962 г.).

1. Письма Ш.Ж. де Ла Валле-Пуссена к Н.Н. Лузину // ИМИ. - 1983. - Вып. 27. - С. 301-312.

2. Валле-Пуссен Ш. Четыре лекции о квазианалитических функциях действительного переменного // УМН. - 1938. - Т. 5. - С. 150-170.

3. Валле-Пуссен Ш.Ж. Курс анализа бесконечно малых. - Л., 1933. - Т. 1-2.

4. Валле-Пуссен Ш.Ж. Лекции по теоретической механике. - М., 1948-1949. - Т. 1-2.

С 16 по 26 августа 1966 г., 50 лет назад, в Москве проходил **XY ??? Международный математический конгресс**, в котором участвовали свыше 4 тысяч делегатов из 54 стран мира. Оргкомитет конгресса возглавил академик И.Г. Петровский.

1. Болтянский В.Г., Карманов В.Г., Розов Н.Х. О Международном конгрессе математиков // УМН. - 1967. - Т. 22. - Вып. 4. - С. 137-143.

2. Лорч Л. О математическом конгрессе в Москве // УМН. - 1967. - Т.22. - Вып. 4. - С. 144-146.

3. Маркушевич А.И., Ашкинузе В.Г., Черкасов Р.С. Международный конгресс математиков в Москве // МШ. - 1966. - № 6. - С. 11-18.

4. Тростников В.Н. Всемирный конгресс математиков в Москве. - М., 1967. - 64 с.

5. Труды Международного конгресса математиков (Москва-1966). - М.,1968. - 726 с.

14 сентября — 125 лет со дня рождения отечественного математика, академика АН СССР (с 1929), директора МИАН СССР (с 1932), члена многих иностранных академий и научных обществ, лауреата Государственной (1941) и Ленинской (1972) премий, крупного специалиста в области аналитической теории чисел **Ивана Матвеевича Виноградова** (умер 20 марта 1983 г.).

1. Академик Виноградов Иван Матвеевич (некролог) // УМН. - 1983. - Т.38. - Вып. 6. - С. 105-106.

2. Делоне Б.Н. К 60-летию Ивана Матвеевича Виноградова // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1951. - Т. 15. - Вып. 5. - С. 385-394.

3. Карацуба А.А. Виноградов Иван Матвеевич (к 90-летию со дня рождения) // УМН. - 1981. - Т. 36. - Вып. 6. - С. 3-16.

4. Виноградов И.М. Избранные труды. - М., 1952.

5. Виноградов И.М. К вопросу о числе целых точек в заданной области // Изв. АН СССР. - Сер. матем. - 1960. - Т. 24. - Вып. 6. - С. 777-786.

6. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. - М., 1980. - Изд. 2.

7. Виноградов И.М. Основы теории чисел. - М., 1981. - Изд. 9.

8. Виноградов И.М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // МСк. - 1940. - Т. 7 (49). - Вып. 2. - С. 365-372.

9. Виноградов И.М., Постников А.Г. О состоянии и основных направлениях развития исследований в области аналитической теории чисел // УМН. - 1967. - Т. 22. - Вып. 1. - С. 3-14.

15 сентября — 90 лет со дня рождения французского математика, члена Французской АН (с 1976), Американской академии искусств и наук (с 1960), лауреата Филдсовской премии (1954) **Жана Пьера Серра**. Основные труды учёного относятся к алгебре, алгебраической геометрии, теории чисел и топологии.

1. Серр Ж.П. Алгебраические группы и поля классов. - М., 1968.

2. Серр Ж.П. Когомология Галуа. - М., 1968.

3. Серр Ж.П. Курс арифметики. - М., 1972.

4. Серр Ж.П. Линейные представления конечных групп. - М., 2003. - 132 с.

5. Серр Ж.П. Собрание сочинений. - М., 2002, 2004. - Т. 1-2.

17 сентября — 190 лет со дня рождения немецкого математика, профессора Геттингенского университета (1857-1866), создателя (1854) римановой геометрии, специалиста в области теории функций, геометрии, математической физики, теории дифференциальных уравнений **Георга Фридриха Бернгарда Римана** (умер 20 июля 1866 г.).

1. Биография Бернгарда Римана // МСк. - 1868. - Т. 3. - Вып. 3. - Отд. 2. - С. 153-158.

2. Каган В.Ф. Геометрические идеи Римана и их современное развитие. - М.-Л., 1933. - 76 с.

3. Ливанова А. Три судьбы. Постижение мира. - М., 1969.

4. Монастырский М.И. Бернгард Риман. - М., 1977.

5. Розенфельд Б.А. История неевклидовой геометрии. - М., 1976.

6. Юшкевич А.П., Демидов С.С. Бернгард Риман (к 150-летию со дня рождения) // МШ. - 1977. - № 4.

7. Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. - М., 1956. - С. 309-341.

8. Риман Б. Сочинения. - М.-Л., 1948.

24 сентября — 120 лет со дня рождения отечественного математика, ученика академика С.Н. Бернштейна, доктора физико-математических наук, чл.-корр. АПН РСФСР (с 1944), заведующего сектором математики АПН **Василия Леонидовича Гончарова** (умер 30 октября 1955 г.). Основные исследования относятся к теории функций комплексного переменного, теории приближения функций, истории и методике математики.

1. Андронов И.К. Гончаров Василий Леонидович // МШ. - 1967. - № 3.

2. Глейзер Г.Д., Черкасов Р. С. В. Л. Гончаров // МШ. - 1996. - № 3. - С. 5-7.

3. Гончаров В.Л. Идея функции в преподавании математики в средней школе // Сов. педагогика. - 1945. - № 3.

4. Гончаров В.Л. Интерполяционные процессы и целые функции // УМН. - 1937. - Т. 3. - С. 113-143.

5. Гончаров В.Л. Математика как учебный предмет // Изв. АПН РСФСР. - 1958. - Вып. 92. - С. 37-66.

6. Гончаров В.Л. Начальная алгебра. Пособие для учителей. - М., 1955.

7. Гончаров В.Л. Теория вероятностей. - М.-Л., 1939. - 413 с.

8. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. - М., 1954. - 328 с.

9. Гончаров В.Л. Теория функций комплексного переменного. - М., 1955. - 350 с.

30 сентября — 125 лет со дня рождения отечественного учёного в области математики, астрономии, географии и геофизики, академика (с 1935), ученика Д.А. Граве, вице-президента АН СССР (1939-1942), Героя Советского Союза (1937) **Отто Юльевича Шмидта** (умер 7 сентября 1956 г.).

1. Габович Е.А. Академик О.Ю. Шмидт // МШ. - 1966. - № 6. - С. 81-85.

2. Кострикин А.И. Отто Юльевич Шмидт // Вестн. МГУ. - 1992. - Сер. 1. Мат., мех. - № 3. - С. 90-92.

3. Курош А.Г. Шмидт Отто Юльевич (некролог) // УМН. - 1956. - Т. 11. - Вып. 6. - С. 227-233.

4. Отто Юльевич Шмидт. Жизнь и деятельность. - М., 1959. - 470 с.

5. Шмидт О.Ю. Абстрактная теория групп. - М.-Л., 1933. - Изд. 2.

6. Шмидт О.Ю. Бесконечные разрешимые группы // МСк. - 1945. - Т.17(59). - Вып. 2. - С. 145-162.

7. Шмидт О.Ю. Высшая алгебра. - М., 1934. - Вып. 1. - Начала теории определителей.

8. Шмидт О.Ю. Избранные труды. Математика. - М., 1959.

9. Шмидт О.Ю. О парадоксе Бертрана в теории вероятностей // МСк. - 1926. - Т. 33. - Вып. 1. - С. 34-40.

14 октября — 150 лет со дня рождения немецкого историка математики, автора семитомного труда “История элементарной математики” (1902-1924) **Иоганна Франца Йозефа Тропфке** (умер 10 ноября 1939 г.).

1. Тропфке И. История элементарной математики в систематическом изложении. - М., 1914. - Т. 1. Арифметика и алгебра. - Ч. 1. Арифметика. - 146 с.

24 октября — 110 лет со дня рождения отечественного математика, чл.-корр. АН СССР (с 1939) **Александра Осиповича Гельфонда** (умер 7 ноября 1968 г.). Его работы посвящены теории чисел и теории функций комплексного переменного; им полностью решена седьмая проблема Гильберта (1934).

1. Бухштаб А.А., Шидловский А.Б. Александр Осипович Гельфонд (некролог) // МШ. - 1969. - № 1. - С. 89-90.

2. Линник Ю.В., Маркушевич А.И. Александр Осипович Гельфонд (к 50-летию со дня рождения) // УМН. - 1956. - Т. 11. - Вып. 5. - С. 239-248.

3. Тихомиров В.М., Успенский В.А. Советская математика 30-х годов. II. А.О. Гельфонд и Л.Г. Шнирельман // МПр. - 2000. - Вып. 4. - С. 33-52.

4. Гельфонд А.О. Аппроксимация алгебраических иррациональностей и их логарифмов // Вестн. МГУ. - 1948. - № 9. - С. 3-25.

5. Гельфонд А.О. Избранные труды. - М., 1973. - 440 с.

6. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. - М., 1967. - Изд. 3. - 375 с.

7. Гельфонд А.О. Теория чисел в Московском университете за советский период // Вестн. МГУ. - Мат., мех. - 1967. - № 5. - С. 7-11.

8. Гельфонд А.О. Трансцендентные и алгебраические числа. - М., 1952. - 224 с.

30 октября — 110 лет со дня рождения отечественного математика, академика АН СССР (с 1966), директора Института прикладной математики АН СССР (с 1978), лауреата Государственной (1953) и Ленинской (1966) премии **Андрея Николаевича Тихонова** (умер 7 октября 1993 г.). Его основные исследования посвящены дифференциальным уравнениям, функциональному анализу, математической физике, прикладной и вычислительной математике.

1. Бицадзе А.В. и др. Тихонов Андрей Николаевич (к 70-летию со дня рождения) // УМН. - 1976. - Т. 31. - Вып. 6. - С. 3-11.

2. Ильин В.А. К 80-летию со дня рождения академика А. Н. Тихонова // Вестн. МГУ. - Сер. 15. Выч. матем. и киберн. - 1986. - № 3. - С. 4-8.

3. Тихонов А.Н. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // ДАН СССР. - 1964. - Т. 156. - Вып. 2. - С. 268-271.

4. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. - 1963. - Т. 151. - Вып. 3. - С. 501-504.

5. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // МСк. - 1952. - Т. 31 (73). - С. 575-586.

6. Тихонов А.Н. Теорема единственности для уравнения теплопроводности // ДАН. - 1935. - № 5. - С. 294-300.

7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М., 1977. - Изд. 5.

В октябре исполняется 150 лет со времени выхода из печати **первого номера журнала "Математический сборник"** — органа Московского математического общества. Впоследствии журнал стал общероссийским. Он издаётся и сегодня.

1. Демидов С.С. "Математический сборник" в 1866-1935 гг. // ИМИ. - 1996. - Вып. 1 (36). - № 2. - С. 127-146.

2. Люстерник Л.А. "Математический сборник" // УМН. - 1946. - Т. 1. - Вып. 1. - С. 242-247.

3. Указатель журнала "Математический сборник", издание АН СССР и ММО за 1891-1956 гг. - М., 1959. - 65 с.

4. Указатель статей, содержащихся в первых 15 томах "Математического сборника". - М., 1893. - 140 с.

12 ноября — 125 лет со дня рождения отечественного педагога-математика, сотрудника АПН РСФСР, занимавшегося, преимущественно, вопросами методики геометрии, автора школьного учебника по геометрии (1963) **Антонина Ивановича Фетисова** (умер 21 октября 1979 г.).

1. Гнеденко Б.В., Маргулис А.Я. Антонин Иванович Фетисов // МШ. - 1962. - № 1. - С. 76-77.

2. Фетисов А.И. Геометрические преобразования // МШ. - 1940. - № 4,5,6.

3. Фетисов А.И. Геометрические преобразования в курсе элементарной геометрии в средней школе // МШ. - 1962. - № 4. - С. 32-43.

4. Фетисов А.И. Геометрия. Учебное пособие для старших классов средней школы. - М., 1963.

5. Фетисов А.И. Геометрия в задачах. - М., 1977.

6. Фетисов А.И. Очерки по евклидовой и неевклидовой геометрии. - М., 1965.

7. Фетисов А.И. Формирование математических понятий // Изв. АПН РСФСР. - 1958. - Вып. 92. - С. 67-94.

17 ноября — 125 лет со дня рождения отечественного математика и педагога, академика АПН РСФСР (с 1955), доктора физико-математических наук, Заслуженного деятеля науки РСФСР (1962), признанного главы советской школы начертательной геометрии **Николая Федоровича Четверухина** (умер 7 марта 1974 г.).

1. Котов И.И. Николай Федорович Четверухин // МШ. - 1952. - № 2. - С. 78-82.

2. Семушин А.Д. Николай Федорович Четверухин // МШ. - 1974. - № 3. - С. 94.

3. Четверухин Н.Ф. Введение в высшую геометрию. - М., 1935. - Изд. 2. - 216 с.

4. Четверухин Н.Ф. Значение аксиомы Паша для линейной аксиоматики порядка // МСк. - 1924. - Т. 31. - С. 568-575.

5. Четверухин Н.Ф. Методы геометрических построений. - М., 1952. - Изд. 2. - 148 с.

6. Четверухин Н.Ф. Полные и неполные изображения // Вопросы современной начертательной геометрии. - М.-Л., 1947. - С. 127-187.

7. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. - М., 1953. - Изд. 6.

8. Четверухин Н.Ф. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. - М., 1946.

9. Четверухин Н.Ф., Глазунов Е.А. Аксонометрия. - М., 1953. - 292 с.

22 ноября — 125 лет со дня рождения отечественного математика, чл.-корр. АН СССР (с 1946), профессора Ленинградского политехнического института (с 1922), автора ряда известных руководств для высшей школы **Родиона Осиевича Кузьмина** (умер 24 марта 1949 г.). Его работы посвящены теории чисел, теории функций, математическому анализу, теории вероятностей, истории математики.

1. Венков Б.А., Натансон И.П. Кузьмин Родион Осиевич (1891-1949) (некролог) // УМН. - 1949. - Т. 4. - Вып. 4. - С. 143-155.

2. Смирнов В.И. Родион Осиевич Кузьмин // Изв. АН СССР. - Сер. матем. - 1949. - № 5. - С. 385-388.

3. Кузьмин Р.О. Бесселевы функции. - М.-Л., 1935. - Изд. 2. - 244 с.

4. Кузьмин Р.О. Жизнь и научная деятельность Егора Ивановича Золотарева (к 100-летию со дня рождения) // УМН. - 1947. - Т. 2. - Вып. 6. - С. 21-51.

5. Кузьмин Р.О. О распределении корней полиномов, связанных с квадратурами Чебышева // Изв. АН СССР. - Сер. матем. - 1938. - Т. 2. - С. 427-444.

6. Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. - М., 1957, 1958. - Т. 1, 2. - Изд. 13.

7. Кузьмин Р.О., Фаддеев Д.К. Арифметика и алгебра комплексных чисел. - М., 1939.

23 ноября — 400 лет со дня рождения английского математика, профессора геометрии Оксфордского университета (1649-1703), члена-основателя Лондонского королевского общества (1662), одного из основоположников анализа бесконечно малых **Джона Валлиса** (умер 28 октября 1703 г.).

1. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. - М., 1960.

2. Крамар Ф.Д. Интеграционные методы Джона Валлиса // ИМИ. - 1961. - Вып. 14. - С. 11-100.

3. Крамар Ф.Д. Начала векторной алгебры в механике Валлиса // Вопр. ИЕТ. - 1967. - Т. 21.

4. Никифоровский В.А. Путь к интегралу. - М., 1985.

5. Токарева Т.А. Об “Историческом и практическом трактате по алгебре” Джона Валлиса // ИМИ. - 1983. - Вып. 27. - С. 146-163.

6. Черкалова Л.И. Составные отношения у Валлиса // Докл. на научн. конф. Яросл. пед. института. - Яр., 1964. - Т. 2. - Вып. 3. - С. 153-160.

30 ноября — 80 лет со дня рождения отечественного математика, академика РАН (с 1992), лауреата Государственной премии (1976) и премии им. А.М. Ляпунова (2001), заведующего отделом обыкновенных дифференциальных уравнений МИРАН, ученика академика Л.С. Понтрягина **Дмитрия Викторовича Аносова** (умер 5 августа 2014 г.).

1. Арнольд В.И. и др. Дмитрий Викторович Аносов (к 60-летию со дня рождения) // УМН. - 1997. - Т. 52. - Вып. 2. - С. 193-200.

2. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН СССР. - 1967. - Т. 90. - 210 с.

3. Аносов Д.В. К истории вывода законов Кеплера из законов механики // ИМИ. - 2000. - Вып. 5 (40). - С. 9-25.

4. Аносов Д.В. Лекции по курсу “Динамические системы”. - М., 1995.

5. Аносов Д.В. Некоторые гомотопии в пространстве замкнутых кривых // Изв. АН СССР. - Сер. матем. - 1980. - Т. 44. - № 6. - С. 1219-1254.

6. Аносов Д.В. О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // МСк. - 1960. - Т. 50. - Вып. 3. - С. 299-334.

7. Аносов Д.В. Проблемы модернизации школьного курса математики // МШ. - 2000. - № 1. - С. 2-6.

8. Аносов Д.В. Пуанкаре и проблемы Оскара II // ИМИ. - 2001. - Вып.6(41). - С. 57-72.

25 декабря — 160 лет со дня рождения отечественного математика, преподавателя средних учебных заведений, специалиста в области теории и методики решения геометрических задач на построение на плоскости, автора большого числа работ по этим вопросам **Ивана Ивановича Александрова** (умер в 1919 г.).

1. Александров А.И. Иван Иванович Александров // МШ. - 1949. - № 5. - С. 39-41.

2. Александров И.И. Задача Паппа — чистым построением // ВОФЭМ. - 1910. - № 508. - С. 81-88.

3. Александров И.И. Методы решений геометрических задач на построение и сборник геометрических задач с решениями. - Тамбов, 1886. - Изд. 2.

4. Александров И.И. О неразрешимости задач циркулем и линейкой // ВОФЭМ. - 1915. - № 639-640.

5. Александров И.И. Основания арифметики. - М., 1908. - 16 с.

6. Александров И.И. Решение задач одним циркулем (геометрия Маскерони) // ВОФЭМ. - 1914. - № 611-612.

7. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение. - М., 1950. - Изд. 18. - 175 с.

Список сокращений

ВОФЭМ - Вестник опытной физики и элементарной математики. Журнал, выходил в Одессе до 1917 г.

ВИЕТ (Вопр. ИЕТ) - Вопросы истории естествознания и техники. Журнал. (До 1980 г. - одноименный сборник).

ВФП - Вопросы философии и психологии. Журнал, выходивший в 1890-1918 гг.

ДАН - Доклады Академии наук. Журнал.

Изв. АН СССР - Известия Академии наук СССР. Журнал.

Изв. АПН РСФСР - Известия Академии педагогических наук РСФСР. Журнал.

ИМИ - Историко-математические исследования. Сборник статей.

МШ - Математика в школе. Журнал.

МИАН - Математический институт имени В.А. Стеклова Академии наук.

МИРАН - Математический институт Российской Академии наук.

МСк - Математический сборник. Журнал, выходящий с 1866 г.

МОб. - Математическое образование. Журнал.

МПр. - Математическое просвещение. Сборник статей.

Труды ИИЕ - Труды Института истории естествознания. Сборник, выходивший до 1954 г.

УМН - Успехи математических наук. Журнал.

Гушель Ревекка Залмановна,
г. Ярославль.

E-mail: gushelr@yandex.ru

Наследие профессора И. Я. Депмана по истории и педагогике математики

С. В. Жаров

Известный ученый и педагог И.Я. Депман является выдающимся историком математики, в частности, арифметики. Его многочисленные исторические и методические книги и статьи раскрывают многообразие математики и являются отличным материалом для уроков и многообразной внеурочной деятельности

В 2015 году исполнилось 130 лет со дня рождения известного ученого, историка математики, педагога, профессора Ивана Яковлевича Депмана (1885–1970), который создал большую историко-методическую школу, подготовил многих творчески работающих учеников, а также оставил после себя многочисленные труды и большую библиотеку, направленную на всестороннее развитие школьного образования.

Иван Яковлевич Депман родился в эстонской крестьянской семье в местечке Тарвасту. После окончания приходской трёхгодичной школы, где обнаружил способности и самостоятельность, по настоянию местного учителя стал готовиться к конкурсному экзамену, чтобы поступить в одну из старейших учительских семинарий в городе Тарту.

В 1900 году он становится прилежным воспитанником семинарии, а после окончания её в 1903 году назначается учителем в деревню Тойла. Уча детей, И.Я. Депман самостоятельно готовится к экзамену на аттестат зрелости. Четыре года ушло на эту подготовку. После сдачи экзаменов на аттестат зрелости в 1907 году И.Я. Депман поступает в Петербургский университет. В это время в университете увлекали наукой известные профессора: академик А.А. Марков — анализом и теорией вероятностей, член-корреспондент Академии наук Д.К. Бобылёв — механикой с экскурсиями в историю механики, профессор И.И. Иванов — предметом и методами теории чисел, профессор Ю.В. Сохоцкий — теорией функций, профессор А.И. Введенский — предметом логики. И.Я Депман принимает участие в "Трудах Петербургского общества эстонских студентов" и сотрудничает в эстонской газете "Кийр" ("Луч") [1].

В 1917 году математик-педагог получает назначение в Вятский педагогический институт. Здесь он выявляет в исследовании свои математические интересы, связанные с изучением теории вероятностей. В 1925 году И.Я. Депман переводится в Ленинград и становится преподавателем Педагогического института имени М.Н. Покровского и Педагогического института имени А.И. Герцена и получает звание профессора математики. Здесь протекает его плодотворная работа в течение 45 лет. За эту творческую деятельность Депман выпускает более 200 печатных работ, которые можно условно разделить на четыре категории [2]:

1. История математики — около 60 работ. Среди этих работ: "Карл Гаусс и Дерптский университет", "Новое о Н.И. Лобачевском", "Новое о деятельности академика М.В. Остроградского", "К биографии С.В. Ковалевской", "К биографии Леонарда Эйлера", "Забытый перевод "Начал" Евклида на русский язык", "История арифметики" (два издания), "Русские математические журналы".

2. Методика математики (общая и специальная) — около 50 работ. Среди этих работ: "О воспитательном значении математики", "О математической культуре учащихся", "Исторический элемент в преподавании математики в средней школе", "Первые уроки математической логики в школе".

3. Популяризация математики и естествознания как для младших, так и для средних и старших классов школы — более 40 книжек. Среди этих работ: "Из истории арифметики", "Возникновение системы мер и способы измерения величин", "Рассказы о математике", "Мир чисел и

фигур", "Русско-эстонский математический словарь", "Переписка Ньютона", "Математика на службе обороны страны", "Задачи Л.Н. Толстого".

4. Рецензии и краткие биографии замечательных математиков мира — около 50 работ, среди которых можно отметить "Сто рефератов в реферативном журнале «Математика»", "Бурбаки и единая математика", "Средневековая логика и возникновение математической физики", "Из истории математики на территории Эстонской ССР", "Академик В.А Стеклов в Петербургском университете", "Замечательные славянские вычислители Г. Вега и Я.Ф. Кулик", "Русские учёные во Французской Академии наук". И.Я. Депман читал лекции по истории математики в ленинградских педагогических институтах, городском и областном институтах усовершенствования учителей, а также в Ленинградском университете.

Большую работу И.Я. Депман проводил по подготовке научных кадров по педагогической специальности и истории математики. Под его руководством успешно были защищены несколько десятков диссертаций. Он собрал большую фундаментальную математическую библиотеку на русском и иностранных языках. В этой библиотеке имелись также биографии с портретами многих математиков и математиков-педагогов, как отечественных, так и зарубежных.

Одной из самых фундаментальных работ является "История арифметики" [3], которая дважды была переиздана. Даже по оглавлению пособия можно легко оценить титанический труд, проведенный автором. Большой раздел изучения натуральных чисел посвящен истории нумерации, которая является актуальной темой в арифметике начальных классов, а также более старших классов. В одном из параграфов книги рассматриваются совершенные числа, которые равны сумме всех своих делителей, например, $6 = 1 + 2 + 3$ или $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, а третье совершенное число — 496. Это очень красивые числа с особыми свойствами, но их не так уж и много. Они были известны еще Евклиду и описаны в IX книге "Начал", в настоящее время пока известны 47 четных совершенных чисел, а вот нечетных чисел еще не обнаружено.

Интереснейший материал монографии связан с суммой степеней натуральных чисел и доказательством полученных формул. Среди свойств натуральных чисел увидим треугольник Тарталья и треугольник Паскаля. Интереснейший материал связан с суммой четных или нечетных чисел, их квадратов или кубов. Например, доказывается утверждение, что сумма кубов n первых натуральных чисел равна квадрату суммы этих чисел.

Раздел арифметики, изучающий разложение натуральных чисел на множители, называется мультипликативным, но есть область арифметики, которая занимается представлением целых чисел в виде суммы чисел наперед заданного вида. Например, произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, само представимо двумя способами суммой двух квадратов. Учителя и ученики найдут и другие многочисленные теоретические и исторические вопросы по целым и дробным числам, а также по происхождению величин.

Большинство методических пособий И.Я. Депмана пронизаны полезным для восприятия математики историческим материалом. Например, для учеников средней школы была выпущена книга "Рассказы о математике" [6], которая наряду с достаточными теоретическими основами арифметики наполнена историческим обоснованием. Отметим, что небольшой раздел посвящен известной книге Леонтия Магницкого "Арифметика", которую можно увидеть и полистать в отделе редких книг и рукописей Ярославского государственного педагогического университета. История развития начальной арифметики представлена в виде рассмотрения нумерации чисел, двоичной системы счисления и других свойств арифметических действий.

Для проведения полноценных внеурочных мероприятий рекомендуем использовать небольшую книгу "Рассказы о решении задач" [4], в которой мы встречаемся с весьма головоломными задачами. Приведем один из таких примеров. Доказать геометрически известную формулу сокращенного умножения $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Основа решения объясняется обнаружением равносоставленности фигур, отвечающих правой и левой частям равенства.

В книге представлены задачи, которые увлекают не только учеников, но и взрослых людей. Вот такая задача. На столе лежит кусок веревки, вытянутый по прямой. Надо взять его одной рукой за один конец, другой рукой за другой конец и не выпуская концов веревки из рук, завязать узел. Ее решение лучше начинать своего рода методом от противного, когда предположить, что узел завязан, а потом его развязывать. Ответ не заставит себя ждать.

Можно предложить и геометрическую задачу: преобразовать данный треугольник ABC в равновеликий ему, с другим основанием AD и с тем же углом A при основании. Над многими задачами этого пособия придется задуматься даже взрослым людям.

Вызывает особый интерес отметить учебное пособие, написанное Иваном Яковлевичем Депманом в соавторстве с известным профессором Наумом Яковлевичем Виленкиным, автором современных учебников по математике 5-6 классов, — "За страницами учебника математики" [5]. Оно специально предназначено для учеников 5-6 классов в качестве дополнительного материала к урокам. Многие задачи вполне могут быть представлены и в современном четвертом классе, так как методическая наука шагает вперед. Особенно это касается многочисленных задач на расстановку палочек и составление различных фигур (аналогия с задачами на спичках). Школьники в доступной форме узнают историю нумерации и правила написания цифр, знакомятся с тем, что есть не только десятичная система счисления; приведены многочисленные примеры с буквами и звездочками для дальнейшего заполнения цифрами, чтобы получился правильный пример. В книге приведены свойства геометрических фигур, которые встречаются буквально вокруг нас.

Данное пособие отличается разнообразием задач. Приведем пример. По разные стороны реки находятся два поселка. Предположим, что берега реки прямолинейны и параллельны, найдите, в каком месте надо построить мост, чтобы дорога была кратчайшей. Предлагается и комбинаторная задача: расположить 10 точек на 5 отрезках так, чтобы на каждом отрезке было по 4 точки. Аналогично расположить 6 точек на 4 отрезках, чтобы на каждом отрезке было по 3 точки. Весь материал изложен так, чтобы сделать математику для школьников наиболее интересной и "живой". Числа таят в себе множество занимательных свойств, которые на первый взгляд не заметны.

Многосторонняя работа Ивана Яковлевича Депмана должна привлекать внимание современных учителей и школьников. Если рассмотреть новые стандарты начального и среднего образования, то можно увидеть, что немалая роль отводится внеурочной работе. На наш взгляд не стоит забывать известных ученых-методистов прошлого века и наряду с современными авторами применять прежние результаты исследований в настоящее время.

Библиография

1. Андронов И.К., Черкасов Р.С. 80-летний юбилей Ивана Яковлевича Депмана // Математика в школе. - 1967. - № 1. - С. 91.
2. Андронов И.К., Баранова И.В. Памяти профессора Ивана Яковлевича Депмана // Математика в школе. - 1970. - № 6. - С. 92.
3. Депман И.Я. История арифметики. - М.: Просвещение, 1965. - 414 с.
4. Депман И.Я. Рассказы о решении задач. - Л.: Детская Литература, 1957. - 128 с.
5. Депман И.Я. За страницами учебника математики. - М.:Просвещение, 1989. - 287 с.
6. Депман И.Я. Рассказы о математике. - Л.: Детская Литература, 1954. - 146 с.

Жаров Сергей Викторович,
доцент Ярославского
государственного педагогического
университета им. К. Д. Ушинского,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: szharv@rambler.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал "Математическое образование".

www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанным адресам.

Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2016 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2016 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >