ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцатый

№ 3 (79)

июль - сентябрь 2016 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 3 (79), 2016 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2016 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.09.2016 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 6 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (79), июль – сентябрь 2016 г.

Содержание

Независимому Московскому Университету — 25 лет

От редакции

В сентябре 1991 г. начались занятия на первом курсе Независимого Московского Университета. Одним из инициаторов создания университета был виднейший деятель математического образования и просвещения в СССР и России, член редколлегии журнала "Математическое образование"**Николай Николаевич Константинов**, ставший в 1990 году во главе Учредительного комитета университета. По инициативе Н.Н. Константинова одновременно с решением организационных вопросов создания университета в 1990-1991 учебном году в стенах московской школы № 345 для будущих студентов проходил просеминар по математическому анализу под руководством А.И. Штерна, в проведении которого приняли участие В.М. Имайкин и С.И. Комаров, также члены редколлегии нашего журнала. Организационную и финансовую помощь Учредительному комитету и Университету оказывал в эти первые годы еще один член редколлегии журнала А.В. Дубовицкий[1].

В настоящее время Университет, наряду с Московским центром непрерывного математического образования, является признанным центром обучения математике талантливых школьников и студентов.

Поздравляем Независимый Московский Университет со знаменательной датой и желаем ему плодотворного участия в деле сохранения лучших традиций российского математического образования и просвещения.

Редколлегия журнала "Математическое образование"

[1]Ряд документов по созданию Независимого Московского Университета опубликован в номере журнала "Математическое образование", посвященном 75-летию Н.Н. Константинова, № 40, 2007 г.

О методических и научных принципах создания школьного учебника математики серии "МГУ — школе". I. Числовые системы (5-6 классы)

К. А. Лебедев

Рассматриваются методические и научные предпосылки (принципы, методы), лежащие в основе учебников "МГУ — школе". Внимание акцентируется на 10 методических и научных принципах, используемых авторами учебников. Обсуждаются и критически сравниваются некоторые методики прошлого и настоящего. Затронут вопрос о влиянии информационных технологий на возможность создания единого учебника-справочника, базирующегося на объективном строении математического знания и проверенных, оправдавших себя методиках прошлого.

Ключевые слова: математическое образование, учебник математики, методические принципы, научные принципы.

Введение

В настоящее время сложилась весьма нездоровая и критическая ситуация с преподаванием математики во всем мире. Это ощущают на себе классические университеты, высшие учебные заведения, куда приходят малоподготовленные школьники.

В России имеется "Концепция развития математического образования в Российской Федерации", утверждённая распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 № 2506-р, где сказано, что "Без высокого уровня математического образования невозможно выполнение поставленной задачи по созданию инновационной экономики..." [1].

Критичность положения с математическим образованием отмечалась и в США. В 2000 г. была создана специальная комиссия по проблемам школьного образования. В докладе Комиссии президенту Соединённых Штатов под названием "Пока ещё не слишком поздно" ("Before It Is Too Late", John Glenn's National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century, September 27, 2000), [2] говорится: "Комиссия убеждена, что на заре нового столетия и тысячелетия будущее благосостояние нашего государства зависит не только от того, насколько мы хорошо обучаем детей в целом, но и от того, насколько мы качественно обучаем естественным, фундаментальным наукам, и в частности, математике...".

Качественное обучение "обусловлено качеством многих других его составляющих — учебников, учебных планов, программ, их согласованностью с возможностями усвоения учащимися, качеством подготовки учителей, компетентностью управленцев от образования. Весьма важными являются: количество отведённого учебного времени, качество методического обеспечения учебного процесса, возможности его совершенствования и пр. Влияют на качество образования и качества обучаемого "человеческого материала", как сегодня принято выражаться, которые вырабатываются современной жизнью во всех её проявлениях" [3, с. 7].

Попытки исправить ситуацию с недостаточным профессиональным уровнем учителей математики занимаются лучшие университеты Америки [4].

Уникальные усилия предпринял университет Беркли, где создан кружок, в котором учат математике с 6-летнего возраста на протяжении 12 лет и вуз готовит для себя кадры [5]. Ведут занятия профессора университета. Интересно отметить, что здесь переведены на английский язык книги А. П. Киселёва, ссылки на них можно найти на сайте университета.

Американская транснациональная компания "Боинг" оказывает поддержку Московскому центру непрерывного математического образования уже в четвёртый раз: общая сумма составила сто тысяч долларов. Естественно, сразу возникает вопрос: зачем им это нужно? Дело в том, что "Боинг" постоянно набирает по всему миру множество высококвалифицированных рабочих, инженеров, учёных с очень хорошим образованием. В процессе этого набора американцы отметили общее падение уровня образования в мире, в частности, естественно-научных дисциплин и особенно математики. А так как около полутора тысяч российских инженеров работают сегодня по программам сотрудничества с компанией "Боинг", корпорация оказалась заинтересованной в поддержании высокого уровня математического образования в России [6]. Правда, частный капитал, как известно, ограничен видением только ближайших своих проблем и не может решить глобально проблему образования. Это под силу только государству.

Особая роль в повышении качества обучения и качества знаний учащихся принадлежит учебнику. Процитируем ещё раз И. П. Костенко: "Часто слышится мнение, что учитель — более важный фактор обучения, нежели учебник. Мнение, по меньшей мере, поверхностное. Бесспорно, что хороший учитель оказывает сильнейшее благотворное психологическое влияние на учащихся, стимулируя их мотивацию и организовывая познавательный процесс. Но хороший учебник влияет и на учащихся, и на учителя. Он даёт в руки учителя педагогически организованную систему учебного предмета, методически проработанную и выверенную длительным опытом многих поколений учителей. Тем самым он избавляет учителя от многих ошибок и вооружает правильной методикой преподавания. Это особенно важно для массовой школы, ибо хороший учебник массово поднимает среднего учителя до хорошего. Но главная функция учебника другая. Хороший, доступный учащимся учебник позволяет им самостоятельно добывать знания и осмысливать их. Если же такие учебники сопровождают все годы учения, то их влияние на становление мышления детей неоценимо. И эту функцию учебника не может заменить никакой хороший учитель. За долгую историю педагогики её лучшими представителями было понято, что "хороший учебник — фундамент (!) хорошего преподавания" (К. Д. Ушинский). С хорошим учебником и средний учитель будет иметь хорошие результаты" [3, с. 452].

Для того чтобы учебник был хорошим, он должен удовлетворять ряду принципов, многие из которых хорошо известны, но забыты. Например, знаменитому учебнику А. П. Киселёва, по его же словам, присущи три качества: точность в формулировках при установлении понятий, простота в рассуждениях, сжатость в изложении. Стоит сравнить этот учебник с современными учебниками, без всякой меры искусственно раздутых по объёму, насыщенных совершенно ненужной, преждевременной по возрасту, трудной информацией и непосильными требованиями к неокрепшему интеллекту учащегося. Учебники перегружены избыточной второстепенной информацией, которую не способен переработать никакой ученик.

Точности в формулировках сейчас не добиваются, это не модно, добиваются логической строгости, высокого теоретического уровня. Однако педагогика давно установила, что стремление к высокому теоретическому уровню в школьных учебниках приводит к глубокому внутреннему конфликту с понятностью обучения. А. П. Киселёв разрешил это противоречие путём смещения центра тяжести с высокого теоретического уровня на точность, простоту, наглядность и убедительность рассуждений для ученика, при этом не греша против научности.

Пристально рассматривая методические приёмы автора, можно поставить ему в упрёк нарушение принципа высокого теоретического уровня. Мы имеем в виду печально известный "принцип ВТУ", десятилетиями упорно внедряемый в отечественной школе, причём крупными математиками. А. П. Киселёв сумел, не смущаясь этим, мастерски пожертвовать высоким теоретическим уровнем ради удобства для ученика.

В данной статье речь пойдёт об учебниках из серии "МГУ — школе". Авторы учебников (С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин) следуют в русле классических методов, характерных для русской школы, придерживаясь Киселёвских принципов понятности, убедительности для ученика. Предмет излагается в той последовательности, в какой устроена математика, основываясь на её внутренней логике, на объективном строении математического знания, раздел за разделом, что позволяет избежать ненужных повторов, сделать изложение даже сложных вопросов простым и понятным для учащихся. Вместе с тем учитываются особенности возрастной психологии и возрастных ограничений [7-9].

Авторы являются сторонниками традиционного российского образования, нацеленного на формирование и развитие творческой личности. Они не поддерживают стремления формировать грамотного потребителя того, что создано на Западе, стремления не учить, а “развивать”, “образовывать учащихся”, оказывая им образовательные услуги.

Концепция, состоящая в примате развития над обучением, имеет давнюю историю. По меньшей мере, ещё немецкий педагог А. Н. Нимейр (1754–1828) разработал систему упражнений для развития способности мыслить. В России сторонником этой концепции был А. Г. Ободовский (1796–1852). “В дальнейшем эта концепция неоднократно возвращалась в массовую школу, не принося, однако, ей ощутимой пользы, а нередко принося ощутимый вред” [10, с.66].

Рассмотрим методические и научные принципы, заложенные в учебниках математики для 5-6 классов [7], алгебры для 7-9 классов [8], алгебры и начал математического анализа для 10-11 классов [9]. В данной статье остановимся на учебниках для 5-6 классов.

Методические принципы

Принцип 1. Математика едина и может быть изложена в одном учебнике для работы по разным программам.

Математика едина — это можно рассматривать с разных точек зрения, с точки зрения самой математики, её природы, строения, с точки зрения теории познания, с точки зрения философской теории познания. Не имея возможности касаться всех сторон этого непростого суждения, отметим, что математику делает единой то, что она, как никакая другая дисциплина, имеет единообразный метод исследования, единый предмет изучения, не может быть строго разделена на части: чистую и прикладную, хотя это и не означает тождества этих частей.

Знания, сообщаемые учащимся, располагаются в определённой системе и строгой последовательности. Система и последовательность не придумываются методистами, они основываются на объективном строении математического знания и вырабатываются длительной практикой обучения. В математических школах при МГУ многие годы ведётся обучение по учебникам, которые аккумулировали методику обучения за достаточно долгий период времени и предусматривают материал для разного уровня подготовки школьников.

Принцип 2. Содержание учебника должно соответствовать научной точке зрения на изучаемые вопросы.

Это очень трудновыполнимое, тонкое требование. Большинство здравомыслящих педагогов хорошо понимают, что строгое изложение математики научным способом в школе невозможно. Как верно сказал академик Л.Д.Кудрявцев, в основе должно лежать требование разумной строгости в духе А. П. Киселёва. Киселёв был в курсе научных достижений своего времени, его учебники отвечали научной точке зрения на математику, однако в своих учебниках он ни в коей мере не стремился к высокому теоретическому уровню.

“Предельная современная научность, как её в настоящий момент понимают математики, не может быть осуществлена в школьном курсе. Принцип ВТУ является вредным, оторванным от действительности, недостижимым, нереальным пожеланием” [3]. Строгая аксиоматическая научность требует применения таких средств, которые не могут быть поняты учащимися на каждой ступени школьного развития.

В учебниках серии “МГУ — школе”, найдено педагогически грамотное оптимальное решение: не противореча научности, с научной чёткостью, но вместе с тем доступно, наглядно излагается материал в русле лучших классических учебников прошлого.

Научная сторона проявляется также и в том, что школьная математика - это определённая последовательность разделов, отвечающая её объективному строению. В основе последовательности лежит расширение понятия числового множества замкнутого относительно некоторых операций. Это известная последовательность вложенных одна в другую числовых множеств, которая обсуждается далее (принцип 10). Таким образом, в упорядочении разделов в учебнике математике, таким образом, явно прослеживается организующая роль теории. В теории чисел совокупность рассматриваемых операций задаёт и разделы: прямые операции сложения, умножения, возведения в натуральную степень не выводят за рамки натуральных чисел (множество натуральных чисел замкнуто относительно прямых операций). Прямые операции с делением дают множество дробных чисел (множество дробных чисел замкнуто относительно 4 операций). Прямые операции с вычитанием дают множество целых чисел. Если рассматривать прямые операции и деление с вычитанием, то это приводит к рациональным числам. Если ещё рассматривать и извлечение корня из положительного рационального числа, нахождение логарифма (или выполнение тригонометрического действия), то появляется раздел вещественных чисел. Извлечение корня или логарифма из отрицательного числа (или выполнение тригонометрической операции с отрицательным числом) приводит к множеству комплексных чисел. Все это хорошо известно, однако мало найдется учебников, где бы это учитывалось и использовалось бы в полной мере.

С точки зрения теории материал делится на разделы, в которых операции определяют природу раздела. Но в разделе можно рассматривать все семь операций. Так, вычитание изучают и в 1-м классе, а целые числа, порождаемые вычитанием, — только в 6-м классе. Деление изучают уже во 2-м классе, а дробные числа, порождаемые делением, — только в 5-м классе. В [9, 11] для начального знакомства с корнем и логарифмом используют множество натуральных чисел.

В учебниках серии “МГУ — школе” для 5-6-х классов числовые системы изучаются последовательно, они вложены друг в друга. В курсе алгебры (7-11-е классы) аналогично устроены изучаемые алгебраические системы, иерархия которых отвечает научной точке зрения и не может быть построена произвольно. Иерархию разделов проще всего построить дедуктивно (см. принцип 10). При этом в учебниках реализовано единство изучения теории и практики решения задач для каждого из разделов.

Принцип 3. Учебник должен сочетать в себе научность, экономность и логичность изложения материала с доступностью для учащихся его учебных текстов.

Требования научности и логичности с одной стороны (но не принцип ВТУ), простоты и наглядности — с другой, при изложении учебного материала взаимно противоречивы. В учебниках достигнута некоторая гармония этих требований. Правильное соотношение между научностью, точностью и доступностью есть один из самых важных критериев любого учебника математики. Тезис о простоте означает, прежде всего, простоту построения курса в целом (см. далее), при этом основное внимание уделяется главным принципиальным идеям, уделяется много внимания разъяснению основных понятий, навыкам действий, осмысленному решению задач, а дополнительный учебный материал (исторические сведения, олимпиадные задачи, занимательные задачи, задачи на смекалку [12]) играет подчинённую роль и выделен в дополнительные параграфы.

Учебник предполагает, в частности, недопустимость непосильных абстракций в обучении и несоответствующего детскому опыту языка преподавания. Язык объяснений и задач приспособлен к психологии учащихся. Изложение учебного материала соответствует уровню их знаний, развитию и возрастным особенностям. Это качество учебников не в последнюю очередь обеспечивается постоянной работой над ними с 1987 г. одного из их авторов — заслуженного учителя РФ А. В. Шевкина.

Принцип 4. Учебник не должен ограничиваться интересами "среднего" ученика, он должен удовлетворять интересам всех учащихся — от слабых до сильных, обеспечивать любой желаемый уровень глубины изучения материала.

Это достигается сочетанием линейного и концентричного построения всего курса. Содержание теоретического материала развивается внутри раздела линейно, уровень трудности в рамках любой темы нарастает линейно. Например, присутствуют простые задачи на освоение теории, задачи на новый изученный метод, потом на комбинирование нескольких методов. Дополнительные задачи повышенного уровня включены практически во все разделы учебника, решение уравнений, неравенств и систем в старших классах дополняется задачами с модулем, с параметром. Приводится система упражнений для повторения изученного (в теории и практике), что привносит элементы концентризма в изучение математики.

Концентризм также проявляется и в том, что изучение каждого следующего раздела повторяет темы предыдущего раздела, но на новом уровне. Этот концентризм в обучении часто называют "восхождением по спирали". Все это позволяет даже слабым ученикам достигать высокого уровня усвоения учебного материала.

Сочетание линейности и концентричности в обучении обеспечивает систематичность обучения. Изучение нового раздела предваряет информация для повторения и закрепления ранее изученного. Новое не будет усваиваться, если предыдущий материал недостаточно освоен. Решая задачи, ученик не только осваивает новый материал, но и повторяет ранее пройдённый. Прочность знаний достигается постоянным повторением пройдённого материала. Повторение материала приводит к углублению, систематизации и обобщению знаний.

Надо отметить, что разложение целой части в отдельные разделы и каждого раздела на темы осуществляется анализом, а объединение в целое — с помощью синтеза (см. принцип 10). Поэтому сам способ построения обсуждаемых учебников естественным образом представляет единый аналитико-синтетический подход к написанию учебной книги с позиций *объективного строения* математического знания, что само по себе является глубинным положительным движущим мотивом при обучении.

Принцип 5. Учебник и способ изложения материала в нём должны быть пригодны для организации дифференцированного обучения и достижения разных целей по разным программам.

При массовом применении метода неизбежно встаёт вопрос о дифференциации обучения и задания в задачнике должны быть сгруппированы в последовательные группы. В первой содержатся стандартные обязательные задачи для всех учащихся, а во второй, следующей за ней группе представлены задачи, предназначенные для тех учащихся, которые проявляют интерес к математике, хорошо мотивированы на её изучение. К этим двум обязательным уровням добавляются ещё 3-4 уровня повышающейся сложности. Решая задачи, учащиеся неоднократно возвращаются к исходному, основополагающему теоретическому материалу, поднимаясь медленно к новым уровням.

В общеобразовательных школах, не ориентированных на повышенную математическую подготовку, дополнительный материал можно не рассматривать без потери в формировании правильной картины изучаемого. В школах и классах с углублённым изучением математики в программу включаются дополнительные теоретические вопросы, решаются дополнительные задачи, специально выделенные в учебниках. Применение одного учебника и для общеобразовательных школ, и для школ с повышенной подготовкой по математике даёт много преимуществ. Например, переход на более высокий уровень обучения не будет вызывать трудностей ни у учителей, ни у учащихся, так как на каждом из этих уровней изложение материала в учебниках строится по одной и той же схеме. Это позволяет учащимся повышать свой уровень математической подготовки самостоятельно, что способствует мотивации обучения и т.д. Учебник учит, как можно учиться самостоятельно, как можно самостоятельно добывать знания и осмысливать их. Это требование непосредственно связано с предыдущим четвертым принципом.

У учащихся 5-6-х классов ещё недостаточно развито абстрактное мышление, поэтому при введении новых понятий, идей в учебниках авторы идут от частного к общему, от известного в предыдущем разделе к новому в следующем разделе. Прежде чем сделать общий теоретический вывод, демонстрируется ряд примеров с конкретными условиями. Сложным задачам предшествует ряд более простых, комбинацией которых является эта сложная задача.

Принцип 6. В учебниках серии “МГУ-школе” уделяется много внимания вопросу “почему?”, имеющему большой развивающий потенциал, который увязан с вопросом “как?”

Учебники позволяют интенсифицировать процесс обучения. Они полностью обеспечивают обучение тех школьников, которые хотят и могут обучаться основам наук, так как нацелены на формирование понятийного мышления. В учебниках имеются определения понятий, доказательства их свойств, причём в 5-6-х классах доказательства проводятся на конкретных числах, но так, чтобы при замене чисел буквами получилось общее доказательство; с 7-го класса формулируются и доказываются теоремы. Всё это делается авторами для развитии теоретического мышления, необходимого для сознательного усвоения школьных курсов математики и смежных дисциплин.

Изложение материала отличается продуманностью и взвешенностью, учитываются психолого-физиологические возможности учеников. Учебники действительно эффективные, потому что используются подходы, нацеленные на развитие логического, абстрактного мышления. Таким образом, они способствуют развитию личности учащегося совместно с другими науками, особенно с геометрией, физикой, химией, а также информатикой и началами программирования.

В учебниках серии “МГУ — школе” высокий научный и методический потенциал проявляется в том, что учебный материал располагается в естественной последовательности, соответствующей историческому процессу познания математических истин. Эта естественная последовательность позволяет излагать материал глубоко, экономно, сжато и строго. Последовательность разделов нацелена на получение фундаментальных знаний, на формирование твёрдых навыков, на обучение действовать осознанно.

Усвоение будет осознанным, если новые понятия будут появляться как развитие ранее изученных. Недопустимо формальное, механическое усвоение непонятых учеником знаний. Осознанному усвоению знаний способствует то, что в учебниках, как уже было отмечено, имеются следующие друг за другом разделы: натуральные числа, обыкновенные дроби, целые, десятичные дроби, рациональные, вещественные, комплексные. Темы, изученные в предыдущем разделе, появляются в следующем разделе на новом уровне. Идея появления нового раздела связана с расширением множества чисел для того, чтобы новое множество стало замкнутым относительно новой обратной операции. Таким образом, знания и навыки, приобретаемые учениками, будут появляться в определённой системе и строгой последовательности, что в работе [3] названо “принципом системности”.

Принцип 7. Арифметика — фундамент всей школьной математики и смежных естественно-научных дисциплин.

Это основная, методически очень продуктивная, простая и ясная мысль, которая граничит с банальной истиной, но тем не менее о ней сейчас основательно забыли. Арифметика является первым примером построения теории. В ней есть определения, доказываются теоремы, но в соответствии с опытом младших школьников и возможностями восприятия слова “определение”, “теорема” не используются. Например, признаки делимости чисел в 5-м классе доказываются на конкретных числах, а в старших классах доказываются как теоремы.

Следует отметить, что обучение школьников в рамках научно-обоснованной схемы изучения числовых систем как расширения множеств готовит их к изучению алгебраических систем, закладывает базовые знания, умения и навыки для всего последующего изучения алгебры, в процессе которого также происходит расширение рассматриваемых алгебраических множеств-записей.

Существенным содержанием курса математики в 5-6-х классах и способом развития мышления и речи учащихся является работа с текстовыми задачами. Процитируем: "Пока мы будем учить детей на русском языке — не только великом и могучем, но и достаточно трудном, пока мы хотим учить их сравнивать, выбирать наиболее простой путь достижения поставленной цели, пока мы не отказались от воспитания гибкости и критичности мышления, пока мы стараемся увязывать обучение математики с жизнью, нам будет трудно обойтись без текстовых задач — традиционного для отечественной методики средства обучения математике. В конце 60-х годов XX в. арифметические способы решения задач посчитали анахронизмом и перешли к раннему использованию уравнений. Качество школьного образования (не только математического) от этого только ухудшилось. Теперь уже многие учителя сами плохо представляют, что такое арифметические способы решения текстовых задач, какие возможности для развития языка и мышления школьников они не используют в своей работе" [13].

В учебниках серии "МГУ — школе" для 5-го класса даются основные сведения о натуральных числах и нуле, приводится множество текстовых задач, повторяются и систематизируются сведения о натуральных числах, изучается тема "Делимость натуральных чисел". С самых первых уроков большое внимание уделяется обучению школьников решению текстовых задач арифметическими способами. В частности, рассматриваются задачи "на части", "на совместную работу" и т.п. В полном объёме изучаются обыкновенные дроби, большое внимание уделяется законам арифметических действий и их применению для упрощения вычислений. После каждой из четырёх глав имеются дополнения, содержащие исторические сведения и занимательные задачи, например, предполагающие вычисления с помощью калькулятора, задачи о многоугольниках, использование чётности при решении задач, сложные задачи на движение по реке.

В 5-м классе нет десятичных дробей, которые важны для практической жизни. Дело в том, что в учебник заложено требование формирования у учащихся достаточно полных умений, относящегося к каждому из разделов. В 5-м классе изучаются разделы — натуральные числа и обыкновенные дроби, составляющие основу всей математики. Их надо изучить основательно, чтобы в 6-м классе не прибегать к изнурительному повторению плохо осмысленных знаний в области обыкновенных и десятичных дробей.

Изучение разделов в достаточно полном объёме и довольно глубоко — это очень *важный принцип* и с философской точки зрения, и с точки зрения теории познания, в которых анализ и синтез рассматриваются как процессы мысленного или фактического разложения целого на существенные составные части и воссоединение целого из частей. Понятно, что если части недостаточно изучены и плохо осмыслены, то и прочное их соединение невозможно.

В 6-м классе для повторения натуральных чисел и дробей сначала изучаются отношения, пропорции, проценты, масштаб, а затем целые числа, на которых проще освоить идею знака числа, определить знак результата действия над числами. Лишь после этого вводятся дроби произвольного знака, т.е. раздел "Рациональные числа", при изучении которых существенно используются знания по темам "Обыкновенные дроби" и "Целые числа". Если предыдущие разделы освоены хорошо, то проблема сводится к освоению особенностей использования знаков в действиях с обыкновенными дробями.

Таким образом оказывается изученным множество всех рациональных чисел. Осталось освоить только действия с некоторыми из них, записанными в виде десятичных дробей. Сначала изучаются положительные десятичные дроби, потом десятичные дроби произвольного знака и встаёт естественный вопрос о переходе от одного способа записи рационального числа к другому — от десятичной дроби к обыкновенной и обратно. Это приводит к понятию бесконечной десятичной периодической дроби и обучению перехода от бесконечной периодической дроби к обыкновенной в простых случаях.

У учащихся естественно возникает вопрос о существовании непериодических дробей, они оказываются хорошо подготовленными к тому, что такие дроби существуют, что действия с ними выполняют приближённо. Так появляются иррациональные числа, дополняющие множество всех рациональных чисел до множества всех действительных чисел. Числовая система, необходимая для обучения в основной школе оказывается изученной к концу 6-го класса.

Итак имеются разделы:
натуральных чисел — **N**;
дробных чисел — **D**;
целых чисел — **Z**;
рациональных чисел — **Q**;
дробных десятичных чисел — $\mathbf{D_{10}}$;
действительных чисел — **R**.

Хотя десятичные дроби — это просто частный случай обыкновенных дробей (подраздел), но раздел D_{10} отодвинут и стоит перед разделом вещественных чисел, поскольку тесно связан с непериодическими дробями. Так естественным образом подготавливается почва для раздела вещественных чисел.

Изучение раздела комплексных чисел **C** отодвинуто на 8-11-е классы.

Принцип 8. Текстовые задачи — это ядро математического образования. Для глубокого понимания математики текстовые задачи необходимо решать постоянно в течение всего срока обучения — с 1-го по 11-й класс.

Систематическое решение текстовых задач, точнее, *классической системы типовых текстовых задач*, служит развитию логического, абстрактного мышления. Однако именно этого не хватает мировой педагогике. Решение системы текстовых задач может быть поставлено в качестве первого и самого верного способа развить мышление и речь учащихся, заинтересовать предметом. Это важнейший инструмент обучения и воспитания склонности к естественно-научным дисциплинам, преподавание которых немыслимо иначе как на текстовых задачах (геометрия, физика, химия).

Почему физики, химики ничего не выдумывают и учат с помощью текстовых задач и теории? Почему *только математики* позволяют себе бесперспективную деятельность, изобретая нежизнеспособные, малопродуманные, не проверенные практикой, отвергнутые историей методики обучения?

Многие современные учебники строятся на так называемых теории деятельности и теории развития, разработанных П. Я. Гальпериным и Л. С. Выготским. Не углубляясь в подробный разбор этих теорий, отметим некоторые их слабые стороны. Постулируется такое построение учебной деятельности, при котором на основе внешних предметных действий, организованных по определённым правилам (5 этапов), формируются знания, навыки, умения. Однако обеспечить все эти пять этапов в учебниках трудно, даже невозможно обеспечить и фактически дело сводится к самостоятельной деятельности учащихся с трудным, преждевременным по возрасту, непосильным для них практическим материалом, да он и не объясняется должным образом. При этом деятельность с теорией не предусматривается (вернее, предполагается, что теоретические знания возникнут в процессе деятельности, но это, конечно, не так), поэтому и цель постепенного преобразования материального действия в "идеальное", не достигается. Слабыми сторонами теории являются: 1) существенно ограничены возможности усвоения теоретических знаний; 2) сложна разработка методически полного обеспечения 5-этапного алгоритма операций; 3) у обучающихся формируются стереотипные мыслительные и моторные действия в ущерб развитию творческого потенциала.

Классическая педагогика, основанная на понимании, тоже придаёт важное значение понятию "деятельности", однако рассматривает ее только как часть в системе процессов, через которые происходит обучение. Кроме деятельности классические подходы к обучению уделяют большое внимание и таким психическим процессам как восприятие, память, мышление, речь, которые, разумеется, протекают в деятельности по освоению знаний, теории, методов решения задач, отработки теоретических и практических навыков, причем большая роль принадлежит деятельности при переходе навыков в автоматизированные умения.

Стало модным использовать теорию развития, в основе которой лежат работы Л. С. Выготского. Сторонники этой теории применяют наиболее общие категории в специальной психологии

— “развитие”, “зоны ближайшего и актуального развития”. На основании данной теории делаются следующие выводЫ: 1) обучение и развитие — два тождественных процесса; 2)шаг в обучении соответствует шагу в развитии; 3)ребёнок развит настолько, насколько обучен. Выводы достаточно очевидны, но это не те фундаментальные принципы (стоит сравнить с принципами 1-10 в данной статье) и не та платформа, на которых могли бы строиться эффективные методики обучения.

В современных учебниках слово “обучение” заменено словом “развитие” и методы обучения приняли неестественные формы. Опять же почему-то считается, что ребёнок сам может добывать теоретические и практические знания, самостоятельно справиться с трудным не по возрасту материалом и сделать потом общие теоретические выводы. На наш взгляд, происходит это потому, что, кажется, совершенно не осознаётся тот факт, что на основе общих категорий невозможно строить конкретные методики обучения. Это все равно, что физики бы пытались строить физические теории на основе общей категории материи. В основе любых физических теорий лежат понятия более конкретные, поддающиеся качественной оценке и количественному измерению: вещество, поле, масса, энергия и т.п. Так же точно и с точки зрения классической педагогики “развитие” есть общая категория, носящая мировоззренческий характер, которую она не отрицает, отождествляет с обучением, но методики строятся на более чётких, более конкретных понятиях.

Процитируем ещё раз И. П. Костенко: “Зона понимания трактуется как новая порция (тема, раздел) учебного материала, к которой можно от **“известной порции” понятно для учащегося перейти к “неизвестной”**. Если угодно, то это и есть зона развития, но совершенно ни к чему так понимать дело. “Развитие” нельзя оценить, нет критериев (материю тоже никак нельзя количественно измерить, ни качественно оценить, эта философская категория носит мировоззренческий характер), тогда как “понимание” поддаётся чёткой качественной и количественной оценке с разных сторон”.

Используя *разделы*, строго следующие один за другим и состоящие из приблизительно одних и тех же тем, легко оценить, где зона “известного” и где ближайшие зоны “неизвестного”, к которым можно перейти, понятно для ученика. Ясно, что эти траектории в пространстве разделов и тем могут быть разными, однако переход к новому разделу, если недостаточно освоен предыдущий, — грубая педагогическая ошибка, и тем не менее она встречается во всех современных учебниках.

В учебниках “МГУ-школе” предусматривается теоретическая деятельность по изучению теории и практическая деятельность по решению текстовых задач. Имеются два пособия для 5-6-х классов [14] и 7-11-х классов [15], содержащих текстовые задачи, подготовленные одним из авторов учебников. Как и в физике, эти сборники задач по математике содержат только текстовые задачи. У физиков наблюдается правильная постановка дела. Учебники физики и задачники — это разные книги, в одной книге эти две стороны не смешиваются. И только учебники А. Г. Мордковича имеют раздельные книги: учебник и задачник.

Текстовые задачи в учебниках серии “МГУ — школе” занимают центральное место. Именно решение текстовых задач вызывают интерес и положительные эмоции в наибольшей степени, чем любая другая деятельность. Это установлено в течение многих столетий и объясняется тем, что для решения текстовых задач необходимо задействовать мышление: понять постановку задачи, найти путь от неизвестных данных, к конечному ответу. Если надо, то рассматривают промежуточные задачи (это анализ), затем реализуют найденную идею решения (синтез), затем решение проверяют и оценивают критически. Требуется оценить, нет ли более экономного или красивого решения. Мышление используется в полной мере, развивается речь и логика. В процессе решения текстовой задачи приходится вспомнить аналогичные задачи и методы, высказать предположения, правдоподобные суждения. Попутно оцениваются правдоподобность результата, размерности величин. Каждая текстовая задача может быть развита в разных направлениях: изменить данные, комбинировать условия, самостоятельно составить задачу. При этом развивается мышление и, если угодно, осуществляется *общее развитие.* Навыки и умения формируются только в практической деятельности. Даже слабые ученики испытывают глубокие эмоции и проявляют особый интерес к оригинальным, занимательным задачам, задачам на смекалку [12]. Известно, что навыки, умения и привычки возникают успешнее вследствие глубокого эмоционального переживания. Не будет ли правильным в учебнике сосредоточить все текстовые задачи в отдельную главу для ежедневного, систематического решения (или даже иметь отдельную учебную книгу — текстовые задачи с методами решений)?

Текстовые задачи и в начальной школе образуют ядро образования, и авторы О. В. Узорова и Е. А. Нефёдова представляют набор выверенных типовых задач, упорядоченных по темам [16], вместе с работами [14, 15] они образуют единую преемственную цепочку. Отразим суть мировоззрения О. В. Узоровой её словами: "Прежде всего, видно, что в современных учебниках, решению текстовых задач отводится отнюдь не первичная роль, их решению уделяется недостаточное внимание. Например, текстовые задачи начинают давать только в конце первого класса, недостаточно объясняются методы решения различных типовых задач и связь методов решения с основными понятиями арифметики, тогда как именно текстовые задачи имеют большой *развивающий* потенциал. Они действительно развивают у детей много всего, в том числе и умение видеть причинно-следственные связи, умение выделить главное, произвести свой пусть маленький, но первый синтез и анализ. До сих пор встречается критика того, когда задачи даются по темам, по видам и типам. По мнению критикующих, надо давать просто задачи и некий общий тип решения. Для начальной школы это губительно. Вся отработка отдельных "кирпичиков" просто потом ложится на плечи родителей. Люди, которые ни дня не проработали в начальной школе, не сделали ни одного выпуска, пишут учебники, не прислушиваясь к учителям-практикам. Я учитель-практик с большим стажем. На уроке математики стоит заниматься математикой (чтобы успеть вложить в голову необходимые математические знания), а не массой мета-предметных связей, трудными логическими, "развивающими" задачами и пр. Получается, что на уроках математики большую часть времени предлагается красиво обсуждать неземные проблемы, а земные проблемы (научить решать текстовые задачи) — снова ложатся на плечи родителей".

На ранней стадии обучения сначала используются арифметические способы решения. Если задачи подобраны соответственно возрастным возможностям учащихся, то работа с ними способствует развитию их мышления и речи. Учащиеся это чувствуют, начинают осознавать, и в конечном счёте все это значительно повышает эффективность обучения, что вызывает эмоциональный интерес к процессу обучения, вызывает положительные глубокие эмоции при успешном преодолении трудностей. На наш взгляд, одна из главных задач начальной школы —-формировать именно привычку к успешной деятельности, эмоционально положительно окрашенной, а не давать ранние и трудные знания по предмету. Сложные теоретические знания придут позже, легче и проще, после формирования умелой деятельности по решению текстовых задач.

Простые традиционные текстовые задачи необходимы для массового математического образования. Их главная функция — служить начальному развитию логического, абстрактного мышления, а не прилагаться к практике в буквальном смысле, хотя и практическая сторона в текстовых задачах проявляется наиболее выпукло.

Многие европейские и американские педагоги полагают, что надо решать практические задачи из жизненной практики, которые буквально применимы к жизненным ситуациям. Но в русской школе, в российском образовании всегда стремились дать фундаментальные знания, а не знания потребителя для практического утилитарного использования. Авторы учебников серии "МГУ — школе" не следуют в русле этих западных, прагматических, но неприемлемых для фундаментального образования воззрений. Текстовые задачи и методы их решения — это то главное, центральное звено, ухватившись за которое можно вытащить *всю цепь*.

Принцип 9. Решение текстовых задач должно быть тесно увязано с теорией изучения текстовых учебных материалов, освоением методик решения задач.

Второе по важности звено это теория разделов: определения, правила, законы, алгоритмы, теоремы, способы, методы, подходы. Что такое *понимание* предмета (математики, геометрии, физики, химии)? В первую очередь это *умение* применить теорию к практическим текстовым задачам, что в геометрии, физике и химии совершенно очевидно. Умение правильно и уверенно применить общие теоретические знания к конкретной проблеме, отражённой в текстовой задаче, есть самое первое условие осмысленного понимания и осознания глубинной сути предмета.

Чтобы решить задачу, нужно осознать условия задачи, затем понять, к какой теме относится задача, какие теоретические сведения необходимы, вспомнить или найти нужные методы и формы приложения теории к данной задаче, выбрать самый эффективный способ, приводящий от исходных данных и условий задачи к ответу [17]. То есть по выражению знаменитого педагога Д. Пойя "совершить некоторое математическое открытие" [18].

Таким образом, мы видим, что в решении текстовой задачи, как в капле, отражается радуга переплетения теории и методической практики, чего не наблюдается при решении вычислительных задач, которыми заполнены без всякой меры страницы современных учебников математики. Однако понятна и важность решения вычислительных примеров, можно сказать, что они по значимости занимают третьестепенное место после теории и практики решения проблемных задач. Текстовые задачи пронизывают все разделы от 1-го до 16-го, и особенно натуральные числа, дробные числа, десятичные дроби, и как уже отмечалось, их следует решать постоянно.

Научные принципы

В курсе школьной математики "МГУ — школе" находят отражение основные идеи современной математики, хотя школьный курс никак не отождествляется с научным курсом математики. Определения, понятия, правила, теоремы формулируются доступно для сознания учащегося и в то же время не противоречат научной точке зрения.

Принцип 10. В учебниках выбрана схема изложения материала, отвечающая научным представлениям о расширении понятия числа.

Числовые системы изучаются в основном с 1-го по 7-й класс. Натуральные числа служат фундаментом всего математического образования, и изучение этого раздела продолжается и в старших классах, и даже входит в университетскую программу. Значимость этого раздела не ограничивается только арифметикой. На множестве натуральных чисел можно освоить не только сложение, умножение, возведение в натуральную степень, но и вычитание, деление, даже познакомиться с извлечением корня, логарифмированием, не прибегая к другим множествам чисел [11].

Авторы учебников из серии "МГУ — школе" придерживаются традиционного, фундаментального для российской школы от Л. Ф. Магницкого до А. П. Киселева и И. Г. Шевченко [19] последовательности изучения числовых систем. В учебниках прослеживается чёткая мысль о том, что каждое последующее множество целиком включает в себя предыдущее множество и в то же время является расширением предыдущего. Расширенное множество замкнуто относительно новой операции, её породившей.

Хорошо известна цепочка вложенных множеств (рис.1).

$$\begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \cup \\ \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \end{array}$$

Изображение иерархии числовых множеств с помощью знака вложения

Большим преимуществом подхода, принятого в учебниках, кроме формирования полных умений и навыков выполняемых действий на все более высоком уровне (в новом разделе), является также подготовка числовой базы для обучения в 7-м классе по курсам алгебры и геометрии, где, ещё не имея всех действительных чисел, принято рисовать непрерывные графики, доказывать тождества сокращённого умножения, а потом без всяких оговорок применять их в случаях $(3+\sqrt{2})^2$ и даже $(\vec{a}+\vec{b})^2$, говорить об измерении длин отрезков, обходя проблему их несоизмеримости.

Для более эффективного обучения в 7-9-х классах считается необходимым изучать материал крупными блоками, (разделами, в которых появляется новая операция, более полно и осмысленно. Это относиться и к старшим классам (см. заключение).

В 7-м классе кратко повторяется изученный в 5-6-х классах учебный материал, поскольку учащиеся могли ранее обучаться по другим учебникам. Ещё раз проходится материал до понятия действительного числа и правил приближенных вычислений (определение верных цифр результата очень важно для изучения физики и приближенных вычислений в математике). Далее изучаются одночлены, которые включают в себя уже изученные числа, потом — многочлены, включающие в себя одночлены, затем — алгебраические дроби, рациональные выражения, включающие в себя многочлены. Изучение алгебраических систем напоминает изучение числовых систем. Изучаемые множества вкладываются друг в друга, как матрёшки. Дробное выражение со знаменателем 1 эквивалентно целому выражению. По всему курсу учитель может вести повторение и систематизацию арифметических способов решения текстовых задач. Затем изучаются уравнения, системы уравнений, их применение к решению задач.

Практика показывает, что обучение математике крупными блоками (разделами), когда ученик надолго погружается в работу с однотипными объектами, позволяет заложить более прочные и осознанные знания, сформировать более полные и устойчивые умения и навыки, которые также не требуют большого учебного времени для их поддержания. Что же касается интересности предмета, то это никак не связано с частотой переключения с одного типа объекта на другой, с одного раздела на другой, когда внимание рассеивается. Интересность для учащихся в другом — в более полном овладении изучаемыми объектами одного *раздела*, а переключение осуществляются в решении текстовых задач, задач олимпиадного уровня, задач из ОГЭ и ЕГЭ.

Фундаментальность и предметность обучения, традиционно присущее российской педагогике, наилучшим образом сочетается с подачей материала крупными блоками (разделами), когда имеется тесная связь-включение между крупными блоками (см. рисунок). Эта основа для получения хороших результатов обучения в настоящее время максимально подорвана. Сначала уменьшилось учебное время на изучение математики, потом появилась система ложных ориентиров — стали преуменьшать значение знаний, умений и навыков, развития памяти, начали говорить о необходимости формирования компетентностей, о которых все равно приходится говорить в терминах “знания”, “навыки”, “умения”. Введена система итоговых испытаний, отвлекающая учителя и учащихся от основательного фундаментального изучения предмета, подменяющая её более простой целью — научиться решать небольшой набор типовых задач. Однако большие затраты времени на подготовку к этим испытаниям всё равно дают разгромные результаты — именно потому, что надежда добиться приличных результатов обучения без опоры на фундаментальность обучения является не более чем иллюзией.

Без правильного представления об устройстве математических объектов, входящих в разделы, знаний об их свойствах, способах их преобразования, правильного использования процесс обучения математике в средней школе стал менее эффективным. Надо ли говорить, что выпускники средней школы стали получать более слабую подготовку и оказываются неподготовленными к основательному изучению курсов математики в старшей школе и, как следствие, не готовыми к обучению в вузе.

В учебнике из серии “МГУ — школе” представлен материал в некотором избытке, для того чтобы каждый раздел мог быть усвоен до вполне достаточной разумной глубины. Совсем не обязательно каждый раздел изучать во всем объёме, на это просто нет времени. Но стремиться к этому надо. Чем полнее изучен предыдущий раздел, тем быстрее возрастает инерция движения, набирает скорость усвоения последующего материала, тем легче работает, пусть даже бессознательно, действительная самодвижущая причина разворачивания разделов в курс школьной математики.

Обеспечить прочные знания по предмету (по математике, геометрии, физике, истории и др.) можно только при условии разумно организованного систематического повторения теоретического учебного материала и практического решения задач. Повторение должно быть организовано циклично. Должно присутствовать простое повторение как повторное решение тех же самых задач из предыдущих разделов (линейное обратное повторение). Однако способ изучения материала, раздел за разделом, автоматически предписывает повторение по нарастающей сложности решения задач, в процессе которого учащиеся будут постоянно возвращаться к ранее изученным темам, но на новых уровнях сложности ("повторение по спирали", "восхождение по спирали"). Предусмотрено нарастание сложности задачного материала с учётом законов развития мышления детей и их психологического состояния на протяжении всего учебного года и всех лет обучения. Сокращается время на усвоение одного раздела, потому что происходит систематическое повторение предыдущего материала, который целиком входит в каждый новый раздел.

Такая последовательность изложения не противоречит, и даже можно сказать, как нельзя лучше подходит для сочетания с другими типами изложения: индуктивным, генетическим, дедуктивным, но мы не будем подробно останавливаться на этой, прямо не относящейся к учебникам из серии "МГУ — школе", стороне, хотя она очень важна. Отметим только, что фактически последовательность разделов предопределяет не только индуктивное, но и генетическое изложение, поскольку оно показывает понятие в развитии, учащийся видит как, начиная с понятия натурального числа, оно по мере перехода к другим разделам видоизменяется, знания пополняются другими понятиями числа: дробного, целого, рационального, действительного (иррационального), комплексного. Понимая, почему это происходит, и наблюдая понятие в развитии (отрицание отрицания), учащийся, пусть неосознанно, воспринимает диалектичность математики и связанную с ней диалектичность методики изложения.

Точно так же эта последовательность разделов и тем в разделах наглядно показывает, если уж угодно, "зоны ближайшего развития", к которым можно понятным образом перейти. Перепрыгнуть через раздел почти всегда невозможно без потери понимания, а через тему будут изъяны в понимании. Так, в современных учебниках мало уделяется внимания тождественным преобразованиям, что сказывается на умении решать уравнения и неравенства.

Школьные учебники должны строиться на фундаментальных, а не на второстепенных принципах. Например, деление на разделы, отвечающее научной точке зрения на современную математику, есть фундаментальный принцип, тогда как обучение быстрым "темпом", (а может, иногда, надо медленным) или "развивающее" обучение, подходы, основанные на узко-направленных "деятельностных" методах, относятся к педагогическим принципам, которые, конечно, следует принимать во внимание и использовать, но это не фундаментальные, а второстепенные принципы, на них не могут быть построены эффективные учебники.

Последовательность разделов математики диктуется осуществлением логической (аристотелевской) дедуктивной операции — дихотомией понятия. Все записи делим на тригонометрические и нетригонометрические (нет до сих пор названия этому множеству); нетригонометрические делим на логарифмические и нелогарифмические (и здесь нет названия); нелогарифмические — на показательные и алгебраические; алгебраические — на рациональные и иррациональные; рациональные — на дробно-рациональные и целые рациональные; целые делятся на многочлены и одночлены; многочлены — имеют два важных для школы подмножества: записи 1-й степени и записи 2-й степени; одночлены — на вещественные числа и собственно одночлены (одночлены, в которых более 1 множителя); вещественные — на рациональные и иррациональные; рациональные — на целые и собственно рациональные (знаменатель не равен 1); целые — на натуральные и неположительные целые.

Понятно, что в школьном курсе движение должно идти обратным индуктивным ходом [20], что и делается в обсуждаемых учебниках. В основе, фундаменте всего курса лежат натуральные числа, изучаемые с 1-го по 11-й класс и в в вузе. На этом фундаменте строятся все остальные разделы. В предисловии В. Садовничего, предваряющем каждый учебник серии "МГУ-школе", подчеркивается, что освоение знаний Науки подобно возведению здания: невозможно построить следующий этаж, не построив предыдущего. Это в высшей степени относится к математике, которая как никакая другая наука похожа на здание и имеет трёхмерное строение. Объективно математика состоит из перечисленных разделов ("этажи"). Разделы в свою очередь состоят из тем ("квартиры"). Задачи, примеры в какой-то теме каждого раздела могут варьироваться по трудности ("комнаты"). Мы имеем как бы три координаты, образно говоря, параллелепипед (здание) математики. Однако, важно то, что высота каждого раздела разная, поэтому следующий образ дополняет предыдущий. Математика — это лестница, и каждая ступень есть некоторый раздел математики. Перепрыгнуть через одну ступень лестницы, не освоив её на достаточном уровне, и перейти к более высоким ступеням не удаётся без потери понимания.

Обратимся к соотношению, в котором состоит объективное строение математического знания с её разделами и той удивительно эффективной педагогической системой, созданной нашим соотечественником В. Ф. Шаталовым. Здесь мы можем высказать только самые общие суждения, основываясь на кратком изложении механизмов системы Шаталова в труде С. Н. Виноградова [21], хотя эта система изложена полно самим В. Ф. Шаталовым в его многочисленных трудах.

Эффективность системы В. Ф. Шаталова основывается на последних 50-летних достижениях психолингвистики (науки о психологических и лингвистических аспектах речевой деятельности), которая доказала, что абстрактное мышление, речь (2-я сигнальная система) функционируют в тесном взаимодействии с непосредственным восприятием через органы чувств, и прежде всего зрительным восприятием, образным мышлением (1-я сигнальная система) и не могут функционировать иначе. Это *взаимодействие* ответственно за кодирование и раскодирование знаний, процессы прогнозирования в свободной речи, генерирующей текстовые высказывания, за процессы обучения, процессы анализа и синтеза при обучении и в конечном итоге за процессы *понимания* (и в значительной мере уровень творческого потенциала). с давних времён эта проблема познания с философской точки зрения обозначается как первичный переход от конкретного к абстрактному, а затем обратное восхождение от абстрактного к конкретному. При этом важно, чтобы при обучении дисциплинам достигалась *цельная картина*, каждая *часть* была обозрима с первых шагов обучения [21].

В картине все части тесно связаны в единый монолит. Это касается любых дисциплин. В математике это разделы, законченные фрагменты, из которых восстанавливается неотъемлемое свойство образа целого [21]. Разделы прочно связаны и упорядочены, их логическая последовательность устанавливается единственным образом. Это образ двух таблиц: числовые системы и алгебраические системы и состоят из $6 + 10$ разделов. Будучи образом и кодировкой математического знания, они позволяют легко прогнозировать и сам процесс обучения, "быстро выращивать кристаллы знаний и придать им прочность. ... Дело в том, что без зрительной кодировки, обучающая информация вообще не усваивается" [21]. Две таблицы объективного строения математического знания со столбцами-разделами, вполне удовлетворительно разрешают противоречие *части* и *целого* при восприятии учебного материала, что собственно и обеспечивает процесс понимания.

Сложность диалектики части и целого есть одна из основных сложностей при обучении [21]: "Диалектика части и целого порождает много методических проблем, среди которых, пожалуй, самая серьёзная — определение границ относительной самостоятельности и целостности разделов любого курса, выделение тем, элементов, для понимания целого и их смысловая субординация" [21]. С этим, очевидно, надо согласиться. Так вот, объективное строение математического знания, которая заложена в учебники из серии "МГУ — школе", вполне определённо и однозначно решает эту проблему, причём автоматически. Удивительно то, что до сих пор авторы современных учебников не уделяют этому обстоятельству должного внимания. Дальнейшее, более детальное обсуждение возможно и необходимо, но отложим его до второй статьи.

Однако требование строгого последовательного изучения разделов нельзя понимать буквально. Современного научного понимания теории числа в школе (хотя бы из-за возрастных ограничений) невозможно добиться, и авторы учебников не стремятся к этому. По мере обучения в школе, вузе нередко приходится переосознавать и переосмысливать заново уже пройдённые разделы, даже переучивать с позиций новых открывшихся горизонтов. Это закономерно и неизбежно. Добиваться изначально исчерпывающего научного понимания у школьников природы числовых систем при последовательном изучении разделов было бы абсурдно. Авторы учебников методично, с учётом возрастных особенностей решают проблему научности, методической основательности и психологической оправданности, применяемых взаимно противоречивых 10 принципов, стремясь к выполнению главных принципов понятности, убедительности, психологической оправданности для ученика.

Заключение

Человечество вступило в третье тысячелетие, в век информации в условиях катастрофического падения уровня общего образования, особенно математического. Математическое образование, не только отечественное, за последние 100 лет пережило несколько губительных реформ: внедрение принципа ВТУ, теоретико-множественную реформу, демократическую реформу, реформу компьютеризации и др. [10]. Самые характерные отрицательные черты всех этих реформ заключаются в абсолютном пренебрежении к психологическим возможностям ученика, игнорировании данных психологической и психико-лингвистических наук об обучении при построении учебника и разработке методики преподавания. Более того, даже твёрдо установленные общие выводы теории познания о диалектике "целого" и "части", первичного перехода от "созерцательной конкретности знания" к "абстрактному знанию" полностью игнорируются. В учебниках нет ученика, нет *главного* принципа: учебник должен быть в рамках психологических возможностей учащегося к обучению и строиться по законам наук: психологии, теории познания, диалектики. Он должен быть *понятным.*

Известный, *педагогически оправданный*, методически безупречный учебник А. П. Киселёва, учитывающий (но не полностью с точки зрения новых современных данных психолингвистики) специфику первичного перехода конкретного, созерцательного знания в абстрактное знание и наоборот, действовавший с начала и до конца 60-х гг. (свою методическую ценность он сохраняет и по сей день), не может быть использован, хотя бы потому, что не отражает нового расширившегося содержания учебного материала, появившегося за последние 50–60 лет. Сегодняшняя проблема создания эффективного учебника и способа обучения, в свете высказанных в статье положений, состоит в приведении формы изложения учебного материала (по типу киселёвского с элементами достижений психолингвистики) в соответствие с расширившимся содержанием. По нашему мнению, ближе всего к решению этой проблемы приблизились авторы учебников "МГУ — школе".

В планируемой следующей работе предполагается обсудить применение этих принципов к "Алгебраическим системам", в которые входят разделы: одночлены, многочлены (1-й, 2-й степени, и более высоких степеней), раздел дробно-рациональных выражений, алгебраических, показательных, логарифмических, тригонометрических. Центральными являются темы: тождества, функции, уравнения, неравенства, возможно, осложнённые модулем и параметром. В разделах также могут рассматриваться операции взятия предела, дифференцирования и интегрирования. Особое внимание планируется уделить реализации принципов в бумажных учебниках из серии "МГУ-школе" [8, 9] и других учебниках, а также возможностям, которые предоставляют информационные технологии для безусловного, последовательно-исчерпывающего применения принципов в электронном учебнике.

В настоящее время существует тенденция к решению проблемы в духе деления на разделы. В работе [22] чётко проводится деление на разделы, в [11] это стремление тоже просматривается, но осуществляется не до конца последовательно.

В данной статье показано, что в основе создания учебника лежат 10 принципов. Наиболее важными принципами создания эффективного учебника являются: 1) деление учебного материала на разделы (большие блоки с однотипными объектами), последовательно вложенные друг в друга; 2) преимущественное линейное освоение разделов; 3) акцентирование в процессе обучения на текстовых задачах (в “Алгебраических системах” ещё и на функциональной линии); 4) использование базы данных, наработанной за 50 лет.

В рамках иерархии разделов две линии: текстовые задачи и функции — должны бы, очевидно, присутствовать с предельно возможной последовательностью и увязаны с тождественными преобразованиями, с одной стороны, и уравнениями, неравенствами — с другой. Причины этого, а также роль теории будут обсуждаться более подробно во второй статье.

Можно констатировать наличие необходимых предпосылок создания эффективного учебника на указанных принципах. Безусловно также, что информационные технологии позволяют решить проблему электронного учебника-справочника, опираясь именно на эти принципы, что в бумажном варианте учебника, ориентированного только на поурочно-классное ведение занятий, сделать трудно, если и вовсе невозможно.

Единый электронный учебник имеет ряд неоспоримых достоинств. Отпадает необходимость в компоновке учебного материала. Стоит вспомнить, что непрерывные реформы школьного образования за последние 40 лет по сути выражаются в перестановке разделов, тем внутри разделов, в изменении количества часов, в применении разных подходов и т.д. (касаются методической стороны), но не касаются и не могут касаться существа дела, просто потому что все теории школьного учебного материала давно завершили своё развитие с научной точки зрения (принцип 2). Электронный учебник состоит из разделов, расположенных в строгой последовательности и тем внутри раздела, тоже в твёрдой последовательности. Электронный учебник-справочник может создаваться, совершенствоваться по частям, причём постоянно совершенствоваться будет исходный вариант, добиваясь выполнения принципов 3, 6 (а не начинать каждый раз создание новых бумажных учебников почти с нуля), Причём с помощью гиперссылок легко обеспечить уровни трудности в каждой теме и таким образом легко получается трёхмерное строение электронного учебника, чего никак нельзя добиться в бумажном варианте при его линейном строении. Это избавляет от необходимости создавать для каждого уровня трудности свой отдельный учебник. Так что легко обеспечивается выполнение принципов 1, 2, 4, 5, 7.

Если разделы следуют один за другим, то главные темы образуют методические линии. В числовых системах: основные понятия раздела, действия, текстовые задачи, вычисления выражений, последовательности, простейшие функции. Первые два раздела (натуральных чисел и обыкновенных дробей) изучаются в 1-4-х классах. Для начальной школы особенно важны принципы 4, 7, 8 и особенная психология восприятия учебного материала школьниками младших классов. Как известно, наглядность, предметность, простота учебного материала, киселёвский тип изложения составляют непременное условие качественного учебника, но, к сожалению, сейчас про это не вспоминают, ставя нереальные, недостижимые, фантастические с точки зрения психологии обучения, цели, “развивать” учеников, “учить их жизни”, вместо того, чтобы разумно организовать процесс обучения, сообразуясь с объективными данными, которые предоставляет возрастная медицинская, психолингвистическая науки.

В алгебраических системах, во всех разделах, присутствуют темы: тождественные преобразования, функция (функциональная линия), уравнения, неравенства, текстовые задачи, модуль, параметр, дифференцирование, интегрирование. Наряду с текстовыми задачами функциональная линия — это тоже важнейшая линия, которая реализуется в учебниках А. Г. Мордковича. Это прямые линии, состоящие из одних и тех же тем в разных разделах, простирающиеся слева направо в двумерной таблице. Все это при помощи современных информационных технологий осуществимо весьма эффектно и рационально. Учебник кроме текстов может включать аудио и видео записи с уроками, методическими разработками и т.п. На наш взгляд, также возможна связка электронной книги и электронного учебника-справочника посредством беспроводных каналов передачи информации. Следующим более отдалённым этапом может стать подключение электронной экспертной системы для контроля знаний и выдачи методических рекомендаций по созданию индивидуальной обучающей траектории в пространстве трёхмерного строения математического знания. Экспертная система впитает в себя эффективные обучающие методики прошлого и настоящего. Кроме того, сама экспертная система может быть сделана самообучающейся благодаря многотысячному опыту реального применения. Её эффективность как *учителя* становится неограниченной и может достичь недостижимой для человека уровня. Подобно тому, как человек-чемпион мира по шахматам уже не может соперничать с компьютерной самообучающейся экспертной системой. Не говоря уже о том, что человечество стоит на пороге создания говорящих роботов, "понимающих" человеческую речь. Новые методы создания искусственного интеллекта моделируются на основе принципов функционирования человеческого мозга (нейронные сети), в котором информация обрабатывается послойно (в данном контексте — по разделам), а связи между этими слоями укрепляются на основе того, что стало известно (*принцип понимания*). Во второй статье более подробно будет обсуждаться эта тема.

Автор статьи благодарит авторов учебников "МГУ — школе" М. К. Потапова и А. В. Шевкина за предоставленный материал, прочтение рукописи и сделанные замечания и суждения. Особая признательность И. П. Костенко за ряд ценных критических замечаний, послуживших улучшению статьи. С. Е. Рукшина за многие созвучные со статьёй замечания и идей возможности применения этих принципов для подготовки олимпийского резерва Российской Федерации. С. Н. Виноградова и В. Ф. Шаталова за обсуждение проблемы диалектики "части" и "целого" в процессе обучения. О. В. Узорову за обсуждение фундаментальной значимости решения текстовых задач при обучении в начальной школе. Г. К. Муравина и Л. Г. Петерсон за обсуждение альтернативных точек зрения. Декана факультета математики и компьютерных наук КубГУ С. П. Грушевского за многолетнюю дружбу, постоянное внимание к работе и предоставление возможности применения изложенной концепции, в разнообразных формах, на факультете математики и компьютерных наук КубГУ.

Тем не менее, ответственность за все возможные допущенные фактические неточности целиком лежат на авторе статьи.

Список литературы

1. Российская газета [Электронный ресурс] // Распоряжение Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. N 2506-р г. Москва. URL: http://www.rg.ru/2013/12/27/matematika-site-dok.html (дата обращения: 25.07.2016).

2. Математическое образование вчера, сегодня, завтра:.[Электронный ресурс] // Пока ещё не слишком поздно. URL: http://www.ug.ru/download/2008/glenn.pdf (дата обращения: 25.07.2016).

3. Костенко И.П. Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы. - М: РГУПС, 2013.

4. Math for America [Электронный ресурс] //Our model. URL: http://www.mathforamerica.org/our-model (дата обращения: 25.07.2016).

5. Berkelay Math Circle [Электронный ресурс] // Circle Archives. URL: http:mathcircle.berkeley.edu/index.php?options=bmc—bmcarchives—Circle Archives. (дата обращения: 25.07.2016).

6. BOING [Электронный ресурс] //Благотворительные программы. URL: http://www.boeing.ru/Boeing (дата обращения: 25.07.2016).

7. Математика. 5 (6) класс : учебник для общеобразовательных организаций с приложением на электронном носителе / [Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.]. - М.: Просвещение, 2016. - (МГУ-школе).

8. Алгебра. 7 (8, 9) класс : учебник для общеобразовательных организаций / [Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.]. - М.: Просвещение, 2014. - (МГУ-школе).

9. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 (11) класс : учебник для общеобразовательных организаций / [Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.]. - М.: Просвещение, 2014. - (МГУ-школе).

10. Колягин Ю.М. Русская школа и математическое образование. - М.: Просвещение, 2012.

11. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра и начала анализа. - М.: Просвещение, 2016.

12. Шарыгин И.Ф., Шевкин А.В. Задачи на смекалку: 5-6 классы. - М.: Просвещение, 2015.

13. Педагогический университет 1 сентября [Электронный ресурс] //Текстовые задачи в школьном курсе математики (5-9-е классы). URL: http://edu.1september.ru/courses/11/2. (дата обращения: 25.07.2016).

14. Шевкин А.В. Текстовые задачи по математике: 5-6 классы. - М.: Илекса, 2011.

15. Шевкин А.В. Текстовые задачи: 7-11 классы. - М.: Илекса, 2015.

16. Узорова О.В., Нефёдова Е.А. 2500 задач по математике. 1-4 классы. - М.: Астрель. 2012; АСТ, 2016.

17. Пойя Д. Как решить задачу. - М.: Наука, 1959.

18. Пойя Д. Математическое открытие. - М.: Наука, 1970.

19. Шевченко И.Н. Арифметика. Учебник для 5 и 6 классов. - М.: Просвещение, 1965.

20. Лебедев К.А. Архитектура элементарной математики. - Краснодар. КубГУ. 2000.

21. Виноградов С.Н. Открытие Шаталова. - М.: Школа Шаталова, 2010.

22. Моденов В.П. Математка для школьников и абитуриентов. - М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

Лебедев Константин Андреевич,
профессор кафедры "Вычислительная математика
и информатика" факультета математики
и компьютерных наук Кубанского
государственного университета, Краснодар,
доктор физ.-мат. наук.

Email: klebedev.ya@yandex.ru

Поворотное растяжение треугольника

С. В. Буфеев

В статье вводится новое понятие поворотного растяжения треугольника и изучаются некоторые его свойства. Рассмотрены примеры применения поворотного растяжения при решении геометрических задач. Статья доступна учащимся старших профильных физико-математических классов.

Рассмотрим на плоскости треугольник ABC, имеющий положительную ориентацию (т. е. треугольник, обход вершин которого в указанном порядке происходит против часовой стрелки). Обозначим середины его сторон $[AB]$, $[BC]$ и $[CA]$ соответственно через X, Y и Z. Для некоторого $k \in \mathrm{R}$ построим такие точки A', B', C', что $\overrightarrow{XB'} = k\,\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{YC'} = k\,\overrightarrow{YC}$, $\overrightarrow{ZA'} = k\,\overrightarrow{ZA}$ (рис. 1). Назовём *поворотным растяжением* (*turning stretching*) треугольника ABC с коэффициентом k преобразование, переводящее его в треугольник $A'B'C'$; будем записывать: $A'B'C' = TS^k\,(ABC)$, или $TS: \ ABC \xrightarrow{k} A'B'C'$.

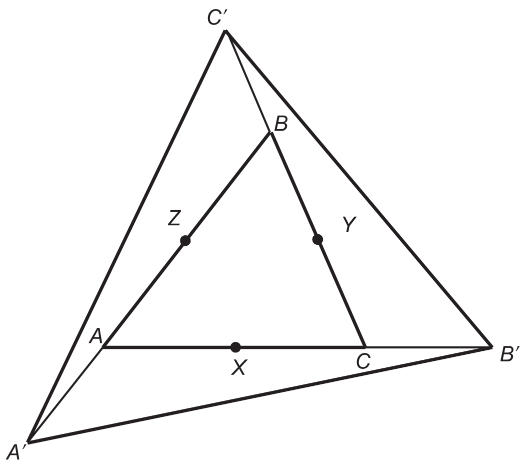

Рис. 1

Очевидно, что $ABC \xrightarrow{k=1} ABC$, $ABC \xrightarrow{k=-1} CAB$, $ABC \xrightarrow{k=0} ZXY$.

Утверждение 1. Отношение площадей треугольников $A'B'C'$ и ABC равно $\dfrac{3k^2+1}{4}$.

Доказательство. Случай $|k| = 1$ тривиален.

Рассмотрим случай $|k| > 1$. Пусть площадь треугольника ABC равна S. Тогда площадь треугольника $AA'B'$ равна

$$S_{AA'B'} = \frac{|AA'|}{|AC|}\cdot\frac{|AB'|}{|AB|}S = \frac{|AA'|}{2\,|AZ|}\cdot\frac{|AB'|}{2\,|XB|}S = \frac{k-1}{2}\cdot\frac{k+1}{2}S = \frac{k^2-1}{4}S.$$

Ясно, что этой же величине $\dfrac{k^2-1}{4}S$ равны и площади треугольников $BB'C'$ и $CC'A'$, а площадь треугольника $A'B'C'$

$$S_{A'B'C'} = 3\cdot\frac{k^2-1}{4}S + S = \frac{3k^2+1}{4}S.$$

Случай $|k| < 1$ рассматривается аналогично. Таким образом, утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Преобразование поворотного растяжения коммутативно:

$$TS^k \circ TS^l = TS^l \circ TS^k.$$

Доказательство. Пусть $A'B'C' = TS^k\,(ABC)$, $A''B''C'' = TS^l(A'B'C')$. Пусть в треугольнике ABC: $\overrightarrow{YC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{ZA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{XB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ (рис. 2).

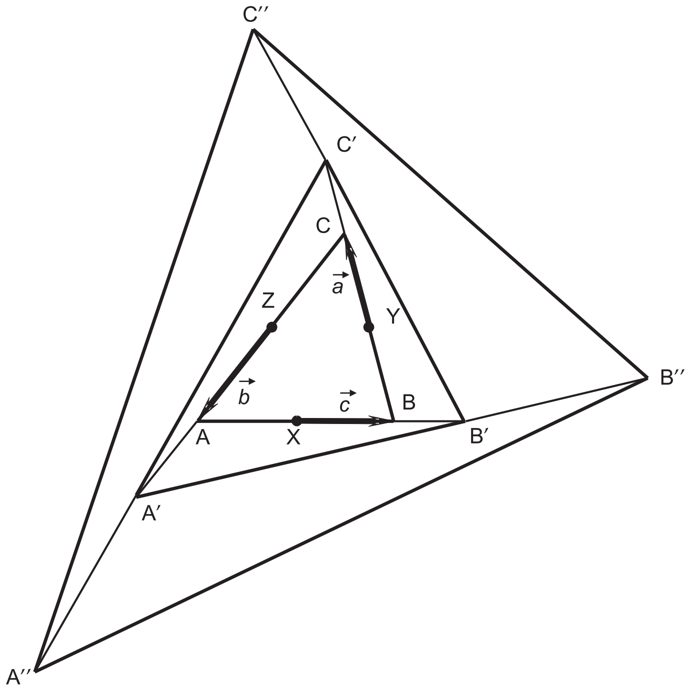

Рис. 2

Тогда

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AA'} = (k+1)\,\vec{c} - (k-1)\,\vec{b}, \quad \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{CA'} - \overrightarrow{CC'} = (k+1)\,\vec{b} - (k-1)\,\vec{a};$$

$$\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{A'B''} - \overrightarrow{A'A''} = \frac{l+1}{2}\overrightarrow{A'B'} - \frac{l-1}{2}\overrightarrow{C'A'} =$$

$$\frac{l+1}{2}\left((k+1)\,\vec{c} - (k-1)\,\vec{b}\right) - \frac{l-1}{2}\left((k+1)\,\vec{b} - (k-1)\,\vec{a}\right).$$

Подставив значение $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$, после приведения подобных слагаемых получим:

$$\overrightarrow{A''B''} = -\,(k+l)\,\vec{a} - \frac{1}{2}\,(3kl + k + l - 1)\,\vec{b}.$$

Симметричность полученного выражения относительно коэффициентов k и l и доказывает утверждение 2.

Утверждение 3. Композиция двух поворотных растяжений треугольника с коэффициентами k и $-k$ является гомотетией с центром в точке пересечения его медиан и коэффициентом $\dfrac{3k^2+1}{4}$: $TS^{-k} \circ TS^k = H_O^{(3k^2+1)/4}$.

Доказательство. Пусть по-прежнему $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ (рис. 3). Тогда

$$\overrightarrow{B'C'} = (k+1)\,\vec{a} - (k-1)\,\vec{c}; \quad \overrightarrow{C'A'} = (k+1)\,\vec{b} - (k-1)\,\vec{a};$$

$$\overrightarrow{A''C''} = \frac{k+1}{2}\overrightarrow{C'B'} - \frac{k-1}{2}\overrightarrow{A'C'} =$$

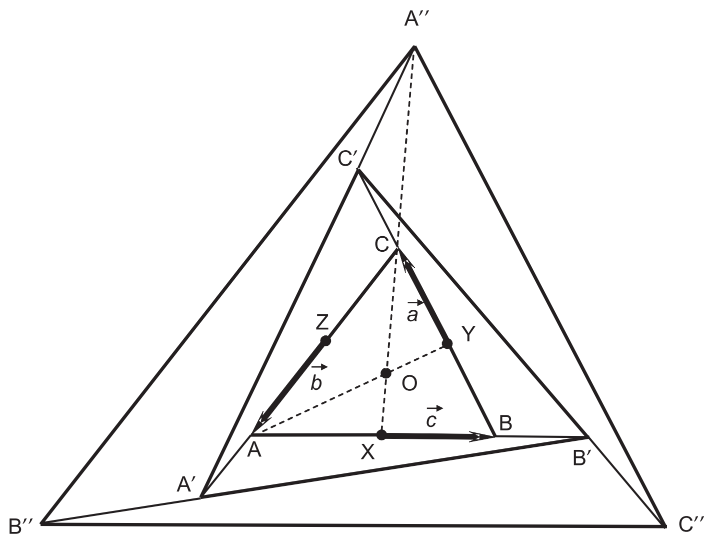

Рис. 3

$$= -\frac{k+1}{2}\left((k+1)\,\vec a - (k-1)\,\vec c\right) + \frac{k-1}{2}\left((k+1)\,\vec b - (k-1)\,\vec a\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(k^2-1\right)\left(\vec b + \vec c\right) - 2\left(k^2+1\right)\vec a\right).$$

С учётом равенства $\vec b + \vec c = -\vec a$, получим

$$\overrightarrow{A''C''} = -\frac{3k^2+1}{2}\vec a = -\frac{3k^2+1}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Подобным образом,

$$\overrightarrow{C''B''} = -\frac{3k^2+1}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{B''A''} = -\frac{3k^2+1}{4}\overrightarrow{CA}.$$

Параллельность соответственных сторон треугольников ABC и $B''C''A''$ доказана.

Для доказательства того, что центром гомотетии, отображающей треугольник ABC в треугольник $B''C''A''$, служит точка пересечения медиан треугольника ABC (а, значит, и треугольника $B''C''A''$), достаточно проверить коллинеарность векторов $\overrightarrow{CX}$ (вектора медианы) и $\overrightarrow{CA''}$. Представим эти векторы в виде линейной комбинации векторов $\vec a$ и $\vec b$, получим:

$$\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\left(2\vec b - 2\vec a\right) = \vec b - \vec a;$$

$$\overrightarrow{CA''} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'A''} = (k-1)\,\vec a + \frac{k-1}{2}\overrightarrow{A'C'} =$$

$$= (k-1)\,\vec a + \frac{k-1}{2}\left((k+1)\,\vec b - (k-1)\,\vec a\right) = -\frac{k^2-1}{2}\left(\vec b - \vec a\right).$$

Видим, что $\overrightarrow{CX} \parallel \overrightarrow{CA''}$.

Коэффициент подобия треугольников $B''C''A''$ и ABC равен

$$\frac{|OA''|}{|OC|} = \frac{|CA''| + \frac{2}{3}|CX|}{\frac{2}{3}|CX|} = \frac{\frac{k^2-1}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3k^2+1}{4}.$$

Утверждение 3 доказано.

Пример. В треугольнике ABC на продолжении стороны $[AB]$ за точку B отмечена точка B' так, что $|AB| = |BB'|$; на продолжении стороны $[BC]$ отмечена точка C' так, что $|BC| = |CC'|$;

на продолжении стороны $[CA]$ отмечена точка A' так, что $|CA| = |AA'|$. В треугольнике $A'B'C'$ на продолжении стороны $[B'A']$ отмечена точка A'' так, что $|B'A'| = |A'A''|$; на продолжении стороны $[C'B']$ — точка B'' так, что $|C'B'| = |B'B''|$; на продолжении стороны $[A'C']$ — точка C'' так, что $|A'C'| = |C'C''|$. Как относятся периметры треугольников $A''B''C''$ и ABC?

Решение. Треугольник $A'B'C'$ получен из треугольника ABC с помощью поворотного растяжения с коэффициентом 3, а треугольник $A''B''C''$ получен из треугольника $A'B'C'$ с помощью поворотного растяжения с коэффициентом -3. Согласно утверждению 3, эти треугольники подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{3 \cdot 3^2 + 1}{4} = 7$. **Ответ**: 7.

Замечание 1. Утверждение 3 также можно получить из утверждения 2, если положить $l = -k$. В этом случае $\overrightarrow{A''B''} = \frac{1}{2}\left(3k^2 + 1\right)\vec{b}$, т. е. вектор $\overrightarrow{A''B''}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{CA} = 2\vec{b}$, а отношение соответственных сторон этих треугольников по-прежнему равно $\frac{3k^2+1}{4}$.

Замечание 2. С учётом утверждения 2, утверждение 3 можно обобщить следующим образом: Композиция $2s$ поворотных растяжений треугольника с коэффициентами $k_1, k_2, \ldots, k_s, -k_1, -k_2, \ldots, -k_s$, осуществлённых в любом порядке, есть гомотетия с центром в точке пересечения медиан треугольника.

Замечание 3. Определение поворотного растяжения треугольника задаёт и способ его построения. Возникает обратная задача: как по данному образу $A'B'C'$ построить его прообраз — треугольник ABC, из которого он был получен с помощью поворотного растяжения с коэффициентом k? Решение этой задачи вытекает из утверждения 3; для этого:

1) строим $A''B''C'' = TS^{-k}\left(A'B'C'\right)$;
2) находим точку O пересечения его медиан;
3) строим $ABC = H_O^{4/(3k^2+1)}\left(A''B''C''\right)$.

В результате поворотного растяжения вектор стороны треугольника при $|k| > 1$ увеличивается по длине и поворачивается на некоторый угол. При композиции n поворотных растяжений с заданным коэффициентом k вектор стороны треугольника будет каждый раз удлиняться (в общем случае в непостоянное число раз) и поворачиваться (в общем случае не на постоянный угол). Представляется содержательной следующая задача.

Задача 1. Найти значение k, при котором при n-кратном применении преобразования поворотного растяжения с коэффициентом k данный треугольник переходит в гомотетичный ему треугольник; при этом суммарный угол поворота вектора каждой стороны треугольника должен составлять $m\pi$ ($m \in \mathrm{Z}$).

Решение. Пусть $\vec{a}_0 = 2\vec{a}$, $\vec{b}_0 = 2\vec{b}$, $\vec{c}_0 = 2\vec{c}$ — векторы сторон данного треугольника (рис. 4).

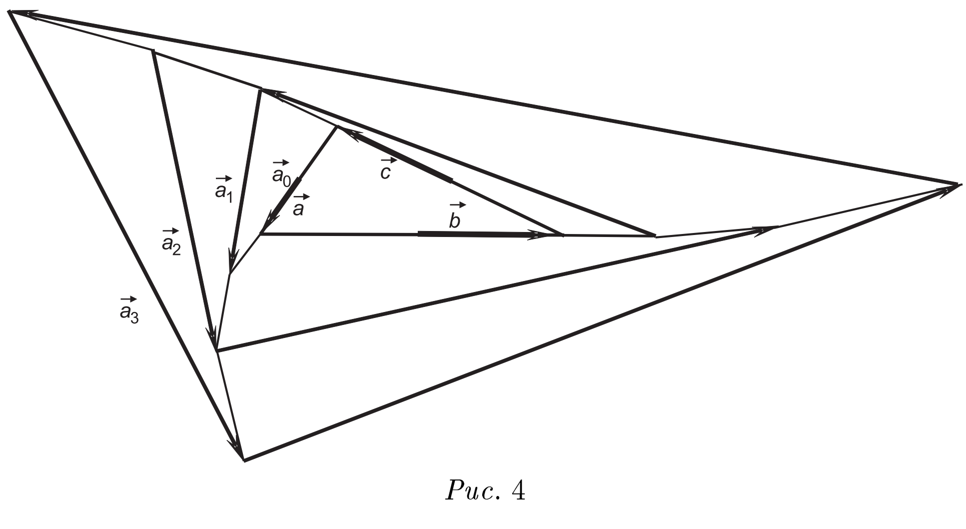

Рис. 4

Будем последовательно применять к треугольнику преобразование поворотного растяжения с коэффициентом k. Обозначим через $\vec{a}_i$, $\vec{b}_i$, $\vec{c}_i$ векторы соответственных сторон треугольника, полученного после i-го преобразования. Найдём разложение вектора $\vec{a}_i$ через базисные векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Имеем:

$$\vec{a}_0 = -2\vec{b} - 2\vec{c}; \quad \vec{a}_1 = \frac{k+1}{2}\vec{a}_0 - \frac{k-1}{2}\vec{c}_0 = (k+1)\,\vec{a} - (k-1)\,\vec{c} =$$

$$(k+1)\left(-\vec{b} - \vec{c}\right) - (k-1)\,\vec{c} = -(k+1)\,\vec{b} - 2k\vec{c}.$$

Пусть β_i, γ_i — коэффициенты разложения вектора $\vec{a}_i$ по базису векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{a}_i = \beta_i\vec{b} + \gamma_i\vec{c}$. Тогда

$$\vec{c}_i = \beta_i\vec{a} + \gamma_i\vec{b} = \beta_i\left(-\vec{b} - \vec{c}\right) + \gamma_i\vec{b} = (-\beta_i + \gamma_i)\,\vec{b} - \beta_i\vec{c};$$

$$\vec{a}_{i+1} = \frac{k+1}{2}\vec{a}_i - \frac{k-1}{2}\vec{c}_i = \frac{k+1}{2}\left(\beta_i\vec{b} + \gamma_i\vec{c}\right) - \frac{k-1}{2}\left((-\beta_i + \gamma_i)\,\vec{b} - \beta_i\vec{c}\right) =$$

$$\left(k\beta_i - \frac{1}{2}(k-1)\,\gamma_i\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{2}(k-1)\,\beta_i + \frac{1}{2}(k+1)\,\gamma_i\right)\vec{c}.$$

Таким образом, имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} \beta_{i+1} = k\beta_i - \frac{1}{2}(k-1)\,\gamma_i, \\ \gamma_{i+1} = \frac{1}{2}(k-1)\,\beta_i + \frac{1}{2}(k+1)\,\gamma_i. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение системы на $k+1$, а второе на $k-1$ и сложив их, получим равенство

$$(k-1)\,\gamma_{i+1} = -(k+1)\,\beta_{i+1} + \frac{3k^2+1}{2}\beta_i.$$

Перепишем первое уравнение системы в виде

$$\beta_{i+2} = k\beta_{i+1} - \frac{1}{2}(k-1)\,\gamma_{i+1}$$

и подставим в него значение $(k-1)\,\gamma_{i+1}$ из полученного равенства, в результате придём к следующему рекуррентному соотношению:

$$\beta_{i+2} = \frac{3k+1}{2}\beta_{i+1} - \frac{3k^2+1}{4}\beta_i,$$

где $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = -k-1$.

Несложно проверить, что вторая координата вектора $\vec{a}_i$ в его разложении по базисным векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$ подчиняется такому же уравнению:

$$\gamma_{i+2} = \frac{3k+1}{2}\gamma_{i+1} - \frac{3k^2+1}{4}\gamma_i \text{ при } \gamma_0 = -2, \quad \gamma_1 = -2k.$$

Запишем характеристическое уравнение полученной рекурренты[1]:

$$\lambda^2 - \frac{3k+1}{2}\lambda + \frac{3k^2+1}{4} = 0,$$

его дискриминант равен

$$D = -\frac{3}{4}(k-1)^2;$$

корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{3k+1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}\,(k-1)}{4}i.$$

[1]Методы исследования рекуррентных последовательностей рассмотрены в следующей публикации этого же номера журнала — статье В.И. Войтицкого,стр. 29-38 — *Прим. ред.*

Общее решение рекурренты имеет вид:

$$\beta_n = C_1\left(\frac{3k+1}{4}+\frac{\sqrt{3}\,(k-1)}{4}i\right)^n + C_2\left(\frac{3k+1}{4}-\frac{\sqrt{3}\,(k-1)}{4}i\right)^n = C_1\rho^n e^{in\varphi}+C_2\rho^n e^{in\varphi},$$

где

$$\rho^2=\left(\frac{3k+1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}\,(k-1)}{4}\right)^2=\frac{3k^2+1}{4};$$

$$\cos\varphi=\frac{\frac{3k+1}{4}}{\frac{\sqrt{3k^2+1}}{2}}=\frac{3k+1}{2\sqrt{3k^2+1}},\quad \sin\varphi=\frac{\frac{\sqrt{3}(k-1)}{4}}{\frac{\sqrt{3k^2+1}}{2}}=\frac{\sqrt{3}\,(k-1)}{2\sqrt{3k^2+1}}.$$

Найдём коэффициенты C_1 и C_2 из граничных условий:

$$n=0:\quad -2=C_1+C_2;\quad n=1:\quad -k-1=C_1\rho e^{i\varphi}+C_2\rho e^{i\varphi}.$$

Получим:

$$C_2=-C_1-2;\ \ -k-1=C_1\rho e^{i\varphi}-C_1\rho e^{-i\varphi}-2\rho e^{-i\varphi};\ \ C_1\rho\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)=2\rho e^{-i\varphi}-k-1,$$

$$C_1=\frac{2\rho e^{-i\varphi}-k-1}{\rho\cdot 2i\sin\varphi}=-\frac{i}{\sin\varphi}(\cos\varphi-i\sin\varphi)+\frac{k+1}{2\rho\sin\varphi}i=$$

$$-1+\left(\frac{k+1}{2\rho\sin\varphi}-ctg\varphi\right)i=-1+\left(\frac{(k+1)\cdot 2\sqrt{3k^2+1}}{\frac{2\sqrt{3k^2+1}}{2}\cdot\sqrt{3}\,(k-1)}-\frac{3k+1}{\sqrt{3}\,(k-1)}\right)i=$$

$$-1-\frac{1}{\sqrt{3}}i;\quad C_2=-1+\frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\beta_n&=\left(-1-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)\rho^n e^{in\varphi}+\left(-1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)\rho^n e^{in\varphi}=\\&=\rho^n\left(\left(-1-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)+\left(-1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)\right)=\\&=2\rho^n\left(-\cos n\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin n\varphi\right).\end{aligned}$$

Для координаты γ_n общее решение запишем в виде

$$\gamma_n=\tilde{C}_1\rho^n e^{in\varphi}+\tilde{C}_2\rho^n e^{in\varphi},$$

где коэффициенты $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ определятся из системы

$$\begin{cases}-2=\tilde{C}_1+\tilde{C}_2,\\ -2k=\tilde{C}_1\rho e^{i\varphi}+\tilde{C}_2\rho e^{i\varphi}.\end{cases}$$

Отсюда $\tilde{C}_2=-\tilde{C}_1-2;$

$$\tilde{C}_1=\frac{2\rho e^{-i\varphi}-2k}{\rho\cdot 2i\sin\varphi}=-\frac{i}{\sin\varphi}(\cos\varphi-i\sin\varphi)+\frac{k}{\rho\sin\varphi}i=$$

$$-1+\left(\frac{k}{\rho\sin\varphi}-ctg\varphi\right)i=-1+\left(\frac{4k}{\sqrt{3}\,(k-1)}-\frac{3k+1}{\sqrt{3}\,(k-1)}\right)i=$$

$$-1+\frac{1}{\sqrt{3}}i;\quad \tilde{C}_2=-1-\frac{1}{\sqrt{3}}i;$$

$$\gamma_n=\rho^n\left(\left(-1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)+\left(-1-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)\right)=$$

$$2\rho^n\left(-\cos n\varphi-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin n\varphi\right).$$

Требование задачи будет выполнено в том и только том случае, если вектор $\vec{a}_n=\beta_n\vec{b}+\gamma_n\vec{c}$ будет коллинеарен вектору $\vec{a}_0=-2\vec{b}-2\vec{c}$ (в этом случае будут соответственно коллинеарны и пары векторов, задающих две другие стороны треугольников). Таким образом, условие коллинеарности имеет вид:

$$\beta_n=\gamma_n.$$

Оно выполнимо лишь когда

$$\sin n\varphi=0,\qquad n\varphi=\pi m,\qquad \varphi=\frac{\pi m}{n};$$

здесь m — количество развёрнутых углов, на которое повернётся вектор стороны треугольника за n итераций. Имеем:

$$\sin\varphi=\sin\frac{\pi m}{n},\qquad \frac{\sqrt{3}\,(k-1)}{2\sqrt{3k^2+1}}=\sin\frac{\pi m}{n},\qquad \frac{3\,(k-1)^2}{4\,(3k^2+1)}=\sin^2\frac{\pi m}{n}.$$

Обозначим $\sin^2\dfrac{\pi m}{n}=\eta$, получим

$$3k^2-6k+3=\left(12k^2+4\right)\eta,\qquad (12\eta-3)\,k^2+6k+4\eta-3=0,$$

откуда

$$k=\frac{3\pm4\sqrt{3}\sqrt{\eta\,(1-\eta)}}{12\eta-3}=\frac{3\pm4\sqrt{3}\sin\frac{\pi m}{n}\cos\frac{\pi m}{n}}{12\sin^2\frac{\pi m}{n}-3}=\frac{3\pm2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi m}{n}}{3\left(1-2\cos\frac{2\pi m}{n}\right)}.$$

Задача решена.

В заключение рассмотрим ещё одну задачу, решение которой связано с преобразованием поворотного растяжения.

Задача 2 (*о шалопутном волке и трёх поросятах*). Домики трёх поросят P_1, P_2 и P_3 расположены в лесу (на плоскости) в вершинах треугольника. Из некоторой точки леса W сумасбродный волк направляется по прямой к домику первого поросёнка P_1. Однако, пройдя κ-ю часть пути ($0<\kappa<1$), он меняет своё решение и бежит к домику P_2. Пройдя (от точки поворота) κ-ю часть пути, волк начинает движение к домику P_3. Пробежав κ-ю часть пути, он снова поворачивает к домику P_1 и т.д. Что будет представлять собой траектория волка после долгого бегания по указанному маршруту?

Решение. Покажем, что независимо от начального положения волка все его пути из любой точки леса будут стремиться к одному и тому же треугольнику $P_1'P_2'P_3'$ такому, что

$$TS^{\frac{2-\kappa}{\kappa}}\left(P_1'P_2'P_3'\right)=P_1P_2P_3.$$

Введём на плоскости декартову систему координат и обозначим координаты домиков поросят $P_1\,(x_1;\ y_1)$, $P_2\,(x_2;\ y_2)$, $P_3\,(x_3;\ y_3)$, координаты волка $W\,(p;\ q)$ (рис. 5). Будем следить за какой-нибудь, например, первой, координатой волка за один цикл, состоящий из трёх последовательных звеньев ломаной его пути:

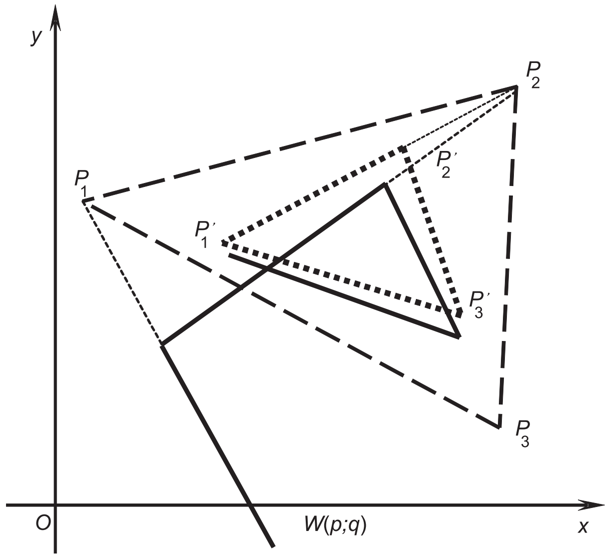

Рис. 5

I цикл:

$$
\begin{aligned}
& p \xrightarrow{P_1} p+\kappa(x_1-p)=(1-\kappa)p+\kappa x_1 \xrightarrow{P_2} \\
& \xrightarrow{P_2} (1-\kappa))p+\kappa x_1+\kappa\left(x_2-(1-\kappa)p-\kappa x_1\right)=(1-\kappa)^2p+\kappa(1-\kappa)x_1+\kappa x_2 \xrightarrow{P_3} \\
& \xrightarrow{P_3} (1-\kappa)^2p+\kappa(1-\kappa)x_1+\kappa x_2+\kappa\left(x_3-(1-\kappa)^2p-\kappa(1-\kappa)x_1-\kappa x_2\right)= \\
& =(1-\kappa)^3p+\kappa(1-\kappa)^2x_1+\kappa(1-\kappa)x_2+\kappa x_3.
\end{aligned}
$$

Обозначим $\kappa(1-\kappa)^2x_1+\kappa(1-\kappa)x_2+\kappa x_3=r=\mathrm{const}$. Тогда после n-го цикла получим:

$$
\begin{aligned}
& p \xrightarrow{I} (1-\kappa)^3p+r \xrightarrow{II} (1-\kappa)^6p+(1-\kappa)^3r+r \xrightarrow{III} \\
& \xrightarrow{III} (1-\kappa)^9p+(1-\kappa)^6r+r(1-\kappa)^3r+r \xrightarrow{IV} \cdots \xrightarrow{(n)} \\
& \xrightarrow{(n)} (1-\kappa)^{3n}p+\left(1+(1-\kappa)^3+(1-\kappa)^6+\cdots+(1-\kappa)^{3n}\right)r.
\end{aligned}
$$

После n циклов в пределе при $n\to\infty$ первая координата волка будет стремиться к величине

$$
\begin{aligned}
x_3' &= \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{1-(1-\kappa)^3}\cdot r = \frac{r}{\kappa^3-3\kappa^2+3\kappa} = \\
&= \frac{\left(1-\kappa^2\right)x_1+(1-\kappa)x_2+x_3}{\kappa^3-3\kappa^2+3\kappa}.
\end{aligned}
$$

При этом, очевидно, вторая координата будет стремиться к величине

$$
y_3' = \lim_{n\to\infty} q_n = \frac{\left(1-\kappa^2\right)y_1+(1-\kappa)y_2+y_3}{\kappa^3-3\kappa^2+3\kappa}.
$$

Аналогично получим координаты двух других вершин треугольника, к которому будет стремиться траектория движения волка:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \frac{\left(1-\kappa^2\right)x_2+(1-\kappa)x_3+x_1}{\kappa^3-3\kappa^2+3\kappa}, & y_1' &= \frac{\left(1-\kappa^2\right)y_2+(1-\kappa)y_3+y_1}{\kappa^3-3\kappa^2+3\kappa}; \\
x_2' &= \frac{\left(1-\kappa^2\right)x_3+(1-\kappa)x_1+x_2}{\kappa^3-3\kappa^2+3\kappa}, & y_2' &= \frac{\left(1-\kappa^2\right)y_3+(1-\kappa)y_1+y_2}{\kappa^3-3\kappa^2+3\kappa}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы получили, что при достаточно большом количестве циклов траектория волка станет неотличима от пути по периметру треугольника $P_1' P_2' P_3'$.

Ясно, что треугольник $P_1 P_2 P_3$ может быть получен из треугольника $P_1' P_2' P_3'$ с помощью поворотного растяжения с коэффициентом

$$k = \frac{\frac{|P_1' P_2'|}{2} + |P_2' P_2|}{\frac{|P_1' P_2'|}{2}} = 1 + 2 \cdot \frac{|P_2' P_2|}{|P_1' P_2'|}.$$

При этом

$$\kappa = \frac{|P_1' P_2'|}{|P_1' P_2'| + |P_2' P_2|}.$$

Отсюда получим

$$k = \frac{2 - \kappa}{\kappa}.$$

Буфеев Сергей Валентинович,
учитель математики ГБОУ "Школа с углубленным изучением математики, информатики, физики № 444", г. Москва; старший преподаватель кафедры СУНЦ-1 МГТУ им. Н.Э. Баумана.

E-mail: bufeev@gmail.com

К проблеме качественного поведения линейных рекуррентных последовательностей

В. И. Войтицкий

Работа посвящена рассмотрению качественного поведения линейных рекуррентных (или возвратных) последовательностей u_n невысоких порядков в зависимости от заданных коэффициентов. В работе предложен элементарный подход к проблеме, позволяющий методами школьной математики (с привлечением теории комплексных чисел) установить необходимые и достаточные условия на коэффициенты, при которых последовательность стремится к нулю. Множество таких значений коэффициентов является открытой областью в $\mathbb{R}^k$, на ее границе может наблюдаться сложное поведение, обладающее свойствами случайной последовательности. В работе приведены примеры такого "псевдослучайного" поведения, рассмотрена связь теории с проблемой устойчивости многочленов, в частности, рассмотрен вопрос локализации корней многочлена в круге заданного радиуса или в левой комплексной полуплоскости.

1. Введение

Линейные рекуррентные (возвратные) последовательности k-го порядка — это последовательности действительных чисел, в которых n-ый член выражается через k предыдущих по формуле

$$u_n = a_1 u_{n-1} - a_2 u_{n-2} + \ldots + (-1)^{k+1} a_k u_{n-k}. \tag{1}$$

Числовые коэффициенты a_i и первые k членов $u_1, u_2, \ldots, u_k$ считаем заданными (чередующиеся знаки взяты для удобства дальнейших выкладок).

Широко известной является последовательность Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, которая определяется по правилу

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad u_1 = u_2 = 1, \tag{2}$$

то есть является линейной рекуррентной последовательностью второго порядка. Несложно заметить, что последовательность Фибоначчи является бесконечно большой, причём это свойство практически не зависит от выбора первых членов (за исключением случая $u_1 = u_2 = 0$). В общем случае оказывается, что существуют значения коэффициентов a и b, для которых последовательность $u_n = au_{n-1} - bu_{n-2}$ может быть не только бесконечно большой, но и бесконечно малой, периодической или даже псевдослучайной (то есть с наличием признаков статистической случайности, однако определяемой явным алгоритмом), при этом первые члены существенно не влияют на данные свойства. Аналогичные свойства могут наблюдаться у любой последовательности k-того порядка ($k \geq 2$) при определенных значениях коэффициентов.

Рассматривая наборы числовых коэффициентов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ как точки в k-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, можно получить, что существует некоторая открытая область в $\mathbb{R}^k$, содержащая точку $(0, 0, \ldots, 0)$, соответствующая бесконечно малым последовательностям. Будем называть далее такую область *областью устойчивости*. Точкам вне замыкания этой области соответствуют неограниченные последовательности, а на ее границе у последовательностей возможно наличие ненулевых пределов, периодичности или даже хаотичности. В работе приведены конкретные примеры подобного поведения рекуррентных последовательностей, предложен элементарный метод нахождения границ областей устойчивости в терминах коэффициентов, пригодный для невысоких порядков ($k \leq 5$).

Вообще говоря, имеются общие алгоритмы (на основе высшей алгебры и анализа), позволяющие по коэффициентам линейной рекуррентной последовательности за конечное число шагов ответить, является ли она бесконечно малой или нет. Эти алгоритмы были найдены еще в начале XX века. Оказывается, данная проблема эквивалентна тому, что все корни сопутствующего *характеристического многочлена* (вообще говоря, комплексные), по модулю меньше единицы. Такие многочлены называют *дискретно устойчивыми* или *устойчивыми по Шуру*. В теории линейных дифференциальных уравнений устойчивость решений определяется тем, что все корни характеристического многочлена лежат в левой комплексной полуплоскости, при этом многочлен с подобным свойством называют *непрерывно устойчивым* или устойчивым по Гурвицу.

Для исследования непрерывной устойчивости многочлена имеется доступная для школьников схема Рауса, кроме этого имеется основанный на вычислении определителей критерий Гурвица и его модернизация — критерий Льенара–Шипара (см., например, [1], гл. 1). Для дискретной устойчивости часто используют метод сведения задачи к проблеме непрерывной устойчивости, либо используется алгоритм Шура-Кона, основанный на вычислении определителей. Имеются его обобщения и видоизменения, см., например, [2], [3]. Все эти методы требуют определенных знаний высшей математики.

Свойства возвратных последовательностей имеют значительный прикладной интерес и богатые возможности для моделирования с помощью ЭВМ. Более того, анализ поведения рекуррентных последовательностей, на взгляд автора, может являться для школьников важной мотивационной компонентной для изучения теории комплексных чисел, линейной алгебры, математического анализа и базовой ступенью для изучения теории разностных и дифференциальных уравнений, криптографии, теории хаоса.

2. Элементы теории линейных рекуррентных последовательностей

Теория линейных рекуррентных последовательностей является хорошо изученной. Для первого чтения можно порекомендовать брошюру [4] Маркушевича А.И. “Возвратные последовательности” (цикл “Популярные лекции по математике”), а также соответствующую главу из книги [5] Виленкина Н.Я. и соавторов “Комбинаторика” (см. с. 211–216). Приведем в этом пункте кратко некоторые базовые результаты, необходимые для дальнейших рассуждений.

Последовательность Фибоначчи, определяемая рекуррентной формулой (2), обладает рядом замечательных свойств (см., например, [6]), одно из них — это формула Бине

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \tag{3}$$

Замечательно, что выражения в скобках связаны с золотым сечением

$$\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad -\phi := \frac{1-\sqrt{5}}{2} = (-\Phi)^{-1}. \tag{4}$$

В качестве несложного упражнения по анализу можно получить, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \phi = \frac{1}{\Phi}. \tag{5}$$

Даже на математических факультативах и кружках обычно вывод формулы Бине никак не поясняется, хотя она выводится весьма несложно. Чтобы понять её смысл, обратимся к простейшей рекуррентной последовательности первого порядка $u_n = qu_{n-1},\ q = \mathrm{const}$. Очевидно, $u_2 = qu_1,\ u_3 = q^2u_1, \ldots, u_n = q^{n-1}u_1$, т.е. мы получаем геометрическую прогрессию со знаменателем q.

Если теперь искать геометрические прогрессии $u_n = \lambda^n u_1$, которые соответствуют рекуррентному соотношению второго порядка

$$u_n = au_{n-1} - bu_{n-2}, \tag{6}$$

то после подстановки получим $\lambda^n u_1 = a\lambda^{n-1}u_1 - b\lambda^{n-2}u_1$. В предположении $\lambda \neq 0,\ u_1 \neq 0$, отсюда следует характеристическое квадратное уравнение

$$\lambda^2 - a\lambda + b = 0. \tag{7}$$

Если оно имеет два различных действительных корня

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (D = a^2 - 4b > 0), \tag{8}$$

то в силу линейности рекуррентного соотношения получаем, что ему удовлетворяют последовательности

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \tag{9}$$

с произвольными константами c_1 и c_2. Задание первых членов $u_1 = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$ и $u_2 = c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2$ определяет систему линейных уравнений относительно неизвестных c_1, c_2. Можно доказать, что она однозначно разрешима, поэтому любая линейная рекуррентная последовательность второго порядка, определяемая соотношением (6) и первыми двумя членами, при $D > 0$ представима в явном виде по формуле (9). Именно таким образом получается формула Бине (3).

Формула (9) остаётся верной и в случае $D < 0$, то есть при наличии пары комплексно сопряжённых корней λ_1, λ_2 (отметим, что при этом для каждого $n \in \mathbb{N}$ мнимые части взаимно уничтожаются). В случае $D = 0$ имеется двукратный корень $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Оказывается, в этом случае последовательность может быть задана явным образом по формуле $u_n = (c_1 + c_2 n)\lambda^n$, где коэффициенты вновь однозначно определяются по первым двум заданным членам.

Аналогичным образом любой последовательности k-того порядка

$$u_n = a_1 u_{n-1} - a_2 u_{n-2} + \ldots + (-1)^{k+1} a_k u_{n-k}$$

соответствует характеристическое алгебраическое уравнение k-ой степени

$$f_k(\lambda) = \lambda^k - a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-1} - \ldots + (-1)^k a_k = 0,$$

при этом многочлен $f_k(\lambda)$ называется характеристическим многочленом. Согласно основной теореме алгебры, любой многочлен k-ой степени всегда имеет k комплексных корней (возможно, совпадающих). Если при этом все его коэффициенты a_i являются действительными числами, то корни многочлена либо вещественны, либо расположены в комплексной плоскости симметрично относительно вещественной оси (т.е. решения образуют пары комплексно сопряженных чисел). Если многочлен имеет k различных корней, то в явном виде рекуррентная последовательность задаётся формулой

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_k\lambda_k^n. \tag{10}$$

При этом коэффициенты c_i однозначно определяются заданием первых k членов последовательности через решение системы линейных алгебраических уравнений k-го порядка. Если же некоторый корень λ имеет кратность $p > 1$, то формулу надо видоизменить, заменив соответствующее слагаемое на выражение $(d_1 + d_2 n + \ldots + d_p n^{p-1})\lambda^n$.

Таким образом, любая линейная рекуррентная последовательность допускает явное задание, которое определяется начальными членами и собственными значениями — нулями соответствующего характеристического многочлена. Если начальные члены таковы, что все константы $c_i \neq 0$ (случай общего положения), то в силу формулы (10) последовательность может быть бесконечно малой лишь в случае, когда все корни обладают свойством $|\lambda_i| < 1$ (условие дискретной устойчивости многочлена). Конечно, последовательность может быть бесконечно малой, даже если существуют собственные числа $|\lambda_i| > 1$. Но тогда все соответствующие коэффициенты c_i должны быть нулевыми, что возможно при выборе начальных членов $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ из некоторых подпространств в $\mathbb{R}^k$ размерностей $\leq k - 1$. Вероятность случайного попадания начальных данных на такие подпространства равна нулю, поэтому можно считать, что поведение линейной рекуррентной последовательности на бесконечности от начальных данных в целом не зависит.

Это свойство существенно отличает линейный случай от нелинейного. К примеру (придуман автором), для последовательности $v_n = v_{n-1} \cdot v_{n-2}$ с начальными членами $v_1 = x > 0$, $v_2 = y > 0$ ограниченность имеет место в зоне под кривой $y = x^{-\phi}$ (число ϕ определено в формуле

(4)). Это следует из того, что $v_n = x^{u_{n-2}} y^{u_{n-1}}$, где u_n — последовательность Фибоначчи. При $n \to \infty$ согласно (5) имеем $x^{\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}} \to x^{\phi}$, отсюда $v_n \to (x^{\phi} y)^{u_{n-1}}$. Поскольку последовательность Фибоначчи бесконечно большая, то v_n будет ограниченной, если $x^{\phi} y \leq 1$.

3. Границы областей устойчивости

В линейной алгебре (см., например, [7]) известен факт, что малые изменения коэффициентов многочлена влекут за собой малые перемещения его корней в комплексной плоскости и обратно. Отсюда можно заключить, что значениям коэффициентов рекуррентной формулы, расположенных на границе области устойчивости, обязательно соответствует наличие у характеристического многочлена либо вещественного корня, равного ± 1, либо пары комплексно сопряжённых корней, по модулю равных единице.

Очевидно, областью устойчивости рекуррентной последовательности первого порядка $u_n = q u_{n-1}$ являются $q \in (-1; 1)$. Граничным точкам $q = \pm 1$ соответствуют собственные числа $\lambda = \pm 1$, при этом получаем последовательность–константу либо периодическую последовательность $u_n = (-1)^{n-1} u_1$.

3.1. Последовательность второго порядка

Рассмотрим последовательность $u_n = a u_{n-1} - b u_{n-2}$. Ей соответствует характеристический многочлен $f_2(\lambda) := \lambda^2 - a\lambda + b$. Если он имеет корни $\lambda_1 = \pm 1$, то очевидно, выполняются соотношения $1 - a + b = 0$ или $1 + a + b = 0$, определяющие границы области устойчивости. При этом, согласно теореме Виета, второй корень $\lambda_2 = \pm b$. Отсюда $u_n = c_1 + c_2 b^n$, если $b = -1 + a$, либо $u_n = c_1(-1)^n + c_2 b^n$, если $b = -1 - a$. В обоих случаях при $|b| < 1$ последовательность либо стремится к числу c_1, либо стремится к периодическому режиму.

Если теперь предположить, что корнями характеристического многочлена являются комплексно сопряжённые числа $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, тогда из условия $|\lambda_{1,2}| = 1$ согласно теореме Виета, имеем $b = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \alpha^2 + \beta^2 = |\lambda_{1,2}|^2 = 1$. Следовательно, существует число $\theta \in \mathbb{R}$ такое, что $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$. При этом $a = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha \in [-2; 2]$. Таким образом, границами области устойчивости являются прямые, ограничивающие треугольник в плоскости точек $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, см. рисунок. Внутренность треугольника соответствует значениям коэффициентов, при которых последовательность является бесконечно малой, она описывается неравенствами $b > -1 \pm a$, $b < 1$.

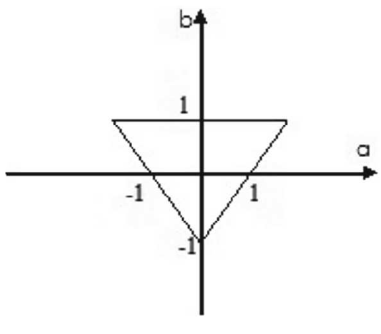

Рис. 1

Эту же область можно найти, решая непосредственно систему неравенств $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ для случая комплексных и вещественных λ_i, которые вычисляются по формулам (8).

Так как при $b = 1$ собственные числа имеют вид $\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm i\sin\theta$, то, согласно формуле Муавра, $u_n = c_1(\cos n\theta + i\sin n\theta) + c_2(\cos n\theta - i\sin n\theta)$. Выражения в скобках являются точками на единичной окружности в комплексной плоскости. Если так случится, что $m\theta = \theta + 2\pi k$, то, очевидно, последовательность будет периодической с длиной периода $l = m - 1$. Так как $a = 2\alpha$

$= 2\cos\theta$, то условие периодичности можно записать в виде

$$a = 2\cos\frac{2\pi k}{l} \quad (k, l \in \mathbb{N}). \tag{11}$$

Если же $\theta = 2\pi\zeta$, где $\zeta \notin \mathbb{Q}$, то последовательность обладает *псевдослучайным поведением.* По-видимому, она располагается в некотором отрезке всюду плотным образом, поскольку этот факт справедлив для иррациональных поворотов окружности (см., например, [8]). Например, при $a = 2\cos 2\pi/5$, $b = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 1$, получаем периодическую последовательность $(3; 1; -2,38; -2,47; 0; 85)$ (с точностью до сотых). Полагая в этом же примере $a = 0,1$, получим псевдослучайную последовательность, вот ее первые 12 членов: $3; 1; -2,9; -1,29; 2,77; 1,57; -2,61;$ $-1,83; 2,43; 2,07; -2,22; -2; 3$.

В двух особых случаях $a = \pm 2$ $(b = 1)$ дискриминант квадратного уравнения равен нулю, а двукратный корень равен 1 или -1. Тогда последовательность является арифметической прогрессией $u_n = c_1 + c_2 n$ или $u_n = (c_1 + c_2 n)(-1)^n$.

Подытоживая вышесказанное, получаем, что последовательность $u_n = au_{n-1} - bu_{n-2}$ является бесконечно малой тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $b > -1 + a$, $b > -1 - a$, $b < 1$. При этом, на верхней границе этой треугольной области, т.е. при $b = 1$ и $a \in (-2; 2)$, возможно периодическое либо псевдослучайное поведение в зависимости от того, выполнено или нет условие (11).

3.2. Последовательность третьего порядка

Рассмотрим последовательность $u_n = au_{n-1} - bu_{n-2} + cu_{n-3}$. Ей соответствует характеристическое уравнение $f_3(\lambda) := \lambda^3 - a\lambda^2 + b\lambda - c = 0$. Оно имеет корни $\lambda = \pm 1$ при выполнении линейных соотношений $b = -1 + a + c$ или $b = -1 - a - c$. При этом несложно убедиться, что остальные два корня вычисляются по формулам

$$\lambda_{2,3} = \frac{a - 1 \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4c}}{2} \quad \text{или} \quad \lambda_{2,3} = \frac{-a - 1 \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4c}}{2}. \tag{12}$$

Как известно, многочлен нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень, поэтому в случае наличия пары комплексно сопряженных корней, по модулю равных единице, мы имеем разложение

$$f_3(\lambda) = (\lambda - c)(\lambda^2 + \widetilde{a}\lambda + 1). \tag{13}$$

Раскрывая скобки, получаем, что должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} -a = \widetilde{a} - c, \\ b = 1 - c\widetilde{a}. \end{cases} \tag{14}$$

Выражая $\widetilde{a}$ из первого уравнения и подставляя во второе, получаем $b = 1 + ca - c^2$. При выполнении этого соотношения будет иметь место разложение вида (13), значит оно соответствует границе области устойчивости, если $c \in (-1; 1)$.

Поскольку при $a = b = c = 0$ получаем точку внутри области устойчивости, то с учётом вышесказанного она определяется неравенствами

$$b + c + a > -1, \quad b - c - a > -1, \quad b < ca + 1 - c^2, \quad -1 < c < 1. \tag{15}$$

Интересно, что для любого фиксированного $c \in (-1; 1)$ зона устойчивости расположена внутри треугольника с координатами $A(-c, -1, c)$, $B(c + 2; 2c + 1; c)$, $C(c - 2, -2c + 1, c)$.

При условии $b = 1 + ca - c^2$, $c \in [-1; 1]$,

$$a - c \neq 2\cos\frac{2\pi k}{l} \quad (k, l \in \mathbb{N}) \tag{16}$$

возможно псевдослучайное поведение. Действительно, из уравнения $\lambda^2+(c-a)\lambda+1=0$ ($\widetilde{a}=c-a$) получаем, что для решений $\lambda_{1,2}$ выполнено условие $2\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}=a-c=2\cos\theta$. Сложное поведение (аналогично последовательностям второго порядка) будет наблюдаться при $\theta=2\pi\zeta$, где $\zeta\notin\mathbb{Q}$.

Например, при $c=1$, $a=b=1+2\cos 2\pi/7$ получаем периодическую последовательность $(5;-5;-2;11,74;25,88;29,76;20,47)$ (с точностью до сотых). При $c=-1$, $a=0,2$, $b=-0,2$ и тех же первых членах получаем псевдослучайную последовательность с первыми 10-ю членами $5;-5;-2;-6,4;3,32;1,38;7,34;-1,58;-0,23;-7,7$ (с точностью до сотых).

3.4. Последовательность четвертого порядка

Для характеристического уравнения четвертого порядка $f_4(\lambda):=\lambda^4-a\lambda^3+b\lambda^2-c\lambda+d=0$, соответствующего последовательности $u_n=au_{n-1}-bu_{n-2}+cu_{n-3}-du_{n-4}$, корни $\lambda=\pm1$ приводят к линейным соотношениям $b+c+a+d=-1$ или $b-c-a+d=-1$.

Случай наличия пары комплексно сопряженных корней, по модулю равных единице, приводит к разложению

$$f_3(\lambda)=(\lambda^2+\widetilde{a}\lambda+1)(\lambda^2+\widetilde{b}\lambda+d). \tag{17}$$

Раскрывая скобки, получаем, что должны выполняться соотношения

$$\begin{cases}-a=\widetilde{a}+\widetilde{b},\\ b=d+\widetilde{a}\widetilde{b},\\ -c=\widetilde{a}d+\widetilde{b}.\end{cases} \tag{18}$$

Возможность разложения (17) эквивалентна существованию решения данной системы относительно переменных $\widetilde{a},\widetilde{b}$. Если $d\neq 1$, то, из первого и последнего уравнения получаем, что $\widetilde{a}=\dfrac{a-c}{d-1}$, $\widetilde{b}=\dfrac{c-da}{d-1}$. Тогда второе уравнение приводит к соотношению

$$b-d-1=\frac{(a-c)(c-da)}{(d-1)^2}. \tag{19}$$

Это уравнение гиперповерхности третьего порядка в четырёхмерном пространстве $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$. Если $d=1$, то при $c=a$ уравнение имеет две пары комплексно сопряженных корней на единичной окружности, поэтому эти соотношения также определяют границу области устойчивости.

Из вышесказанного заключаем, что область устойчивости определяется выполнением серии неравенств

$$b+c+a+d>-1,\qquad b-c-a+d>-1, \tag{20}$$

$$(b-1-d)(1-d)<(a-c)(c-da),\quad -1<d<1. \tag{21}$$

На гиперповерхности (19) может наблюдаться сложное поведение в двух случаях: либо $d\in[-1;1)$ и выполнено условие

$$\frac{a-c}{1-d}\neq 2\cos\frac{2\pi k}{l}\quad (k,l\in\mathbb{N}), \tag{22}$$

либо $d=1$, $c=a$ и выполнено условие

$$a\pm\sqrt{a^2-4b+8}\neq 4\cos\frac{2\pi k}{l}\quad (k,l\in\mathbb{N}). \tag{23}$$

Оставляем проверку этих утверждений за читателями.

В качестве примера возьмём последовательность с коэффициентами $a=-1$, $b=1$, $c=-1$, $d=1$. Получаем, с учётом первых членов, например, такую периодическую последовательность $(5;4;-2;1;-8)$. Для нее выполнено условие $a+\sqrt{a^2-4b+8}=1+\sqrt{5}=4\cos\pi/5$. Если теперь вместо $b=1$ взять, к примеру, $b=0,9$, то получаем с точностью до сотых при тех же начальных данных такие первые 12 членов: $5;4;-2;1;-8,2;5,3;3,08;-0,65;0,78;-8,57;5,44;2,14$.

Описанная методика применима для нахождения границ областей устойчивости последовательностей и более высоких порядков. Например, границу дискретной устойчивости многочлена 5-го порядка $f_5(\lambda) := \lambda^5 - a\lambda^4 + b\lambda^3 - c\lambda^2 + d\lambda - e = 0$ помимо линейных гиперповерхностей, соответствующих $\lambda = \pm 1$, определяет гиперповерхность четвертого порядка

$$\left(\frac{be - c - de + a}{e^2 - ae + d - 1}\right)^2 + \frac{(be - c - de + a)(a + e)}{e^2 - ae + d - 1} = d + 1 - b, \tag{24}$$

а также пересечение гиперповерхностей

$$e^2 - ae + d - 1 = 0, \quad be - c - de + a = 0. \tag{25}$$

Оставляем проверку этого утверждения, а также нахождение условий псевдослучайного поведения линейных рекуррентных последовательностей 5-го порядка в качестве упражнений.

4. Локализация корней многочлена

Условия дискретной устойчивости многочлена позволяют осуществлять проверку того, что все его корни лежат внутри круга заданного радиуса R, вне круга радиуса r, либо в кольце $r < |\lambda| < R$. Для этого необходимо в исходном уравнении осуществить замену $\lambda = R \cdot \mu$ или $\lambda = r/\mu$, и применить найденные критерии дискретной устойчивости к многочлену, зависящему от μ. Если же использовать замену

$$\lambda = \frac{\mu + 1}{\mu - 1}, \tag{26}$$

то устойчивость по Шуру многочлена, зависящего от μ, будет эквивалентна устойчивости по Гурвицу многочлена, зависящего от λ (и наоборот). Таким образом можно осуществлять проверку того, что все корни многочлена лежат в левой комплексной полуплоскости.

Например, рассмотрим уравнение $\lambda^3 + 0,9\lambda^2 + 1,9\lambda + 0,9 = 0$. Несложно убедиться, что условия (15) не выполняются, то есть многочлен не является дискретно устойчивым. Замена $\lambda = 2\mu$ приводит уравнение к виду $\mu^3 + 0,45\mu^2 + 0,475\mu + 0,1125 = 0$. Так как для полученного многочлена выполнены условия (15), то все корни исходного уравнения удовлетворяют свойству $|\lambda| < 2$. После замены $\lambda = 1/(2\mu)$, используя сокращение на старший коэффициент и округление до тысячных, получаем $\mu^3 + 1,056\mu^2 + 0,25\mu + 0,139 = 0$. Для этого уравнения условия (15) выполняются, поэтому все корни исходного уравнения удовлетворяют свойству $|\lambda| > 1/2$.

Если сделать замену (26), то после преобразований и округления до тысячных, получаем уравнение $\mu^3 - 0,149\mu^2 + 0,617\mu + 0,234 = 0$, для которого $b + a + c = 0,532 > -1$, $b - a - c = 0,702 > -1$, $b = 0,617 < 0,91 = ca + 1 - c^2$. То есть исходный многочлен устойчив по Гурвицу (все его корни лежат в левой комплексной полуплоскости).

Если непосредственно вычислить его корни с точностью до тысячных, то получим числа $\lambda_1 = -0,528$, $\lambda_{2,3} = -0,186 \pm 1,292i$. Таким образом, свойства многочлена описаны верно.

Литература

[1] Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса – Гурвица для полиномов и целых функций. - М.: Издательство АН СССР, 1949.

[2] Мейман Н.Н. Некоторые вопросы расположения нулей полиномов // Успехи матем. наук. - Т. 4. - № 6(34). - 1949. - с. 154-188.

[3] Корсаков Г.Ф. К задаче Шура – Кона //Математические заметки. - Т. 18. - № 1. - 1975. - с. 27-30.

[4] Маркушевич А.И. Возвратные последовательности / Популярные лекции по математике. Т. 1. - М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1950.

[5] Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. - М.: Издательство МЦНМО, 2006. - 400 с.

[6] Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначчи / Популярные лекции по математике. Т. 39. - М.: Наука, 1978.

[7] Прасолов В.В. Многочлены. - М.: МЦНМО, 2001. - 336 с.

[8] Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. - М.: МЦНМО, 2005. - 464 с.

Войтицкий Виктор Иванович,
доцент кафедры математического анализа
Крымского федерального университета
им. В.И. Вернадского,
Таврическая академия Крымского федерального
университета им. В.И. Вернадского,
кандидат физ.-мат. наук.

victor.voytitsky@gmail.com

Окружности Эйлера вписанного и вневписанных треугольников

Е. Д. Куланин, Н. А. Шихова

В статье рассматривается взаимное расположение окружностей Эйлера треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами данного треугольника и трех треугольников с вершинами в точках касания трех вневписанных окружностей со сторонами и продолжениями сторон данного треугольника. Все сведения и обозначения, необходимые для понимания данной статьи, читатель сможет найти в нашей статье «Прямые Эйлера и точки Фейербаха», опубликованной в нашем журнале, № 2(62), 2012 г.. Более подробно эта тематика рассматривается в книге [2].

1. Концентрические окружности

Рассмотрим еще раз рис. 17 из статьи [1] (рис. 1). У него есть особенность — точки A_{rb}, B_{ra}, C_r расположены очень близко друг к другу и ортоцентру H. Так близко, что для буквы H места на чертеже не нашлось. Где расположен ортоцентр, нужно догадываться — в точке пересечения всех высот, они изображены пунктиром. Мы пробовали менять треугольник $\triangle ABC$, чтобы улучшить рисунок, но не тут-то было!

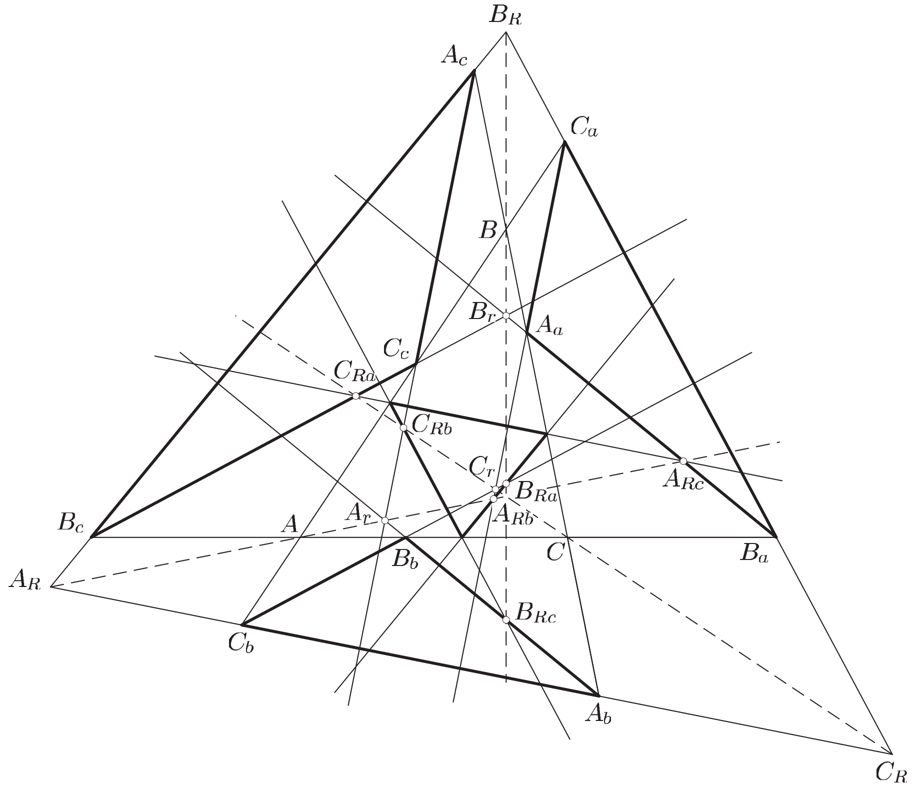

Рис. 1

Обязательно получалось так, что очень близко от ортоцентра оказывались точки A_{rb}, B_{ra}, C_r, или точки A_{rc}, B_r, C_{ra}, или точки A_r, B_{rc}, C_{rb}; именно в таких сочетаниях. Вооружившись линейкой, мы обнаружили, что для любого базового треугольника точки каждой тройки находятся на одном расстоянии от ортоцентра.

Вне треугольника есть еще три точки такого рода: A_R, B_R, C_R. Если присмотреться, можно заметить, что они тоже равноудалены от ортоцентра — остается это только доказать.

Мы сделаем это, сравнив углы треугольника $\triangle A_R B_R H$ и показав, что он равнобедренный.

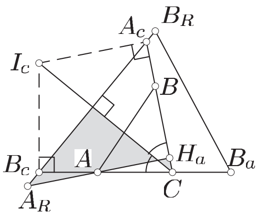

Рис. 2. Подобные треугольники

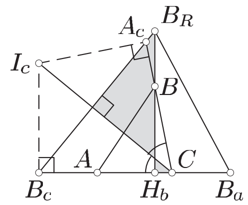

Рис. 3. Еще подобные треугольники

На рисунке 2 выделены два треугольника. Оба они прямоугольны, так как биссектриса CI_c перпендикулярна прямой дюжины A_cB_c, а высота AH_a перпендикулярна стороне BC. Два острых угла этих треугольников вертикальны и равны, поэтому равны оставшиеся два угла:

$$\angle B_RA_RH = \angle BCI_c.$$

Точно так же (рис. 3) можно показать, что

$$\angle A_RB_RH = \angle ACI_c.$$

Биссектрисы делят углы на две равные части, поэтому $\angle BCI_c = \angle ACI_c$, а значит,

$$\angle B_RA_RH = \angle A_RB_RH.$$

Таким образом, треугольник $\triangle A_RB_RH$ равнобедренный и $A_RH = B_RH$. Аналогично можно убедиться в том, что $A_RH = B_RH = C_RH$, а это и означает, что H — центр описанной окружности треугольника $\triangle A_RB_RC_R$.

Аналогично можно убедиться и в том, что ортоцентр H — центр описанной окружности и для треугольников $\triangle A_{rb}B_{ra}C_r$, $\triangle A_{rc}B_rC_{ra}$ и $\triangle A_rB_{rc}C_{rb}$.

С этими четырьмя треугольниками мы еще встретимся, обсуждая одно неожиданное свойство их окружностей Эйлера.

Утверждение 1. *Центр описанных окружностей треугольников $\triangle A_{rb}B_{ra}C_r$, $\triangle A_{rc}B_rC_{ra}$, $\triangle A_rB_{rc}C_{rb}$ и $\triangle A_RB_RC_R$ совпадает с ортоцентром H.*

1. Докажите, что центр описанных окружностей треугольников $\triangle A_{rb}B_{ra}C_r$, $\triangle A_{rc}B_rC_{ra}$ и $\triangle A_rB_{rc}C_{rb}$ совпадает с ортоцентром H.

2. Высотные треугольники старых знакомых

Середина есть точка, ближайшая к мудрости;
не дойти до нее — то же самое, что ее перейти.

Конфуций

2. В двух треугольниках $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ с центрами вписанных окружностей I и I' соответственные биссектрисы параллельны:

$$AI \parallel A'I', \quad BI \parallel B'I', \quad CI \parallel C'I'.$$

Докажите, что параллельны и соответственные стороны треугольников, то есть что

$$AB \parallel A'B', \quad BC \parallel B'C', \quad AC \parallel A'C'.$$

3. Докажите соотношение для радиусов вписанной и вневписанной окружностей:

$$\frac{r}{r_b} = \frac{p-b}{p}.$$

Здесь r — радиус вписанной окружности, r_b — радиус окружности, вневписанной в угол с вершиной B, b — сторона, противолежащая углу $\angle B$, p — полупериметр треугольника $\triangle ABC$.

Полученные нами результаты о прямых, на которых лежат стороны

вписанного и вневписанных треугольников, позволяют нам изучить расположение их высотных треугольников, а позднее — их окружностей Эйлера.

Во вписанном треугольнике $\triangle A_IB_IC_I$ основания высот обозначим H_{Ib}, H_{Ia}, H_{Ic}. Во вневписанных треугольниках основания высот обозначим (рис. 4)

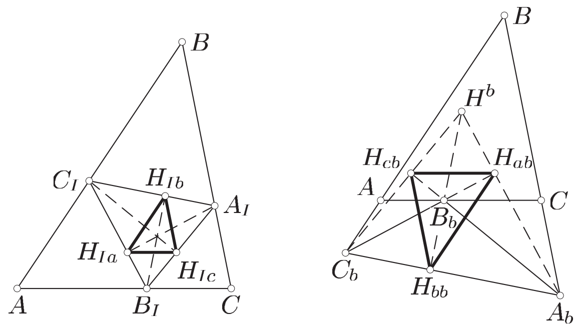

Рис. 4 Высотные треугольники

H_{aa}, H_{ba}, H_{ca} — в $\triangle A_aB_aC_a$;
H_{ab}, H_{bb}, H_{cb} — в $\triangle A_bB_bC_b$;
H_{ac}, H_{bc}, H_{cc} — в $\triangle A_cB_cC_c$.

Обозначим еще ортоцентры: H^I — ортоцентр вписанного треугольника, H^a, H^b, H^c — ортоцентры вневписанных треугольников.

Стороны треугольника $\triangle A_IB_IC_I$ соединяют точки касания вписанной окружности треугольника $\triangle ABC$ и поэтому перпендикулярны его биссектрисам. Значит, высоты треугольника $\triangle A_IB_IC_I$, совпадающие с биссектрисами его высотного треугольника$\triangle H_{Ia}H_{Ib}H_{Ic}$, параллельны биссектрисам треугольника $\triangle ABC$. Раз в треугольниках$\triangle H_{Ia}H_{Ib}H_{Ic}$ и $\triangle ABC$ биссектрисы параллельны, стороны, значит, тоже параллельны (рис. 5 и упражнение 2).

Поэтому высотный треугольник $\triangle H_{Ia}H_{Ib}H_{Ic}$ вписанного треугольника $\triangle A_IB_IC_I$ подобен базовому треугольнику $\triangle ABC$.

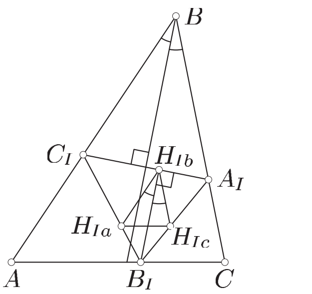

Рис. 5. Биссектрисы треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle H_{Ia}H_{Ib}H_{Ic}$ параллельны

Такое же рассуждение годится и для вневписанных окружностей и их треугольников, только там речь идет о биссектрисах внешних углов.

Подобие высотных треугольников базовому можно доказать иначе, рассмотрев орточетверки, которые порождаются вписанным и вневписанными треугольниками. Возьмем, например, орточетверки A_I, B_I, C_I, H^I и A_b, B_b, C_b, H^b.

По свойствам дюжины прямых легко установить, что

$$A_IB_I \parallel C_bH^b, \quad B_IC_I \parallel A_bH^b, \quad A_IC_I \parallel A_bC_b,$$
$$A_IH^I \parallel B_bC_b, \quad B_IH^I \parallel B_bH^b, \quad C_IH^I \parallel A_bB_b.$$

Поэтому стороны высотного треугольника орточетверки A_I, B_I, C_I, H^I параллельны соответственным сторонам высотного треугольника орточетверки A_b, B_b, C_b, H^b, а значит, — сторонам базового треугольника $\triangle ABC$.

Рис. 6 Высотные треугольники?

Можно предположить, что высотные треугольники вписанного и вневписанных треугольников располагаются примерно так, как изображено на рисунке 6, однако на самом деле в их расположении есть определенные закономерности.

Оказывается, основания высот вписанного и вневписанного треугольников располагаются на трех парах параллельных прямых; в каждой паре параллельные прямые симметричны относительно одной из средних линий базового треугольника.

Докажем, например, что стороны $H_{ba}H_{aa}$ и $H_{bb}H_{ab}$ лежат на одной прямой и эта прямая симметрична $H_{Ib}H_{Ia}$ относительно средней линии M_aM_b.

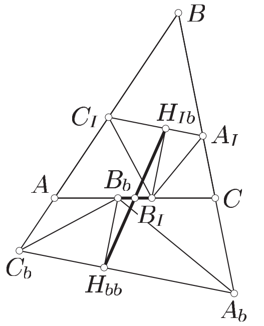

Рис. 7 Точки H_{Ib} и H_{bb} симметричны относительно M_b

Прямые дюжины A_IC_I и A_bC_b симметричны относительно M_b и параллельны (утверждение 2 на стр. 31 статьи [1]); поэтому проведенные к ним высоты B_IH_{Ib} и B_bH_{bb} тоже параллельны (рис. 7). Точки B_I и B_b симметричны относительно M_b (замечание 2 на стр. 27 статьи [1]), поэтому параллельные прямые B_bH_{bb} и B_IH_{Ib}, которые через них проходят, тоже симметричны. Эти прямые пересекают симметричные (относительно M_b) прямые A_IC_I, A_bC_b в точках H_{Ib} и H_{bb}, которые тоже, значит, симметричны относительно M_b. Поэтому симметричны проходящие через них параллельные прямые $H_{Ib}H_{Ia}$ и $H_{bb}H_{ab}$ (рис. 8).

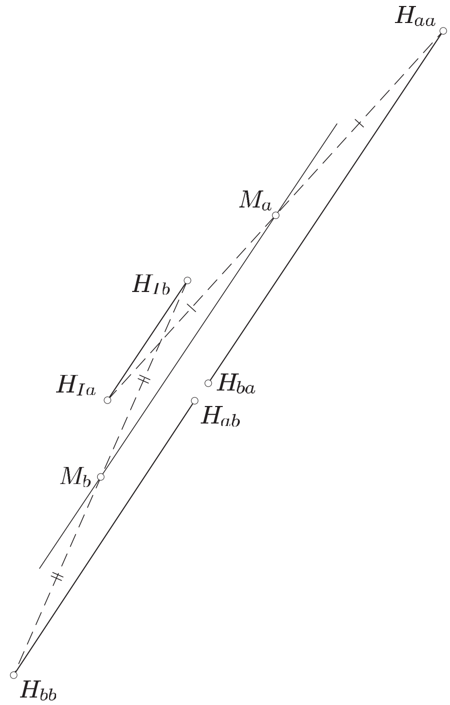

Рис. 8 Симметричные прямые

Точно так же доказывается, что параллельные прямые $H_{Ib}H_{Ia}$ и $H_{ba}H_{aa}$ симметричны относительно M_a. Средняя линия M_aM_b параллельна этим прямым, поэтому параллельные прямые

$H_{Ib}H_{Ia}$ и $H_{ba}H_{aa}$ симметричны относительно M_aM_b. Аналогично, параллельные прямые $H_{Ib}H_{Ia}$ и $H_{bb}H_{ab}$ симметричны относительно M_aM_b. Поэтому $H_{ba}H_{aa}$ и $H_{bb}H_{ab}$ – это одна и та же прямая.

Точно так же можно доказать, что через четверки точек

$$H_{aa}, H_{ca}, H_{ac}, H_{cc}, \quad H_{bb}, H_{cb}, H_{bc}, H_{cc}$$

проходит по одной прямой.

Основания высот вписанного треугольника тоже не одиноки на прямых, которые они определяют: через четверки точек

$$H_{Ia}, H_{Ib}, H_{bc}, H_{ac}, \quad H_{Ia}, H_{Ic}, H_{ab}, H_{cb},$$
$$H_{Ib}, H_{Ic}, H_{ba}, H_{ca}$$

проходит по одной прямой.

Подведем итог

Утверждение 2. *Для каждого из оснований высот вписанного и вневписанного треугольников найдется симметричное ему относительно середины одной из сторон базового треугольника:*
относительно M_a симметричны H_{aa} и H_{Ia}, H_{ac} и H_{ab};
относительно M_b симметричны H_{bb} и H_{Ib}, H_{bc} и H_{ba};
относительно M_c симметричны H_{cc} и H_{Ic}, H_{ca} и H_{cb}.

Утверждение 3. *Основания высот вписанного и вневписанного треугольников располагаются на трех парах параллельных прямых; в каждой паре параллельные прямые симметричны относительно одной из средних линий базового треугольника.*

4. Докажите, что точки H_{ca} и H_{cb} симметричны относительно M_c — середины стороны AB.
5. Докажите, что точки H_{ca}, H_{ba}, H_{Ib}, H_{Ic} лежат на одной прямой.
6. Докажите, что для прямоугольного треугольника с прямым углом $\angle B$

1) точки A_b, B_b, C_b и B_R образуют орточетверку;

2) две параллельные прямые из утверждения 3 «сливаются» в одну, содержащую среднюю линию.

Иначе говоря, основания высот вписанного и вневписанного треугольников располагаются на прямой, содержащей среднюю линию, параллельную гипотенузе, а также на двух парах параллельных прямых; в каждой паре параллельные прямые симметричны относительно одной из средних линий, параллельных катетам.

3. Окружности Эйлера вписанного и вневписанных треугольников

7.Центр гомотетии двух окружностей принадлежит каждой из них. Сколько общих точек может быть у этих окружностей?

8. Прямые AC и $A'C'$ антипараллельны относительно угла $\angle B$. Из вершины B проведены перпендикуляры к этим антипараллелям. Докажите, что эти перпендикуляры изогональны относительно угла $\angle B$.

Рассмотрим еще раз высотные треугольники вписанного и вневписанного треугольников (рис. 9). Если базовый треугольник тупоугольный, то эти четыре высотных треугольника будут располагаться приблизительно так, как изображено на рисунке 10. Очень полезно самостоятельно изготовить чертеж для прямоугольного треугольника и проследить, что происходит в этом частном случае.

На рисунках 9 и 10 «почти» изображен треугольник $\triangle H_{aa}H_{bb}H_{cc}$. Мы говорим «почти» потому, что на самом деле линия $H_{aa}H_{bb}$ не проведена — проведены только отрезки $H_{aa}H_{ba}$ и $H_{bb}H_{ab}$. Но мы-то знаем, что они лежат на одной прямой (см. утверждение 3).

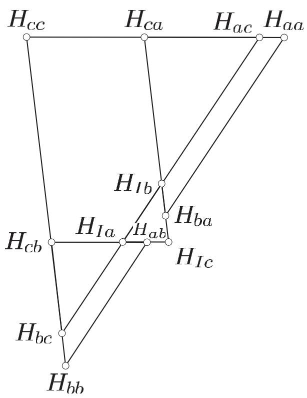

Рис. 9.

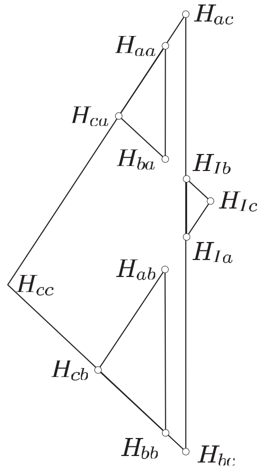

Рис. 10.

Поэтому рисунок 9 сразу наводит на мысль, как можно получить окружность, которая касается всех трех окружностей Эйлера вневписанных треугольников. Конечно же, это должна быть описанная окружность треугольника $\triangle H_{aa}H_{bb}H_{cc}$. Скажем, треугольники $\triangle H_{aa}H_{bb}H_{cc}$ и $\triangle H_{aa}H_{ba}H_{ca}$ гомотетичны с центром гомотетии H_{aa}, этот центр лежит на описанных окружностях этих двух треугольников, поэтому окружности должны касаться, причем H_{aa} — точка касания. Остается только найти треугольник такой, чтобы $\triangle H_{aa}H_{bb}H_{cc}$ был его высотным треугольником. Это просто.

Нужно провести биссектрисы треугольника $\triangle H_{aa}H_{bb}H_{cc}$, на них будут лежать высоты того треугольника, для которого $\triangle H_{aa}H_{bb}H_{cc}$ — высотный. Затем остается провести перпендикуляры к высотам, иначе говоря, внешние биссектрисы треугольника $\triangle H_{aa}H_{bb}H_{cc}$ — это и будут стороны искомого треугольника.

Проведем биссектрису угла $\angle H_{aa}H_{bb}H_{cc}$, то есть угла $\angle H_{ab}H_{bb}H_{cb}$ (рис. 11). Это биссектриса угла высотного треугольника $\triangle H_{ab}H_{bb}H_{cb}$ треугольника $\triangle A_bB_bC_b$, она совпадает с высотой B_bH_{bb} этого последнего треугольника. Конечно же, ей перпендикулярна прямая A_bC_b. Аналогично получается, что две другие стороны искомого треугольника лежат на прямых A_cB_c и B_aC_a. Оказывается, мы с ним уже встречались — это треугольник $\triangle A_RB_RC_R$ (рис. **??**).

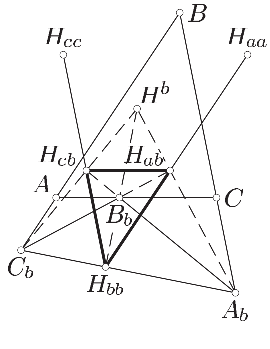

Рис. 11.

Точно так же рисунок 9 может помочь найти окружности, которые касаются окружности Эйлера вписанного треугольника. Действительно, согласно утверждению 3 треугольник $\triangle H_{ac}H_{ca}H_{Ib}$ гомотетичен треугольнику $\triangle H_{ac}H_{cc}H_{bc}$ с центром гомотетии H_{ac}, треугольнику $\triangle H_{aa}H_{ca}H_{ba}$ с центром гомотетии H_{ca}, и треугольнику $\triangle H_{Ia}H_{Ic}H_{Ib}$ с центром гомотетии H_{Ib}. Поэтому описанная окружность треугольника $\triangle H_{ac}H_{ca}H_{Ib}$ касается окружностей Эйлера вписанного треугольника и двух вневписанных. Остается только найти треугольник, для которого $\triangle H_{ac}H_{ca}H_{Ib}$ — высотный.

Он является высотным для четырех треугольников одной ортотетверки, из них мы выберем тот, стороны которого лежат на прямых A_IC_I, B_cC_c и A_aB_a — все они относятся к дюжине прямых.

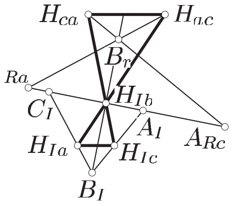

Рис. 12

Известны нам и точки пересечения этих прямых — C_{ra}, A_{rc}, B_r (рис. 12), — так что мы будем считать, что $\triangle H_{ac}H_{ca}H_{Ib}$ — высотный треугольник треугольника $\triangle C_{ra}A_{rc}B_r$. Именно его окружность Эйлера касается окружностей Эйлера вписанного треугольника $\triangle A_IB_IC_I$ и вневписанных $\triangle A_aB_aC_a$ и $\triangle A_cB_cC_c$.

Материал этого параграфа «вырос» из двух частных случаев, которые нам удалось обобщить. Первый — прямоугольный треугольник. О втором пойдет речь в следующем параграфе.

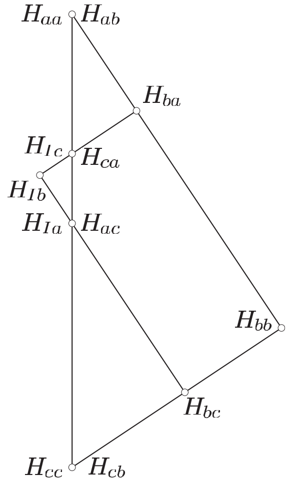

Рис. 13 Высотные треугольники. $\angle B = 90^\circ$

Те, кто выполнил упражнение 6, знают, что для прямоугольного треугольника (с прямым углом $\angle B$, например) высотные треугольники вписанного и вневписанных тоже прямоугольные и их гипотенузы лежат на одной прямой так, как изображено на рис. 13. Если у двух высотных треугольников есть общая вершина, то она является центром их гомотетии, и поэтому окружности Эйлера касаются друг друга в этой вершине.

Подведем итог

Каждая из окружностей Эйлера треугольников $\triangle C_{rb}B_{rc}A_r$, $\triangle C_{ra}A_{rc}B_r$, $\triangle B_{ra}A_{rb}C_r$ и $\triangle A_RB_RC_R$ касается трех из четырех окружностей Эйлера вписанного и трех вневписанных треугольников.

9. Докажите, что прямые A_RI_a, B_RI_b, C_RI_c пересекаются в одной точке, и что эта точка изогональна относительно каждого из треугольников $\triangle A_RB_RC_R$ и $\triangle I_aI_bI_c$ его центру тяжести.

Иначе говоря, что треугольники $\triangle A_RB_RC_R$ и $\triangle I_aI_bI_c$ перспективны и перспектор совпадает с их точкой Лемуана (у этих двух треугольников она общая).

4. Многоликий ортоцентр и двуликая окружность

Сердце математики состоит из конкретных примеров и конкретных проблем. Большие общие теории появляются обычно после обдумывания маленьких, но глубоких суждений; сами же суждения начинаются с проникновения в конкретные частные случаи.

П.Р. Халмош

10. Докажите, что расстояние ортоцентра до вершины треугольника вдвое больше расстояния от середины противолежащей стороны до центра описанной окружности. Иначе говоря, докажи, что $BH = 2OM_b$.

11. Докажите, что точка, симметричная отроцентру относительно середины стороны треугольника, лежит на описанной окружности и диаметрально противоположна противолежащей вершине треугольника. Иначе говоря, докажите, что если M_b — середина отрезка HH^B, то BH^B — диаметр описанной окружности треугольника $\triangle ABC$.

Сейчас, как мы и обещали, расскажем еще об одном частном случае расположения окружностей Эйлера вписанного и вневписанных треугольников. Согласно утверждению 1 для треугольников $\triangle A_RB_RC_R$, $\triangle A_rB_{rc}C_{rb}$, $\triangle A_{rc}B_rC_{ra}$, $\triangle A_{rb}B_{ra}C_r$ точка H (ортоцентр базового треугольника) является центром описанной окружности. При этом

$$A_RH = B_RH = C_RH; \tag{1}$$
$$A_rH = B_{rc}H = C_{rb}H; \tag{2}$$
$$A_{rc}H = B_rH = C_{ra}H; \tag{3}$$
$$A_{rb}H = B_{ra}H = C_rH. \tag{4}$$

Мы рассмотрим частный случай, когда один из этих треугольников вырождается в точку.

Предположим, что одна из прямых дюжины проходит через ортоцентр. Пусть, например, через ортоцентр проходт прямая A_aB_a. Это означает, что совпадают точки B_r и H (иначе говоря, $B_rH = 0$) и в силу условия 3

$$A_{rc}H = B_rH = C_{ra}H = 0.$$

Совпадают не только точки B_r и H; вместе с ними совпадают также точки A_{rc} и C_{ra}.

В этой ситуации треугольник $\triangle A_{rc}B_rC_{ra}$ вырождается в точку. Из соображений непрерывности понятно, что в ту же самую точку вырождается и его высотный треугольник $\triangle H_{ac}H_{ca}H_{Ib}$. При этом

$$H_{ac} = H_{ca} = H_{Ib} = H.$$

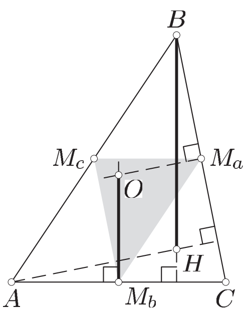

Рис. 14. К упражнению 10

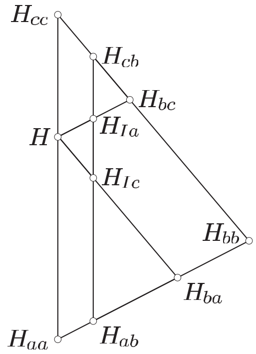

Рис. 15. Высотные треугольники

На рисунке 15 мы изобразили высотные треугольники вписанного и трех вневписанных треугольников базового. Видно, что ортоцентр H является вершиной трех высотных треугольников: $\triangle H_{aa}H_{ba}H_{ca}$, $\triangle H_{ac}H_{bc}H_{cc}$ и $\triangle H_{Ia}H_{Ib}H_{Ic}$. Поэтому их описанные окружности, то есть окружности Эйлера треугольников $\triangle A_aB_aC_a$, $\triangle A_cB_cC_c$ и $\triangle A_IB_IC_I$ имеют общую точку — ортоцентр H базового треугольника.

А что интересного можно сказать об окружности Эйлера оставшегося вневписанного треугольника $\triangle A_bB_bC_b$? Рассмотрим его высотный треугольник $\triangle H_{ab}H_{bb}H_{cb}$. Вспомним, куда переходят его вершины при симметрии относительно середин сторон базового треугольника $\triangle ABC$ (утверждение 2):

H_{ab} симметрична H_{ac} относительно M_a;
H_{bb} симметрична H_{Ib} относительно M_b;
H_{cb} симметрична H_{ca} относительно M_c.

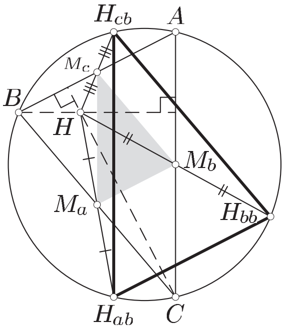

Рис. 16. Окружность Эйлера $\triangle A_bB_bC_b$

В данном частном случае все три точки H_{ac}, H_{Ib} и H_{ca} совпадают с ортоцентром H. Поэтому согласно задаче 11 треугольник $\triangle H_{ab}H_{bb}H_{cb}$ центрально симметричен базовому треугольнику $\triangle ABC$ относительно центра O описанной окружности. Описанные окружности треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle H_{ab}H_{bb}H_{cb}$ совпадают, а значит, окружность Эйлера треугольника $\triangle A_bB_bC_b$ совпадает с описанной окружностью треугольника $\triangle ABC$ (рис. 16).

Итак, мы показали, что если одна из прямых дюжины проходит через ортоцентр, то три из окружностей Эйлера вписанного и вневписанных треугольников тоже проходят через ортоцентр, а оставшаяся четвертая окружность Эйлера совпадает с описанной окружностью базового треугольника.

В этом месте было бы чрезвычайно полезно оторваться от чтения, изготовить к данному частному случаю чертеж и провести исследование: не наблюдается ли здесь еще каких-нибудь интересных закономерностей. Правда, неясно, с чего начинать работу: как построить такой треугольник, у которого одна из прямых дюжины проходит через ортоцентр. Поэтому сейчас мы выведем условие, которому должны подчиняться углы треугольника $\triangle ABC$, чтобы одна из прямых дюжины прошла через ортоцентр.

Прямые дюжины отсекают от высот треугольника отрезки, равные радиусам вписанной или вневписанной окружностей (рис. **??**), нам сейчас полезно вспомнить такие соотношения: $AA_{rc} = r_c$, $BB_r = r$, $CC_{ra} = r_a$, $A_RA = r_a$, $B_RB = r_b$. Поэтому, когда треугольник $\triangle A_{rc}B_rC_{ra}$ вырождается в точку H,

$$AH = r_c, \quad BH = r, \quad CH = r_a.$$

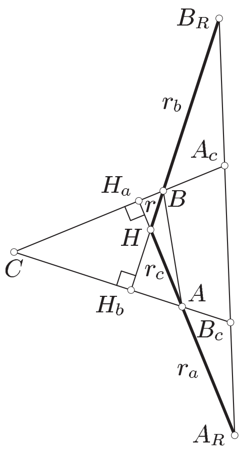

Рис. 17. $B_RH = A_RH$

Теперь мы можем найти длины отрезков A_RH и B_RH (рис. 17):

$$A_RH = A_RA + AH = r_a + r_c;$$

$$B_RH = B_RB + BH = r_b + r.$$

А раз H — центр описанной окружности треугольника $\triangle A_RB_RC_R$, то эти радиусы равны:

$$r_a + r_c = r_b + r. \tag{5}$$

Осталось из этого равенства вывести условие для углов базового треугольника $\triangle A_RB_RC_R$. Из упражнения 10 следует, что

$$r_a = CH = 2R\cos\gamma; \quad r = BH = 2R\cos\beta;$$

$$r_c = AH = 2R\cos\alpha.$$

Радиус окружности Эйлера треугольника $\triangle A_bB_bC_b$ равен R, радиус описанной окружности — вдвое больше, поэтому $r_c = 2R$. Тогда равенство 5 можно переписать:

$$2R\cos\gamma + 2R\cos\alpha = 2R + 2R\cos\beta.$$

Это и дает условие на углы треугольника $\triangle ABC$:

$$\cos\gamma + \cos\alpha = 1 + \cos\beta.$$

Применив тригонометрию, можно убедиться, что при выполнении этого условия три окружности Эйлера вписанного и вневписанных треугольников проходят через ортоцентр базового, а четвертая совпадает с его описанной окружностью. Поскольку упражнения в тригонометрии не входят в нашу задачу, мы этого делать не будем, заинтересованный читатель при желании может это проделать сам.

Подведем итог

Если одна из прямых дюжины треугольника $\triangle ABC$ проходит через его ортоцентр, то через него проходят три из окружностей Эйлера вписанного и вневписанных треугольников, а четвертая совпадает с описанной окружностью треугольника ABC.

12. Докажите, что если точки B_r, A_{rc} и C_{ra} совпадают, то равны треугольники $\triangle I_aI_bI_c$ и $\triangle A_cB_cH^c$.

13. Докажите, что если точки B_r, A_{rc} и C_{ra} совпадают, то B_b — центр описанной окружности треугольника $\triangle I_aI_bI_c$.

14. Докажите, что если точки B_r, A_{rc} и C_{ra} совпадают, то точка A_a лежит на прямой I_aB_b, а точка C_c — на прямой I_cB_b.

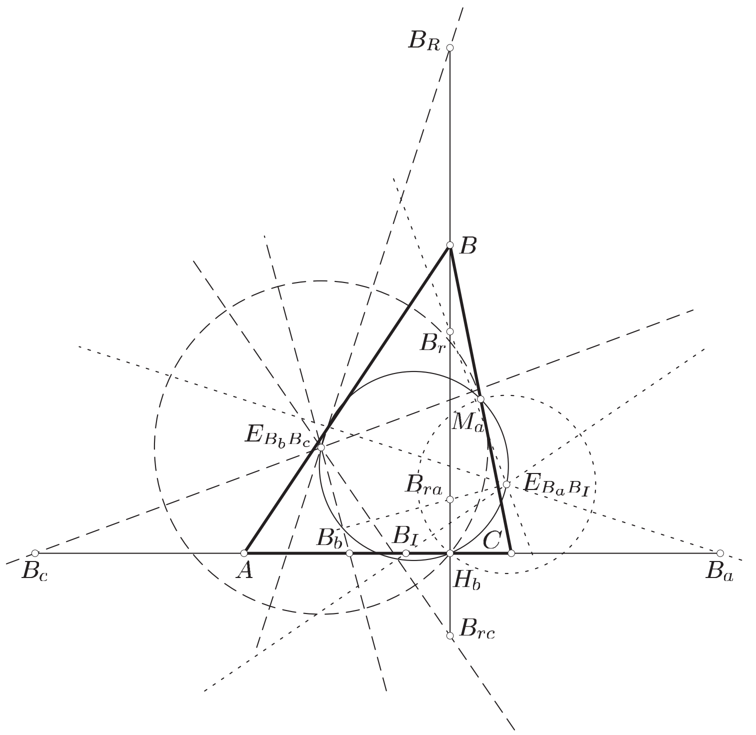

Рис. 18 Прямые Эйлера и окружности Эйлера треугольников орточетверок B_c, B_b, B_R, B_{rc} и B_a, B_I, B_r, B_{ra}

5. Еще орточетверки

В пункте 8 статьи [1] мы нашли шесть орточетверок (а значит, 24 треугольника), центры окружностей Эйлера лежат на окружности Эйлера базового треугольника. Но на самом деле таких орточетверок гораздо больше. Перечислим некоторые из них: B_c, B_b, B_R, B_{rc}; B_a, B_b, B_R, B_{ra}; B_c, B_I, B_r, B_{rc}; B_a, B_I, B_r, B_{ra}. В том, что это именно орточетверки, легко убедиться, рассмотрев внимательно рисунок 18.

В каждой из выписанных орточетверок две точки лежат на прямой AC, а две другие — на высоте базового треугольника, проведенной к этой стороне. Центры окружностей Эйлера этих орточетверок мы обозначили

$$E_{B_cB_b}, \quad E_{B_aB_b}, \quad E_{B_cB_I}, \quad E_{B_aB_I},$$

— нижние индексы указывают на две точки орточетверки, расположенные на прямой AC.

Окружности Эйлера и прямые Эйлера треугольников, заданных орточетверками B_c, B_b, B_R, B_{rc} и B_a, B_I, B_r, B_{ra}, изображены на рисунке 18.

Обе окружности Эйлера проходят через точки M_a и H_b, центры их лежат на окружности Эйлера базового треугольника, а именно на концах диаметра, перпендикулярного хорде M_aH_b.

Прямые Эйлера треугольников орточетверки B_c, B_b, B_R, B_{rc}, конечно же, проходят через точку $E_{B_b B_c}$. Каждой из них перпендикулярна одна из прямых Эйлера треугольников орточетверки B_a, B_I, B_r, B_{ra}. Разумеется, точки пересечения этих перпендикулярных прямых Эйлера лежат на окружности Эйлера базового треугольника.

Аналогичные утверждения верны для орточетверок B_a, B_b, B_R, B_{ra} и B_c, B_I, B_r, B_{rc}.

Это ожидаемые результаты, ведь подробно изученные нами орточетверки B_a, B_c, B_R, B_r и B_b, B_I, B_{ra}, B_{rc} обладают такими же свойствами. При этом треугольников, центры окружностей Эйлера которых лежат на окружности Эйлера базового треугольника оказывается довольно много — $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ штуки.

Литература

1. Куланин Е.Д., Шихова Н.А. Прямые Эйлера и точки Фейербаха // Математическое образование. - № 2(62). - 2012.

2. Куланин Е.Д., Шихова Н.А. Геометрический фейерверк. Творческие задания на уроках математики. - М.: Илекса, 2016.

Куланин Евгений Дмитриевич,
профессор кафедры прикладной математики
Московского государственного
психолого-педагогического университета.

E-mail: lucas03@mail.ru

Шихова Надежда Анатольевна,
г. Москва.

E-mail: snasna@list.ru

Гладкие функции, формальные ряды и теоремы Уитни

Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов

Статья знакомит читателя с основами теории гладких отображений, доступными студентам младших курсов математических специальностей. Многие изложенные здесь результаты связаны с именем одного из крупнейших специалистов в этой области американского математика Хасслера Уитни.

Введение

Наша цель — познакомить читателя с некоторыми начальными элементами теории *гладких отображений*. Слово "гладкий" здесь и далее является синонимом слов "бесконечно дифференцируемый". Центральным пунктом являются несколько утверждений, связанных с именем Х. Уитни[1] (теорема 2 — это "лемма Бореля–Уитни"[2]).

Приводимые нами факты и их доказательства можно, разумеется, найти в различных учебниках и монографиях. Мы следовали книгам [3, 4], записав имеющиеся там доказательства более подробно и, как надеемся, более ясно для начинающего читателя. (В качестве "идеального читателя" мы представляли себе студента младших курсов математических специальностей или "продвинутого" матшкольника.)

Лемма Бореля–Уитни показывает, что любая гладкая функция в окрестности точки задается своим формальным рядом Тейлора с точностью до слагаемого, бесконечно плоского в данной точке (*бесконечно плоская* в некоторой точке функция — функция, ряд Тейлора которой в этой точке состоит из одних нулей). Этот факт очень удобно использовать для доказательства различных утверждений о локальных свойствах функций, отображений, кривых и т.п. Примеры такого рода мы рассматриваем в заключительных частях. Четвертая часть посвящена особенностям кривых на плоскости, а пятая — *зонтику Уитни*, единственной устойчивой особенности поверхности в трехмерном пространстве, заданной параметрически. Еще один яркий пример (не включенный в наш текст) — теорему о нормальной форме дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности *регулярной особой точки* — можно найти в книгах [1, 2] (гл. 1, пар. 4).

При выборе материала мы старались избегать громоздких или слишком технических утверждений. С другой стороны, мы руководствовались принципом, который лучше всего выразить словами Брауэра[3], процитированными П. С. Александровым в письме А. Н. Колмогорову: *Значительны те математические результаты, от которых сразу делается больше воздуху и горизонт вдруг становится шире.*[4]

[1]Хасслер Уитни (Hassler Whitney, 1907 – 1989) — американский математик, внесший большой вклад в дифференциальную топологию и теорию особенностей, к которым относятся и доказываемые нами факты.

[2]Эмиль Борель (Émile Borel, 1871 – 1956) — известный французский математик.

[3]Лёйтзен Брауэр (Luitzen Brouwer, 1881 – 1966) — голландский математик.

[4]Письмо от 12 марта 1931 года. Опубликовано в книге: "Колмогоров. Юбилейное издание в трех книгах". М.: Физматлит, 2003. – Книга II, стр. 45.

1. Гладкие функции

В доказательстве ряда важных утверждений используются гладкие функции со специальными свойствами, которые мы сейчас и построим. Прежде чем смотреть наше решение, читателю рекомендуется попробовать решить следующую задачу самостоятельно, воспользовавшись лишь рисунком 1.

Задача 1. Для любого наперед заданного числа $0 < \varepsilon < 1$ построить гладкую функцию $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям $\psi(x) = 1$ при всех $|x| \le \varepsilon$, $\psi(x) = 0$ при всех $|x| \ge 1$ и строго положительную на интервалах $-1 < x < -\varepsilon$ и $\varepsilon < x < 1$. График такой функции изображен на рис. 1 справа.

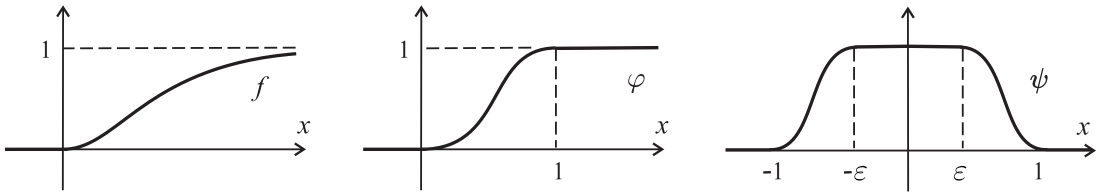

Рис. 1. Гладкие функции со специальными свойствами (к задаче 1)

Решение. Рассмотрим вспомогательную гладкую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ e^{-1/x}, & x > 0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 1 (слева). Затем построим гладкую функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям $\varphi(x) = 0$ при всех $x \le 0$, $\varphi(x) = 1$ при всех $x \ge 1$ и монотонную на интервале $0 < x < 1$ (график φ изображен на рис. 1 в центре). Проверьте, что функция φ с заданными свойствами строится с помощью функции f по формуле

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}.$$

Имея функцию φ, не составляет труда построить требуемую функцию ψ. Например, ее можно определить формулой

$$\psi(x) = \varphi\Big(\frac{1+x}{1-\varepsilon}\Big) \cdot \varphi\Big(\frac{1-x}{1-\varepsilon}\Big).$$

□

Вопросы.

1. Существуют ли аналитические функции f, φ, ψ с аналогичными свойствами?
2. Может ли последовательность

$$s_i = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi^{(i)}(x)|, \quad i = 1, 2, \dots ,$$

быть ограниченной? Для иллюстрации нарисуйте графики $\psi^{(i)}$ для $i = 1, 2$.

Перейдем теперь к многомерному аналогу задачи 1. Здесь $x = (x_1, \dots, x_p)$ принадлежит евклидову пространству $\mathbb{R}^p$ с расстоянием

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}.$$

Задача 2. Для любого наперед заданного числа $0 < \varepsilon < 1$ построить гладкую неотрицательную функцию $\Psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям $\Psi(x) = 1$ при всех $\|x\| \le \varepsilon$, $\Psi(x) = 0$ при всех $\|x\| \ge 1$ и строго положительную при всех $\varepsilon < \|x\| < 1$.

Решение. Функцию Ψ можно получить из ψ по формуле $\Psi(x) = \psi(\|x\|)$. □

Используя построенные выше функции, можно доказать ряд неочевидных и полезных утверждений. Например, построить так называемое *разбиение единицы* – понятие, играющее важную роль в анализе, топологии и геометрии многообразий (с его помощью, например, доказывается формула Стокса, а также теорема Уитни о гладком вложении компактного многообразия в евклидово пространство). Эти вопросы излагаются во многих учебниках, например, [5, 6, 7]. Мы приведем здесь немного менее известный, но достаточно эффектный пример.

Теорема 1. *Любое замкнутое*[5] *подмножество* $A \subset \mathbb{R}^p$ *является множеством нулевого уровня некоторой гладкой функции* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

Это утверждение (иногда также связываемое с именем Уитни) довольно неожиданно: ведь даже на прямой ($p = 1$) замкнутое множество может быть устроено весьма нетривиально — например, *канторово множество.* Совершенно не очевидно, что такое "патологическое" множество можно задать как множество нулей гладкой функции.

Доказательство. Дополнение $B = \mathbb{R}^p \setminus A$ открыто. Обозначим через Γ (общую) границу множеств A и B. Множество B можно покрыть последовательностью открытых шаров B_n, каждый из которых содержится в B (а объединение всех шаров дает все множество B). Например, рассмотрим шары B_n, имеющие центры $q_n \in B \cap \mathbb{Q}^p$, т. е. центры со всевозможными рациональными координатами во множестве B. Для каждого шара B_n определим величину

$$\rho_n = \operatorname{dist}(q_n, \Gamma) = \inf_{x \in \Gamma} \|x - q_n\|$$

— расстояние от точки q_n до Γ. Заметим, что ρ_n является либо положительным числом, либо бесконечностью. Определим радиус r_n шара B_n равенством $r_n = \rho_n$, если $\rho_n < \infty$, и равенством $r_n = 1$, если $\rho_n = \infty$ (вместо единицы тут можно взять произвольное положительное число).

Нетрудно проверить, что построенное таким образом семейство шаров $B_n \subset B$ счетно (поэтому его можно записать в виде последовательности, способ нумерации роли не играет) и покрывает все множество B. То, что любая точка $x \in B \cap \mathbb{Q}^p$ содержится хотя бы в одном из шаров, очевидно (по построению, x является центром некоторого шара B_n). Для точек $x \in B \setminus \mathbb{Q}^p$ нужно провести очень простое рассуждение, использующее открытость множества B и то, что $\mathbb{Q}^p$ всюду плотно в $\mathbb{R}^p$.

Построим последовательность гладких функций $\Psi_n : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, строго положительных в открытом шаре B_n и равных нулю вне его. Очевидно, для этого достаточно положить

$$\Psi_n(x) = \Psi\Big(\frac{x - q_n}{r_n}\Big), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где функция Ψ взята из задачи 2. Далее, определим число

$$\mu_n = \max_{|i| \le n} \sup_{x \in \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial^{|i|} \Psi_n(x)}{\partial x^i} \right|, \quad \text{где} \quad \frac{\partial^{|i|}}{\partial x^i} := \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_p}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_p^{i_p}}, \quad i = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{Z}_+^p.$$

Так как функция Ψ_n и все ее частные производные гладкие и тождественно равны нулю при $\|x\| \ge r_n$, то "внутренний" супремум для каждого фиксированного мультииндекса i конечен. Число мультииндексов i, удовлетворяющих условию $|i| \le n$ для любого n, тоже конечно. Следовательно, все определенные выше величины μ_n конечны. С другой стороны, $\mu_n \ge \sup |\Psi_n(x)| \ge 1$, так как множество $\mathbb{Z}^p$ содержит мультииндекс $i = 0$.

[5] Замкнутость (и открытость) понимается в смысле стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^p$.

Рассмотрим функцию f, заданную в виде ряда

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{\mu_n}\Psi_n(x). \tag{1}$$

Неравенство $|\frac{2^{-n}}{\mu_n}\Psi_n(x)| \le \frac{1}{2^n}$ показывает, что ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на всем пространстве $\mathbb{R}^p$. По известной теореме из курса математического анализа, функция $f(x)$ определена и непрерывна на всем $\mathbb{R}^p$. Таким образом, формула (1) задает непрерывную неотрицательную функцию f, строго положительную при всех $x\in B$ (для каждой точки $x\in B$ найдется по крайней мере один шар B_n, содержащий эту точку, и следовательно, по крайней мере одна функция Ψ_n, для которой $\Psi_n(x)>0$) и тождественно равную нулю на множестве $A=\mathbb{R}^p\setminus B$.

Остается доказать, что функция f не только непрерывная, но и гладкая. Для этого достаточно показать, что ряд, полученный почленным дифференцированием ряда (1), тоже сходится равномерно. Под дифференцированием здесь мы понимаем применение оператора $\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k}$ с произвольным мультииндексом $k\in\mathbb{Z}^p_+$. Нетрудно проверить, что имеет место следующая оценка:

$$\sum_{n=|k|}^{\infty}\Big|\frac{2^{-n}}{\mu_n}\frac{\partial^{|k|}\Psi_n(x)}{\partial x^k}\Big|\le\sum_{n=|k|}^{\infty}\frac{2^{-n}}{\mu_n}\Big|\frac{\partial^{|k|}\Psi_n(x)}{\partial x^k}\Big|\le\sum_{n=|k|}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty,$$

доказывающая равномерную сходимость нужного ряда. Для получения этой оценки мы отбросили первые $|k|-1$ слагаемых рядов, чтобы добиться выполнения условия $n\ge|k|$, но отбрасывание конечного числа членов ряда на его сходимость не влияет. □

Приведем еще одно вспомогательное утверждение о гладких функциях, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

Лемма Адамара[6]. *Любая гладкая функция* $F(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_m):\mathbb{R}^p\times\Omega\to\mathbb{R}$, *где* Ω – *область в* $\mathbb{R}^m$, *представима в виде*

$$F(x,y)=F(0,y)+\sum_{i=1}^{p}x_i\varphi_i(x,y), \tag{2}$$

где все $\varphi_i(x,y)$ – *гладкие функции,* $x=(x_1,\dots,x_p)$ *и* $y=(y_1,\dots,y_m)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(tx,y)=F(tx_1,\dots,tx_p,y_1,\dots,y_m),$$

где t – новая вещественная переменная, пробегающая значения из отрезка $[0,1]$. Функция $F(tx,y)$, рассматриваемая как функция $\mathbb{R}^{p+m}\to\mathbb{R}$ при каждом фиксированном значении параметра t, пробегает в пространстве гладких функций от $p+m$ переменных некоторую кривую (путь) с концами $F(0,y)$ и $F(x,y)$.

С другой стороны, можно рассматривать $F(tx,y)$ как функцию переменной t, зависящую от параметров $x\in\mathbb{R}^p$ и $y\in\mathbb{R}^m$. Используя вторую точку зрения, мы можем записать равенство

$$F(x,y)-F(0,y)=\int_0^1\frac{dF(tx,y)}{dt}\,dt=\int_0^1\sum_{i=1}^{p}x_i\,\frac{\partial F}{\partial x_i}(tx,y)\,dt=\sum_{i=1}^{p}x_i\varphi_i(x,y),$$

где

$$\varphi_i(x,y):=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial x_i}(tx,y)\,dt.$$

[6]Жак Адамар (Jacques Salomon Hadamard, 1865 – 1963) — известный французский математик.

Гладкость функций $\varphi_i(x, y)$ следует из известной теоремы о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, которая доказывается в курсе анализа. □

Задача 3. Применяя лемму Адамара, докажите, что для любого натурального r гладкая функция $F(x, y) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ представима в виде

$$F(x, y) = f_0(y) + xf_1(y) + \cdots + x^{r-1} f_{r-1}(y) + x^r g_r(x, y), \tag{3}$$

где $f_1(y), \ldots, f_{r-1}(y)$ и $g_r(x, y)$ – гладкие функции.

2. Формальные ряды

Формальный степенной ряд (далее мы будем говорить короче: *формальный ряд*) от переменных $x_1, \ldots, x_p$ над алгебраическим полем $\mathbb{K}$ — это ряд, т. е. бесконечная сумма

$$\sum_{n_1+\cdots+n_p=0}^{\infty} a_{n_1 \ldots n_p} \, x_1^{n_1} \cdots x_p^{n_p}, \tag{4}$$

где $n_1, \ldots, n_p$ – целые неотрицательные числа, коэффициенты $a_{n_1 \ldots n_p}$ — элементы поля $\mathbb{K}$, переменные $x_1, \ldots, x_p$ принимают значение из того же поля $\mathbb{K}$.

Слово “формальный” в этом определении означает, что мы ничего не говорим о сходимости или расходимости этого ряда. Более того, алгебраическое поле само по себе не содержит понятия сходимости его элементов, поэтому вопрос о сходимости такого ряда просто не возникает, и он рассматривается как формальное алгебраическое выражение. Можно определить сложение и умножение формальных рядов по тому же правилу, что и для сходящихся рядов (и это даже проще, так как не нужно заботиться о сходимости). В результате мы получим *коммутативное кольцо* и даже *алгебру* формальных рядов над полем $\mathbb{K}$, обозначаемую $\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_p]]$ (двойные квадратные скобки служат для отличия от алгебры многочленов). Если понятие сходимости для элементов поля $\mathbb{K}$ определено, то формальный ряд при тех или иных значениях переменной $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ может оказаться сходящимся или расходящимся.

Мы будем далее иметь дело со случаем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Сходимость элементов понимается в смысле обычного евклидова расстояния. Будем называть ряд *расходящимся*, если он расходится во всех точках, кроме нуля, и *сходящимся*, если он сходится на некотором бóльшем множестве (которое однозначно определяется из контекста).

Формальные ряды естественным образом возникают в различных ситуациях. Например, возьмем произвольную гладкую функцию

$$F(x_1, \ldots, x_p) : \; \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}.$$

Записав ее ряд Тейлора в нуле, мы получим, вообще говоря, именно формальный ряд. Если F не является аналитической в (сколь угодно малой) окрестности нуля, то ее ряд Тейлора либо расходится, либо сходится к некоторой аналитической функции, не совпадающей с F (пример последнего случая дает функция f из задачи 1).

Введем еще одну разновидность формальных рядов — формальные степенные ряды по переменным $x_1, \ldots x_p$, коэффициенты которых являются гладкими функциями от переменных $y_1, \ldots y_m$:

$$\sum_{n_1+\cdots+n_p=0}^{\infty} a_{n_1 \ldots n_p}(y) \, x_1^{n_1} \cdots x_p^{n_p}, \quad y = (y_1, \ldots, y_m). \tag{5}$$

Сложение и умножение таких рядов определяется аналогично рядам (4), только при этом вместо *алгебры* получается другая алгебраическая структура — *модуль* над кольцом гладких функций от m переменных.

Возникает естественный вопрос: всякому ли формальному ряду (4) или (5) отвечает гладкая функция $F(x)$ или $F(x,y)$ соответственно, у которой ряд Тейлора по x в нуле совпадает с данным рядом? Ответ на этот вопрос положительный:

Теорема 2 (Лемма Бореля–Уитни).

1. *Для любого формального ряда* (4) *найдется такая гладкая функция* $F(x):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, *ряд Тейлора которой в нуле совпадает с* (4).

2. *Для любого формального ряда* (5) *и открытой ограниченной области* $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ *найдется такая гладкая функция* $F(x,y):\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$, *ряд Тейлора которой по переменной* x *в точке* $x=0$ *совпадает с* (5).

Доказательство первого утверждения. Чтобы не затемнять основную идею техническими деталями, приведем доказательство для $p=1$. Покажем, что для любого формального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

существует гладкая функция $F(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ряд Тейлора которой в точке 0 совпадает с (6). Будем искать $F(x)$ в виде функционального (но не степенного) ряда

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \psi(x/r_n), \tag{7}$$

в котором коэффициенты a_n те же, что и в (6), а функция ψ построена в задаче 1.

Числа $r_n>0$ мы подберем таким образом, чтобы ряд (7) сходился абсолютно и равномерно, а также абсолютно и равномерно сходились и все ряды, полученные его k-кратным дифференцированием при любом k. Для выполнения этого положим

$$r_n=\frac{1}{n!(1+|a_n|)}.$$

Нетрудно проверить, что имеет место следующая оценка:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n x^n\psi(x/r_n)|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|r_n^n=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{n!}\Bigr)^n\frac{|a_n|}{(1+|a_n|)^n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}<\infty,$$

из которой следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (7). Здесь мы сначала использовали то, что $|x^n\psi(x/r_n)|\le|x|^n$ при $|x|\le r_n$ и $|x^n\psi(x/r_n)|=0$ при $|x|>r_n$ (оба утверждения вытекают из определения функции ψ). Затем мы воспользовались неравенством $(1+|a_n|)^n\ge|a_n|$, которое справедливо для всех $n\ge1$ (вот почему мы начали суммирование с единицы, а не с нуля, но отбрасывание конечного числа членов ряда на его сходимость не влияет).

Аналогично, для ряда, полученного однократным дифференцированием (7), получаем следующую оценку:

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n(x^n\psi(x/r_n))'|=\sum_{n=2}^{\infty}|a_n(nx^{n-1}\psi(x/r_n)+x^n/r_n\psi'(x/r_n))|\le$$
$$\le\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r_n^{n-1}(n+M_1)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|(n+M_1)}{(n!(1+|a_n|))^{n-1}}\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+M_1)}{n!}<\infty,$$

где число $M_1=\max\limits_{[-1,1]}|\psi'(x)|$.

Используя аналогичные рассуждения, нетрудно получить подобную оценку (означающего абсолютную и равномерную сходимость) для ряда, полученного k-кратным дифференцированием данного ряда при любом k. Следовательно, ряд, стоящий в правой части формулы (7), сходится к некоторой функции F, определенной и гладкой на всем $\mathbb{R}$. Для завершения доказательства остается лишь проверить, что ряд Тейлора полученной функции $F(x)$ в точке 0 совпадает с (6), т. е. $F^{(n)}(0) = n!a_n$. Проверка этого утверждения тривиальна и оставляется читателю.

В случае $p > 1$ доказательство аналогично, функцию ψ нужно заменить ее многомерным аналогом Ψ из задачи 2. □

Доказательство второго утверждения. Здесь мы для простоты будет считать, что $p = 1$ и $m = 1$ (в общем случае доказательство такое же, но более громоздкие формулы). Покажем, что для любого формального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\, x^n, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

с гладкими коэффициентами $a_n(y)$ и для любой открытой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}$ существует гладкая функция $F(x, y) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, ряд Тейлора которой по переменной x в $x = 0$ совпадает с (8).

Будем искать функцию $F(x, y)$ в виде ряда

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) x^n \psi(x/r_n), \tag{9}$$

в котором $a_n(y)$ те же, что и в (8), а числа $r_n > 0$ определены формулой

$$r_n = \frac{1}{n!(1 + \alpha_n)}, \quad \text{где} \quad \alpha_n = \max_{0 \le i \le n} \max_{y \in \overline{\Omega}} |a_n^{(i)}(y)|,$$

где $\overline{\Omega}$ означает замыкание области Ω.

Рассуждая так же, как и раньше, для любого целого $i \ge 0$ получаем оценку:

$$\sum_{n=i+1}^{\infty} |a_n^{(i)}(y) x^n \psi(x/r_n)| \le \sum_{n=i+1}^{\infty} \alpha_n r_n^n = \sum_{n=i+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^n \frac{\alpha_n}{(1 + \alpha_n)^n} \le \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \infty,$$

которая показывает, что ряд, полученный i-кратным дифференцированием по переменной y ряда, стоящего в правой части формулы (9), сходится абсолютно и равномерно в $\mathbb{R} \times \Omega$. Отсюда следует, что ряд (9) определяет функцию $F(x, y)$, имеющую в $\mathbb{R} \times \Omega$ непрерывные частные производные $\partial^i F/\partial y^i$ всех порядков $i \ge 0$.

Аналогично, для ряда, полученного из (9) однократным дифференцированием по переменной x и i-кратным дифференцированием по переменной y, получаем следующую оценку:

$$\sum_{n=i+2}^{\infty} |a_n^{(i)}(y)(x^n \psi(x/r_n))'| \le \sum_{n=i+2}^{\infty} \alpha_n |n x^{n-1} \psi(x/r_n) + x^n/r_n \psi'(x/r_n)| \le$$
$$\le \sum_{n=i+2}^{\infty} \alpha_n r_n^{n-1}(n + M_1) = \sum_{n=i+2}^{\infty} \frac{\alpha_n (n + M_1)}{(n!(1 + \alpha_n))^{n-1}} \le \sum_{n=i+2}^{\infty} \frac{(n + M_1)}{n!} < \infty.$$

Используя аналогичные рассуждения, нетрудно получить подобную оценку (означающего абсолютную и равномерную сходимость) для ряда, полученного из (9) k-кратным дифференцированием по переменной x и i-кратным дифференцированием по переменной y.

Следовательно, ряд (9) сходится к некоторой функции $F(x, y)$, определенной и гладкой в $\mathbb{R} \times \Omega$. Проверку того, что ряд Тейлора этой функции $F(x, y)$ по переменной x в $x = 0$ совпадает с (8), мы оставляем читателю. Также читателю предоставляется самостоятельно провести доказательство утверждения в случае $p > 1$ и $m > 1$. Оно совершенно аналогично рассмотренному нами частному случаю. □

Задача 4. Даны два формальных ряда с различными центрами:

$$A = \sum_{n_1+\cdots+n_p=0}^{\infty} a_{n_1\dots n_p}(x_1-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x_p-\alpha_p)^{n_p}, \quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_p),$$

$$B = \sum_{n_1+\cdots+n_p=0}^{\infty} b_{n_1\dots n_p}(x_1-\beta_1)^{n_1}\cdots(x_p-\beta_p)^{n_p}, \quad \beta=(\beta_1,\dots,\beta_p).$$

Докажите, что существует гладкая функция $F(x_1,\dots,x_p):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, ряды Тейлора которой в точках α и β совпадают с рядами A и B, соответственно.

3. Некоторые следствия

Пусть $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$ и $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ – открытая ограниченная область. Предположим, что задана функция

$$F(x,y_1,\dots,y_m):\mathbb{R}_+\times\Omega\to\mathbb{R},$$

гладкая во всей своей области определения. Последняя фраза нуждается в уточнении. Во всех внутренних точках множества $\mathbb{R}_+\times\Omega$ гладкость подразумевает существование непрерывных частных производных всех порядков, понимаемых в обычном смысле. В граничных точках множества $\mathbb{R}_+\times\Omega$, т. е. точках, лежащих на гиперплоскости $x=0$, все производные (и пределы) понимаются как односторонние: "правые" по переменной x.

Зададимся вопросом: можно ли гладко продолжить функцию $F(x,y)$ на все множество $\mathbb{R}\times\Omega$? Это означает, что нужно указать гладкую функцию

$$\overline{F}(x,y_1,\dots,y_m):\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R},$$

такую, что $\overline{F}(x,y)=F(x,y)$ для всех $(x,y)\in\mathbb{R}_+\times\Omega$. Хотя положительный ответ кажется очевидным, он нуждается в обосновании, которое можно получить, например, с помощью теоремы 2.

Теорема 3. *Любая гладкая функция $F(x,y):\mathbb{R}_+\times\Omega\to\mathbb{R}$ может быть гладко продолжена на множество $\mathbb{R}\times\Omega$.*

Доказательство. Запишем ряд Тейлора функции $F(x,y)$ по переменной x в $x=0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\,x^n, \quad \text{где} \quad a_n=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n F}{\partial x^n}(0,y)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x,y). \tag{10}$$

Теорема будет доказана, если мы построим гладкую функцию $G(x,y):\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$, ряд Тейлора которой по переменной x в $x=0$ совпадает с формальным рядом (10). Тогда искомую функцию $\overline{F}(x,y)$ можно определить соотношением

$$\overline{F}(x,y)=\begin{cases} F(x,y), & x\ge 0, \quad y\in\Omega,\\ G(x,y), & x<0, \quad y\in\Omega.\end{cases}$$

Но, согласно теореме 2, такая функция $G(x,y)$ существует. □

Разумеется, гладкое продолжение функции $F(x,y)$, построенное в теореме 3, не единственно. Единственным было бы аналитическое продолжение аналитической функции, но в этом случае само существование такого продолжения очевидно.

Теорема 4. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ – произвольная открытая ограниченная область. Любая гладкая функция $F(x,y):\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ может быть представлена в виде*

$$F(x,y)=F_1(x^2,y)+xF_2(x^2,y), \quad y=(y_1,\dots,y_m), \tag{11}$$

где $F_{1,2}(x,y) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *– некоторые гладкие функции.*

Представление (11) совершенно очевидно для многочленов, формальных рядов и аналитических функций. В последнем случае достаточно просто написать ряд Тейлора по переменной x и собрать вместе мономы x^n с четными и нечетными степенями (законность такой операции в случае аналитической функции вытекает из абсолютной сходимости соответствующего степенного ряда). Однако это гладких функций справедливость представления (11) совсем не очевидна.

Доказательство. Любая функция представима в виде суммы функций, четной и нечетной по x. Действительно, $F(x,y) = F_{\mathrm{ev}}(x,y) + F_{\mathrm{od}}(x,y)$, где

$$F_{\mathrm{ev}}(x,y) = \frac{F(x,y) + F(-x,y)}{2}, \qquad F_{\mathrm{od}}(x,y) = \frac{F(x,y) - F(-x,y)}{2}.$$

Далее, нечетная по x функция $F_{\mathrm{od}}(x,y)$ представима в виде $F_{\mathrm{od}}(x,y) = xf(x,y)$, где $f(x,y)$ — гладкая четная по x функция. Это утверждение легко доказать с помощью леммы Адамара.

Таким образом, достаточно доказать, что для любой гладкой четной функции $F(x,y) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ имеет место представление

$$F(x,y) = F_1(x^2, y), \quad y = (y_1, \ldots, y_m), \tag{12}$$

с некоторой гладкой функцией $F_1(x,y) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$.

Так как $F(x,y) \equiv F(|x|, y)$, равенство (12) равносильно $F_1(\xi, y) = F(\sqrt{\xi}, y)$ для всех $\xi \geq 0$. Тем самым, функция $F_1(\xi, y)$ однозначно определена для всех значений $\xi \geq 0$ и может принимать произвольные значения при $\xi < 0$:

$$F_1(\xi, y) = \begin{cases} F(\sqrt{\xi}, y), & \textit{если} \quad \xi \geq 0, \\ \textit{произвольно}, & \textit{если} \quad \xi < 0. \end{cases}$$

Единственным условием на функцию $F_1(\xi, y)$, которое должно быть выполнено, является гладкость на всем множестве $\mathbb{R} \times \Omega$. Для внутренних точек множества $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ (т. е. при $\xi > 0$) гладкость F_1 очевидно следует из гладкости F.

В точках гиперплоскости $\xi = 0$ функция $F_1(\xi, y) = F(\sqrt{\xi}, y)$ имеет непрерывные частные производные (односторонние по переменной ξ) всех порядков. Для доказательства этого утверждения можно использовать представление (3). Действительно, в случае четной по x функции F мономы нечетных степеней в этом представлении отсутствуют, и мы получаем выражение

$$F(x,y) = f_0(y) + x^2 f_1(y) + \cdots + x^{2(n-1)} f_{n-1}(y) + x^{2n} g_n(x,y),$$

где $f_i(y)$ и $g_n(x,y)$ — гладкие функции, причем $g_n(x,y)$ — четная по x. Подставляя в полученное выражение $x = \sqrt{\xi}$, мы получаем

$$F_1(\xi, y) = f_0(y) + \xi f_1(y) + \cdots + \xi^{n-1} f_{n-1}(y) + \xi^n g_n(\sqrt{\xi}, y), \quad \forall \xi \geq 0.$$

Так как число n произвольно, то отсюда следует, что функция $F_1(\xi, y)$ имеет непрерывные частные производные всех порядков во всех точках множества $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Таким образом, мы имеем ситуацию теоремы 3, и существование гладкого продолжения функции $F_1(\xi, y)$ в область $\xi < 0$ вытекает из этой теоремы. □

4. Особенности плоских кривых

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим следующую задачу. Пусть на плоскости с координатами (x, y) задана кривая γ:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{13}$$

где функции φ и ψ – гладкие. Точка кривой γ, соответствующая некоторому значению параметра t_*, называется *регулярной*, если при $t = t_*$ производные φ' и ψ' не обращаются в нуль одновременно. В противном случае точка называется *нерегулярной* или *особой*. Как известно из курса анализа или дифференциальной геометрии, в окрестности регулярной точки кривая γ является гладкой и, более того, с помощью подходящей гладкой замены переменных $(x, y) \mapsto (\widetilde{x}, \widetilde{y})$ приводится к виду $\widetilde{x} = t$, $\widetilde{y} = 0$. В окрестности особой точки кривая может быть устроена значительно сложнее.

Задача 5. Приведите пример кривой (13), совпадающей с графиком $y = |x|$ вблизи начала координат (которое, очевидно, является особой точкой этой кривой). Указание: воспользуйтесь функцией f из задачи 1.

Мы хотим получить ответ на следующий вопрос: к какому наиболее простому виду можно привести кривую γ в окрестности ее особой точки посредством гладких замен переменных x, y и замен параметра t? Подчеркнем, что мы говорим именно о *локальном* поведении кривой в окрестности рассматриваемой точки, причем “размер” этой окрестности не имеет никакого значения, важен лишь сам факт существования такой окрестности, сколь угодно малой. Чтобы подчеркнуть это и заодно избежать многократного повторения слов про малую окрестность, мы будем далее говорить о *ростке* кривой в рассматриваемой точке. Читателю, не знакомому с понятием ростка, мы рекомендуем воспринимать его семантически, как заменитель более длинного выражения “в достаточно малой окрестности”[7].

Без ограничения общности будем далее всегда считать, что рассматриваемая особая точка — начало координат плоскости (x, y) и соответствует значению параметра $t = 0$. Следовательно, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$. Предположим, что функции φ и ψ имеют в точке $t = 0$ нули *конечных порядков*. Тогда, без ограничения общности, можно считать, что

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0, \quad \varphi^{(n)}(0) \neq 0,$$
$$\psi(0) = \psi'(0) = \cdots = \psi^{(m-1)}(0) = 0, \quad \psi^{(m)}(0) \neq 0,$$

для некоторых натуральных чисел $m \geq n \geq 2$. Используя формулу (3), мы можем записать росток нашей кривой в виде

$$x = t^n \varphi_1(t), \quad y = t^m \psi_1(t), \qquad \varphi_1(0) \neq 0, \ \psi_1(0) \neq 0, \tag{14}$$

где φ_1, ψ_1 – гладкие функции. Далее, с помощью изменения масштаба и направления осей x, y и замены параметра можно добиться того, что $\varphi_1(t) = 1$ и $\psi_1(t) = 1 + \chi(t)$ или $\varphi_1(t) = 1 + \chi(t)$ и $\psi_1(t) = 1$, где $\chi(t)$ – гладкая функция и $\chi(0) = 0$.

Вопрос. Можно ли росток кривой из задачи 5 задать формулой (14) с конечными n и m?

Случай $n = m$ можно исключить из дальнейшего рассмотрения: так как мы можем делать замены переменных x, y, то, сделав замену $y \mapsto y - \alpha x$ с подходящим коэффициентом α, добьемся условия $m > n$. (Делая замены переменных, мы часто будем обозначать старые и новые переменных одинаково. Запись $y \mapsto y - \alpha x$ означает, что новая переменная $\widetilde{y}$ выражается через старые переменные x, y по формуле $\widetilde{y} = y - \alpha x$, но после замены мы вместо $\widetilde{y}$ снова пишем y.)

Далее мы ограничимся рассмотрением простейшего случая $m = n + 1$. (Особые точки такого типа встречаются, например, при исследовании интегральных кривых дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной.)

Задача 6. Докажите, что росток любой кривой вида (14) с $n = 2$, $m = 3$ можно привести к виду

$$x = t^2, \quad y = t^3. \tag{15}$$

[7] Формальное определение ростка можно найти, например, в книге [3] или [6].

Такая кривая называется *полукубической параболой*, а ее особая точка – *полукубической точкой возврата* или *каспом*, рис. 2 (слева).

Каспы – самые простые и часто встречающиеся особенности плоских кривых, заданных параметрически. Рассмотрим, например, вещественный кубический многочлен $\xi^3 + a\xi + b$. Геометрическое место точек плоскости параметров (a, b), при которых он имеет кратный корень, является полукубической параболой с каспом в точке $a = b = 0$ (ей соответствует корень кратности 3).

Задача 7. Как выглядит геометрическое место точек пространства параметров (a, b, c), при которых вещественный кубический многочлен $\xi^3 + a\xi^2 + b\xi + c$ имеет кратный корень? Эта поверхность называется *полукубическим ребром возврата*.

Другой пример: возьмем гладкую регулярную кривую C в трехмерном пространстве и спроектируем ее на одну из координатных плоскостей. Каспы возникают на плоской кривой-проекции в тех точках, где C касается направления проектирования π (точнее, имеет первый порядок касания с π), рис. 2 (в центре). Каспы можно наблюдать и в повседневной жизни. Например, на так называемых *каустиках* – огибающих семейства лучей, не сходящихся в одной точке. Каустики с каспами видны в виде ярких кривых, возникающих при отражении/преломлении световых лучей, например, при прохождении через прозрачный стакан с водой, рис. 2 (справа).

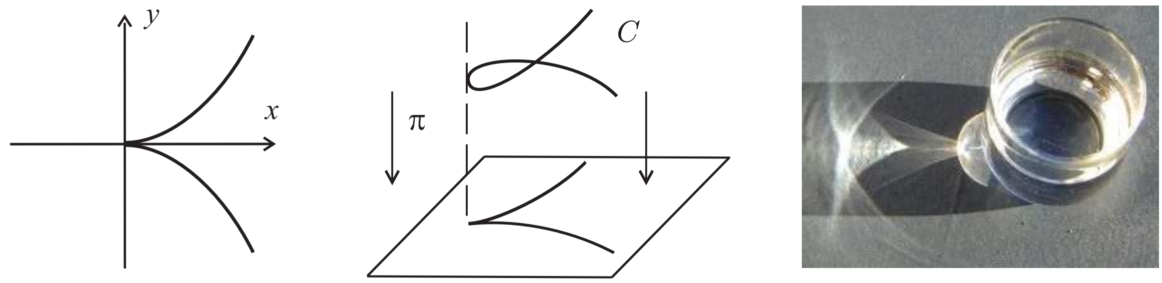

Рис. 2. Полукубическая парабола и каспы. Кривая C на втором рисунке без самопересечения, самопересечение имеет лишь ее проекция на сетчатку глаза наблюдающего "сбоку".

Наконец, целое семейство кривых с каспами можно получить, рассмотрев *асимптотические линии* на поверхности, если гауссова кривизна в разных точках поверхности имеет разные знаки[8]. Все асимптотические линии расположены в области отрицательной гауссовой кривизны и имеют каспы на линии *параболических точек* (т. е. точек с нулевой гауссовой кривизной).

Решение задачи 6. Согласно сказанному выше, рассмотрим росток кривой

$$x = t^2, \quad y = t^3(1 + \chi(t)), \quad \chi(0) = 0.$$

Воспользовавшись теоремой 4, представим функцию $\chi(t)$ в виде $\chi(t) = \chi_1(t^2) + t\chi_2(t^2)$. Тогда $y = t^3(1 + \chi_1(t^2)) + t^4\chi_2(t^2) = t^3(1 + \chi_1(x)) + x^2\chi_2(x)$. С учетом того, что $\chi_1(0) = 0$, отсюда заключаем, что замена переменной

$$y \mapsto \frac{y - x^2\chi_2(x)}{1 + \chi_1(x)}$$

гладкая в некоторой окрестности нуля и приводит росток нашей кривой к виду (15). $\square$

[8]Асимптотические линии поверхности в трехмерном евклидовом пространстве — это кривые, которые в каждой своей точке касаются *асимптотического направления*, т.е. направления, в котором нормальное сечение поверхности в данной точке имеет нулевую кривизну. В курсе аналитической геометрии, рассматривая поверхности второго порядка, мы сталкиваемся с поверхностями положительной кривизны (эллипсоид, двуполостный гиперболоид), отрицательной кривизны (однополостный гиперболоид) и даже нулевой кривизны (конус, цилиндр). Чтобы получить поверхность знакопеременной кривизны, нужно уравнение степени выше 2.

Следующая задача очень сходна по формулировке, но ее доказательство сложнее.

Задача 8. Докажите, что росток любой кривой вида (14) с $n = 3$, $m = 4$ можно привести к виду

$$x = t^3, \quad y = t^4. \tag{16}$$

Решение. Рассмотрим росток кривой $x = t^3$, $y = t^4(1 + \chi(t))$, где $\chi(0) = 0$. Из формулы (3) следует, что для любого натурального r имеет место представление

$$x = t^3, \quad y = t^4(1 + \chi_1 t + \dots + \chi_r t^r + O(t^{r+1})),$$

где $\chi_1, \dots, \chi_r$ – некоторые числа.

Шаг 1. Убиваем моном t^5. Очевидно, при этом без ограничения общности можно считать $\chi_1 = 1$, так как любой $\chi_1 \neq 0$ может быть сведен к 1 посредством умножения параметра t и координат x, y на подходящие ненулевые числа. Поэтому без ограничения общности проведем доказательство для кривой

$$x = t^3, \quad y = t^4 + t^5 + O(t^6).$$

Замена $x \mapsto x + \alpha y$ с коэффициентом $\alpha = \frac{3}{4}$ приводит эту кривую к виду

$$x = X(t) := t^3 + \alpha(t^4 + t^5) + O(t^6), \quad y = t^4 + t^5 + O(t^6).$$

После этого в полученной кривой сделаем регулярную замену параметра $t \mapsto \tau$ по формуле $\tau = X^{\frac{1}{3}}(t) = t\big(1 + \alpha(t + t^2) + O(t^3)\big)^{\frac{1}{3}}$. При этом, очевидно, $x = \tau^3$, и кривая принимает вид

$$x = \tau^3, \quad y = \psi^4(\tau) + \psi^5(\tau) + O(\tau^6),$$

где ψ – это функция, обратная к $X^{\frac{1}{3}}(t)$. В достаточно малой окрестности нуля эта обратная функция существует, причем, как показывает простое вычисление, $\psi(\tau) = \tau - \frac{1}{4}\tau^2 + O(\tau^3)$. Подставляя последнее выражение в формулу для y, после сокращения подобных членов получаем $y = \tau^4 + O(\tau^6)$, т. е. в новой формуле моном τ^5 отсутствует.

Шаг 2. Убиваем остальные мономы. Согласно предыдущему, рассмотрим росток кривой

$$x = t^3, \quad y = t^4(1 + \chi_2 t^2 + \dots + \chi_r t^r + O(t^{r+1})), \tag{17}$$

и убьем все мономы t^k степеней $k > 5$. Для этого заметим, что для любого $k > 5$ выполнено равенство $t^k = x^i y^j + O(t^{k+1})$ с некоторыми $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Например,

$$t^6 = x^2, \quad t^7 = xy + O(t^8), \quad t^8 = y^2 + O(t^9), \quad t^9 = x^3, \quad t^{10} = x^2 y + O(t^{11}),$$
$$t^{11} = xy^2 + O(t^{12}), \quad t^{12} = x^4, \quad t^{13} = x^3 y + O(t^{14}), \quad \dots$$

Следовательно, используя замену

$$y \mapsto y + \alpha_6 x^2 + \alpha_7 xy + \alpha_8 y^2 + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} x^2 y + \alpha_{11} xy^2 + \alpha_{12} x^4 + \alpha_{13} x^3 y + \cdots \tag{18}$$

с подходящими коэффициентами, мы можем убить в (17) все мономы t^k с $k > 5$. Именно, моном $x^i y^j$, $3i + 4j = k$, из (18) убивает моном t^k и не меняет коэффициенты при мономах степеней меньше k.

Шаг 3. Убиваем бесконечно плоскую невязку. Построенная нами замена (18) содержит бесконечное число слагаемых, т. е. является, вообще говоря, формальным рядом из алгебры $\mathbb{R}[[x, y]]$. Сходимость этого ряда ниоткуда не следует.

Для того, чтобы получить “настоящую” гладкую замену, воспользуемся леммой Бореля–Уитни (теорема 2, первая часть) — возьмем гладкую функцию $f(x, y)$, ряд Тейлора которой по переменным x, y в нуле совпадает с формальным рядом в правой части (18). Очевидно, что замена $y \mapsto f(x,y)$ приводит нашу кривую к виду

$$x = t^3,\ y = t^4 + \omega(t), \tag{19}$$

где функция ω – бесконечно плоская в нуле (т. е. ее производные всех порядков в нуле равны нулю). Нетрудно проверить, что функция $\omega(x^{\frac{1}{3}})$ также является гладкой и бесконечно плоской в нуле. Замена $y \mapsto y - \omega(x^{\frac{1}{3}})$ приводит кривую (19) к искомому виду (16). $\square$

Задачи 6 и 7 наводят на мысль, что росток кривой (14) с любым n и $m = n+1$ можно привести к виду $x = t^n,\ y = t^{n+1}$ с помощью гладкой замены переменных x, y и замены параметров. Но для $n > 3$ это неверно.

Задача 9. Докажите, что росток любой кривой вида (14) с $n = 4$, $m = 5$ можно привести к одной из двух неэквивалентных форм:

$$x = t^4,\ y = t^5; \qquad x = t^4,\ y = t^5 + t^7. \tag{20}$$

5. Складка и зонтик Уитни

В этом разделе мы исследуем более сложный вопрос: к какому наиболее простому виду можно привести поверхность, заданную параметрически, в окрестности ее *типичной* особой точки. Заметим, что появилось новое по сравнению с предыдущим разделом условие “типичности”. Дело в том, что при исследовании особых точек поверхностей множество всех мыслимых случаев намного больше, чем для кривых. Чтобы не погрязнуть в необозримой классификации всевозможных особенностей, используется условие “типичности”, смысл которого разъяснен ниже.

Точная постановка задачи выглядит так. В пространстве с координатами (x, y, z) поверхность задана с помощью гладкого отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, которое, в свою очередь, задается с помощью трех гладких функций

$$x = f(u,v), \quad y = g(u,v), \quad z = h(u,v), \quad f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1. \tag{21}$$

Особыми точками отображения (21) и задаваемой им поверхности называются такие точки плоскости параметров (u, v), в которых ранг матрицы Якоби[9]

$$J = \begin{pmatrix} f_u & g_u & h_u \\ f_v & g_v & h_v \end{pmatrix}$$

меньше двух. Условие *типичности* состоит в том, что число равенств, задающих особую точку, не должно превышать размерности пространства параметров, т. е. двух. В случае, когда это не так, особая точка является *неустойчивой* по отношению к малым возмущениям функций f, g, h. С помощью таких сколь угодно малых возмущений[10] неустойчивая особая точка либо исчезает, либо распадается на несколько устойчивых. Мы надеемся, что это абстрактное объяснение станет ясным после дальнейших конкретных рассуждений.

Условие $\operatorname{rg} J = 0$ не удовлетворяет определению типичности, так как требует обращения в нуль шести функций. Геометрически это значит, что в одной точке плоскости параметров пересекаются сразу шесть кривых. Очевидно, что такое положение неустойчиво. Пересечение двух кривых на плоскости, вообще говоря, устойчиво относительно малых возмущений (если они пересекаются без касания), а пересечение трех и более кривых — нет, сколь угодно малым возмущением его можно “рассыпать” на три попарных пересечения двух кривых (см. рис. 3).

[9]Мы записали матрицу Якоби немного не так, как это обычно принято, а в транспонированном виде, по чисто эстетическим соображениям. Содержательно это ни на что не влияет.

[10]Мы позволим себе дать определение “малого возмущения” на полуинтуитивном уровне, сказав, что разность между “возмущенной” и “невозмущенной” функциями есть функция малая вместе со всеми своими производными. Применительно к росткам функций последнее условие означает малость коэффициентов ряда Тейлора в рассматриваемой точке. Точное определение требует введения так называемой *топологии Уитни* в пространстве гладких функций, его можно найти, например, в книгах [3, 4].

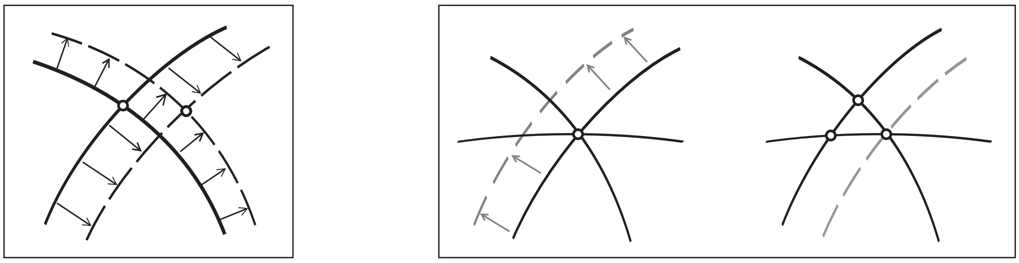

Рис. 3. Слева: пересечение двух кривых устойчиво относительно малых возмущений. Справа: пересечение трех кривых неустойчиво и распадается на три попарных пересечения.

Условие $\mathrm{rg}\, J = 1$ определению типичности удовлетворяет, хотя на первый взгляд для его выполнения требуется три равенства – обращение нуль трех миноров второго порядка матрицы J. На самом деле, число *независимых* равенств два, а не три (третье является следствием первых двух). Действительно, пусть Δ_i – минор, полученный выбрасыванием из матрицы J i-го столбца e_i. Тогда равенство $\Delta_1 = 0$ означает, что $e_2 \parallel e_3$, а $\Delta_2 = 0$ означает, что $e_1 \parallel e_3$ (зна́ком $\parallel$ обозначается коллинеарность векторов). Но из $e_1 \parallel e_3$ и $e_2 \parallel e_3$ следует, что $e_1 \parallel e_2$, т. е. $\Delta_3 = 0$. Таким образом, условие $\mathrm{rg}\, J = 1$ выполняется при обращении в нуль не трех, а *двух* миноров матрицы J.

Наконец, уточним, что подразумевается под словом ¡¡привести¿¿. Это значит, что можно пользоваться, во-первых, гладкими заменами переменных-параметров (u, v) на плоскости-прообразе, а во-вторых, гладкими заменами координат (x, y, z) в пространстве-образе. Это естественное обобщение понятия эквивалентности, введенного в предыдущем разделе для ростков кривых, т. е. ростков отображений $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$.

Главной целью этого раздела является следующий результат.

Теорема 5. *Росток гладкого отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ в типичной особой точке можно привести к виду*

$$x = u^2, \quad y = v, \quad z = uv \tag{22}$$

с помощью замен переменных на плоскости параметров и в пространстве-образе.

5.1. Складка Уитни

Прежде чем исследовать особые точки отображений $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, рассмотрим аналогичный вопрос для гладких отображений $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Пусть такое отображение задано парой гладких функций

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \qquad f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1. \tag{23}$$

Его особые точки задаются уравнением

$$\Delta(u, v) := \begin{vmatrix} f_u & g_u \\ f_v & g_v \end{vmatrix} = 0, \tag{24}$$

которое определяет на плоскости-прообразе (u, v) некоторое множество.

Мы снова ограничиваемся рассмотрение *типичных* особых точек, в которых три равенства $\Delta = 0$, $\Delta_u = 0$, $\Delta_v = 0$ не могут быть выполнены одновременно. Следовательно, уравнение $\Delta(u, v) = 0$ задает на плоскости параметров некоторую регулярную кривую, называемую *криминантой*. Кроме того, требование типичности говорит, что во всех точках криминанты ранг матрицы, стоящей в формуле (24), равен 1. Далее будем рассматривать особую точку 0 (начало координат плоскости параметров), в которой все эти условия выполнены.

Задача 10. Покажите, что существуют гладкая замена переменных (u, v), приводящая росток отображения (23) в неособой или типичной особой точке к виду

$$x = F(u, v), \quad y = v. \tag{25}$$

Решение. Предположим, без ограничения общности, что $g_v(0) \neq 0$. Тогда достаточно сделать замену переменной $v \mapsto g(u, v)$. $\square$

Криминанта отображения (25) задается уравнением $F_u = 0$ и, согласно сделанным предположениям, является гладкой кривой. Согласно тому же требованию типичности, вторая производная F_{uu} может обращаться в нуль лишь в отдельных точках криминанты, в которых к тому же выполнены неравенства $F_{uv} \neq 0$ и $F_{uuu} \neq 0$. Точки криминанты, в которых $F_{uu} \neq 0$, называются *точками складки* (fold), а точки, в которых $F_{uu} = 0$, но $F_{uv} \neq 0$ и $F_{uuu} \neq 0$, – *точками сборки* (pleat или cusp).

Разницу между точками складки и сборки можно увидеть наглядно, если интерпретировать отображение (25) как проектирование поверхности $x = F(u, v)$ в пространстве (u, v, x) на плоскость (v, x) параллельно оси u, см. рис. 4. В этом случае криминанта – это множество точек поверхности, в которых поверхность касается направления проектирования. Точки складки суть те, в которых сама криминанта не касается направления проектирования, т. е. не вертикальна. Проекция криминанты на плоскость (v, x) называется *дискриминантной кривой*. В точках, соответствующих складке, дискриминантная кривая регулярна, а в точках, соответствующих сборке, имеет касп.

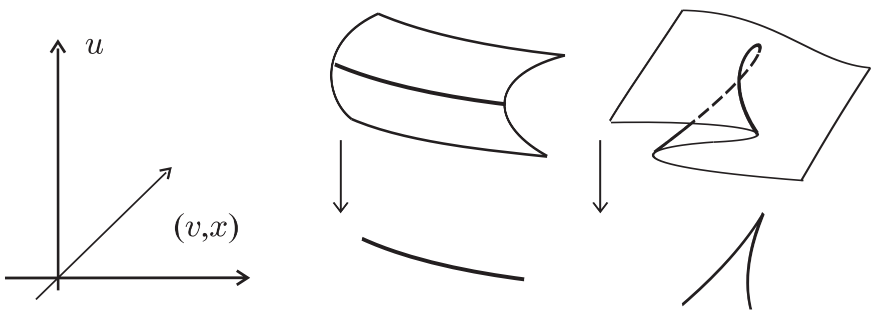

Рис. 4. Складка (слева) и сборка (справа). Жирной линией обозначена криминанта (вверху) и дискриминантная кривая (внизу).

Несмотря на то, что складки встречаются намного чаще, чем сборки, избавиться от последних нельзя. Действительно, при любом достаточно малом возмущении поверхности на рис. 4 справа точка сборки не исчезает, а лишь перемещается, равно как и соответствующий ей касп дискриминантной кривой. Все остальные, более сложные особые точки отображений, неустойчивы и разрушаются при сколь угодно малых возмущениях проектируемой поверхности $x = F(u, v)$.

Теорема 6. *Росток гладкого отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в точке складки можно привести к виду*

$$x = u^2, \quad y = v. \tag{26}$$

с помощью замен переменных на плоскости параметров и на плоскости-образе.

Замечание. В точке сборки росток гладкого отображения аналогичным образом приводится к виду $x = u^3 + uv$, $y = v$. Утверждение о сборке мы здесь доказывать не будем, так как оно требует либо использования существенно новых фактов (как это делается в [3, 4]), либо довольно длинных рассуждений (как это сделано в оригинальной работе Уитни [8]).

Доказательство. Пусть 0 – точка складки. В силу условия $F_{uu}(0) \neq 0$ уравнение $F_u(u, v) = 0$ локально разрешимо относительно u (теорема о неявной функции), и следовательно, криминанта является графиком некоторой гладкой функции $u = \varphi(v)$. Замена $u \mapsto u - \varphi(v)$ превращает ее в координатную ось $u = 0$. Соответственно, в новых координатах (их, также как и новую функцию F, мы будем обозначать прежними буквами) производная F_u обращается в нуль на оси $u = 0$.

По формуле (3), имеем $F(u,v) = f_0(v) + uf_1(v) + u^2 g(u,v)$. При этом условие $F_u(0,v) \equiv 0$ дает $f_1(v) \equiv 0$, т. е. наше отображение имеет вид

$$x = F(u,v) = f_0(v) + u^2 g(u,v), \quad y = v.$$

Сделав в пространстве-образе замену переменной $x \mapsto x - f_0(y)$, получим $x = u^2 g(u,v)$. Из условия $F_{uu}(0) \neq 0$ имеем $g(0) \neq 0$. В случае $g(0) < 0$ сделаем еще замену $x \mapsto -x$ и добьемся того, что $g(0) > 0$. Для приведения нашего отображения к виду (26) остается лишь сделать замену $u \mapsto u\sqrt{g(u,v)}$ на плоскости параметров.

5.2. Зонтик Уитни

Опираясь на предшествующие результаты, приведем доказательство теоремы 5 для ростка отображения

$$x = f(u,v), \quad y = v, \quad z = h(u,v),$$

в нуле, предполагая, что $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ и $f_u(0) = h_u(0) = 0$.

Условие типичности означает, что производные f_{uu} и h_{uu} в точке 0 не могут обращаться в нуль одновременно. Меняя, если нужно, переменные x и z местами, можно считать, что $f_{uu}(0) \neq 0$. Следовательно, по теореме 6, росток нашего отображения можно привести к виду

$$x = u^2, \quad y = v, \quad z = h(u,v); \quad h(0) = h_u(0) = 0. \tag{27}$$

Выписав матрицу Якоби отображения (27), мы видим, что одни из миноров этой матрицы выражается через два остальных, и множество особых точек этого отображения задается двумя уравнениями

$$u = 0, \quad h_u(u,v) = 0.$$

Из условия типичности следует, что $h_{uv}(0) \neq 0$, так как в противном случае $h_{uv}(0) = 0$ было ты третьим равенством, выполняющимся в точке 0. Следовательно, в малой окрестности нуля множество решений системы $u = h_u(u,v) = 0$ состоит из одной лишь точки 0.

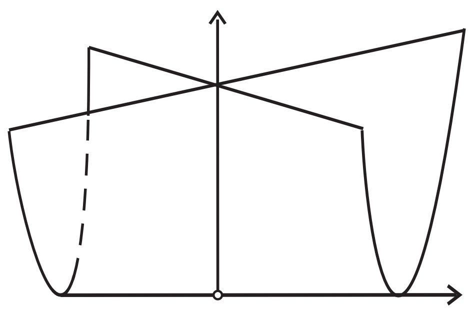

Рис. 5. Зонтик Уитни

Применив к функции h теорему 4, имеем $h(u,v) = \varphi(u^2,v) + u\psi(u^2,v)$, причем из условий $h_u(0) = 0$ и $h_{uv}(0) \neq 0$ следует, что $\psi(0) = 0$ и $\psi_v(0) \neq 0$. Сделав замену $z \mapsto z - \varphi(x,y)$ в пространстве-образе, приведем росток (27) к виду

$$x = u^2, \quad y = v, \quad z = u\psi(u^2,v); \quad \psi(0) = 0, \ \ \psi_v(0) \neq 0. \tag{28}$$

Росток (28) отличается от (22) только одной, последней компонентой. Замена переменной $v \mapsto \psi(u^2,v)$ приводит компоненту $z = u\psi(u^2,v)$ к желаемому виду $z = uv$, но зато портит вторую компоненту $y = v$. Делу можно помочь, если одновременно с заменой $v \mapsto \psi(u^2,v)$ на плоскости-прообразе сделать замену $y \mapsto \psi(x,y)$ в пространстве-образе. Очевидно, что в результате этой пары замен мы получим росток (22). $\square$

Отображение (22) задает поверхность с самопересечением, изображенную на рис. 5. Эта поверхность называется *зонтиком Уитни*. Отметим, что согласно данному нами определению, особой точкой называется точка на плоскости параметров (u,v). В данном случае это начало координат, и ее образом является начало координат в пространстве (x,y,z), отмеченное на рис. 5 маленьким кружочком. Точки самопересечения поверхности в нашем смысле особыми не являются, к тому же одной точке, лежащей на линии самопересечения, отвечают две пары параметров (u,v).

Литература

[1] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 304 с.

[2] Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 2000. - 400 с.

[3] Брекер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. - М.: Мир, 1977.

[4] Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. - М.: Мир, 1977. - 290 с.

[5] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. - М.: Наука, 1984.

[6] Зорич В.А. Математический анализ. - М.: Наука, 1981.

[7] Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. -М.: Мир, 1971.

[8] Whitney H. On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane // Annals of Mathematics, Second Series. - V. 62. - № 3. - 1955. - p. 374-410.

Павлова Наталья Геннадьевна,
доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации
Российского университета дружбы народов,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: natasharussia@mail.ru

Ремизов Алексей Олегович,
старший научный сотрудник
Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: alexey-remizov@yandex.ru

Построение треугольников с заданными свойствами

С. М. Тахаев

Рассмотрены свойства и конструктивные особенности треугольников в зависимости от суммы тангенсов их половинных углов. Показана взаимосвязь с прямой, проходящей через вершину исходного треугольника и делящей его на 2 треугольника с равными вписанными окружностями, а также связь с внутренними и внешними окружностями Содди.

1. Введение

Рассмотрим произвольный $\triangle ABC$ и введем обозначения (рис. 1):

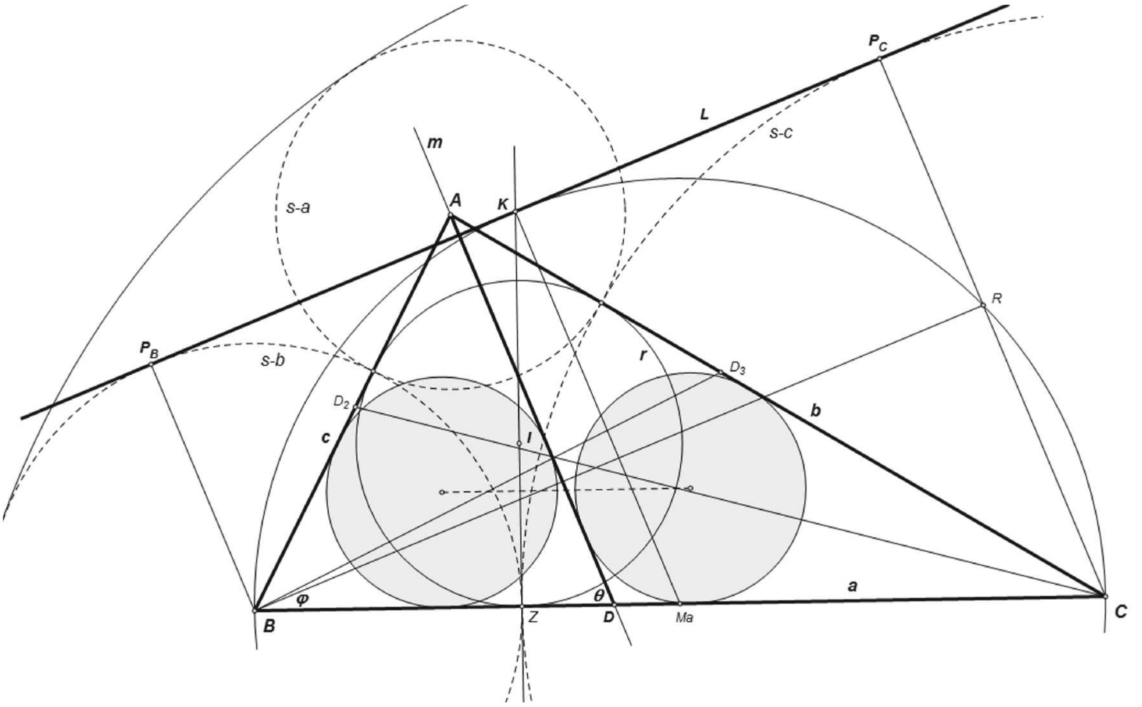

Рис. 1

r — радиус вписанной окружности, s — полупериметр, ρ — радиусы равных вписанных окружностей $\triangle BAD$ и $\triangle CAD$. Без потери общности анализа — пусть $a > b > c$, $0 < \theta < 90°$. $t_a = \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{s-a}, t_b = \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{r}{s-b}, t_c = \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{s-c}$ — тангенсы половинных углов $\triangle ABC$. Прямая, проходящая через вершину треугольника и делящая его на 2 треугольника с равными вписанными окружностями, — прямая линия m, угол $ADB = \theta$.

$S_{ABC} = S_{BAD} + S_{CAD}$; пусть

$$AD = l; \quad BD = x, \text{ тогда } sr = 1/2lx\sin\theta + 1/2(a-x)l\sin(180° - \theta); \quad \sin\theta = \frac{2sr}{al}.$$

Применим формулу

$$l^2 = r_b r_c = s^2 t_b t_c \Rightarrow AD = s\sqrt{t_b t_c}, \tag{1}$$

$$\sin\theta = \frac{2sr}{(s-b+s-c)s\sqrt{t_b t_c}} = \frac{2\sqrt{t_b t_c}}{t_b + t_c}.$$

Отметим интересный факт: $\sin\theta$ — угла наклона прямой линии m равен отношению средне-геометрического к средне-арифметическому тангенсов половинных углов, прилежащих к противоположной стороне. С учетом формулы

$$\sin\theta = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{t_c}{t_b}} = \sqrt{\frac{s-b}{s-c}},\ \text{если } b>c, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{t_b}{t_c}} = \sqrt{\frac{s-c}{s-b}},\ \text{если } b<c; \tag{2a}$$

$$\cos\theta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{(s-c)-(s-b)}{(s-c)+(s-b)} = \frac{b-c}{a}. \tag{3}$$

Получена следующая теорема:

Теорема 1. *В произвольном треугольнике из любой его вершины проведена прямая, которая делит треугольник на 2 с равными вписанными окружностями. Угол наклона этой прямой к противоположной вершине стороне определяется формулами (2, 2a). Справедлива и обратная теорема.*

Определим радиусы равных вписанных окружностей. Как видно из рис. 1

$$\frac{c+l+x}{2}\rho + \frac{b+l+a-x}{2}\rho = \frac{a+b+c}{2}r \Rightarrow \rho = \frac{r}{1+\sqrt{t_b t_c}}. \tag{4}$$

Касательная к 2-м окружностям $s-b, s-c$ — $P_BP_C = 2\sqrt{(s-b)(s-c)}$. Из $\triangle BCR$ — $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{(s-c)-(s-b)}{2\sqrt{(s-b)(s-c)}}$. После несложных преобразований получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{t_b-t_c}{2\sqrt{t_b t_c}}. \tag{5}$$

Вычислим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{2\sqrt{\dfrac{t_c}{t_b}}}{1-\dfrac{t_c}{t_b}} = \frac{2\sqrt{t_b t_c}}{t_b-t_c}. \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6), находим $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{tg}(90^\circ-\varphi)$ и $\angle\theta + \angle\varphi = 90^\circ$.

Значит, справедлива следующая

Теорема 2. *В произвольном треугольнике прямая линия m,проходящая через любую его вершину, всегда перпендикулярна касательной (со стороны этой вершины) к двум взаимнокасающимся окружностям с центрами в 2-х других вершинах треугольника.*

Верна и обратная теорема.

Примечание. Указанное свойство позволяет значительно упростить построение этой прямой — необходимо провести через вершину A линию, параллельную отрезку MaK.

Преобразуем

$$AD = s\sqrt{t_b t_c} = \sqrt{\frac{s^2 t_b t_c t_a}{t_a}} = \sqrt{\frac{\triangle}{t_a}} = \sqrt{\frac{sr(s-a)}{r}} = \sqrt{s(s-a)};\quad AD = \sqrt{s(s-a)}. \tag{7}$$

Проведем аналогичные прямые, делящие треугольник на два, с равными вписанными окружностями, из других вершин. Точки их пересечения со сторонами a, c, b — D_1, D_2, D_3, а углы наклона этих прямых к сторонам $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (выберем направление обхода по часовой стрелке). Тогда

$$AD_1 = \sqrt{s(s-a)}, \quad CD_2 = \sqrt{s(s-c)}; \tag{8}$$

$$BD_3 = \sqrt{s(s-b)}. \tag{9}$$

$\angle AD_1B = \theta_1$; $\angle CD_2A = \theta_2$; $\angle BD_3C = \theta_3$.

Возведя в квадрат и складывая формулы (7)–(9), получим

$$\boldsymbol{AD_1^2 + CD_2^2 + BD_3^2 = s(s-a) + (s-c) + s(s-b) = s^2.} \tag{10}$$

Тем самым доказана теорема:

Теорема 3. *В произвольном треугольнике сумма квадратов отрезков, проведенных из вершин к противоположным его сторонам и делящих треугольник на два, с равными вписанными окружностями, равна квадрату полупериметра этого треугольника.*

По аналогии с формулой (2):

$$\operatorname{tg}\theta_2/2 = \sqrt{t_b/t_a}; \ \ \operatorname{tg}\theta_3/2 = \sqrt{t_a/t_c}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\theta_3}{2} = \sqrt{\frac{t_c}{t_b}}\cdot\sqrt{\frac{t_b}{t_a}}\cdot\sqrt{\frac{t_a}{t_c}} = 1. \tag{11}$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *В произвольном треугольнике произведение тангенсов половинных углов наклона к его сторонам отрезков, проведенных из противоположных вершин и делящих данный треугольник на два треугольника с равными вписанными окружностями, равно 1.*

Определим площадь треугольника:

$$\triangle = sr = \frac{sr(s-a)}{s-a} = s(s-a)t_a = s(s-b)t_b = s(s-c)t_c;$$

В соответствии с формулами (7)–(9) и обозначая

$$AD_1 = l_1; \quad CD_2 = l_2; \quad BD_3 = l_3 \Rightarrow \triangle = l_1^2 t_a = l_2^2 t_c = l_3^2 t_b. \tag{12}$$

Получена

Теорема 5. *Площадь произвольного треугольника равна произведению квадрата длины отрезка, проведенного из вершины к противоположной стороне и делящего его на 2 треугольника с равными вписанными окружностями, на тангенс половинного угла при этой вершине.*

2. Некоторые формулы построения центров окружностей Содди

Ранее автором были получены формулы для аналитического определения центров окружностей Содди[1]. Обозначения приведены на рис. 2.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_{1,2}}{2} = \frac{t_b}{1 \pm t_b \pm t_a}, \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_{1,2}}{2} = \frac{t_a}{1 \pm t_b \pm t_a}, \tag{14}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma_{1,2}}{2} = \frac{t_c}{1 \pm t_a \pm t_c}, \tag{15}$$

где:

$$\angle ABE_1 = \alpha_1; \quad \angle BAF_1 = \beta_1; \quad \angle ACD_1 = \gamma_1.$$

$$\angle ABE_2 = \alpha_2; \quad \angle BAF_2 = \beta_2; \quad \angle ACD_2 = \gamma_2.$$

[1] Так называют четыре взаимно касающиеся окружности. Формула Декарта, переоткрытая впоследствии Содди, позволяет выразить радиус четвертой окружности через радиусы трех остальных — *Прим. ред.*

Знак "+" определяет положение центра внутренней окружности Содди r_S — точки S.

Знак "$-$" определяет положение центра внешней окружности Содди $r_{S'}$ — точки S'. λ, μ, ν — отношения отрезков на сторонах c, b, a соответственно. Из теоремы Чевы следует: $\lambda\mu\nu = 1$.

Обозначим r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей.

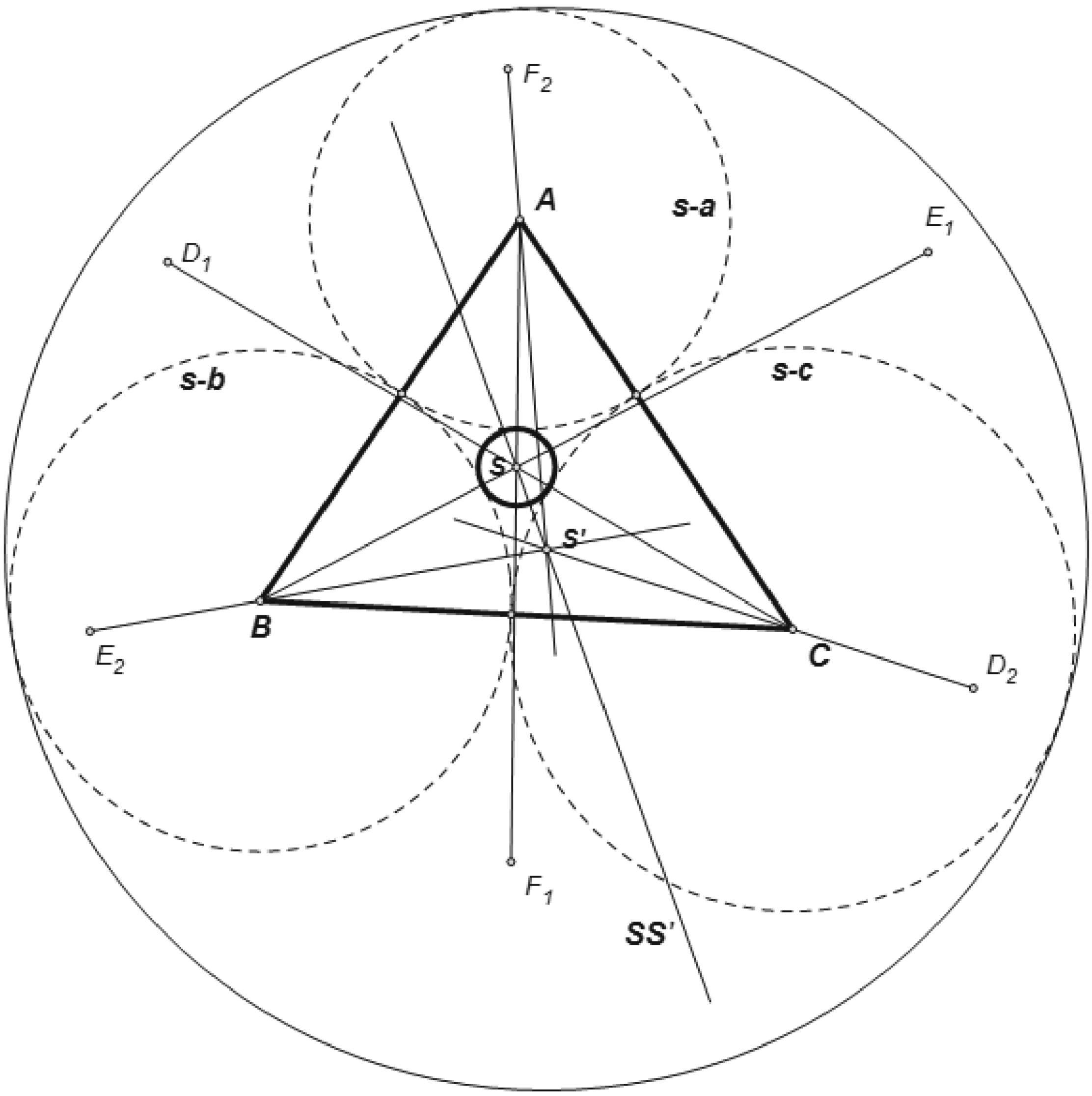

Рис. 2

Получены также любопытные соотношения при определении центров окружностей Содди согласно теоремы Чевы — легко увидеть мнемоническое правило нахождения этих центров путем сложения(вычитания) числителя и знаменателя значений инцентра (общепринятый термин для центра вписанной окружности) и точки Жергонна[2] (диаграмма 1).

[2]Точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон и вписанной окружности — *Прим. ред.*

Диаграмма 1

	Инцентр точка I	Точка Жергонна	Малая окружность Содди точка S	Большая окружность Содди точка S'
λ	$\dfrac{a}{b}$	$\dfrac{r_a}{r_b}$	$\dfrac{a+r_a}{b+r_b}$	$\dfrac{a-r_a}{b-r_b}$
μ	$\dfrac{c}{a}$	$\dfrac{r_c}{r_a}$	$\dfrac{c+r_c}{a+r_a}$	$\dfrac{c-r_c}{a-r_a}$
ν	$\dfrac{b}{c}$	$\dfrac{r_b}{r_c}$	$\dfrac{b+r_b}{c+r_c}$	$\dfrac{b-r_b}{c-r_c}$

3. Способы построения и свойства треугольников в зависимости от суммы тангенсов половинных углов

Рассмотрим ряд возможных случаев:

1. $t_a + t_b + t_c = 2.$
2. $t_a + t_b + t_c = 3.$
3. $t_a + t_b + t_c = 4.$
4. $t_b + t_c = K$ (4.1 $t_b + t_c = 1$; 4.2 $t_b + t_c = 2$).
5. Прямоугольные треугольники

3.1.1 Исследование и построение треугольников в случае $t_a + t_b + t_c = 2$

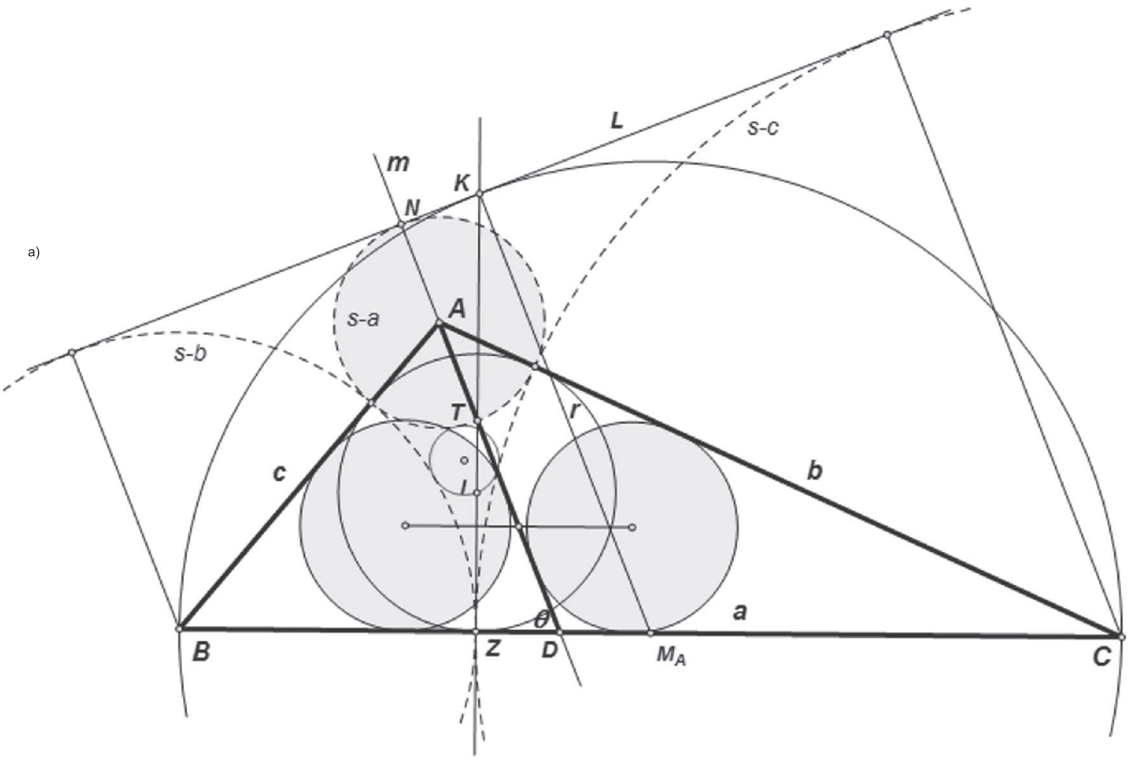

Рис. 3а

Треугольники данного типа называются *треугольниками Содди* (Soddian triangles) (рис. 3а) и являются тупоугольными, их свойства достаточно хорошо изучены [4]. Однако представилась возможность вдохнуть в них новую жизнь. Если $a \geq b \geq c$, тогда имеет место известная формула:

$$\frac{1}{\sqrt{s-a}} = \frac{1}{\sqrt{s-b}} + \frac{1}{\sqrt{s-c}}. \tag{16}$$

Домножим (16) на $\sqrt{r}$ и после несложных преобразований получим

$$t_a = 1 + \sqrt{t_b t_c}. \tag{17}$$

После подстановки (17) в (4) получим

$$\rho = \frac{r}{t_a} = s - a. \tag{18}$$

Доказана

Теорема 6. *В треугольниках Содди радиус окружности с центром в вершине тупого угла равен радиусам равных вписанных окружностей 2-х треугольников, на которые данный треугольник разбивается прямой из вершины тупого угла до пересечения с противоположной ему стороной.* (рис. 3a).

Справедлива и обратная теорема.

Углы $\triangle ABC$ в зависимости от угла θ определяются решением системы уравнений

$$\begin{array}{lll}
t_a + t_b + t_c = 2 & t_a = 2 - (t_b + t_c) & t_{b1,2} = \dfrac{1 \pm \cos\theta}{2 + \sin\theta} \\
t_a = \operatorname{tg}\left[90^\circ - \left(\dfrac{B+C}{2}\right)\right] & \Rightarrow t_a = \dfrac{1 - t_b t_c}{t_b + t_c} & \Rightarrow t_{c1,2} = \dfrac{1 \mp \cos\theta}{2 + \sin\theta} \\
\operatorname{tg}^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{t_c}{t_b} & t_c = \operatorname{tg}^2 \dfrac{\theta}{2} t_b & t_{a1,2} = \dfrac{2 \pm 2\sin\theta}{2 + \sin\theta}
\end{array} \tag{19}$$

Вывод. Задавая различные углы θ, получаем множество треугольников Содди, у которых большая окружность Содди вырождена в прямую линию. Следует отметить, что при этом линия Содди (которая соединяет инцентр $\triangle ABC$ и его точку Жергонна) $SS'_{ABC} \parallel m$, т.е. перпендикулярна касательной к 3-м окружностям [5]. Определенный интерес представляет рассмотрение $\triangle ABC$ и $\triangle BSC$, где точка S — центр малой (внутренней) окружности Содди $\triangle ABC$ (рис. 3b).

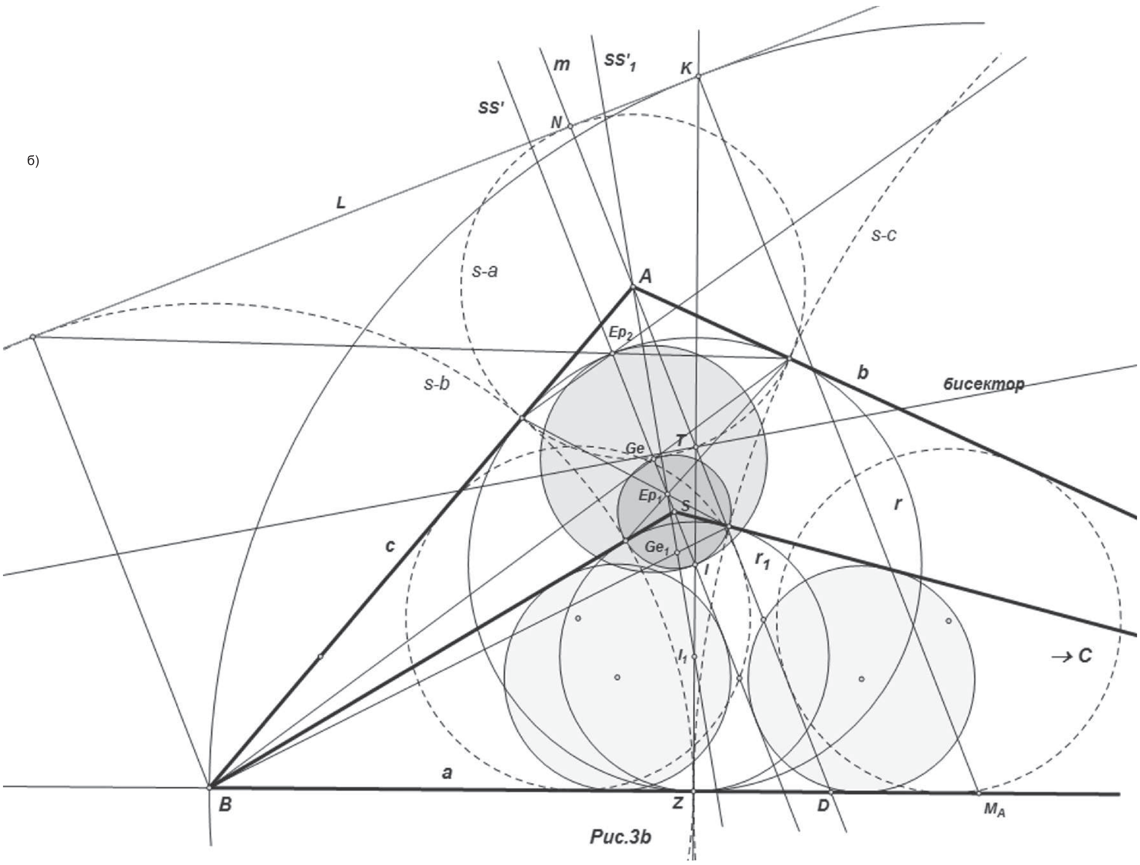

Рис. 3b

Большая (внешняя) окружность Содди $\triangle ABC$ вырождена в прямую линию L, тогда как большая окружность Содди $\triangle BSC$ — окружность радиуса $s-a$. Линия, которая делит $\triangle BSC$ на 2 треугольника с равными вписанными окружностями, всегда совпадает с линией SS$'$ $\triangle ABC$ — проходит через точку S (вершину) перпендикулярно касательной L. Обозначим r_1 — радиус вписанной окружности $\triangle BSC$, ρ_1 — радиусы равных вписанных окружностей 2-х треугольников, на которые прямая SS' делит $\triangle BSC$. Имеем в треугольнике ABC:

$$\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-c}-\frac{2}{r}=0; \tag{A}$$

$$\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-c}+\frac{2}{r}=\frac{1}{r_S}; \tag{B}$$

$$(B)-(A)\Rightarrow r=4r_S. \tag{20}$$

В $\triangle BSC$ имеем:

$$\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}+\frac{1}{r_S}-\frac{2}{r_1}=\frac{1}{s-a}; \tag{C}$$

Вычитая из равенства (С) равенство (А), с учетом $\rho=s-a$ получаем:

$$\frac{2}{\rho}+\frac{2}{r_1}=\frac{3}{2r_S}. \tag{21}$$

Формулу (4) перепишем в виде

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}+\frac{1}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}. \tag{22}$$

Для $\triangle BSC$ аналогичная формула (окружности $s-b$; $s-c$ обоих треугольников совпадают) имеет вид:

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (22), получим

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}+\frac{1}{\rho_1} \tag{24}$$

и вследствие (21) после несложных преобразований получаем

$$\rho_1=2r_S. \tag{25}$$

Итак, $r=4r_S$; $r=2\rho_1$; $\rho_1=2r_S$ или

$$r_S:\rho_1:r=1:2:4. \tag{26}$$

Для треугольников Содди характерно оригинальное расположение точек Эпштейна (напомним, что первая (Ep1) и вторая (Ep2) точки Эпштейна — пересечение прямых линий, соединяющих точки касания трех взаимно касающихся окружностей с точками касания этих окружностей с малой (большой) окружностями Содди соответственно. Более подробно об этих точках можно узнать в энциклопедии К.Кимберлинга, где они обозначены X_{481}, X_{482}). Первая точка находится на пересечении линий Содди (SS', SS'_1) $\triangle ABC$ и $\triangle BSC$. Вторая точка — на пересечении линии Содди $\triangle ABC$ и вписанной в него окружности, при этом точка Жергонна — центр окружности с радиусом $\frac{r}{2}$, на которой лежат точка $Ep2$ и инцентр $\triangle ABC$. Расстояние между точками Эпштейна равно $\frac{2}{3}r$. В соответствии с (А) центр малой (внутренней) окружности Содди есть середина отрезка IG_e.

Построение треугольников Содди можно осуществить следующим образом.

1. Выбираем произвольно отрезок BC и точку Z на нем ($BZ=s-b$, $CZ=s-c$).

2. Строим перпендикуляр к BC в точке Z до пересечения с полуокружностью диаметром BC с центром в Ma в точке K.

3. Строим прямую $L \perp KMa$, L — касательная к окр. $s-b$, $s-c$ (центры в точках B и C соответственно). L пересекает продолжение отрезка BC в точке Ta.

4. Строим биссектрису угла $KTaC$ (Ta — точка пересечения касательной L и стороны a), точка T — пересечение с перпендикуляром KZ.

5. Прямая $ND \perp L$, проходит через точку T. Середина отрезка NT — вершина A.

6. $\triangle ABC$ — искомый (прямая AD — делит $\triangle ABC$ на 2 с равными вписанными окружностями). Полученные соотношения (26) позволяют оперативно осуществлять построение $\triangle ABC$, если задан $\triangle BSC$ и наоборот.

1. Пусть,например,задан $\triangle ABC$ (большая окружность Содди вырождена в прямую линию). Необходимо определить положение точки S. Это можно сделать аналитически (формулы (13)–(15)) или построением:
   - строим линию m (примечание к теореме 2, раздел 1);
   - проводим через центр вписанной окружности I прямую $SS' \parallel m$ — линию Содди треугольника ABC;
   - линия Содди $\triangle ABC$ — отрезок $IS = (1/4)r$, $\triangle BSC$ — требуемый.

2. Задан $\triangle BSC$:
   - линия m $\triangle BSC$ (через вершину S перпендикулярно L).
   - окружность r_S пересекает линию m $\triangle BSC$ в точке I.
   - строим вписанную окр .$\triangle ABC$ ($r = 4r_S$)
   - из точек B, C строим касательные. $\triangle ABC$ — требуемый.

3.1.2 Нахождение целочисленных треугольников

Целочисленные треугольники Содди в литературе называют Героновыми (Heronian). В соответствии с формулами (19) имеются 2 решения нахождения углов треугольника, у которых большая окружность Содди вырождена в прямую линию, в зависимости от угла наклона линии m к основанию. Обозначим

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t \to t_{b1,2} = \frac{t^2}{t^2 \pm t + 1}; \quad t_{c1,2} = \frac{1}{t^2 \pm t + 1}; \quad t_{a1,2} = \frac{t^2 \pm 2t + 1}{t^2 \pm t + 1}. \tag{27}$$

Пусть $t = \dfrac{m}{n}$, где m, n — целые числа и $n > m$

$$t_{b1,2} = \frac{m^2}{m^2 \pm mn + n^2}; t_{c1,2} = \frac{n^2}{m^2 \pm mn + n^2}; t_{a1,2} = \frac{m^2 \pm 2mn + n^2}{m^2 \pm mn + n^2}. \tag{28}$$

Пусть

$$k = m^2; \quad l = n^2; \quad p_{1,2} = (m \pm n)^2; \quad q_{1,2} = m^2 \pm mn + n^2, \tag{29}$$

тогда

$$t_{b12} = \frac{k}{q_{12}}; \quad t_{c12} = \frac{l}{q_{12}}; \quad t_{a12} = \frac{p_{12}}{q_{12}} \quad \text{Решения 1; 2.} \tag{30}$$

Зная тангенсы половинных углов, найдем их синусы. По теореме синусов определим стороны треугольников. Мы будем рассматривать решение 1, т.к. в решении 2 стороны и углы найденных треугольников меняются местами.

$$\sin B = \frac{2t_b}{1 + t_b^2} = \frac{2kq}{q^2 + k^2} = \frac{2kq}{(k+l)(k+p)}; \quad \sin C = \frac{2lq}{(l+k)(l+p)}; \quad \sin A = \frac{2pq}{(p+k)(p+l)}$$

$$a = b\frac{\sin A}{\sin B} = b\frac{2pq(k+l)(k+p)}{(p+k)(p+l)2kq} = b\frac{p(k+l)}{k(p+l)}; \quad c = b\frac{\sin C}{\sin B} = b\frac{2lq(k+l)(k+p)}{(l+k)(l+p)2kq} = b\frac{l(k+p)}{k(p+l)}$$

Для получения целочисленных значений a, c необходимо выполнение условия $b = k(p+l)$.

Окончательно: Решение 1 дает значения

$$\boldsymbol{a = p(k+l); \quad c = l(k+p); \quad b = k(k+p).} \tag{31}$$

Некоторые примеры целочисленных треугольников представлены на диаграмме 2 .

Диаграмма 2

θ	$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$	t_{c1}	t_{b1}	t_{a1}	c_1	b_1	a_1	s	SABC
90	1	1/3	1/3	4/3	5	5	8	9	12
53,13	1/2	1/7	4/7	9/7	13	40	45	49	252
36,87	1/3	1/13	9/13	16/13	25	153	160	169	1872
28,07	1/4	1/21	16/21	25/21	41	416	425	441	8400
22,62	1/5	1/31	25/31	36/31	61	925	936	961	27900
18,92	1/6	1/43	36/43	49/43	85	1800	1813	1849	75852
16,26	1/7	1/57	49/57	64/57	113	3185	3200	3249	178752
14,25	1/8	1/73	64/73	81/73	145	5248	5265	5329	378432
12,68	1/9	1/91	81/91	100/91	181	8181	8200	8281	737100
67,38	2/3	4/19	9/19	25/19	136	261	325	361	17100
43,60	2/5	4/39	25/39	49/39	296	1325	1421	1521	191100
31,89	2/7	4/67	49/67	81/67	520	4165	4293	4489	1063692
33,34	3/10	9/139	100/139	169/139	2421	17800	18421	19321	21141900
73,74	3/4	9/37	16/37	49/37	585	928	1225	1369	261072
61,93	3/5	9/49	25/49	64/49	801	1825	2176	2401	705600
77,32	4/5	16/61	25/61	81/61	1696	2425	3321	3721	1976400
71,08	5/7	25/109	49/109	144/109	4825	88281	10656	11881	19227600
83,97	9/10	81/271	100/271	361/271	37341	44200	65341	73441	792431100
112,62	3/2	9/19	4/19	25/19	261	136	325	361	17100
106,26	4/3	16/37	9/37	49/37	928	585	1225	1369	261072

Решение 1 определяет множество треугольников при изменении угла наклона линии m к основанию. При этом полученные величины сторон являются сторонами примитивных целочисленных треугольников, у которых большая окружность Содди вырождена в прямую линию. Понятие примитивных целочисленных треугольников заимствовано из пифагоровых треугольников. Напомним: тройки чисел x, y, z являются примитивными, если эти числа взаимно просты и у них наибольший общий делитель равен 1. Кроме того, они не могут быть получены из какой-либо другой тройки. При умножении каждого число на одно и то же натуральное число получаются другие тройки чисел, но полученные из них треугольники будут всегда подобны примитивным, так как углы будут равны. В диаграмме приведены расчеты $\triangle$ и s треугольников по простым и удобным для быстрого вычисления формулам:

$$\boldsymbol{s = q^2; \qquad S_{ABC} = klpq.}$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{a+b+c}{2} = \frac{k(l+p)+l(k+p)+p(k+l)}{2} = kl+kp+lp = \\ &= m^2n^2 + m^2(m\pm n)^2 + n^2(m\pm n)^2 = \\ &= m^2n^2 + m^4 \pm 2m^3n + m^2n^2 + n^2m^2 \pm 2mn^3 + n^4 = (m^2 \pm mn + n^2)^2 = q^2, \\ S_{ABC} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{q^2(q^2-kl-kp)(q^2-kl-lp)(q^2-kp-pl)} = \\ &= \sqrt{q^2 * n^2(m+n)^2 * m^2(m+n)^2 * m^2n^2} = klpq. \end{aligned}$$

В диаграмме приведены тройки чисел сторон a, b, c треугольников, полученные с помощью прямой m, проходящей через вершину тупого угла (A). Разумеется стороны треугольников не зависят от способа их нахождения. Следовательно возможны 3 варианта их определения. В качестве основного (из-за очевидной простоты построения) примем данные диаграммы. Два других варианта — линии m проходят через вершины острых углов. Введем следующие обозначения:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} = t_1; \quad \operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2} = t_2; \quad \operatorname{tg}\frac{\theta_3}{2} = t_3,$$

где

$$\angle AD_1B = \theta_1; \quad \angle CD_2A = \theta_2; \quad \angle BD_3C = \theta_3.$$

$\angle t_3' = \dfrac{1}{t_3}$ (тангенс смежного угла). Рассмотрим случаи:

1. Произведение $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = 1$, см. формулу (11).

2. $$t_2 + t_3' = t_2 + \frac{1}{t_3} = \frac{\sqrt{s-a}}{\sqrt{s-b}} + \frac{\sqrt{s-a}}{\sqrt{s-c}} = \sqrt{s-a}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{s-b}} + \frac{1}{\sqrt{s-c}}\right) = 1.$$

Выражение в скобках вычислено в (16), откуда

$$t_2 + t_3' = 1 \tag{32}$$

Зная (или задавая) t_1 из системы уравнений (11), (32) находим t_2, t_3. Например, если $t_1 = \dfrac{m}{n}$, то $t_2 = \dfrac{n}{m+n}$; $t_3 = \dfrac{m+n}{m}$.

Понятно, что вышеизложенные вычисления значений t_2, t_3 относятся не только к целочисленным треугольникам, а ко всему семейству треугольников, у которых большая окружность Содди вырождена в прямую линию. Таким образом, зная угол наклона прямой, проходящей через вершину тупого угла треугольника и делящего его на 2 треугольника с равными вписанными окружностями, можно легко определять углы наклона таких же прямых, проходящих через вершины острых углов треугольника.

4.2. Исследование и построение треугольников в случае $t_a + t_b + t_c = 3$

Треугольники данного типа — всегда тупоугольные.

Теорема 7. *Если в произвольном $\triangle ABC$ сумма тангенсов половинных углов равна 3, тогда радиус большой (внешней) окружности Содди такого треугольника равен радиусу его вписанной окружности (рис. 4).*

Справедлива и обратная теорема.

$$\frac{1}{r_{S'}} = \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-c} - \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{r}{r_{S'}} = t_b + t_a + t_c - 2 \Rightarrow r_{S'} = r. \tag{33}$$

Углы множества таких треугольников определяются решением системы уравнений.

$$\begin{cases} t_a + t_b + t_c = 3, \\ \operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{t_c}{t_b}, \end{cases}$$

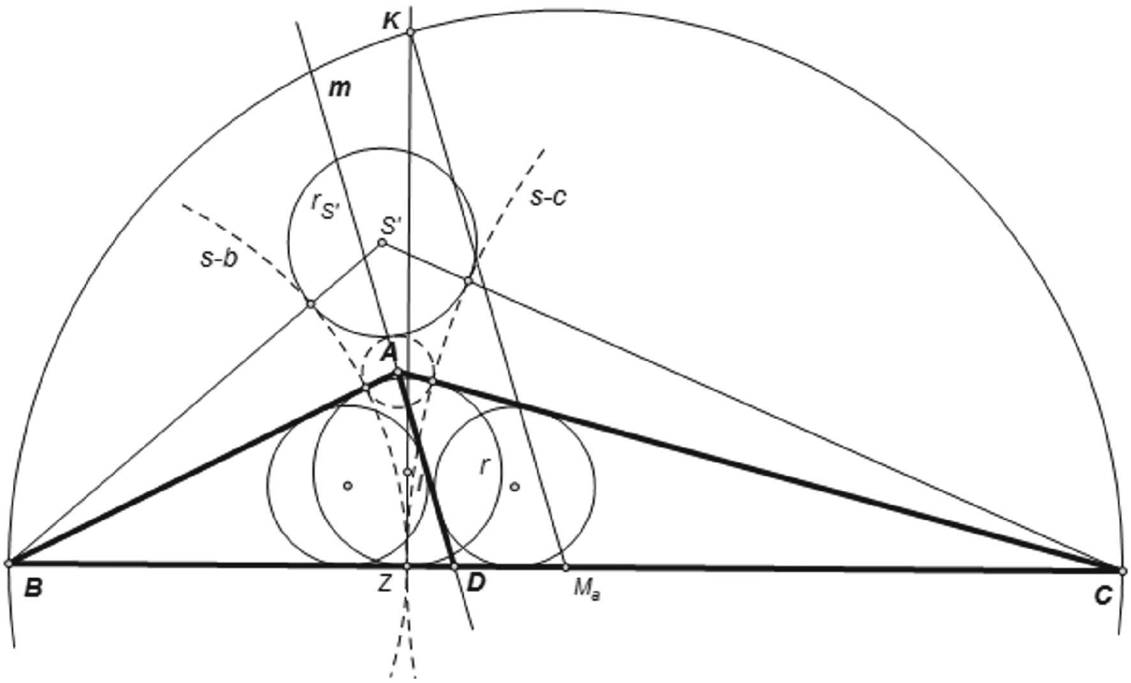

Рис. 3

где θ — как и ранее, угол наклона линии m, проходящей через вершину тупого угла к противоположной этой вершине стороне. После несложных преобразований получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} t_b &= \frac{(1+\cos\theta)(3\pm\sqrt{5+\sin^2\theta})}{4-\sin^2\theta};\\ t_c &= \frac{(1-\cos\theta)(3\pm\sqrt{5+\sin^2\theta})}{4-\sin^2\theta};\\ t_a &= \frac{6-3\sin^2\theta\mp 2\sqrt{5+\sin^2}\theta}{4-\sin^2\theta}. \end{aligned} \tag{34}$$

Следует отметить, что верхние значения $(+,+,-)$ в числителях невозможны. Причем при изменении угла $0<\theta\le 90^\circ$, значение тупого угла A составит 138°, $19^\circ\le B\le 138,41^\circ$.

4.3. Исследование и построение треугольников в случае $t_a+t_b+t_c=4$

Треугольники данного типа всегда тупоугольные.

Теорема 8. *Если в произвольном $\triangle ABC$ сумма тангенсов половинных углов равна 4, тогда радиус большой(внешней) окружности Содди такого треугольника равен половине радиуса его вписанной окружности.*

Справедлива и обратная теорема.

$$\frac{1}{r_{S'}}=\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-c}-\frac{2}{r}\to\frac{r}{r_{S'}}=t_b+t_a+t_c-2\to\quad r_{s'}=\frac{r}{2}. \tag{35}$$

Для нахождения углов треугольников составим систему уравнений.

$$\begin{cases} t_a+t_b+t_c=4,\\ \operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{t_c}{t_b}, \end{cases}$$

где θ — угол наклона линии m, проходящей через вершину тупого угла к противоположной этой вершине стороне. Решив систему уравнений, получим

$$t_b = \frac{(1+\cos\theta)(4-\sqrt{12+\sin^2\theta})}{4-\sin^2\theta};$$
$$t_c = \frac{(1-\cos\theta)(4-\sqrt{12+\sin^2\theta})}{4-\sin^2\theta}; \tag{36}$$
$$t_a = \frac{8-4\sin^2\theta+2\sqrt{12+\sin^2}\theta}{4-\sin^2\theta}.$$

Как и в разделе 4.2, второе решение отбрасываем .Данные треугольники обладают интересной особенностью. Если $0<\theta\leq 90^\circ$ — тупой угол (например $\angle A$), то $150,0^\circ < A \leq 150,03826^\circ$.

Таким образом, если рассмотреть реальные треугольники с углом при вершине $150,0^\circ$, то величина этого угла практически (погрешность $\leq$ 0,025%) не меняется при изменении угла $0 <$ $< \theta < 180^\circ$. Используя это свойство, можно создать какой-либо механизм.

В заключение приводим обобщенные формулы. Если $t_a+t_b+t_c=K$, то

$$t_b = \frac{(1+\cos\theta)(K-\varepsilon\sqrt{(K^2-4)+\sin^2\theta})}{4-\sin^2\theta};$$
$$t_c = \frac{(1-\cos\theta)(K-\varepsilon\sqrt{(K^2-4)+\sin^2\theta})}{4-\sin^2\theta}; \tag{37}$$
$$t_a = \frac{2K-K\sin^2\theta+2\varepsilon\sqrt{(K^2-4)+\sin^2}\theta}{4-\sin^2\theta}, \qquad \varepsilon=\pm1.$$

Следует отметить, что рациональные значения углов получаются, если и только если подкоренное выражение $K^2-4+\sin^2\theta=n^2$ (квадрат целого числа), что дает возможность построения целочисленных Героновых треугольников. Подробно это рассмотрено в [5].

4.4. Исследование и построение треугольников $t_b+t_c=k$

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle BSC$ (рис. 3б) Из $\triangle ABC$ имеем

$$\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-c}+\frac{2}{r}=\frac{1}{r_S}; \tag{A}$$

Из $\triangle BSC$ имеем

$$\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}+\frac{1}{r_S}-\frac{2}{r_1}=\frac{1}{s-a}; \tag{B}$$

Подставим (A) в (B)

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}+\frac{1}{r}, \tag{38}$$
$$\frac{r}{r_1}=\frac{r}{s-b}+\frac{r}{s-c}+1;\to\frac{r}{r_1}=t_b+t_c+1. \tag{39}$$

Обозначим $t_b+t_c=k$, тогда $r=(1+k)r_1$. Домножим обе части (38) на r_1, получим

$$\frac{r_1}{r_1}=\frac{r_1}{s-b}+\frac{r_1}{s-c}+\frac{r_1}{r}. \tag{40}$$

Введем

$$tg\frac{\psi}{2}=\frac{r_1}{s-b};\quad \operatorname{tg}\frac{\xi}{2}=\frac{r_1}{s-c},$$

где $\angle SBC=\psi$; $\angle SCB=\xi$ — углы $\triangle BSC$, так как окружности с радиусами $(s-b,s-c)$ для обоих треугольников одни и те же. Итак, если $t_b+t_c=k$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}+\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}=\frac{k}{1+k}; \tag{41}$$
$$r=(1+k)r_1. \tag{42}$$

Следствия:

$$1. \qquad t_b + t_c = 1 \to r = 2r_1; \quad \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\xi}{2} = \frac{1}{2}. \tag{43}$$

$$2. \qquad t_b + t_c = 2 \to r = 3r_1; \quad \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\xi}{2} = \frac{2}{3}. \tag{44}$$

4.4.1. Треугольники в случае $t_b + t_c = 1$

Треугольники данного типа всегда остроугольные (рис. 5).

Применим формулу (13) для определения положения центра большой окружности Содди $\triangle ABC$, а именно $\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \frac{t_b}{1 - t_b - t_c}$. Если $t_b + t_c = 1$, то $\alpha_2 = 180°$. Это означает, что точка S' лежит на стороне, соединяющей углы B и C.

$$\frac{1}{r_{S'}} = \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-c} - \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{r}{r_{S'}} = t_a + t_b + t_c - 2 = t_a - 1; \quad \Rightarrow \frac{r}{s-a} = 1 + \frac{r}{r_{S'}}. \tag{45}$$

Из $\triangle ABC$ имеем $\quad t_a = \frac{1 - t_b t_c}{t_b + t_c}$; с учетом $t_b + t_c = 1$ получаем

$$\frac{r}{s-a} = 1 - \frac{r^2}{(s-b)(s-c)}. \tag{46}$$

Подставим (45) в (46), получим

$$\frac{1}{r_{S'}} = -\frac{r}{(s-b)(s-c)}. \tag{47}$$

Знак “$-$” означает, что большая окружность Содди всегда имеет внутреннее касание.

$$\frac{r}{s-b} + \frac{r}{s-c} = 1 \to \frac{ra}{(s-b)(s-c)} = 1.$$

С учетом (47) получаем

$$\boldsymbol{r_{S'} = -(s - b + s - c) = -a.} \tag{48}$$

Теорема 9. *Если в $\triangle ABC$ сумма $t_b + t_c = 1$, то точка S' — центр большой окружности Содди — лежит на стороне, соединяющей эти углы и делит периметр треугольника пополам, а ее радиус равен этой стороне. При этом $BS' = s - c$.*

Следовательно, $AB + BS' = s - a + s - b + s - c = s = AC + CS'$, тогда линия AS' проходит через точку Нагеля $\triangle ABC$, что, разумеется, и подтверждается вычислением угла ее наклона к стороне AB по формуле (14). Целесообразно заметить, что в этом случае вторая точка Эпштейна Ep_2 всегда лежит на окружности радиусом $(s - a)$. Для построения указанных треугольников определим их углы в зависимости от $\angle\theta$. Решим систему уравнений.

$$\begin{array}{l} t_b + t_c = 1 \\ t_a = 1 - t_b t_c \\ \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{t_c}{t_b} \end{array} \qquad t_b + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} t_b = 1 \Rightarrow t_b = \cos^2\frac{\theta}{2}; \quad t_c = \sin^2\frac{\theta}{2}; \quad t_a = 1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2},$$

получим

$$t_b = \frac{1 + \cos\theta}{2}; \quad t_c = \frac{1 - \cos\theta}{2}; \quad t_a = \frac{4 - \sin^2\theta}{4}. \tag{49}$$

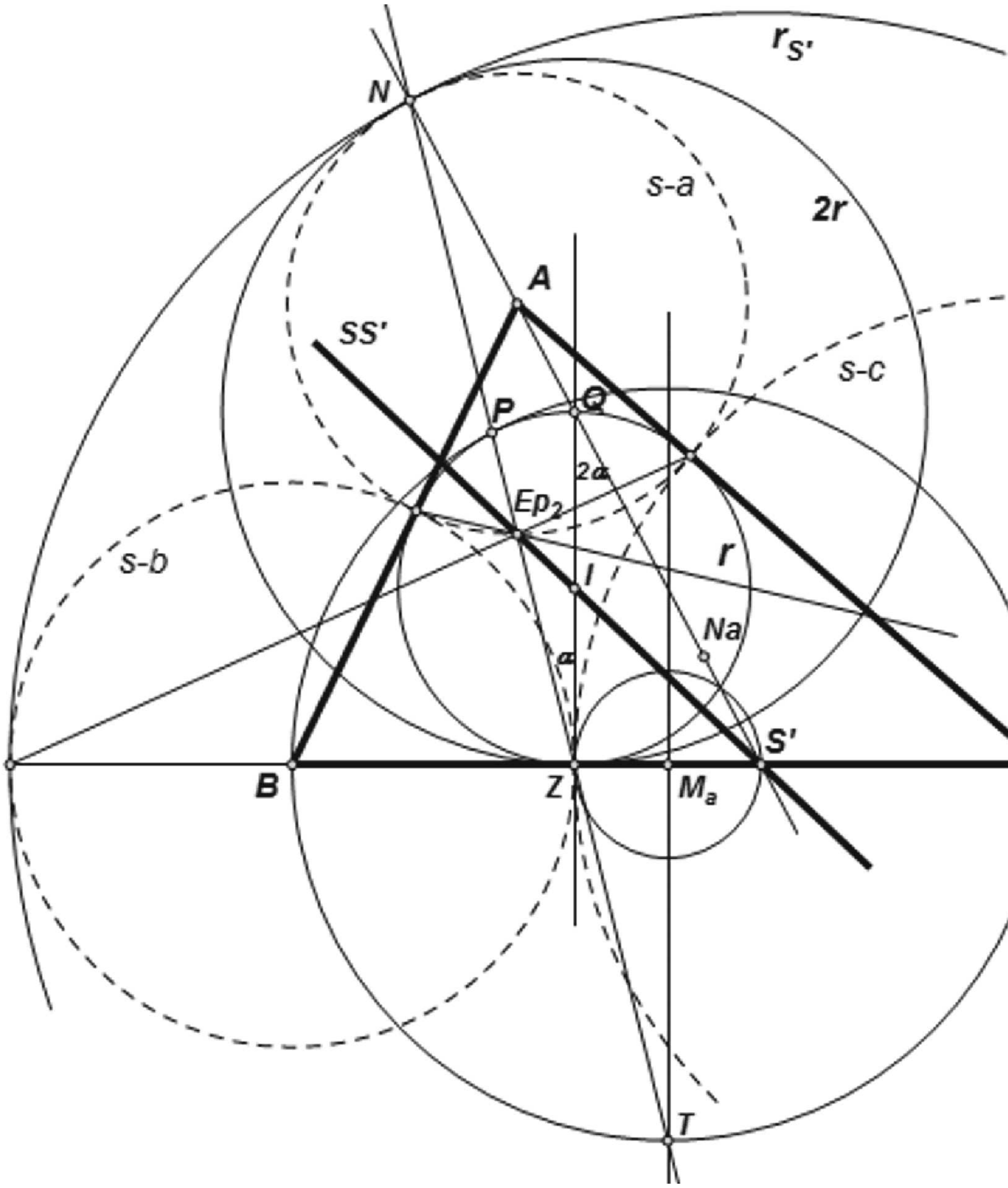

Рис. 4

Введем обозначения: $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = t = \dfrac{m}{n}$, где $\angle\theta$ — угол наклона линии m к BC

$$t_b = \frac{1}{1+t^2} = \frac{n^2}{m^2+n^2}; \quad t_c = \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{m^2}{m^2+n^2}; \quad t_a = \frac{1+t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} = \frac{m^4+m^2n^2+n^4}{(m^2+n^2)^2}. \tag{50}$$

Пусть

$$t_b = \frac{l}{q}; \quad t_c = \frac{k}{q}; \quad t_a = \frac{p}{q^2},$$

где

$$k = m^2; \quad l = n^2; \quad q = m^2+n^2; \quad p = q^2 - kl.$$

Зная тангенсы половинных углов, найдем их синусы. По теореме синусов определим стороны треугольников и возможность их целочисленных значений.

$$\sin B=\frac{2lq}{l^2+q^2};\quad \sin C=\frac{2kq}{k^2+q^2};\quad \sin A=\frac{2pq^2}{p^2+q^4}; \tag{51}$$

$$p^2+q^4=(k^2+q^2)(l^2+q^2). \tag{52}$$

$$b=a\frac{\sin B}{\sin A}=a\frac{2lq*(k^2+q^2)(l^2+q^2)}{(l^2+q^2)*2pq^2}=a\frac{l(k^2+q^2)}{pq}; \tag{53}$$

b — целое, если $a=pq$

$$c=a\frac{\sin C}{\sin A}=a\frac{2kq*(k^2+q^2)(l^2+q^2)}{(k^2+q^2)*2pq^2}=a\frac{k(l^2+q^2)}{pq} \tag{54}$$

c — целое, если $a=pq$

Итак, формулы целочисленных значений сторон треугольников, у которых центр внешней окружности Содди лежит на одной из его сторон:

$$b=l(k^2+q^2);\quad c=k(l^2+q^2);\quad a=pq. \tag{55}$$

На диаграмме 3 приведены примеры таких треугольников.

Диаграмма 3

θ	$\operatorname{tg}\theta/2$	t_b	t_c	t_a	c	b	a	s	S_{ABC}
90	1	1/2	1/2	3/4	5	5	6	8	12
53,13	1/2	4/5	1/5	21/25	41	104	105	125	2100
36,87	1/3	9/10	1/10	91/100	181	909	910	1000	81900
28,07	1/4	16/17	1/17	273/289	545	4640	4641	4913	1262352
67,38	2/3	9/13	4/13	133/169	1000	1665	1729	2197	809172
43,60	2/5	25/29	4/29	741/841	5864	21425	21489	24389	62318100
73,74	3/4	16/25	9/25	481/625	7929	11296	12025	15625	43290000
126,87	2	1/5	4/5	21/25	104	41	105	125	2100

На диаграмме 3 приведены расчеты $\triangle$ и s треугольников по простым и удобным для быстрого вычисления формулам: $\boldsymbol{s=q^3;\,S_{ABC}=klpq^2}$.

$$s=\frac{c+b+a}{2}=\frac{k(l^2+q^2)+l(k^2+q^2)+pq}{2}=\frac{(k+l)(kl+q^2)+(q^2-kl)q}{2}=q^3,$$
$$S_{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{q^3(q^3-kl^2-kq^2)(q^3-lk^2-lq^2)(q^3-pq)}=$$
$$=\sqrt{q^4\cdot lp\cdot kp\cdot kl}=klpq^2.$$

Построение треугольников осуществляется следующим образом:

1. Выбираем произвольный отрезок BC и точку Z на нем ($BZ=s-b, CZ=s-c$);
2. Строим окружность rS' (S'; $(s-b+s-c)$ — теорема 9);
3. Проводим окружность диаметром ВС и серединный перпендикуляр к BC, T — нижняя точка их пересечения;
4. Строим прямую линию TZ до пересечения с окружностью rS' в точке N;
5. Прямая $S'N$ (радиус rS') пересекает перпендикуляр (через точку Z к BC) в точке Q;
6. QZ — диаметр вписанной окружности требуемого треугольника, строим вписанную окружность $(I; IZ)$;

7. Через точки пересечения вписанной окружности с окружностями $(B, s-b), (C, s-c)$ проведем касательные к вписанной окружности, их пересечение — точка A;

8. Треугольник ABC — искомый $(t_b + t_c = 1)$.

4.4.2. Треугольники в случае $t_b + t_c = 2$

Треугольники данного типа всегда тупоугольные (рис. 6).

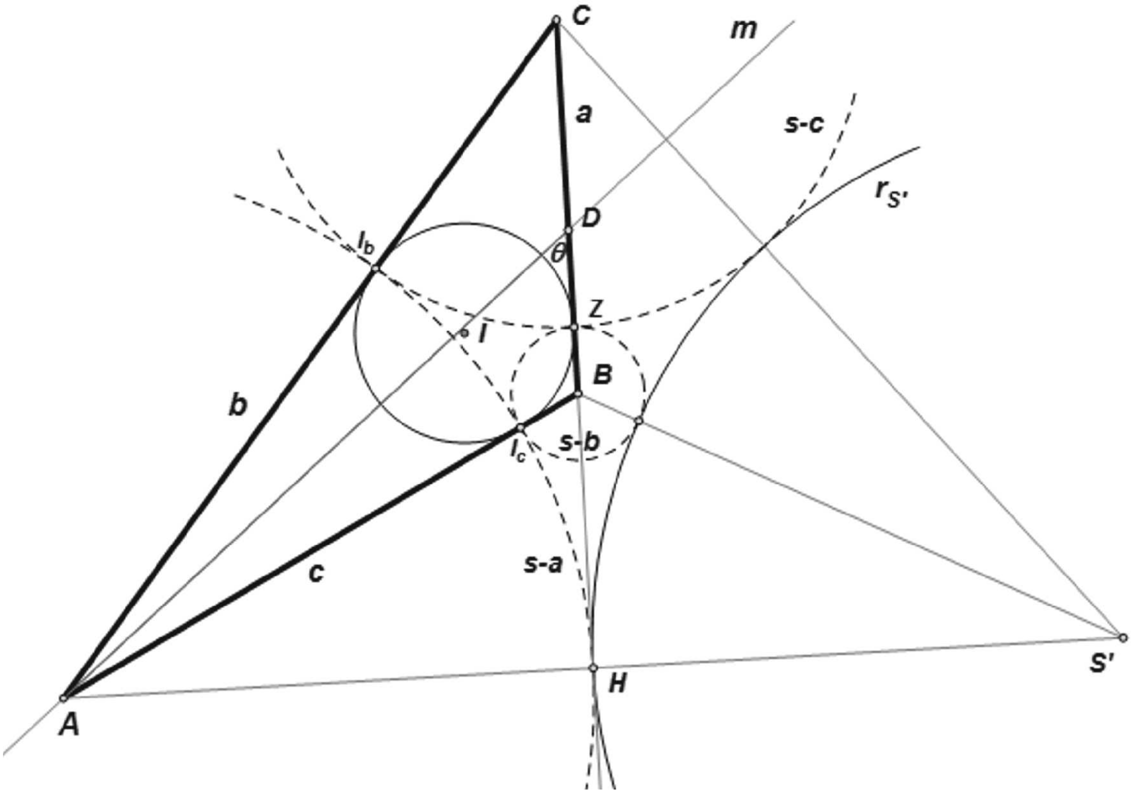

Рис. 5

Теорема 10. *Если сумма тангенсов половинных углов при основании любой из сторон треугольника равна 2, то радиус внешней окружности Содди равен радиусу одной из 3-х взаимно касающихся окружностей $(s-a, s-b, s-c)$ с центром в вершине, противоположной этой стороне.*

Применим формулы $(13 \div 15)$ для определения положения центра внешней окружности Содди $\triangle ABC$ (рис. 6).

По условию $t_b + t_c = 2$, откуда $\alpha_2 = -C$; тогда $\angle BCS' = \angle BCA; \beta_2 = -B \Rightarrow \angle CBS' = \angle CBA$. Это означает, что $\triangle ABC = \triangle S'BC$. Точка S' симметрична относительно отрезка CH.

$$\frac{1}{r_{S'}} = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{r}{r_{S'}} = t_a + t_b + t_c - 2 \Rightarrow \frac{r}{r_{S'}} = \frac{r}{s-a} \quad r_{S'} = s - a. \qquad (56)$$

Для построения указанных треугольников определим их углы в зависимости от $\angle\theta$. Решим систему уравнений.

$$t_b + t_c = 2 \qquad\qquad t_b + \mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2} t_b = 2 \Rightarrow t_b = 2\cos^2\frac{\theta}{2}; \quad t_c = 2\sin^2\frac{\theta}{2};$$

$$t_a = \mathrm{tg}\left[90 - \left(\frac{B+C}{2}\right)\right] \qquad\qquad t_a = \frac{1 - t_b t_c}{2} = \frac{1 - 4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{2} = \frac{\cos^2\theta}{2};$$

$$tg^2\frac{\theta}{2} = \frac{t_c}{t_b} \qquad\qquad t_b = 1 + \cos\theta; \quad t_c = 1 - \cos\theta; \quad t_a = \frac{\cos^2\theta}{2}. \qquad (57)$$

Введем обозначения: $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t = \frac{m}{n}$, где $\angle\theta$-угол наклона линии m к стороне BC

$$t_c = \frac{2t^2}{1+t^2} = \frac{2m^2}{m^2+n^2}; t_b = \frac{2}{1+t^2} = \frac{2n^2}{m^2+n^2}; t_a = \frac{1-2t^2+t^4}{2(1+2t^2+t^4)} = \frac{(n^2-m^2)^2}{2(n^2+m^2)^2};$$
$$t_c = \frac{k}{q}; t_b = \frac{l}{q}; t_a = \frac{p}{2q^2}, \text{ где } k = 2m^2; l = 2n^2; q = m^2+n^2; p = (n^2-m^2)^2. \tag{58}$$

Зная тангенсы половинных углов, найдем их синусы. По теореме синусов определим стороны треугольников и возможность их целочисленных значений. Проведя необходимые преобразования как в разделе 4.4.1, получим формулы сторон целочисленных треугольников:

$$\boldsymbol{c = m^2(l^2+q^2); \quad b = n^2(k^2+q^2); \quad a = pq.} \tag{59}$$

На диаграмме 4 приведены некоторые примеры целочисленных значений сторон таких треугольников:

Диаграмма 4

θ	$\operatorname{tg}\theta/2$	t_c	t_b	t_a	c	b	a	s	S_{ABC}
53,13	1/2	2/5	8/5	9/50	89	116	45	125	1800
36,87	1/3	2/10	18/10	64/200	424	936	640	1000	115200
28,07	1/4	2/17	32/17	225/578	1313	4688	3825	4913	2080800
67,38	2/3	8/13	18/13	25/338	1972	2097	325	2197	304200
43,60	2/5	8/29	50/29	441/1682	13364	22625	12789	24389	74176200
73,74	3/4	18/25	32/25	49/1250	14841	15184	1225	15625	8820000
126,87	2	8/5	2/5	9/50	116	89	45	125	1800

Расчеты S_{ABC} и s треугольников рассчитаны по простым и удобным для быстрого вычисления формулам: $\boldsymbol{s = q^3}$; $\boldsymbol{S_{ABC} = klpq^2/2}$.

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{m^2(l^2+q^2)+n^2(k^2+q^2)+pq}{2} = \frac{q(4m^2n^2+q^2+p)}{2} = \frac{2q(m^2+n^2)^2}{2} = q^3;$$
$$S_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{q^3(q^3-m^2l^2-m^2q^2)(q^3-n^2k^2-n^2q^2)(q^3-pq)} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{q^4 \cdot lp \cdot kp \cdot kl} = \frac{1}{2}klpq^2.$$

Построение треугольников осуществляется следующим образом (рис. 6):

1. Пусть AS' — произвольный отрезок, точка H — его середина;
2. Проводим перпендикуляр к отрезку в его середине;
3. На перпендикуляре выбираем произвольно точку C и строим отрезок AC;
4. Проводим окружность $s-a$ $(A; AH)$, точка Ib — пересечение с отрезком AC;
5. Впишем окружность в острый угол ACH с точкой касания Ib, отметим ее пересечение с окружностью $s-a$ — точка Ic;
6. Проводим прямую через точки A, Ic до пересечения с перпендикуляром CH в точке B;
7. Треугольник ABC — искомый $(t_b + t_c = 2)$.

Следствия:

1. Если треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$), то $\operatorname{tg}\dfrac{ABS}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{BSA}{2} = 2$ (рис. 7). Точка S — центр внутренней окружности Содди $\triangle ABC$. Доказательство очевидно и опирается на обратную теорему к теореме 10. Действительно для $\triangle ABS$ — окружность $r_{S'}$ — его внешняя окружность Содди. Она равна и симметрична $s - a$.

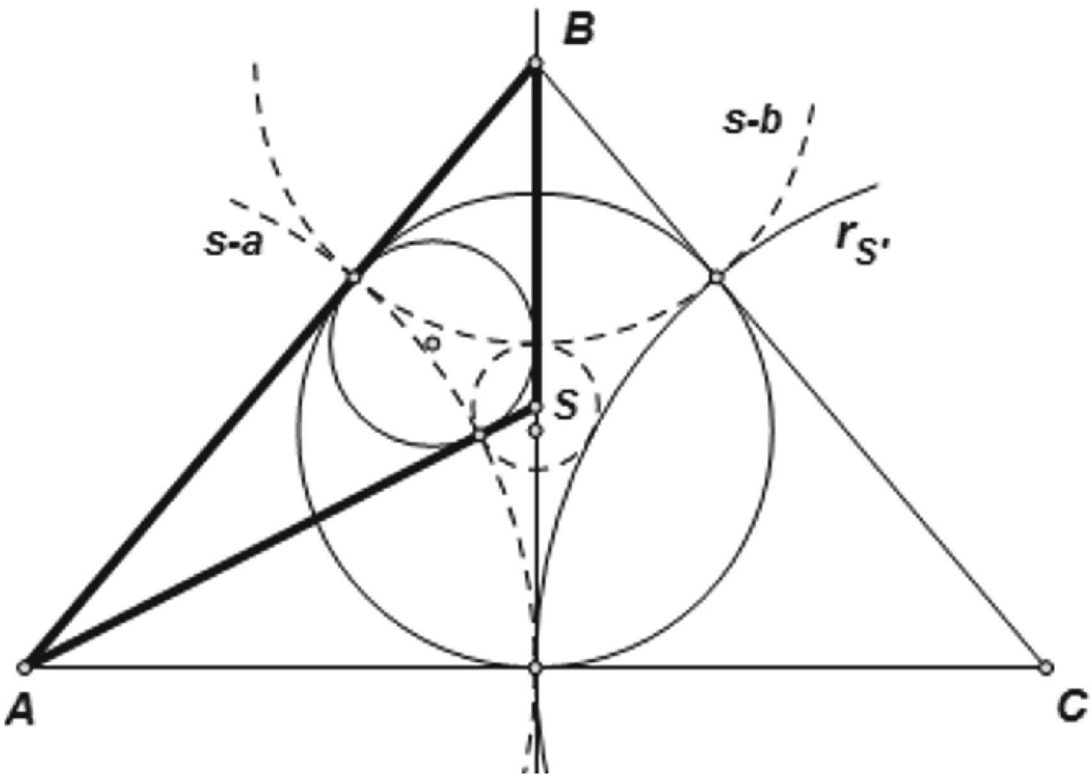

Рис. 6

2. В любом прямоугольном треугольнике можно всегда построить 2 треугольника, у которых сумма тангенсов 2-х половинных углов равна 2.

3. Если прямоугольный треугольник — равнобедренный ($\triangle ABC$, рис. 8), тогда 4 тупоугольных треугольника — ABD_1, ABS, CBS, CBD_2, построенные с суммой тангенсов 2-х половинных углов, равной 2, равны между собой (например $\triangle ABD_1$ и $\triangle ABS$ — сторона AB общая,

$$\angle BAD_1 = \angle ABS = 45^\circ, \quad \angle AD_1B = \angle ASB = 2\arctan\left(2 - \operatorname{tg}\frac{45}{2}\right).$$

В равных треугольниках равны и 3 взаимнокасающиеся окружности ($s-a, s-b, s-c$). Это значит, что окружности в вершинах D_1, S, D_2 равны и их центры лежат на окружности. Центры равных вписанных окружностей также лежат на окружности.

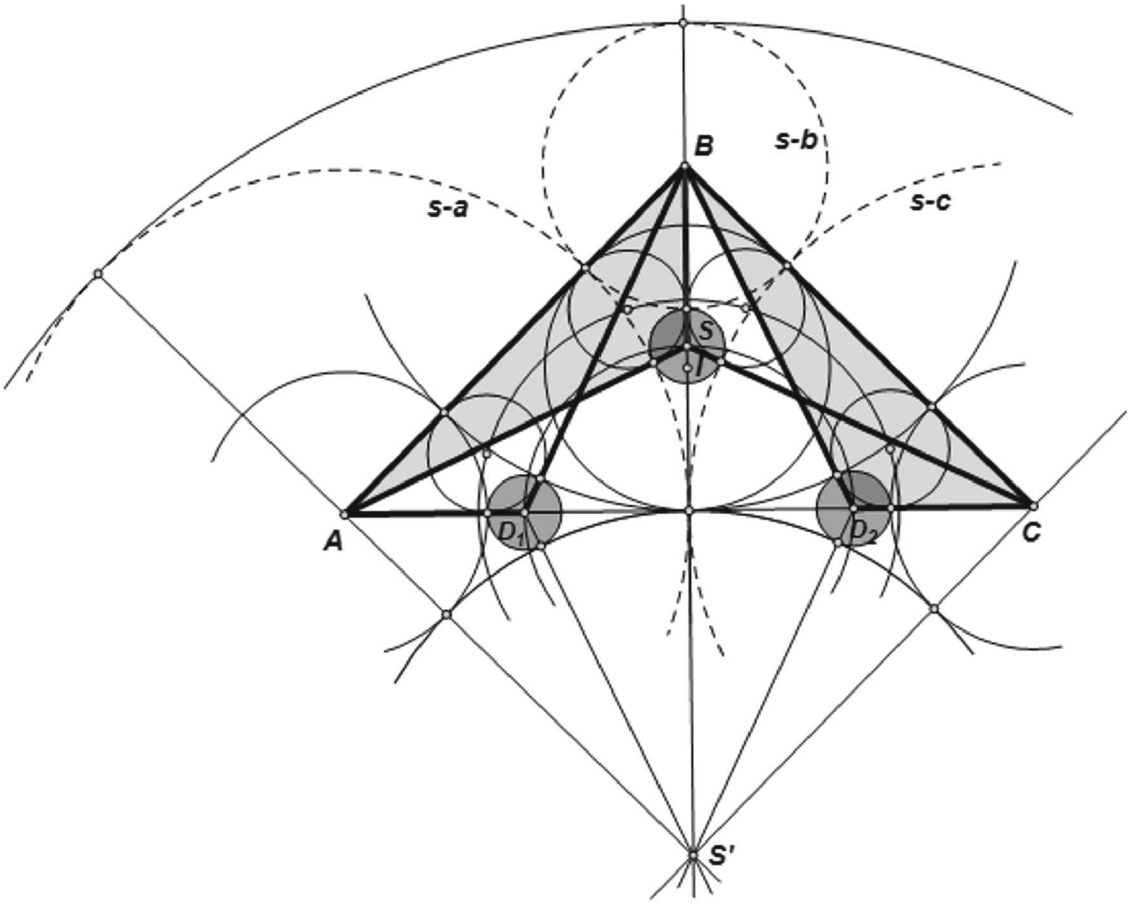

Рис. 7

5. Прямоугольные треугольники

Пусть $\triangle ABC$ — прямоугольный, $\angle A = 90°$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{s-a} \to s-a = r. \tag{60}$$

$\angle ADB = \theta$.

Таким образом, в прямоугольном треугольнике радиус одной из 3-х взаимнокасающихся окружностей, центр которой в вершине прямого угла, всегда равен радиусу вписанной в этот треугольник окружности.

Теорема 11. *Если прямая m проходит через вершину прямого угла треугольника и делит его на 2 треугольника с равными вписанными окружностями, то квадрат величины отрезка AD численно равен площади этого треугольника (рис. 9).*

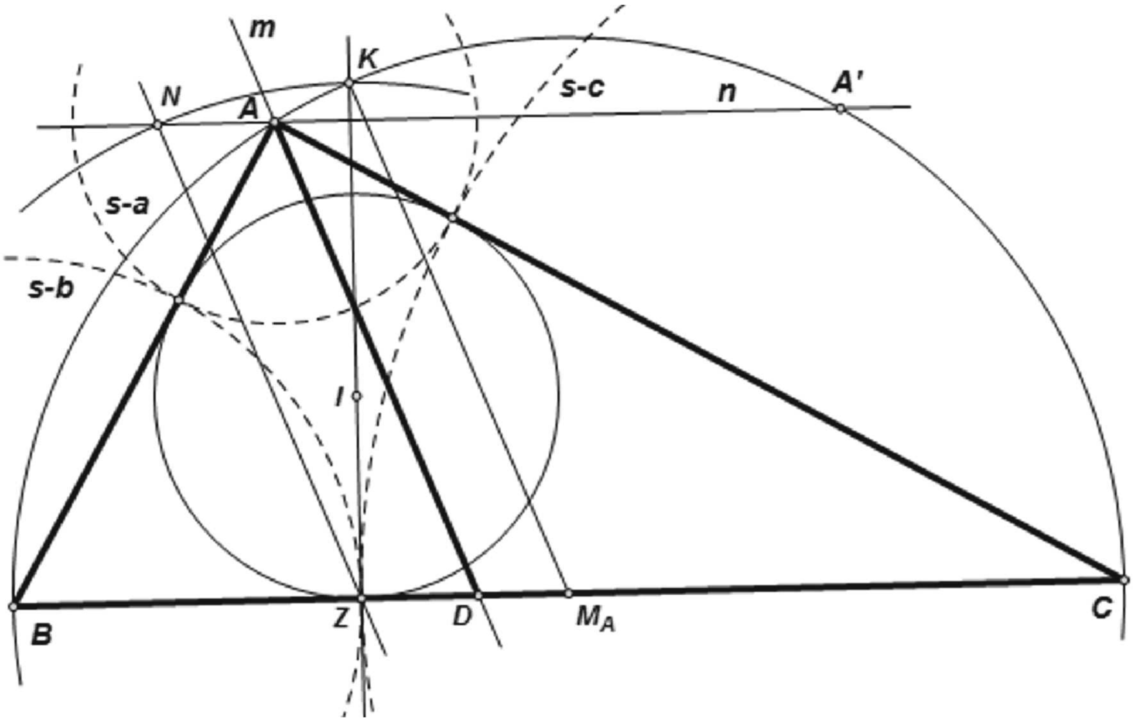

Рис. 8

Из формулы (7) $\to AD = \sqrt{s(s-a)}$; с учетом (60) имеем:

$$\boldsymbol{AD^2 = sr = S_{ABC} = (s-b)(s-c).} \tag{61}$$

Теорема 11 предоставляет возможность осуществить простое построение $\triangle ABC$.

1. Построим произвольный отрезок BC, выберем на нем точку Z (или,что аналогично, зададим угол θ) и проведем окружности $s-b, s-c$ с центрами в точках B, C соответственно;
2. На отрезке BC как на диаметре строим полуокружность и перпендикуляр к нему в точке Z, точка K их пересечение;
3. По свойству прямоугольного треугольника отрезок $(KZ)^2 = (s-b)(s-c)$ и в соответствии с (61) $AD = KZ$;
4. Через точку Z проводим прямую, параллельную отрезку KM_A. Из точки Z описываем дугу радиусом KZ, тогда $NZ = KZ$;
5. Проводим через точку N прямую n параллельную BC. Точка A — пересечение n и полуокружности;
6. Через точку A проводим прямую m, параллельную KM_A;
7. $\triangle ABC$ — искомый, $S_{ABC} = AD^2$;
8. Точка A' — вершина симметричного $\triangle ABC$ при $\angle\theta' = 180 - \angle\theta$.

Для определения углов треугольника решим систему уравнений.

$$\begin{cases} t_a = \operatorname{tg} 45 = 1 \\ \operatorname{tg}^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{t_c}{t_b} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} t_b + t_c = 1 - t_b t_c \\ \operatorname{tg}^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{s-b}{s-c} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \operatorname{tg}^2 \dfrac{\theta}{2} t_b^2 + (1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\theta}{2}) t_b - 1 = 0 \\ \dfrac{s-b}{s-c} t_b^2 + (1 + \dfrac{s-c}{s-a}) t_b - 1 = 0. \end{matrix} \tag{62}$$

$$(s-b)t_b^2 + at_b - (s-c) = 0 \quad \Rightarrow \ t_b = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4(s-b)(s-c)}}{2(s-b)};$$

Учитывая, что $S_{ABC} = \dfrac{bc}{2} = (s-b)(s-c)$; $a^2 = b^2 + c^2$, получаем

$$t_b = \frac{-a \pm (b+c)}{2(s-b)}; \quad t_c = \frac{-a \pm (b+c)}{2(s-c)} \tag{63}$$

$$t_{b1} = \frac{s-a}{s-b} = \frac{r}{s-b} = \frac{s-c}{s}; \quad t_{c1} = \frac{s-b}{s}; \quad t_{b2} = -\frac{s}{s-b}; \quad t_{c2} = -\frac{s}{s-c}. \tag{64}$$

5.1 Пифагоровы треугольники

Поиск рациональных значений корней уравнения (62) означает нахождение пифагоровых троек целочисленных сторон в зависимости от угла θ.

Итак,

$$a = m^2 + n^2; \quad b = 2mn; \quad c = m^2 - n^2 \text{ —} \tag{65}$$

формулы пифагоровых троек, причем $m > n$. Тогда $s = m(m+n)$; $s - a = n(m-n)$; $s - b = m(m-n)$; $s - c = n(m+n)$, откуда

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{s-b}{s-c} = \frac{m(m-n)}{n(m+n)} = \frac{k}{l}. \tag{66}$$

Подставим (66) в (62), получим $kt_b^2 + (k+l)t_b - l = 0$; откуда $t_b = \dfrac{-(k+l) \pm \sqrt{(k+l)^2 + 4kl}}{2k}$;

$$T = \sqrt{(k+l)^2 + 4kl} = \sqrt{(m^2+n^2)^2 + 4mn(m^2-n^2)} = \\ = \sqrt{(m^2-n^2)^2 + (2mn)^2 + 2 * 2mn(m^2-n^2)} = (m^2 - n^2) + 2mn.$$

После преобразований получаем:

$$t_{b1} = \frac{n}{m} = \frac{s-c}{s}; t_{c1} = \frac{m-n}{m+n} = \frac{s-b}{s}; \tag{67}$$

$$t_{b2} = -\frac{m+n}{m-n} = -\frac{s}{s-b}; t_{c2} = -\frac{m}{n} = -\frac{s}{s-c}. \tag{68}$$

Формулы (68) определяют симметричные треугольники. Таким образом, углы B и C однозначно определяются либо решением уравнения (62), либо выбором коэффициентов m, n — формулы (67). При этом каждой паре m, n соответствует определенный угол θ — (66). Следовательно, изменяя угол θ, можно легко переходить от одной пифагоровой тройки к другой. Это особенно удобно при проведении анализа свойств треугольников с применением программы Sketchpad или других методов. Введем обозначения:

$$t_b = \frac{u}{v}; \quad t_c = \frac{p}{q}; \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{k}{l}.$$

1. $t_b \cdot t_c = \dfrac{(s-b)(s-c)}{s^2} = \dfrac{S_{ABC}}{s^2} = \dfrac{r}{s} = \dfrac{up}{vq} \Rightarrow r = up; s = vq$
2. $\operatorname{tg}^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{t_c}{t_b} = \dfrac{(s-b)s}{s(s-c)} = \dfrac{pv}{uq} = \dfrac{k}{l}$, но $S_{ABC} = (s-b)(s-c) = rs = up \cdot vq \Rightarrow k = pv$; $l = uq$; $S_{ABC} = kl$
3. $t_b + t_c = \dfrac{s-c}{s} + \dfrac{s-b}{s} = \dfrac{a}{s} = \dfrac{u}{v} + \dfrac{p}{q} = \dfrac{uq + vp}{vq} \Rightarrow a = uq + vp = k + l$
4. $t_b + t_c = 1 - t_b t_c$; $\dfrac{u}{v} + \dfrac{p}{q} = 1 - \dfrac{up}{vq} \Rightarrow uq + vp = vq - up \Rightarrow a = s - r$

5. Из (65) имеем $c = m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$; $t_c = \dfrac{m-n}{m+n} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow$

$c = pq$, если p, q одной четности; $c = 2pq$, если p, q разной четности.

Из (65) имеем $-b = 2mn$; $t_b = \dfrac{n}{m} = \dfrac{u}{v} \Rightarrow b = uv$, если u, v одной четности; $b = 2uv$, если u, v разной четности. На диаграмме 5 представлены некоторые целочисленные примеры примитивных пифагоровых троек и значение соответствующих им углов θ. Диаграмма построена по принципу возрастания стороны a.

Диаграмма 5

m	n	θ	$\tan^2\theta/2$	t_c	t_b	c	b	a	r	s	S_{ABC}
2	1	78,46	2/3	1/3	1/2	3	4	5	1	6	6
3	2	57,42	3/10	1/5	2/3	5	12	13	2	15	30
5	3	65,68	5/12	1/4	3/5	8	15	17	3	20	60
4	3	47,16	4/21	1/7	3/4	7	24	25	3	28	84
7	3	88,02	14/15	2/5	3/7	20	21	29	6	35	210
7	5	51,56	7/30	1/6	5/7	12	35	37	5	42	210
9	5	71,29	18/35	2/7	5/9	28	45	53	10	63	630
6	5	36,56	6/55	1/11	5/6	11	60	61	5	66	330
7	4	69,28	21/44	3/11	4/7	33	56	65	12	77	924
9	7	43,69	9/56	1/8	7/9	16	63	65	7	72	504
7	6	33,35	7/78	1/13	6/7	13	84	85	6	91	546
11	7	61,16	22/63	2/9	7/11	36	77	85	14	99	1386
8	5	62,57	24/65	3/13	5/8	39	80	89	15	104	1560
13	7	73,48	39/70	3/10	7/13	60	91	109	21	130	2730
12	5	89,66	84/85	7/17	5/12	119	120	169	35	204	7140
70	29	89,99	2870/2871	41/99	29/70	4059	4060	5741	1189	6930	8239770

Анализ диаграммы 5 показывает, что полученные по формулам (67) рациональные значения t_b,t_c для различных углов θ, позволяют легко без сложных вычислений получать основные параметры примитивных пифагоровых треугольников — a, b, c, r, s, S, а именно:

$$\boldsymbol{S_{ABC} = kl; \quad s = vq; \quad r = up; \quad a = k + l; \quad b, c} \text{ (см. 5).} \tag{69}$$

Литература

[1] Dergiades N. The Soddy circles // Forum Geom. - № 7. - 2007. - p. 191-197.

[2] Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers. URL: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[3] Paul Yiu. Euclidean Geometry. - 1998. - p. 127-132.

[4] Jackson Frank M. Soddian triangles // Forum Geom. - № 13. - 2013. - p. 1-6.

[5] Jackson Frank M., Takhaev S. Heronian triangles // Forum Geom. - № 15. - 2015.

Тахаев Сталислав Магометович,
Санкт-Петербург.

E-mail: stalislavt@mail.ru

К вопросу о времени на обучение математике в дореволюционных средних учебных заведениях

Г. В. Кондратьева

В статье дан анализ недельной нагрузки по математике в различных типах средних учебных заведений России середины 19-го века, с опорой на ряд тенденций в образовательной политике, определяемых социально-экономическими условиями страны.

Практика дореволюционной школы представляла собой фактически один из вариантов профильного обучения. Существовавшие тогда различные типы средних учебных заведений (классические гимназии, реальные училища (гимназии), кадетские корпуса (военные гимназии), женские гимназии, институты и т. п.) были предназначены для подготовки учащихся с учетом их последующей профессиональной деятельности. Так, классические гимназии готовили своих выпускников преимущественно к научной или государственной работе. Кадетские корпуса подготавливали будущих военных. Целью женских гимназий было, прежде всего, воспитание учениц как будущих матерей и хозяек.

Математика в каждом учебном заведении являлась обязательным предметом, но, естественно, число уроков математики и объем преподавания были различными. В данной статье мы постараемся осветить вопрос: сколько уроков отводилось на математику в средних учебных заведениях второй половины XIX века?

Начнем рассмотрение поставленного вопроса с мужской гимназии. По уставу 1864 г. существовало три типа гимназии: с двумя древними языками, с одним древним языком и реальная без древних языков. В гимназии с двумя древними языками на изучение математики отводилось 22 недельных урока во всех классах с 1 по 7-ой (12% от всего учебного времени).

Таблица 1

Распределение уроков математики по классам гимназии с двумя древними языками в 1864 году [1,251]

Классы	1	2	3	4	5	6	7	Итого
Количество уроков	3	3	3	3	3	3	4	22

В гимназии с одним древним языком распределение уроков отличалось только в последних классах: в шестом классе на математику отводилось 4 урока, в седьмом 3 урока.

В реальных гимназиях на математику отводилось больше времени (14% от общей учебной нагрузки).

Таблица 2

Распределение уроков математики по классам реальной гимназии в 1864 году [1, С. 251]

Классы	1	2	3	4	5	6	7	Итого	
Количество уроков	3	4	4	4	4	3	3	25	

Компромиссный Устав 1864 г. пытался уравнять классическое и реальное образование, но под влиянием политических событий (покушение на императора Александра II 4 апреля 1866 г.) в образовании был взят курс на классицизм. Новый министр народного просвещения Д.А. Толстой радикально изменил ориентиры образовательной политики. В результате проведенной модернизации начала 1870-х гг. гимназия стала исключительно классической с двумя древними языками, занимающими суммарно около 37% учебного времени. Реальные гимназии были преобразованы в реальные училища с выраженным профессиональным уклоном и уменьшенным шестилетним сроком обучения.

Математика была ведущим предметов как для классического, так и для реального образования, хотя приоритеты, расставляемые в обучении, были весьма различны. Реальное образование ориентировало на практическое использование полученных знаний. Для классического образования, где выставлялось требование основательности и фундаментализации, ведущим было изучение математической теории, знакомство с системами доказательств, построение рассуждений. В связи с усилением классицизма утверждается, «что главная цель образования — развитие мышления, а не приобретение практических сведений, что прежде ученик должен научиться думать» [13, с. 4]. Образовательная реформа 1871 г. только усиливает наметившиеся тенденции.

Поставив во главу угла классическую гимназию, обеспечивавшую беспрепятственных доступ в университет, правительство переориентировало цели образования на приоритетность развития мышления, получение практических умений и навыков стало для среднего образования вторичным.

По новому учебному плану на преподавание математики совместно с физикой, математической географией, кратким естествознанием отводилось 37 недельных уроков. Суммирование в плане времени на разные предметы было сделано специально. Для преподавания естествознания необходим был отдельный учитель. Если специалиста не находили, то министерство разрешало передавать часы естествознания на математику. Таким образом, количество уроков на преподавание математики могло еще более увеличиваться. Если же брать только часы на математику, то планировалось 34 недельных урока, т. е. 15% всего учебного времени.

Таблица 3

Распределение уроков математики по классам классической гимназии в 1871 году [9, с. 8 Приложения]

Классы	Приготовительный Класс	11	2	3	4	5	6	7 Первый год	7 Второй год	Итого
Количество уроков	6	5	4	3	3	4	2	3	4	34

Последний 7-ой класс гимназии был двухгодичным. В виде исключения из правил «отличнейшие и способнейшие» учащиеся могли допускаться к выпускным экзаменам после первого года обучения в 7-ом классе.

Реальные училища, преобразованные из реальных гимназий, имели основное и коммерческое отделения. В зависимости от отделения время на математику различалось: для основного отделения было 16% учебного времени, для коммерческого 12%.

Таблица 4

Распределение уроков по классам реальных училищ в 1872 году (основное отделение) [226, с. 8 Приложения]

Классы	1	2	3	4	5	6	Итого
Количество уроков	4	4	4	4	8	4	28

Таблица 5
Распределение уроков по классам реальных училищ в 1872 году (коммерческое отделение) [226, с. 8 Приложения]

Классы	1	2	3	4	5	6	Итого
Количество уроков	4	4	4	4	2	2	20

Созданная в начале 1870-х гг. образовательная система, имевшая ярко выраженный классический характер с заниженной ролью реального образования, просуществовала в школе до конца 1880-х гг. Однако, под воздействием требований социально-экономического развития правительство вынуждено было скорректировать господствующие позиции классицизма в отечественной школе. В конце 1880-х гг. реальным училищам был придан более общеобразовательный характер. А в начале 1890-х гг. уменьшено время на преподавание древних языков в мужских гимназиях. Время на преподавание математики было перераспределено по классам, но суммарно не изменилось.

Таблица 6
Распределение уроков математики по классам классической гимназии в 1890 году [93]

Классы	Приготовительный Класс	11	2	3	4	5	6	7	8	Итого
Количество уроков	6	4	4	3	4	4	4	3	2	34

Время на преподавание математики в коммерческих отделениях реальных училищах было увеличено.

Таблица 7
Распределение уроков по классам реальных училищ в 1888 году (основное отделение) [10, С. 1316]

Классы	1	2	3	4	5	6	Итого
Количество уроков	4	5	5	5	5	4	28

Таблица 8
Распределение уроков по классам реальных училищ в 1888 году (коммерческое отделение) [10, С. 1316]

Классы	1	2	3	4	5	6	Итого
Количество уроков	4	5	5	5	2	3	24

В основном отделении математика составляла 16% всего учебного времени, в коммерческом 14%.

К числу учебных заведений с весьма высоким уровнем математической подготовки принадлежали кадетские корпуса (военные гимназии). В них на обучение математики во всех классах отводилось 36 уроков в неделю.

Таблица 9
Распределение уроков по классам кадетских корпусов в 1898 году [7]

Классы	1	2	3	4	5	6	7	Итого
Количество уроков	4	4	4	6	6	6	6	36

Достаточно распространенным типом учебных заведений во второй половине XIX века были средние учебные заведения Святого Синода. В них также изучалась математика. В духовных семинариях (трехклассных — по два года в каждом классе, а с 70-х годов шестиклассных) время, отводимое на изучение математики, менялось. Математика изучалась в течение 3-х лет. По определению Святого Синода от 9–12 августа 1840 года [6, С. 87] на математику отводилось недельных 4 урока (8 часов) суммарно за три года обучения. По Уставу 1868 года [12, С. 49] 11 уроков (13,75 часа), по новому плану 1884 г. [2, С. 153] 9 часов (9 уроков). Отметим, что в духовных семинариях изучались алгебра, геометрия, тригонометрия. Полный курс арифметики проходился в духовных училищах. В духовной школе математика изучалась на протяжении 7 лет: 4 года в духовном училище и 3 года в 6-ти классной семинарии.

Средними учебными заведениями с ослабленным уровнем преподавания математики были женские гимназии. Эти учебные учреждения ставили своей целью, прежде всего, воспитание «хозяйки и матери». Математика изучалась на протяжении всех лет обучения, но ее курс был весьма ограничен.

Таблица 10
Распределение уроков по классам женских гимназий в 1884 году [8, С. 238]

Классы	1	2	3	4	5	6	7	Итого
Количество уроков	3	3	3	3	3	4	4	23

Еще меньше число часов отводилось на математику в учебных заведениях ведомства учреждений императрицы Марии.

Таблица 11
Время, отводимое на математику в гимназиях, институтах ведомства императрицы Марии

	Гимназии ВУИМ[4]	Институты ВУИМ (6 лет) [11]	Институты ВУИМ (7 лет) [11]
Математика	15	16	18
Всего	210	147	172

Однако подчеркивалось, что женские учебные заведения «в деле преподавания математики не имеют права ограничиваться только одними практическими целями, а должны воспользоваться этим предметом как одним из средств, служащим для того, чтобы 1. Научить воспитанниц строго логическому мышлению 2. Развить очень важную способность отвлечения и обобщения» [11, С. 31].

Увеличение (или уменьшение) часов на преподавание математики связывалось с педагогическими задачами (повышение успеваемости при прохождении курса, усиление математической подготовки, развитие личности учащегося). Но изменение числа часов на изучение математики происходило и с целью поддержания стабильности в обществе. Это была часть государственной политики: отвлечь учащихся от политических процессов, происходящих в стране. Считалось, что чем больше ученики погружены в изучение именно математики, тем меньше у них остается времени на «занятия политикой».

Показательно, что занятия учащихся не ограничивались школой. Значительное время приходилось заниматься и дома. Среднее количество часов на приготовление домашних заданий [2, С. 165] в мужских гимназиях по данным 1892 года показывает значительную перегрузку учащихся. Так, в приготовительном классе на выполнение домашних заданий учащиеся тратили в среднем 2,5 часа, в 1–2 классах 3 часа, в 3–5 классах 4,5 часа, в 5–8 классах — 6 часов.

Таким образом, нельзя говорить о том, что количество часов, отводимое на изучение математики в классической гимназии было достаточным для усвоения курса. Подкрепляет этот тезис и имевшая место практика отсева неуспевающих на любой ступени обучения. Среднее образование в XIX в. было элитарным. До последнего класса доходили немногие, наиболее способные и лучше обеспеченные материально ученики. Последние могли позволить себе и хороших репетиторов, и дополнительную учебную литературу.

Литература

[1] Алешинцев И. История гимназическаго образования в России (XVIII и XIX век). - СПб.: издание О. Богдановой, 1912. - 346 с.

[2] Белявский Ф. О реформе духовной школы. - СПб., 1907. - 230 с.

[3] Ганелин Ш.И. Очерки по истории средней школы в России второй половины XIX века. Под ред. Н.Г. Казанского; Акад. пед. наук РСФСР. - Л.-М: Учпедгиз, Ленингр. отд-ние , 1950. - 276 с.

[4] Днепров Э.Д. Женское образование в России. - М.: Дрофа, 2010. - 288 с.

[5] Исаенков В. Сборник постановлений и распоряжений по гимназиям и прогимназиям Московского учебного округа за 1871–1895 годы / 2-е изд, значит. дополн. - М.: типография Элисснера и Ю. Ромена, 1895. - 1500 с.

[6] Московская духовная семинария. - М.: 1889. - 156 с.

[7] Общая программа и инструкция для преподавания учебных предметов в кадетских корпусах. Руководящие указания. Частные программы по всем учебным предметам. - СПб.: Фену, 1898. - 145 с.

[8] Родевич М. Сборник действующих постановлений и распоряжений по женским гимназиям и прогимназиям Министерства народного просвещения с последовавшими с 1870 года изменениями и дополнениями, содержащий также (в четырех частях книги): положение по отдельным женским гимназиям и прогимназиям, общие и частные программы их и правительственные распоряжения как относящиеся к этим заведениям, к служащим и учащимся в них, так и касающиеся лиц, занимающихся частной и женской педагогической деятельностью. - СПб.: тип. д-ра М.А. Хана, 1884. - 238 с.

[9] Сборник постановлений по Министерству народного просвещения (1871–1873). Т.5. - СПб.: Тип. Балашева, 1877. - С. 385.

[10] Сборник постановлений и распоряжений по гимназиям и прогимназиям ведомства Министерства народного просвещения (1889–1890). Т.10. - СПб., 1894. - 1490 с.

[11] Устав женских учебных заведений ведомства учреждений императрицы Марии, высочайше утвержденный 30 августа 1855. С последующими дополнениями, изменениями, циркулярными распоряжениями. - СПб.: типо-литография Штремена, 1884.

[12] Уставы и штаты православных духовных семинарий и училищ. - СПб., 1868. - 96 с.

[13] Фан-дер-Флит П. Элементарный курс геометрии: Руководство для преподавателей. - СПб.: тип. Н. Тиблена и К° (Н. Неклюдова), 1868. - 162 с.

Кондратьева Галина Вячеславовна,
заведующая кафедрой математического анализа
и геометрии Московского государственного
областного университета, доцент,
кандидат педагогических наук.

E-mail: kondratevagv@mail.ru

Иван Семенович Бровиков (к 100-летию со дня рождения)

В. А. Попов

Статья рассказывает о жизни, деятельности и творчестве члена-корреспондента АПН СССР Ивана Семеновича Бровикова (1916–1981).

Иван Семенович Бровиков родился 1 августа (по старому стилю 19 июля) 1916 г. в селе Ольхи Шацкого уезда Тамбовской губернии. Его отец Бровиков Семен Петрович и мать Анна Филипповна (в девичестве Дворникова) занимались сельским хозяйством (в 1937 г. отец был репрессирован, ст. 58, п. 10).

После окончания Куплинской школы колхозной молодежи И.С. Бровиков в 1933-1934 учебном году учился в Московском химико-технологическом техникуме. Затем поступил и в 1939 г. с отличием закончил мехмат МГУ по специальности “Научный работник, преподаватель математики и механики”.

По путевке (№ 14183) Наркомпроса РСФСР он был направлен на работу в Коми государственный педагогический институт (далее Коми пединститут или КГПИ). Приказом № 95, §2 от 1 сентября по Коми пединституту зачислен старшим преподавателем кафедры математики с 16 августа 1939 г. [1].

Фото 1. И.С. Бровиков в Коми пединституте (10 марта 1941 г.)

Молодой и энергичный, в Сыктывкаре он успевал не только разрабатывать и проводить занятия со студентами (по теории функций действительного и комплексного переменного, основаниям геометрии, проективной и начертательной геометрии, уравнениям математической физики), но и параллельно начал самостоятельно осваивать программу аспирантуры. В 1940 г. И.С. Бровиков сдал в Москве при НИИ математики и механики МГУ кандидатские экзамены по философии и по математике (интегральные уравнения, уравнения математической физики).

Приказом от 30 июня 1940 г. по Коми пединституту ему была объявлена благодарность “За добросовестное отношение к работе, высокое качество лекций и повышение своей квалификации” [2].

Следующий учебный год его работы в Коми désinституте был столь же насыщен и плодотворен. Весной 1941 г. там же в МГУ И.С. Бровиков сдал кандидатские экзамены по иностранному языку и по всем разделам теоретической физики.

В отчете Коми пединститута о выполнении плана научно-исследовательской работы и повышении квалификации профессорско-преподавательского состава за 1-е полугодие 1941 г. он отмечен в числе четырех преподавателей, сдавших все кандидатские экзамены [3, с. 287].

И.С. Бровиков работал в институте до 9 июля 1941 г. (приказ № 90 от 10 июля об освобождении от работы в связи с мобилизацией в ряды РККА). (В Книге приказов № 12 по Коми пединституту имеется приказ № 94 от 16 июля 1941 г., в §7 которого имеется запись о том, что он восстановлен на работе в связи с возвращением из РККА. Однако далее он нигде не упоминается в списках преподавателей и работников КГПИ. Мобилизация в РККА состоялась, а в суматохе дел начала войны отменить ошибочно написанный приказ забыли).

На стр. 298 тома 8 в “Книге Памяти Республики Коми” [4] написано следующее:

“Бровиков Иван Семенович, 1916 г.р. Призван в июле 1941 г.”.

Поиски информации о его дальнейшей судьбе привели автора этих строк к книге Ю.М. Колягина [5] и к другим источникам. Из них следует, что И.С. Бровиков участвовал в Великой Отечественной войне с 1941 по 1945 г.

Некоторые подробности того, как он воевал, излагаются далее на основе информации из общедоступного электронного банка документов “Подвиг народа” [6].

С июля 1941 г. по февраль 1942 г. И.С. Бровиков воевал на Западном фронте, далее по июнь 1943 г. — на Северо-Западном фронте, а с июня 1943 г. — в составе 5-й гвардейской Армии (I Украинский фронт).

Первая его боевая награда — медаль “За оборону Москвы”.

А 12 февраля 1945 г. он, тогда — командир автотранспортного взвода отдельной роты управления бригады, был представлен к награде медалью “За боевые заслуги”. В наградном листе читаем:

“Старшина Бровиков И.С., находясь в роте Управления с декабря месяца 1944 г., показал добросовестное отношение к работе и дисциплинированность. В период подготовки к январскому наступлению тов. Бровиков вложил много сил и энергии в деле повышения знаний шоферского состава роты Управления.

В период январского наступления 1-го Украинского фронта умело организовывал личный состав и автомашины 1-го автотранспортного взвода и тем самым способствовал точному и своевременному выполнению поставленных задач Командованию бригады.

За умелое руководство взводом и четкое выполнение поставленных задач перед ротой Управления старшина Бровиков Иван Семенович достоин правительственной награды медалью «За боевые заслуги»”.

Приказом частям 55 инженерно-саперной Вислинской бригады № 03/н от 20 февраля 1945 г. эта награда была утверждена. В преамбуле приказа говорится, что награда дана “...за образцовое выполнение боевых заданий Командования на фронте борьбы с немецкими захватчиками и проявленные при этом доблесть и мужество”.

Оказалось, что до службы в 55-й инженерно-саперной бригаде Бровиков И.С. был представлен к еще одной награде.

Вот что написано в наградном листе от 28 марта 1945 г.: “Старшина Бровиков за время своего пребывания в I Ударной Армии в 1943 г. находился во взводе разведки и по заданию Командования неоднократно ходил за передний край противника, за что был представлен к правительственной награде, но таковой не получил, ввиду перевода в 5 Гвардейскую Армию.

С августа 1944 г. тов. Бровиков работает в 55 инженерно-саперной Вислинской ордена Богдана Хмельницкого бригаде в должности командира взвода Управления.

С работой справляется отлично, следит за хорошим состоянием автотранспорта.

За четкую и добросовестную работу Бровиков достоин правительственного награждения орденом «Красная Звезда»”.

Награда была утверждена приказом по войскам 5-й Гвардейской Армии № 067/н от 19 июня 1945 г.

После завершения войны И.С. Бровиков в 1945 г. поступил в аспирантуру МГУ, а в 1948 г. защитил кандидатскую диссертацию.

Дальнейшая его научная деятельность была тесно связана с океанографией.

В рамках научного сотрудничества с Государственным океанографическим институтом (ГОИН) в 1957-1959 гг. он выполнил фундаментальные работы по исследованию статистических характеристик элементов волн глубокого моря и по изменению волн при выходе на мелководье, которые стали существенным вкладом в развитие волновой теории.

За эти работы он был удостоен премии имени академика Ю.М. Шокальского. На основе этих научных результатов он защитил докторскую диссертацию.

Круг его интересов был весьма широк. Он соавтор монографии: Баканов М.И., Бровиков И.С., Бабурин В.Т. Математические методы анализа в торговле. - М.: Экономика, 1967.

Был связан с математическим программированием. В частности, это выразилось написанием следующих пособий:

1. Бровиков И.С. Линейное программирование: учеб. пособие / Заоч. ин-т советской торговли. - М.: [б. и.], 1963. - 124 с.

2. Бровиков И.С. Краткий курс линейного программирования: учеб. пособие / Заоч. ин-т советской торговли. - М.: [б. и.], 1967. - 206 с.

Помимо научных исследований И.С. Бровиков осуществлял активную преподавательскую деятельность в вузах Москвы: читал лекции по теории вероятностей, вычислительной математике, математической статистике, работая на кафедре математики Академии авиационной промышленности; читал лекции по кафедре океанологии географического факультета МГУ по вопросам применения теории вероятностей и математической статистики в океанологических исследованиях; заведовал кафедрой высшей математики в заочном институте советской торговли (ЗИСТ). Стал профессором.

С 1956 по 1978 гг. он заведовал кафедрой математики во Всесоюзном заочном институте текстильной и легкой промышленности.

Одно время заведовал кафедрой математики в Московском инженерно-экономическом институте (МИЭИ, нынешний ГУУ — Государственный университет управления, см. об этом на сайте www.guu.ru).

Был оппонентом или научным руководителем нескольких диссертационных работ (по математике и педагогике).

Он был рецензентом пособия: Абрамович М.И., Стародубцев М.Т. Математика (алгебра и элементарные функции): учеб. пособие. - М.: Высшая школа, 1976.

С 4 марта 1965 г. И.С. Бровиков стал членом-корреспондентом АПН РСФСР, а со 2 февраля 1968 г. — членом-корреспондентом АПН СССР (по отделению дидактики и частных методик).

Он был членом президиума комитета по прикладной математике и вычислительной технике (ВСНТО СССР) и более 10 лет членом Экспертного совета ВАК СССР.

По воспоминаниям академика РАО Ю.М. Колягина [5], он был сторонником изучения в школе элементов теории вероятностей и математической статистики. Отличался доброжелательностью, приправленной ярким остроумием. В личных беседах высказывал провидческие мысли о широкой компьютеризации науки и образования.

И.С. Бровиков в течение многих лет состоял членом Ученого совета Московского областного педагогического института им. Н.К. Крупской и членом Ученого совета научно-исследовательского института содержания и методов обучения АПН СССР.

Иван Семенович принимал участие (от РСФСР) в работе редакционного совета журнала “Математика в школе”.

В 1959 году начал свою работу известный научно-методический семинар “Передовые идеи преподавания математики в России и за рубежом”. Первоначально этот семинар был создан при Академии педагогических наук СССР по инициативе крупного ученого, члена-корреспондента

АПН, профессора Ивана Козьмича Андронова, долгие годы заведовавшего в Московском областном педагогическом институте им. Н.К. Крупской созданной им кафедрой высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики.

После кончины И.К. Андронова в 1975 г. за семинаром закрепилось сохранившееся и поныне название "Андроновский семинар". Заседания этого семинара из АПН были переведены в МОПИ им. Н.К. Крупской и его руководителем в 1975-1981 гг. был И.С. Бровиков [7], [8, с. 62].

Фото 2. Член-корреспондент АПН И.С. Бровиков

И.С. Бровиков скоропостижно скончался 14 сентября 1981 г.

В современных научных работах используются его достижения. Так, в работе [9] применено пороговое значение λ_0 параметра, выведенного И.С. Бровиковым для описания характера поведения волны.

Ранее краткие материалы о И.С. Бровикове, успешно начинавшем свою педагогическую и исследовательскую деятельность в Коми пединституте, публиковались в работах [10, с. 10-12], [11, с. 55-58].

Использованные источники

1. Архив КГПИ. Личное дела Бровикова И.С.

2. Архив КГПИ. Книги приказов по Коми пединституту № 10-12.

3. Коми пединститут: становление и развитие. 1932-1941. Документы, материалы, воспоминания / гл. ред. В.Н. Исаков, составители: Л.А. Жданов, В.Д. Захаров (отв. редактор), Э.В. Роттэ. - Сыктывкар: Коми пединститут, 2007. - 346 с.; фотографии.

4. Книга Памяти Республики Коми / Т. 8. - Сыктывкар, 1999. - 1065 с.

5. Колягин Ю.М. Русская школа и математическое образование: Наша гордость и наша боль. - М.: Просвещение, 2001. - 318 с.

6. Фонды Центрального архива Министерства Обороны: ф. 33, оп. 690306, ед. хр. 200.

7. Нелаев А.В. Полувековой юбилей семинара // Народный Учитель (газета Московского государственного областного университета). - 2009. - Май-июнь. - №5-6.

8. Кузнецова Т.И. Дело И.К. Андронова — живо: Семинару “Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом” — 55. Его основателю — 120 // Математическое образование. - № 1(73). - 2015. - С. 60-76.

9. Двинских С.А. Особенности ветрового волнения в мелководной зоне Камского водохранилища // Двадцать первое пленарное межвузовское координационное совещание по проблемам эрозийных, русловых и устьевых процессов (г. Чебоксары, 10-12 октября 2006 г.): Доклады и краткие сообщения. - Чебоксары, 2006. - 215 с. - С. 78-80.

10. Попов В.А. Преподаватели-математики Коми пединститута на фронтах Великой Отечественной войны // 65 лет Великой Победы. Документы, материалы, воспоминания студентов, преподавателей КГПИ – участников Великой Отечественной войны и тружеников тыла. - Сыктывкар: Коми пединститут, 2010. - С. 6-32.

11. Попов В.А. Кафедра математики Коми пединститута: история становления и развития. - Сыктывкар: Коми пединститут, 2012. - 216 с.

Попов Вячеслав Александрович,
профессор кафедры физико-математического
и информационного образования
ФГБОУ ВО “Сыктывкарский государственный
университет им. Питирима Сорокина,
кандидат физ.-мат. наук, Заслуженный работник
высшей школы Российской Федерации.

E-mail: kgpi-pva@yandex.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru Раздел: Партнеры, журнал “Математическое образование”.

www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанным адресам.
Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2016 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2016 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >