ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцатый

№ 4 (80)

октябрь - декабрь 2016 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (80), 2016 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2016 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.12.2016 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (80), октябрь – декабрь 2016 г.

Содержание

Актуальные вопросы математического образования

Ю. А. Неретин. ЕГЭ и агония математики в школе 2

Учащимся и учителям средней школы

Б. Ямром. О двух треугольниках с общей стороной 15

Студентам и преподавателям математических специальностей

А. А. Привалов, А. Д. Рабе. О некоторых свойствах равных чевиан треугольника 20

Е. Г. Смольянова. Об одном способе построения эллипса 42

И. В. Сухан, Г. Г. Кравченко, О. В. Иванисова. О методике преподавания теории графов 48

С. В. Шведенко. Об альтернативном определении логарифма 52

Замечательные даты в мире математики и математического образования

Р. З. Гушель. Библиографические материалы к юбилейным датам 2017 года. I полугодие 54

Памяти Ю. М. Колягина

Т. И. Кузнецова, О. А. Саввина, О. В. Тарасова. Ушёл из жизни законодатель отечественной методики преподавания математики Юрий Михайлович Колягин... 63

Информация

От редакции. Содержание журнала “Математическое образование” за 2015–2016 гг. 67

От редакции. О деятельности ФМОП в 2016 г. 71

ЕГЭ и агония математики в школе

Ю. А. Неретин

В статье разбирается демонстрационная версия профильного экзамена ЕГЭ по математике за 2016 год, и объясняется, почему математика в школе при наличии такого экзамена существовать не сможет.

Моя статья обращена как к математикам, так и к не-математикам в равной степени.

1. Разбор демонстрационной версии варианта 2016 года

Статья начнается с позадачного анализа так называемой части *B профильного* экзамена[1], эта часть обращена к тем, кто не поступает на профессиональную математику и не пробивается в сверхпрестижные вузы.

1.0. Ссылки на некоторые источники в интернете. Файл демонстрационной версии скачивается с официального сайта ФИПИ или с

http://egeigia.ru/all-ege/demoversii-ege/matematika/1974-demoversiya-ege-2016-po-matematike-ot-fipi

На официальном сайте ФИПИ есть и варианты за прошлые годы.

Официально публиковавшаяся статистика 2014 года:

И.В. Ященко, А.В. Семенов, И.Р. Высоцкий. *Методические рекомендации по некоторым аспектам совершенствования преподавания математики.* ФИПИ. 2014.

http://www.fipi.ru/sites/default/files/document/1425993087/metod_rek_matematika.pdf

Аналогичный текст 2015 года (без статистики):

И.В. Ященко, А.В. Семенов, И.Р. Высоцкий. *Методические рекомендации по некоторым аспектам совершенствования преподавания математики.* ФИПИ, 2015.

http://fipi.ru/sites/default/files/document/1441039556/matematika.pdf

Неофициально публиковавшаяся статистика по ЕГЭ профильного уровня 2015 года. *Распределение баллов по математике профильного уровня в 2015 году*:

http://4ege.ru/analitika/51498-raspredelenie-ballov-po-matematike-profilnogo-urovnya-v-2015-godu.html

1.1. Задачи 1–3.

Задача 1. *Поезд отправился из Санкт-Петербурга в 23 часа 50 минут (время московское) и прибыл в Москву в 7 часов 50 минут следующих суток. Сколько часов поезд находился в пути?*

Не ищите подвоха, 8 часов.

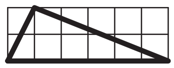
Задача 2. *На рисунке точками показана средняя температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 г. По горизонтали указаны номера месяцев; по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки соединены линией.*

[1] В 2016 году название «часть *B*» отменена, официальное название «задачи, проверяемые по ответу». Я использую старый термин, потому что суть не изменилась, а варианты предыдущих лет тоже ниже обсуждаются.

Сколько месяцев средняя температура была больше 18 градусов Цельсия?

Нужно найти уровень 18 и посчитать жирные точки выше этого уровня, раз, два, три, четыре. Задача решена.

Задача 3. *На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображён треугольник. Найдите его площадь. Ответ дайте в см*^{2}.



Ответ: 6 клеточек, где-то классе в пятом этому учат.

В 2014 году планка государственной аттестации соответствовала решению трех задач. Например, этих трех. Правда, вместо задачи про треугольник в демоверсии была такая задача (примерно той же степени сложности):

Один сырок стоит 5 р. 60 коп. Сколько сырков можно купить на 20 рублей?

Перечисленные задачи относятся к программе младших классов, на решение отводилось 4 часа. Вот так.

1.2. Задачи 4–7.

Задача 4. *В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов. Только в двух билетах встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о грибах.*

Здесь произносится много слов, даже слово «вероятность». Но все это внешняя обертка. Репетитор или учитель с легкостью объяснит, что надо меньшее число поделить на большее. То есть написать 2/25 и перевести ответ в десятичную дробь.

Задача 5. *Найдите корень уравнения* $3^{x-5} = 81$.

Надо знать, что такое степень, $81 = 3^4$.

Задача 6. *Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Угол BAC равен* $32°$. *Найдите угол BOC . Ответ дайте в градусах.*

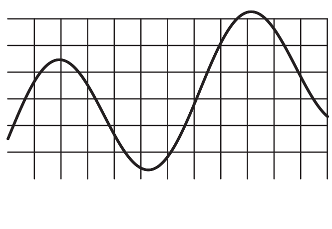
Надо знать теорему о вписанном угле. Дальше нужно удвоить угол.

Задача 7. *На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, ..., x_9.*

(картинка)

Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество этих точек.

Картинка примерно в таком духе: кусок клетчатой бумаги, на нем кривая, оси координат. На кривой отмечены 9 точек (можете сами себе представить или посмотреть оригинал, эту картинку я буквально не дублирую).



Задача замечательна в двух отношениях. В ней присутствует слово «дифференцируемая», что свидетельствует о высоком уровне экзамена. Однако, если для решения предыдущих задач требовалось знакомство со школьной программой младших классов и даже средних классов (знать, что такое степень), то научить решать эту задачу можно дошкольника. Разумеется, для этого не нужно объяснять ему слова «дифференцируемость», «функция», «график». Нужно ему лишь объяснить, как получать правильный ответ. Несколько сложнее научить дошкольника правильно записывать ответ в таблицу.

1.3. Задачи 8–10. Здесь происходит некоторое усложнение. Но задачи остаются одноходовками.

Задача 8. *В первом цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. Эту жидкость перелили во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого. На какой высоте будет находиться уровень жидкости во втором сосуде? Ответ выразите в см.*

Нужно 16 поделить на 4. Если бы эта задача не была стандартной, то для решения желательно было бы знать формулу для объема цилиндра. Думаю, на уровне репетирования это не обязательно.

Задача 9. *Найдите* $\sin\alpha$, *если* $\cos\alpha = 0{,}6$ *и* $\pi < \alpha < 2\pi$.

Предполагается, что человеку известно, сколько будет $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$, а также то, как выбрать знак синуса.

Задача 10. *Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отражённого от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением*

$$\nu = c\frac{f-f_0}{f+f_0}.$$

где $c = 1500$ *м/с — скорость звука в воде;* f_0 *— частота испускаемого сигнала (в МГц);* f *— частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту отражённого сигнала (в МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.*

Самая сложная часть задачи — прочитать условие. По-существу, надо решить уравнение

$$2 = 1500\frac{x-749}{x+749}.$$

Умножаем обе части на $x - 749$, получаем

$$2(x+749) = 1500(x-749).$$

Большие числа тут преднамеренно, проверить умение умножать столбиком. Сложная формулировка дана, скорее всего, для внешних глаз — родителей и чиновников, чтобы за мегагерцами не было бы сразу видно содержание.

1.4. Задачи 11–12. Они посложнее.

Задача 11. *Весной катер идёт против течения реки в* $1\frac{2}{3}$ *раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в* $1\frac{1}{2}$ *раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).*

Здесь нужно написать систему из (двух) линейных уравнений с двумя неизвестными (можно этого избежать, если репетитор объяснит, как именно).

Задача 12. *Найдите точку максимума функции* $\ln(x+4)^2 + 2x + 7$.

Здесь в самом деле нужно дифференцировать логарифм. В задаче есть подлянка, обычная для вступительного бизнеса, а именно просто так записывать

$$\ln(x+4)^2 = 2\ln(x+4)$$

нельзя, потому что при $x < -4$ левая часть определена, а правая — нет, учителя и репетиторы должны уметь объяснять, что делать.

После дифференцирования мы имеем уравнение

$$\frac{2}{x+4} + 2 = 0.$$

Точка, подозрительная на максимум, одна. Мы пишем -5 в ответ.

1.5. Несколько комментариев.

1) На этом часть B закончилась. Задачи эти довольно примитивны, какие-либо логические усилия для их решения не нужны (кроме двух последних задач, которые, все равно стандартны, объявлены заранее, и повторяются уже много лет). Отмечу, что при наличии «дифференцируемых функций», «вероятностей» и «мегагерцев» следы квадратного уравнения и теоремы Пифагора в этой части варианта отсутствуют.

Из образцового варианта не ясно, насколько ощутимо вариант может меняться (для этого нужна большая подборка реальных вариантов, которая, видимо, составляет коммерческую тайну, несомненно известную репетиторам). Например, нужно ли знать именно конкретную теорему о вписанном угле, или допускается знание какой-либо другой теоремы, я понять не смог (первое предположение более правдоподобно). В реальных вариантах 2015 года теорема Пифагора и квадратное уравнение все же появлялись[2].

2) Что все это значит и на кого это рассчитано? Полную официальную статистику за 2015 год найти не удается, и, судя по всему, она не публиковалась. Статистика за 2014 год исследовалась в [1].

Баллы за блок B начислялись по формуле

$$V := 8 + 4n, \qquad (1.1)$$

где n — число решенных задач (формула была верна при $n > 2$), общее число задач блока тогда было 15. Весь блок В давал в сумме 68 баллов из 100 (все остальное приходилось на блок С, где одна задача много сложнее всего блока B).

Уровень государственной аттестации составлял 20 баллов, т.е. три задачи (например, поезд, погода в Сочи и треугольник на клеточках).

Порог для поступления в вуз в 2015 году составлял 6 задач.

Средний балл по ЕГЭ в 2014 году был 39,6 (восемь задач блока B). 50 процентов школьников решили восемь задач или менее. Еще 8 процентов решили девять задач.

Количество тех, кто набрал больше 68 баллов — всего 11 процентов, т.е. блок В рассчитан на окормление примерно 85-89 процентов школьников

Демоверсии 2014 г. и 2016 г. близки. В 2014 году в демоверсии была довольно муторная задача на умножение и сложение чисел. Кроме того была стереометрическая задача, но стереометрии в ней не много. Важно подчеркнуть, что с тех пор от ЕГЭ снизу отделился базовый ЕГЭ, а мы обсуждаем *профильный* (продвинутый) ЕГЭ.

3) Путь, пройденный школой за 15 лет успешного реформирования, вы можете оценить, открыв варианты выпускных школьных экзаменов 2000 года.

http://www.mat.univie.ac.at/~neretin/obraz/vypusk2000.jpg

Возможно задачи и не очень удачны, но это двухходовки, там надо было думать, искать решение. Там нет ничего дебильного, не надо отвечать по программе за пятый класс, там нет сложных вычислений (там не надо умножать столбиком, расплачиваясь нулем баллов за описку). Только последняя задача блока В могла бы по уровню подходить тому варианту (причем она подошла бы скорее в начальную часть). Все школьники экзамен в итоге сдавали, а учитель мог

[2]Что касается задачи про «вероятность», то там могли бы спросить, какова вероятность, что не попадется билет про грибы. Кроме того встречались случаи, когда числа нужно не делить, а умножать (ну, типа целые числа надо делить, дробные перемножать).

тыкать в ошибки, мог подсказывать шепотом. Если кому-то это кажется это очковтирательством[3], то сравните с планкой кристально честной аттестации 2014 года...

4) Так или иначе, если судить по результатам экзамена, уровень 80 процентов выпускников к 2014 году если и превосходит, то не сильно превосходит знание четырех арифметических действий.

Надо иметь в виду, что в массовой системе уровень «знаний» в момент экзамена является пиковым, остаточные знания существенно ниже уровня экзамена. Кроме того, стандартизированные варианты (составленные из задач, примерно известных заранее), всегда показывают «уровень знаний» сильно выше, чем он есть на самом деле.

Но не будем спешить обвинять нынешних школьников в тупости и пойдем дальше.

1.6. Блок С.

Задача 13. *Решите уравнение* $\cos 2x = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5\pi/2, -\pi]$.

Эта задача сложнее, нужно оперировать с косинусом двойного угла. А дальше сложность прыгает снова, и на этот раз до небес, можете проверить сами.

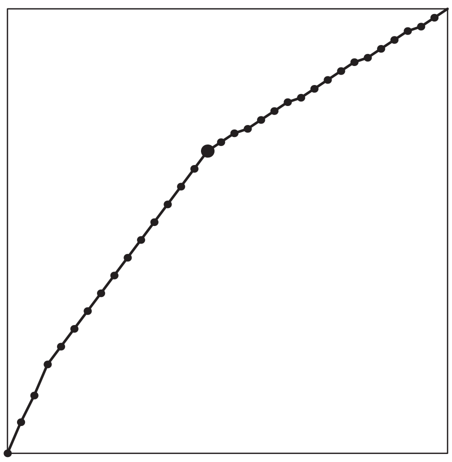
В 2015 году в блок C была введена так называемая «экономическая задача». В задаче из демоверсии 2016 года надо выписать линейное уравнение и решить его. Уравнение длинновато, и смысл задачи состоит в том, чтобы не сделать арифметическую ошибку. Эта задача блока C простая, а все остальное — очень сложно.

В конце идет задача олимпиадного типа (очевидный бонус для матшкольников), а предпоследняя задача, по-моему, не соответствует школьной программе.

1.7. Шкалирование. Теперь о «высшей математике», связанной с подсчетом баллом ЕГЭ. В обычной жизни, чем сложнее задача, тем больший балл за нее ставится. Мы, однако, видели, что все задачи блока B оцениваются одинаково, хотя задачи 9-12 много сложнее задач 1-3. Что происходит дальше?

Оказывается, что за каждую задачу выставляется «первичный балл». Для всех задач блока B он равен 1, а для задач блока C он меняется от 2 до 4 (в зависимости от задачи). Надо заметить, что сложность задач блока C просто несравнима с задачами блока B, там скорее стоило бы писать 100-300 баллов за часть задач.

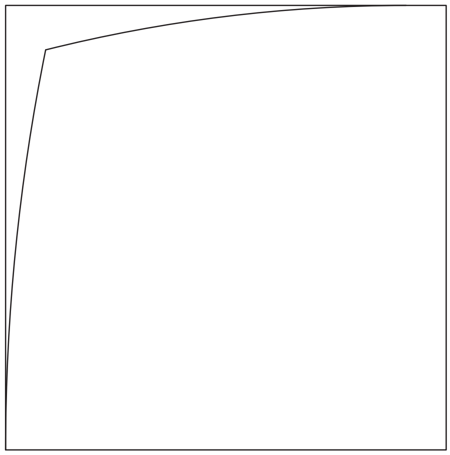
Так или иначе, в ЕГЭ-калькуляциях количество «первичных баллов» может меняться от нуля до 33, а дальше эти «первичные баллы» пересчитываются в «тестовые баллы» согласно табличке. Стольким-то «первичным баллам» соответствует столько-то «тестовых баллов». Таблица пересчета за 2014 год есть в статье И.В. Ященко, А.В. Семенов, И.Р. Высоцкий. *Методические рекомендации по некоторым аспектам совершенствования преподавания математики.* ФИПИ. 2014. Таблица соответствует такому графику



[3]Стоит вспомнить — а то с ЕГЭ мы это все забыли — что цель нормальных экзаменов — повышение уровня учащихся. Старые школьные экзамены, при всех их недостатках, эту функцию выполняли...

По горизонтальной оси — «первичный балл», по вертикальной — «тестовый балл». Точка перелома — последняя задача блока B. Что касается слагаемого 8 в формуле (1.1), то оно замаскировано под шкалирование: 1 «первичный балл» = 7 «тестовых», 2 «первичных балла»=13 «тестовых», 3 «первичных балла» = 20 «тестовых».

Если же попытаться прикинуть, как «тестовые баллы» относятся к реальной сложности задач, то картинка зависимости тестового балла от сложности вышла бы примерно такой



Одна из целей этих манипуляций понятна — они придают видимость благообразия (для газетчиков, чиновников, политиков) «баллам», выставляемых 60-80% выпускников. Кроме того, постановлением Рособрнадзора прописан аттестационный балл ЕГЭ. Что ж поделать, закон есть закон, какой балл законом требуется, тот и напишем (напомню, за «первичный бал» 3 писался «тестовый балл» 20).

Принцип «чем больше человек решил, тем больший балл он получит» все же соблюдается[4]. Можно было бы счесть это удовлетворительным. Но...

1) При подаче документов в вуз вычисленный столь странным способом балл по математике суммируется с вычисленными не менее странными способами баллами по другим предметам. Смысл этой суммы уже истинная «высшая математика» (никому не понять).

2) Вычисляются средние баллы по классу и по школе. Смысл такой усредненной цифири тоже не ясен.

3) Объявляются средние показатели по стране и обсуждается их динамика. Ну, хоть здесь смысл цифр понятен. Это то, что написали себе организаторы экзамена и Министерство путем варьирования сложности и предсказуемости[5] задач до экзамена, плюс варьированием правил шкалирования после экзамена[6].

Отмечу, что и 1) и 2) отнюдь не безобидны, потому как вынуждают определенное поведение школьников, учителей, школ (например, учителям подавляющего большинства школ выгоднее ограничиться работой в блоке B, за счет блока C этих загадочных средних все равно не увеличить).

1.8. Степень использования задач группы C. Есть данные (2014) по числу людей, достигнувших того или иного первичного балла (во всё в том же источнике цифири, который

[4]Тут тоже не идеально, потому как ошибка в умножении столбиком в части B карается «первичным баллом», а набрать один лишний «первичный балл» в части C вовсе не просто...

[5]Чем предсказуемей задачи, тем лучше результат экзамена...

[6]В [9] высказывалось предположение, что действительная цель ЕГЭ — это получение цифири, на основании которой можно управлять образованием со стороны, не задумываясь над содержательной стороной дела. Если так, то бессмысленность этой цифири для управленческих прожектов очевидна.

цитировался в предыдущем пункте). Извлекаю оттуда несколько цифр.

Балл	Уровень	Процент достигших	Остаток
15	Блок B	88.88	11.12
17	До $C1$ включительно	93.93	**6.07**
20	До $C2$ включительно	97.79	2.21
22	До $C3$ включительно	98.93	**1.07**
25	До $C4$ включительно	99.63	0.37
29	До $C5$ включительно	99.92	0.08
33	До $C6$ включительно	100.00	

Из этой таблицы трудно сделать вполне определенные выводы. Понятно, что выпускники, достигшие, для примера, «первичного балла» 25, могли решить не в точности задачи от B1 до C4, а могли ошибиться раньше, и получить какой-нибудь балл за, например, C5. Но человеку, способному решить задачу C4, довольно трудно ошибиться, например, в подсчете раз, два, три, четыре, как в задаче про «погоду в Сочи» (или в сходной по содержанию задаче про «дифференцируемую функцию»), или в делении 16 на 4 в задаче «про цилиндр». В умножении столбиком на скорость, он ошибиться, конечно, мог бы (это в задаче про «мегагерцы»).

Позадачные результаты (там же, таблица 4) показывают, что по задаче C2 один балл получили 2,4 процента выпускников, два балла — 2,2 процента.

По задаче C3 соответственно 12,1/0,1/4,1 (то есть один балл было получить реально,и, скорее, всего это было известно заранее, а больше не очень).

По задаче C4 соответственно 2,1/0,1/0,7.

По задаче C5 соответственно 1,4/0,2/0,1/0,2

По задаче C6 соответственно 4,8/1,5/0,3/0,3/0,2 (то есть здесь тоже можно было набрать один балл).

Так или иначе, похоже, что задачи C4-C6 написаны для 2% выпускников. А вообще к группе задач C2-C6 реально приступали (если не считать одинокого балла за C3) процентов 6-8 выпускников, причем, по большей части, с незначительным продвижением.

А.В. Иванов [2] разбирался в опубликованной (но не официально опубликованной) статистике за 2015 год и говорит, что степень решаемости задач группы C в 2015 году заметно просела по отношению к 2014-му...

1.9. Главное. Мы наблюдаем вариант со странной ступенькой. Есть плинтус, есть суровая атлетическая стенка, и почти ничего нет посредине. Нет уровня бывших школьных выпускных экзаменов, нет уровня, который когда-то соответствовал уровню технических вузов...

2. Диагноз

2.1. Предлагаемый вариант не является вариантом для «единого экзамена». Это просто вариант вступительного экзамена, рассчитанный примерно на 2 процента наиболее продвинутых абитуриентов (в рамках варианта 2014 года это задачи C2-C6). А к этому варианту спереди приставлена какая-то имитационная муть.

Тому основному уровню людей, с которым раньше работала школа (умных и средних учеников, не проявляющих ярко выраженной любви к математике, которые потом шли в вузы, где сверхтребования к математике не нужны и не было сверхконкурса), — в варианте почти ничего не соответствует[7].

[7]Раньше задача 11 сошла бы для техникумов. На уровень бывших школьных выпускных экзаменов плюс (более высокий) уровень технических вузов сошли бы кое-как задача 12 блока B и первая задача блока C. Цитирую все те же «Методические указания» от разработчиков (2014)

Это подтверждает то, что задание C1, аналогичное типичным заданиям **на первых позициях вступительных экзаменов технических вузов***, характеризует готовность участников ЕГЭ по математике к продолжению образования в технических и экономических вузах.*

Обратите внимание на «на первых позициях». А дальше в варианте ЕГЭ — стенка. Выходит, что уровень технического или экономического вуза проверяется одной задачей...

Что касается 2 процентов продвинутых выпускников, то это уровень выпускников лучших матшкол и уровень абитуриентов Мехмата, ВМК, МФТИ, МГИМО и пр. (там где нужны сверх-требования к математике или наличествует сверхбольшое число желающих поступить). Однако эти юридические лица, Мехмат, МГИМО и пр. никакого отношения к введению этого варианта не имели. Лучшие вузы (кроме, возможно, МФТИ) предпочитают людей, поступающих по олимпиадам, а не по ЕГЭ . Поэтому никаких оснований видеть в этих юридических лицах выгодополучателей или лоббистов данного экзамена нет.

Для лучших матшкол (типа СУНЦа, 2-й или 179-й школ г. Москвы) это счастье тоже сомнительно, хотя вред, наносимый им ЕГЭ, все же относительно прочих невелик (они учат на уровне, сильно перекрывающем уровень этого ЕГЭ).

Люди, идущие в разные высокопрестижные вузы, — юристы, медики, экономисты — должны соревноваться на этой странной атлетической стенке. Так как мне с этими группами людей работать не приходилась, ничего определенного сказать не могу. Судя по статистике 2014 года, на стенку (дальше простого, в своем жанре, тригонометрического уравнения) пытались карабкаться не более 6-8% выпускников.

2.2. Математика в школе, за исключением специализированных школ, при наличии такой экзаменационной программы существовать не сможет. Потому что есть часть варианта B, где учить и учиться, собственно, нечему (это понимают как учителя, так и школьники), и есть часть C, на уровне которой учить невозможно.

Вариант силой загоняет школу вниз, причем он действует на всех игроков в отдельности, на троечников, которые теперь знают, что можно ничего не делать, на хорошую часть школьников, которых вариант с одной стороны провоцирует, а с другой стороны не дает места для упражнения разума[8], на учителей, на администрацию и чиновников (которым нужен на гора «объективный балл ЕГЭ»[9]). Все это начинает влиять друг на друга, а в школе запускаются интересные социальные процессы (см. [1], [3]). Незавидно положение учителя, который попытается выйти за пределы поставленных ему составителями варианта ЕГЭ рамок.

Добавлю, что, если дети несколько лет пребывают в камере хранения в ее доведенном до идеала виде, то их уровень падает, и к задачам блока B их все равно нужно готовить. Жевать, жевать и жевать жвачку. Дело это для учителя часто ничуть не менее простое, чем учить чему-либо разумному. Да и учителя должны постепенно отбираться в соответствии с новыми требованиями.

Математика, как инструмент, который «ум в порядок приводит» сдана в утиль[10]. Что касается «подготовки» к экзамену в части B, то она может внести в ум лишь сумятицу.

2.3. О части С. Мои заметки, в основном, посвящены проблемам, относящимся к подавляющему большинству людей (потому что основной обвал сейчас идет в массовой зоне). Но не надо думать, что на «элитарном» уровне дела обстоят благополучно. Отмечу два характерных штриха.

1) Еще раз напомню, что лучшие вузы, как правило, предпочитают брать победителей вступительных олимпиад[11]. А ЕГЭ по математике они не верят.

2) В магазинах продаются книги «Задача С2», «Задача С3», «Задача С4» и.т.д. В числе авторов, были, в частности, составители вариантов. Это просто **маразм системы**. Люди теперь

[8] Стоит иметь в виду, что школьники видят математику в том образе, в котором она сама перед ними предстает. Понятно, что ЕГЭ, который объявлен высшим школьным стандартом, отлично способствует дискредитации математики.

[9] См. выше замечания о мистическом способе его исчисления.

[10] Последние десятилетия математика активно использовалась как инструмент интеллектуального отбора (что в свою очередь создавало репетиторскую кормушку). Ценность обсуждаемого ЕГЭ в данном отношении весьма сомнительна. Скорее всего, соответстующие оргвыводы с некоторым запаздыванием воспоследуют, и спасения от этих оргвыводов уже не будет.

[11] Вступительные олимпиады — разумеется, не олимпиады в прежнем смысле слова. Это вступительные экзамены, того или иного качества. По математике это качество выше, чем у вариантов ЕГЭ.

должны разбираться не в математике, а в науке о задачах C1, C2, C3, ... (понятно, что если тем, кто был вынужден эту науку постичь, дать что-нибудь простенькое, но в другом стиле, то результат может оказаться шваховым)...

3. Из хроники школьного обвала

3.1. Как это начиналось? Современная версия вариантов ЕГЭ была предложена командой МИОО под руководством И.В. Ященко осенью 2008 года и пошла в ход в 2010 году. Внешне варианты выглядели чуть более благообразно, чем сейчас, но их ключевые недостатки были теми же, которые мы наблюдаем в 2016. Эти недостаки были немедленно в том же 2008 году указаны [15], [6]. О том, что это повлечет обвальные последствия, и какого типа последствия, тоже было сказано.

1) Напомню, что у обычных экзаменов есть программа, понимание которой оценивается на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «не удовлетворительно». Но нет отдельных подпрограмм на оценки «хорошо» или «удовлетворительно». Выставлять отдельную программу на «удовлетворительно» (фактически на «три пишем, два в уме») ни в какой массовой системе нельзя. Команда И.В. Ященко запустила такой рискованный эксперимент в рамках всей российской школы.

Хуже того, в качестве такой подпрограммы был предложен набор из нескольких примитивных типовых задач из программы 6-9 классов.

2) Основная технологическая проблема ЕГЭ — что разные группы учащихся нужно оценивать разными задачами[12]. Это порождает бесконечно длинный вариант, потому как нужно было давать задачи разных типов, а полный вариант был предназначен лишь для малочисленной верхней части абитуриентов.

Составители укоротили вариант, отменив тестовую часть[13]. А далее **перетянули одеяло, которого не хватало на всех, на уровень наиболее продвинутых выпускников (на 2 процента)**. В итоге на более низких уровнях качество оценивания серьезно ухудшилось и параллельно усилилось отрицательное обратное воздействие ЕГЭ на школу.

3.2. Общественная реакция. Так или иначе, в начале 2009 года стало ясным, что очень плохие варианты ФИПИ будут заменены на еще худшие варианты[14] МИОО. Возникшая ситуация еще не была фатальной, и многое зависело от реакции «общественности».

Варианты были признаны хорошими заметной частью московского математического сообщества, благая весть «теперь, например, по математике ЕГЭ хороший» облетела города и веси, ее раструбили те, кому положено было это трубить. Сопротивление ЕГЭ в целом стихло, хотя гуманитарии все еще продолжают неравную борьбу.

[12] Например, задачи для мехмата МГУ бессмысленны для оценки хороших технических вузов — они слишком сложны, а задачи для технических вузов бессмысленны для мехмата — их уровень слишком низок — все равно, что проверять у поступающих на мехмат способность умножать столбиком. С другой стороны, отнюдь не все школьники обязаны были решать задачи уровня приличного (дореформерного) технического вуза. Это все-таки был уровень. Ну, и так далее. Автор этих заметок долго работал в МИЭМе, там варианты для разных инженерных специальностей сильно различались. Потому как сильно различались студенты этих специальностей.

[13] Люди того времени, которые понимали, что ЕГЭ — дело негодное, пытались сформулировать доводы, почему это так. Раздражение концентрировалось на тестах, что было ошибочным: причины негодности ЕГЭ были совсем другими. Дразнившая всех красная тряпка была убрана, а настоящие причины какими были, такими и остались. При этом технология оценивания выпускников нижнего уровня ухудшилась.

[14] Естественно встает вопрос, а что было до реформы ЕГЭ 2010 года? Отвечаю: вариант был во многих отношениях очень плохой (а иначе и быть не может), но уровень блока B соответствовал оцениванию хорошего, но не математически мотивированного школьного контингента (в качестве инструмента оценивания тогдашние варианты были написаны профессионально).

В новых вариантах были определенные улучшения по сравнению со старыми, они стали внешне более эстетичными. Кроме того, две чудовищных последних задачи были заменены на более вменяемые (однако, едва ли относящиеся к школьной программе). К сожалению, новые варианты были просто не профессиональны, за вариантами стояли хорошие организаторы математических олимпиад, которые едва ли представляли себе жизнь массовых образовательных систем.

Почему реакция «общественности» была именно такой, и почему эти варианты продолжают поддерживаться определенными группами математиков, репетиторов, учителей — тема отдельная, ее обсуждение я позволю себе опустить.

3.3. Хроника. Лучше всего ее излагать со слов самих И.В. Ященко и А.В. Семенова. Привожу отрывок из обзора Иванова [1].

> По результатам ЕГЭ-2012 около 14% выпускников практически ничего не вынесли из курса математики средней школы (см. И.В. Ященко, А.В. Семенов, И.Р. Высоцкий. *Методические рекомендации по некоторым аспектам совершенствования преподавания математики.* ФИПИ. 2014[15]. В 2014 году таких школьников стало уже почти 25%, о чем объявил глава Рособрнадзора С. Кравцов на коллегии Минобрнауки 1 октября 2014 года[16]: “около четверти школьников не справились с элементарными заданиями 5-6 классов”. В октябре 2014 был проведен пробный базовый ЕГЭ по математике, который выявил, что среди нынешних одиннадцатиклассников этот показатель превысил 30%[17], а среди десятиклассников (по результатам ОГЭ 9-го класса, см. упомянутую выше работу И. Ященко и др.) он варьируется сегодня от 30 до 50% в зависимости от региона. Средний балл ЕГЭ-2014 по математике составил 39,6, что соответствует правильным ответам на 8 заданий так называемого базового уровня[18]... Для выполнения этих заданий достаточно математической культуры 5 класса плюс знание некоторых элементарных фактов из программы 6-9 классов, которые и учителя, и репетиторы хорошо научились втолковывать во время непосредственной подготовки к ЕГЭ[19].
>
> Осенью 2014 года было впервые проведено национальное исследование качества образования (НИКО) по математике в 5-7 классах... Организатор и руководитель НИКО И. Ященко на «круглом столе» по проблемам математического образования в ГД РФ 24 декабря 2014 г.[20] сообщил, что в 7-х классах 50% учеников уже выпали из учебного процесса (попросту говоря, математику не воспринимают), а общие результаты семиклассников при решении элементарных задач хуже, чем у школьников 5 класса. Немыслимый феномен, когда в результате обучения уровень знаний падает!...
>
> Итак, мы видим числовые характеристики катастрофического процесса: в 2012 году 14% школьников «прошли мимо» математики среднего звена, в 2014-м — 25%, в 2015-м (прогноз) — 30%, в 2016-м — 30-50%. Судя по результатам НИКО, в 2019-м, когда нынешние семиклассники станут выпускниками, ситуация будет ещё хуже.

3.4. О заливании огня керосином. Видимо, катастрофа стала очевидной составителям вариантов в 2013-2014 году. Если судить по демоверсиям (что не совсем надежно), то в 2014 году произошло упрощение части B варианта.

Так или иначе, это не помогло, в 2014 году «уровень государственной аттестации» пришлось снизить с четырех крайне примитивных задач до трех. Ради спасения ЕГЭ по математике в 2015 году от него отделили еще более примитивный «базовый уровень», так сказать, для того, чтобы убрать источник проблем. Теоретически, там есть даже квадратное уравнение и теорема Пифагора, но для достижения уровня аттестации они не нужны. Кроме того, авторы ищут возможность поставить тройку тем, кто не знает арифметических действий[21].

[15] http://fipi.ru/sites/default/files/document/1413876128/metod_rekom_math_2014.pdf
http://www.fipi.ru/sites/default/files/document/1425993087/metod_rek_matematika.pdf

[16] http://www.ug.ru/news/13017

[17] http://itartass.com/obschestvo/1605995

[18] См. выше.

[19] Это то, что мы подробно обсуждали выше.

[20] Круглый стол: “Есть ли будущее у математического образования в России?”, 22.12.2014. www.youtube.com/watch?v=EcPE7N_tbKM&feature=youtu.be с 11 мин. и с 1.45 мин.

[21] См. https://www.youtube.com/watch?v=ZXeonbwQnZw

Но смягчения кризиса не последовало. К старым источникам проблем — естественным троечникам — прибавились уже люди бывшего среднего и верхне-среднего уровня.

Несмотря на отпочкование, в 2015 году ситуация на *профильном* уровне, судя по вариантам 2016 года, не улучшилась по сравнению с ситуацией на *едином* экзамене 2014 года.

Теперь школа имеет перед собой три программы: официальная программа, программа профильного ЕГЭ, и программа базового ЕГЭ. Причем профильный ЕГЭ — он вроде бы для поступающих в вузы, а базовый ЕГЭ — как будто экзамен именно для школы, причем он имеет очень низкий уровень и не соответствует программе. Таким образом, базовый ЕГЭ превращается в новый могучий рычаг уничтожения школы.

Судя по заявлениям разработчиков, запасы керосина у них далеко не исчерпаны[22]. За Министерством и за ВШЭ дело тоже не станет.

3.5. Поведение школ под давлением ЕГЭ. Я отсылаю к статьям А.В. Иванова, который, вместе со своими коллегами из Петрозаводска, взял на себя труд провести исследования на эти темы, [1], [3].

3.6. Лирические отступления. 1) Моя статья, так или иначе, обращена к интеллигенции, настроения которой на глазах сдвигаются все дальше вправо. Я не уверен, что в рамках популярных политических взглядов обвал массовой школы будет рассматривается элитарной интеллигенцией как беда.

В связи с этим замечу, что кроме этики (которая, конечно, дело спорное), есть еще вопрос об интересах. Идея, что «элитарные школы» уцелеют в воронке, которая засасывает школы массовые, представляется мне излишне радужной и не соответствующей объективной реальности, данной нам в ощущениях. Разве лишь за школы для детей олигархов можно быть спокойными.

Ну и добавлю, что камер хранения (а школа под воздействием рефоматоров на глазах превращается в камеру хранения) придется избегать, начиная с первого класса. Что даже для «элитарных» интеллигентов может оказаться не вполне удобным.

2) Думаю, что наибольший вред ЕГЭ нанес именно школьной математике. Школьники, сдающие ЕГЭ по русскому, понимают, что это не экзамен по русскому языку. Так что русский язык сам за себя постоит. А вот за математику стоять некому...

К сожалению, математика в вузах давно находится в неважном состоянии. Что касется новой жизни, то в вузах, куда принимают по блоку B (а сюда входят вузы, до недавнего времени приличные, и хорошие технические вузы в том числе), идея чтения сколько-либо нормальных курсов математики (и не только математики) становится сюрреальной. Стоит добавить, что школьный обвал вполне затрагивает и, скажем, мехмат МГУ. Дело не в том, что туда берут плохих абитуриентов (берут хороших), а в том, что их вместо математики в школе обучали решению задач блока C (к СУНЦу и иже с ним это не относится, но мир не состоит из СУНЦа...).

4. Что делать?

Прежде всего, я должен напомнить, что идея ЕГЭ в России технологически нереализуема, препятствия к этому были сразу же указаны И.Ф.Шарыгиным [12], [13], автор подробно это обсуждал в [5], [6]. ЕГЭ приведет к смерти нашего образования независимо от побуждений инициаторов и независимо от того, кто эти побуждения будет воплощать в жизнь. Добавлю,

[22]Цитирую разработчиков:
Проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что существенная часть текущего школьного курса математики не осваивается значительным количеством учащихся, требуется существенная перестройка содержания школьной математики, причем эта перестройка должна учитывать индивидуальные образовательные запросы и возможности различных целевых групп учащихся. Отметим, что низкий уровень математической подготовки не позволяет учащимся успешно осваивать другие предметы естественно-научного цикла, резко снижает общую способность учиться.

То есть для спасения вариантов ЕГЭ, которые загоняют мало-мальски массовую школу под плинтус, нужно (если отвлечься от витиеватой риторики) официально превратить эти школы в камеры хранения что лозунг, что ЕГЭ охватил весь цивилизованный мир, — чистый газетный пиар. Вполне можно искать другие решения, в том числе используя опыт прочего мира, равно как и свой собственный тоже, см. [8].

Но, кроме просто возражений и дискуссий о туманном будущем, сейчас необходима какая-та позитивная программа для выхода из штопора. Надо иметь в виду, что прекрасное будущее в ближайшие годы нам не светит, и вопрос сейчас состоит не в том, чтобы найти устойчивое благополучное решение (выбор вариантов в принципе достаточно велик [8]), а остановить обвал.

Была карельская инициатитива[23] [2] в отношении точки зрения на ближайшие необходимые действия, состоявшая примерно в следующем.

1. Отменить базовый ЕГЭ по математике. Бесследно. К (чертовой) матери.

2. Вернуть в школу доброжелательные выпускные экзамены. По математике они должны быть значительно проще, чем были в дореформенном 2000 году (тогдашний уровень сейчас является занебесным). Это требует пары лет, потому как школьники должны знать заранее, что математика в школу возвращается. До этого аттестовывать по текущим оценкам.

3. Отменить школьно-аттестационные функции ЕГЭ (оставив лишь вступительно-экзаменационные) и разделить его на два уровня. Вариант должен состоять из 7-10 неожиданных (а, тем самым, несложных) задач.

В принципе, этот подход выглядит разумным и его стоило бы поддержать. С другой стороны новый министр недавно говорила о желании введения вступительных экзаменов в медицинские и технические вузы (собственно, эти две группы вузов и оказались в самом дурном положении, одни из-за развала школьного образования, а другие из-за наполнения сомнительными талантами). В принципе, это тоже могло бы быть, по крайней мере, стабилизационной мерой.

Привожу библиографию, состоящую из технологических (не политико-декларационных) работ по проблеме ЕГЭ.

Литература

[1] Иванов А.В. *Пути выхода из катастрофы ЕГЭ.* URL: https://vk.com/doc-62604527_361016573

[2] Иванов А.В. *О некоторых итогах ЕГЭ-2015 по математике.* URL: https://vk.com/doc-62604527_437159508

[3] Иванов А.В. *ЕГЭ-катастрофа образования.* Доклад в Петрозаводском университете. URL: https://www.youtube.com/watch?v=0GNfJut-dyo

[4] Неретин Ю. *ЕГЭ: Перспективы и эволюция.* Наука и жизнь, 2008, 4. URL: http://www.nkj.ru/archive/articles/13582/

[5] Неретин Ю. *Почему не удается написать удовлетворительных вариантов ЕГЭ?* Часть 1, весна 2008. URL: http://www.mat.univie.ac.at/~neretin/obraz/varianty.htm

[6] Неретин Ю. *Почему не удается написать удовлетворительных вариантов ЕГЭ?*, Часть 2, 31.12.2008. URL: http://www.mat.univie.ac.at/~neretin/obraz/varianty1.htm

[7] Неретин Ю. *Первый магистральный тупик,* Апрель, 2009. URL: http://www.mat.univie.ac.at/~neretin/obraz/x.html

[23] Результаты голосования в Думе, http://vote.duma.gov.ru/vote/92509

[8] Неретин Ю. *Вступительно-экзаменационный пасьянс: Россия и Запад.* URL: http://polit.ru/article/2009/05/27/neretin/

[9] Неретин Ю. *Шарада для интеллектуалов. Зачем был введен ЕГЭ?* Троицкий вариант, 19 июля 2011 года. URL: http://www.tvscience.ru/2011/07/19/sharada-dlya-intellektualov-zachem-byl-vveden-ege/

[10] Хлебников В. *Контрольная работа в голову* // Новая газета. - 09.12.2008. URL: http://shevkin.ru/?action=Page&ID=672 http://old.novayagazeta.ru/st/online/364816/33.html

[11] Шарыгин И.Ф. *О реформе образования, коррупции и геометрии (2000).* URL: http://www.mccme.ru/edu/index.php?ikey=shar_reforma

[12] Шарыгин И.Ф. *Реформа образования: protив и contra (сочинение на незаданную тему)*, март 2001. URL: http://www.mccme.ru/edu/index.php?ikey=shar_statia

[13] Шарыгин И.Ф. *Егэ — путь к...*, 2003. URL: http://shevkin.ru/?action=Page&ID=231 Другой вариант: https://www.novayagazeta.ru/articles/2008/12/04/35603-kontrolnaya-rabota-v-golovu

[14] Шарыгин И.Ф. *Нужна ли школе 21-го века Геометрия?* // Математика в школе. - 2004. URL: http://shevkin.ru/?action=Page&ID=232

[15] Шевкин А.В. *Краткий комментарий к изменениям в ЕГЭ по математике.* Троицкий вариант, 24.10.2008. URL: http://shevkin.ru/?action=Page&ID=653

Неретин Юрий Александрович,
доктор физ.-мат. наук,
факультет математики Венского университета, Австрия; Институт экспериментальной и теоретической физики, Москва; МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет; Институт проблем передачи Информации РАН, Москва.

E-mail: yurii.neretin@univie.ac.at

О двух треугольниках с общей стороной

Борис Ямром

В статье доказано, что, если два треугольника имеют общую сторону, то расстояние между центрами вписанных окружностей меньше расстояния между вершинами, не лежащими на их общей стороне

Введение

Эту задачу мне предложил В.А. Рыжик, сказав, что услышал её много лет назад от В.А. Залгаллера. Решение Залгаллера не было элементарным, и мне неизвестно, опубликовал ли он его. Решение, предлагаемое здесь, также не вполне элементарно, но будет доступно преподавателям средней школы и для учеников, знакомых с понятием дифференцирования. Надеюсь, что эта задача и её решение предоставит хороший пример математического доказательства, выходящего за рамки того, что можно найти в школьных учебниках. Он показывает, как взаимодействие многих понятий и методов, доступных школьникам, помогает решить задачу, простую в формулировке, но далеко не простую в доказательстве.

Теорема. *Если в два треугольника, имеющих общую сторону, вписаны окружности, то расстояние между их центрами меньше расстояния между вершинами треугольников, лежащими вне этой общей стороны.*

Возможны три конфигурации расположения треугольников.

Случай 1. Вершины, лежащие вне общей стороны, лежат по разные стороны от прямой, проходящей через общую сторону, и соединяющая их прямая пересекает общую сторону.

Случай 2. Вершины, лежащие вне общей стороны, лежат по разные стороны от прямой, проходящей через общую сторону, и соединяющая их прямая пересекает не общую сторону, а её продолжение.

Случай 3. Вершины, лежащие вне общей стороны, лежат по одну сторону от прямой, проходящей через общую сторону.

Первые два случая довольно просты, и читателю предлагается прервать чтение и попытаться их доказать.

Доказательство для случая 3

Каждый работающий математик знает, что если не контролировать себя (лучше всего — примерами), то уже через какой-нибудь десяток страниц половина знаков в формулах будет переврана, а двойки из знаменателей проникнут в числители.

В.И. Арнольд

В случае 3 возможны две конфигурации (см. рис. 1):

а) ни один из треугольников не лежит внутри другого;

б) один из треугольников лежит внутри другого.

Несмотря на различие этих конфигураций, доказательство, предлагаемое ниже, справедливо для обеих конфигураций, если в обоих случаях рассматривать треугольники ABC, ABC_1, и ABC_2.

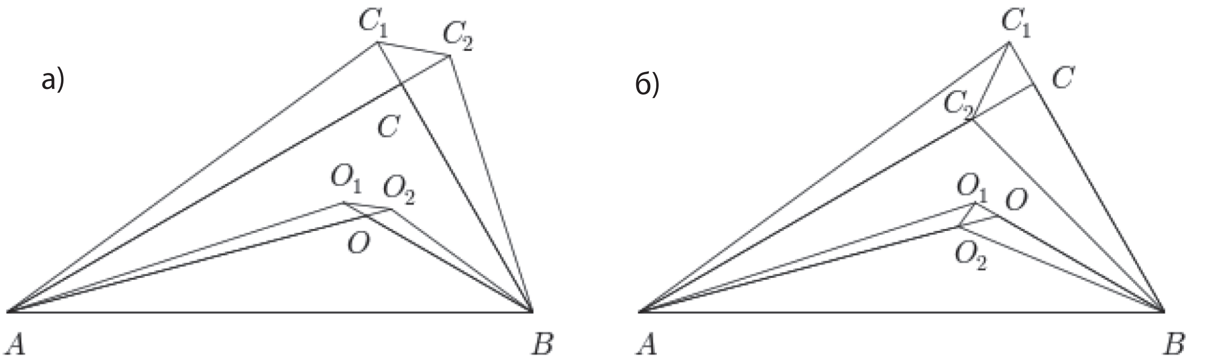


Рис. 1
Две конфигурации Случая 3

На основании теоремы косинусов расстояние между вершинами C_1 и C_2 определяется через длины сторон $|CC_1|$ и $|CC_2|$ и угол $\angle C_1CC_2$. Расстояние между центрами O_1 и O_2 окружностей, вписанных, соответственно, в треугольники ABC_1 и ABC_2, вычисляется из треугольника O_1OO_2, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Если обозначить половину угла $\angle CAB$ через α, а половину угла $\angle CBA$ через β, то $\angle O_1OO_2 = \angle AOB = \pi - 2(\alpha + \beta)$. Это следует из того, что центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника.

Так как доказательство содержит длинные цепочки тригонометрических преобразований, опишем сначала его структуру. Представим, что треугольник ABC_2 получается из треугольника ABC_1 путем перемещения вершины C_1 к вершине C_2 вдоль прямой C_1C_2. Это преобразование можно рассматривать состоящим из многих малых (бесконечно малых) шагов. Для каждого из этих шагов, в то время как вершина C_1 делает свой шаг, центр вписанной окружности O_1 делает свой собственный шаг. Однако, в то время как вершина C_1 двигается по прямой линии C_1C_2, точка O_1 будет двигаться по направлению к точке O_2, следуя траектории ломаной линии, не обязательно прямой. Если мы докажем, что при каждом бесконечно малом перемещении точки C_1 длина её перемещения будет больше длины перемещения O_1, то, так как каждое звено ломаной траектории O_1 будет меньше соответствующего перемещения C_1 и так как длина отрезка $|O_1O_2|$ меньше длины любой ломаной линии соединяющей его концы, мы заключаем, что $|O_1O_2|$ меньше, чем $|C_1C_2|$.

Замена данных треугольников ABC_1 и ABC_2 на такие, что расстояние между вершинами C_1 и C_2 бесконечно мало, позволяет существенно упростить выражения, с которыми придется иметь дело. Без потери общности мы предположим, что $|AB| = 1$. Положение точки C однозначно определяется двумя переменными α и β. Точка C_1 получается малым сдвигом точки C вдоль линии BC_1, так что угол 2β не меняется и угол 2α становится $2\alpha + 2d\alpha$. Аналогично центр O двигается к O_1 вдоль биссектрисы угла $\angle CBA$, и угол $\angle O_1AB$ будет равен $\alpha + d\alpha$.

Такое же рассуждение справедливо для движения точки C к C_2 вдоль прямой AC_2. Теперь не меняется угол α и положение точек C_2 и O_2 будет определяться соответственно переменными $(\alpha, 2\beta + 2d\beta)$ и $(\alpha, \beta + d\beta)$.

Используя теорему синусов и учитывая, что $|AB| = 1$, получаем

$$|BO| = \frac{\sin\alpha}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \qquad |AO| = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Для бесконечно малого перемещения C к C_1 вдоль BC_1 расстояние OO_1 определяется формулой

$$|OO_1| = \left[\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}\right]'_\alpha d\alpha,$$

и расстояние OO_2 формулой

$$|OO_2| = \left[\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}\right]'_\beta d\beta.$$

Применяя правило дифференцирования дроби и формулу синуса разности, получаем

$$|OO_1| = \frac{\sin\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}d\alpha,$$
$$|OO_2| = \frac{\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}d\beta.$$

Следовательно, на основании теоремы косинусов

$$\begin{aligned}|O_1O_2|^2 = |OO_1|^2 + |OO_2|^2 - 2\cos(\pi-(\alpha+\beta))|OO_1||OO_2| =\\ = \frac{\sin^2\beta}{\sin^4(\alpha+\beta)}d\alpha^2 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^4(\alpha+\beta)}d\beta^2 + 2\cos(\alpha+\beta)\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin^4(\alpha+\beta)}d\alpha d\beta.\end{aligned} \tag{1}$$

Таким же образом можно получить выражения для CC_1, CC_2, и C_1C_2:

$$|CC_1| = \left[\frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+2\beta)}\right]'_\alpha d\alpha,$$
$$|CC_2| = \left[\frac{\sin 2\beta}{\sin(2\alpha+2\beta)}\right]'_\beta d\beta$$

и

$$|C_1C_2|^2 = \frac{4\sin^2 2\beta}{\sin^4(2\alpha+2\beta)}d\alpha^2 + \frac{4\sin^2 2\alpha}{\sin^4(2\alpha+2\beta)}d\beta^2 + 8\cos(2\alpha+2\beta)\frac{\sin 2\alpha\sin 2\beta}{\sin^4(2\alpha+2\beta)}d\alpha d\beta. \tag{2}$$

Применяя формулу синуса двойного угла, удобно переписать (1) и (2) в следующем виде:

$$\sin^4(\alpha+\beta)|O_1O_2| = \sin^2\beta d\alpha^2 + \sin^2\alpha d\beta^2 + 2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta d\alpha d\beta,$$
$$\sin^4(\alpha+\beta)|C_1C_2| = \frac{[\sin^2\beta\cos^2\beta d\alpha^2 + \sin^2\alpha\cos^2\alpha d\beta^2 + 2\cos(2\alpha+2\beta)\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta d\alpha d\beta]}{\cos^4(\alpha+\beta)}.$$

Требуется доказать, что $|C_1C_2| - |O_1O_2| > 0$, и, так как $0 < \alpha, \beta, \alpha+\beta < \pi/2$, общий множитель $\sin^4(\alpha+\beta) > 0$, так что мы можем отбросить общий множитель и переписать разность правых частей равенств в виде:

$$\frac{[\sin^2\beta\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^4(\alpha+\beta)]d\alpha^2 + [\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^4(\alpha+\beta)]d\beta^2}{\cos^4(\alpha+\beta)} +$$
$$+\frac{2[\cos(2\alpha+2\beta)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos^5(\alpha+\beta)]d\alpha d\beta}{\cos^4(\alpha+\beta)}.$$

Знак последнего выражения не изменится, если мы отбросим положительный знаменатель. Перепишем теперь оставшееся выражение в виде функции четырех параметров $\alpha, \beta, d\alpha, d\beta$:

$$F(\alpha,\beta,d\alpha,d\beta) = \sin^2\beta[\cos^2\beta - \cos^4(\alpha+\beta)]d\alpha^2 + \sin^2\alpha[\cos^2\alpha - \cos^4(\alpha+\beta)]d\beta^2 +$$
$$+2\sin\alpha\sin\beta[\cos(2\alpha+2\beta)\cos\alpha\cos\beta - \cos^5(\alpha+\beta)]d\alpha d\beta.$$

Нужно доказать, что $F(\alpha,\beta,d\alpha,d\beta)$ положительна для всех $0 < \alpha, \beta, \alpha+\beta < \pi/2$, для малых, не равных одновременно нулю $d\alpha, d\beta$. Предположив, что $d\beta \neq 0$ (в противном случае возьмем вместо $d\beta$ $d\alpha$) и обозначив $d\alpha/d\beta = x$, мы должны доказать, что для всех x

$$\frac{F(\alpha,\beta,d\alpha,d\beta)}{d\beta^2} = Px^2 + 2Qx + R > 0, \text{ где}$$
$$P = \sin^2\beta[\cos^2\beta - \cos^4(\alpha+\beta)],$$
$$Q = \sin\alpha\sin\beta[\cos(2\alpha+2\beta)\cos\alpha\cos\beta - \cos^5(\alpha+\beta)],$$
$$R = \sin^2\alpha[\cos^2\alpha - \cos^4(\alpha+\beta)].$$

Так как $P > 0$ для всех α и β в области $0 < \alpha, \beta, \alpha + \beta < \pi/2$, квадратный трехчлен $Px^2 + 2Qx + R$ будет всегда положителен, если будет выполняться неравенство $PR - Q^2 > 0$, то есть

$$[\cos^2\beta - \cos^4(\alpha+\beta)][\cos^2\alpha - \cos^4(\alpha+\beta)] - [\cos(2\alpha+2\beta)\cos\alpha\cos\beta - \cos^5(\alpha+\beta)]^2 > 0. \tag{3}$$

Мы докажем (3) в два этапа. Сначала установим, что (3) справедливо для $\beta < \pi/2$ и $\alpha = 0$. Затем, полагая фиксированным $\alpha + \beta$, мы покажем, что производная левой части неравенства (3) положительна при $0 < \alpha < \pi/4$. Это докажет (3) для всех $0 < \alpha < \pi/4$ и $\alpha < \beta$. Если $\alpha > \beta$, доказательство остается прежним после перемены местами α и β. Эти величины не могут обе быть больше $\pi/4$.

Пусть $\alpha = 0$, тогда левая сторона неравенства (3) становится равной

$$[\cos^2\beta - \cos^4(\beta)][1 - \cos^4(\beta)] - [\cos(2\beta)\cos\beta - \cos^5(\beta)]^2 =$$

$$cos^2\beta(1-\cos^2\beta)(1-\cos^4\beta) - \cos^2\beta[\cos^4\beta - \cos 2\beta]^2 =$$
$$\cos^2\beta(1 - \cos^2\beta - \cos^4\beta + \cos^6\beta - \cos^8\beta + 2\cos^4\beta\cos 2\beta - \cos^2 2\beta) =$$
$$\cos^\beta(1 - \cos^2\beta - \cos^4\beta + \cos^6\beta - \cos^8\beta + 2\cos^4\beta(2\cos^2\beta - 1) - (2\cos^2\beta - 1)^2) =$$
$$\cos^4\beta(3 - 7\cos^2\beta + 5\cos^4\beta - \cos^6\beta).$$

Первая производная по β выражения в скобках равна 0 при $\beta = 0$. Дважды дифференцируя и каждый раз отбрасывая положительный множитель $\sin\beta\cos\beta$, мы получим выражение $40 - 24\cos^2\beta$, которое положительно для всех $0 < \beta < \pi/2$. Отсюда следует, что левая часть неравенства (3) положительна для всех $0 < \beta < \pi/2$ и $\alpha = 0$.

Аналогично доказывается, что неравенство (3) выполняется для $0 < \alpha, \beta, \alpha + \beta < \pi/2$. Для этой цели фиксируем значение $\alpha+\beta$ и позволяем меняться переменной α, если $\alpha < \beta$, в противном случае используем β вместо α. Пусть $\alpha + \beta = k$ и

$$G(\alpha) = [\cos^2(k-\alpha) - \cos^4(k)][\cos^2\alpha - \cos^4(k)] - [\cos(2k)\cos\alpha\cos(k-\alpha) - \cos^5(k)]^2.$$

Тогда

$$G(\alpha)'_\alpha = [\cos^2(k-\alpha) - \cos^4(k)][\cos^2\alpha - \cos^4(k)] - [\cos(2k)\cos\alpha\cos(k-\alpha) - \cos^5(k)]^2 =$$
$$2\cos(k-\alpha)\sin(k-\alpha)[\cos^2\alpha - \cos^4(k)] - 2\cos\alpha\sin\alpha[\cos^2(k-\alpha) - \cos^4(k)] +$$
$$2\cos^5(k)\cos(2k)[-\sin\alpha\cos(k-\alpha) + \cos\alpha\sin(k-\alpha)] -$$
$$2\cos^2(2k)\cos\alpha\cos(k-\alpha)[-\sin\alpha\cos(k-\alpha) + \cos\alpha\sin(k-\alpha)] =$$

$$2\cos^4(k)[\sin\alpha\cos\alpha - \sin(k-\alpha)\cos(k-\alpha)] + 2\cos\alpha\cos(k-\alpha)\sin(k-2\alpha) +$$
$$2\sin(k-2\alpha)[\cos^5(k)\cos(2k) - \cos^2(2k)\cos\alpha\cos(k-\alpha)] =$$
$$\cos^4(k)[2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin(k-\alpha)\cos(k-\alpha)] +$$
$$2\sin(k-2\alpha)[\cos^5(k)\cos(2k) + (1 - \cos^2(2k))\cos\alpha\cos(k-\alpha)] =$$
$$\cos^4(k)[\sin(2\alpha) - \sin(2k-2\alpha)] +$$
$$2\sin(k-2\alpha)[\cos^5(k)\cos(2k) + (1 - \cos^2(2k))\cos\alpha\cos(k-\alpha)] =$$
$$-2\cos^4(k)\sin(k-2\alpha)\cos(k) + 2\sin(k-2\alpha)[\cos^5(k)\cos(2k) + (1 - \cos^2(2k))\cos\alpha\cos(k-\alpha)] =$$
$$2\sin(k-2\alpha)[\cos^5(k)\cos(2k) + (1 - \cos^2(2k))\cos\alpha\cos(k-\alpha) - \cos^5(k)].$$

Так как $k = \alpha + \beta$, $k - 2\alpha = \beta - \alpha > 0$ и множитель $2\sin(k - 2\alpha) > 0$, мы рассмотрим второй множитель

$$g = \cos^5(k)\cos(2k) + (1 - \cos^2(2k))\cos\alpha\cos(k-\alpha) - \cos^5(k).$$

Его экстремальные точки как функции от переменной α удовлетворяют уравнению $\sin(k-2\alpha)=0$, что соответствует $\alpha=\beta$, и выражение для g приобретает вид

$$g = \cos^5(2\alpha)\cos(4\alpha) + (1-\cos^2(4\alpha))\cos^2\alpha - \cos^5(2\alpha) =$$
$$(1-\cos^2(4\alpha))\cos^2\alpha - \cos^5(2\alpha)(1-\cos(4\alpha) =$$
$$(1-\cos(4\alpha))[(1+\cos(4\alpha))\cos^2\alpha - \cos^5(2\alpha)] =$$
$$(1-\cos(4\alpha))[(1+2\cos^2(2\alpha)-1)\frac{1+\cos(2\alpha)}{2} - \cos^5(2\alpha)] =$$
$$(1-\cos(4\alpha))(\cos^2(2\alpha))(1+\cos(2\alpha)-\cos^3(2\alpha)).$$

Все три множителя этого выражения неотрицательны, следовательно экстремальное значение g положительно для $0<\alpha<\pi/4$ и неотрицательно для $\alpha=0$ or $\alpha=\pi/4$. Следовательно $G(\alpha)$ всегда положительно для $0<\alpha<\pi/4$. Это завершает доказательство для Случая 3.

Случаи 1 и 2

Случаи 1 и 2 значительно проще Случая 3 и предлагаются читателю в качестве упражнения (намек: доказательство чисто геометрическое без использования тригонометрии).

Приложение

На рис. 2 изображен график поверхности, задаваемой левой частью выражения (3). График представляет поверхность, определенную на симплексе $0<\alpha,\beta,\alpha+\beta<\pi/2$. Этот и многие другие графики использовались для проверки корректности тригонометрических преобразований, необходимых для доказательства Случая 3.

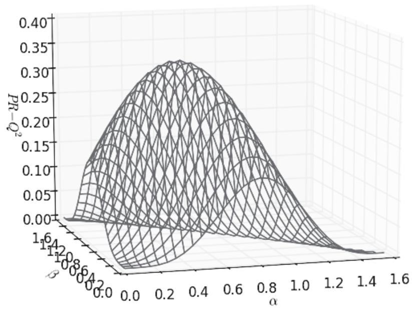


Рис. 2

График поверхности $PR-Q^2$

Ямром Борис,
кандидат физ.-мат. наук,
Senior Computer Scientist,
Cold Spring Harbor Laboratory,
Cold Spring Harbor,
Нью-Йорк, США.

E-mail: yamrom@optonline.net

О некоторых свойствах равных чевиан треугольника

А. А. Привалов, А. Д. Рабе

Статью можно считать продолжением исследований, по всей видимости, начатых Я. Штейнером, К. Лемусом и А. Ботемой, о признаках равнобедренности треугольников, обладающих равными чевианами.

Светлой памяти моего друга
Алексея Геннадиевича Мякишева
посвящается эта работа

Александр Привалов

Определение 1. *Чевианой* треугольника называют отрезок, соединяющий вершину треугольника с противоположной стороной или ее продолжением.

Примерами чевиан являются медианы, высоты и биссектрисы треугольника. Также легко показать, что треугольники с двумя равными высотами или с двумя равными медианами является равнобедренным. Этот простой факт был, вероятно, известен ученым Древней Греции. Однако с биссектрисами дело обстояло не совсем так.

В 1840 году Кристианом Лудольфом Лемусом (немецким математиком, профессором Берлинского университета) послан вопрос Якобу Штейнеру (шведскому геометру, члену Берлинской академии наук) о возможных (желательно геометрических, так как Якоб Штейнер считался весьма авторитетным представителем «чистой геометрии») доказательствах следующей теоремы, которая вошла в историю как

Теорема Штейнера–Лемуса [3, стр. 23]. *Треугольник с двумя равными биссектрисами является равнобедренным.*

Штейнер дал довольно громоздкое доказательство этой теоремы. Благодаря чему появилось много новых простых доказательств, как геометрических, так и алгебраических. Например, эту теорему легко доказать, пользуясь средствами векторной алгебры. В самом деле, пусть треугольник образован векторами $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ (\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}), \overrightarrow{d_b},\ \overrightarrow{d_c}$ — векторы биссектрисы с равными длинами. Тогда по теореме о биссектрисе имеем

$$\overrightarrow{d_b} = -\vec{c} - \frac{c}{a+c}\vec{b}, \quad \overrightarrow{d_c} = \vec{b} + \frac{b}{a+b}\vec{c},$$

где a, b и c — длины векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. Из равенства $d_b = d_c$ имеем

$$d_b^2 = c^2 + \frac{c^2b^2}{(a+c)^2} + 2\vec{b}\cdot\vec{c}\frac{c}{a+c} = d_c^2 = b^2 + \frac{c^2b^2}{(a+b)^2} + 2\vec{b}\cdot\vec{c}\frac{b}{a+b} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d_c^2 - d_b^2 = (b-c)\left(b + c - \frac{c^2b^2(2a+b+c)}{(a+c)^2(a+b)^2} + 2\vec{b}\cdot\vec{c}\frac{a}{(a+c)(a+b)}\right)$$

Следовательно, $b = c$, т.к. второй множитель положителен. В самом деле, выражая из равенства $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ выражение $2\vec{b} \cdot \vec{c} = a^2 - b^2 - c^2$, имеем

$$\left(b + c - \frac{c^2b^2(2a+b+c)}{(a+c)^2(a+b)^2} + \frac{a(a^2-b^2-c^2)}{(a+c)(a+b)}\right) > \frac{(b+c)(a+c)(a+b) + a^3 - ab^2 - ac^2}{(a+c)(a+b)} -$$
$$- \frac{c^2b^2(2a+b+c)}{(a+c)^2(a+b)^2} > \frac{2abc + b^2c + c^2b}{(a+c)(a+b)} - \frac{2ac^2b^2 + c^2b^3 + c^3b^2}{(a+c)^2(a+b)^2} > 0.$$

Теорема доказана.

Одним из самых простых и изящных доказательств этой теоремы является доказательство, иногда называемое *русским* доказательством. Оно основано на следующей лемме (признак равенства треугольников) [5]:

Лемма 1. *Если сторона, угол, лежащий против этой стороны, и биссектриса этого угла одного треугольника равны стороне, противолежащему углу и его биссектрисе другого, то эти треугольники равны.*

Доказательство. Очевидно, что все треугольники, имеющие по равной стороне и по равному, противолежащему ей углу, вписаны в одну окружность. Биссектрисы этих углов пересекаются точке P, лежащей на этой окружности. На рис. 1 CD и C_1D_1 — биссектрисы двух таких треугольников ABC и ABC_1.

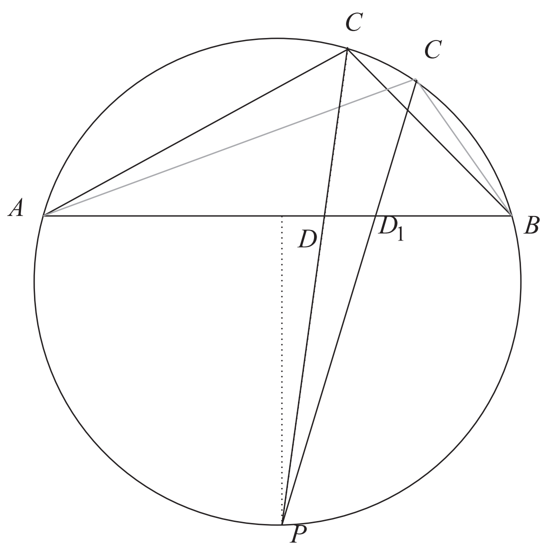


Рис. 1

Тогда следующее соотношение:

$$CD = PC - PD > PC_1 - PD > PC_1 - PD_1 = C_1D_1 \tag{1}$$

показывает, что разным биссектрисам соответствуют разные треугольники. Что и доказывает лемму 1.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что на рисунке 2 в треугольнике ABC с равными биссектрисами AA_1 и BB_1, в силу леммы 1 треугольники ACA_1 и BCB_1 равны.

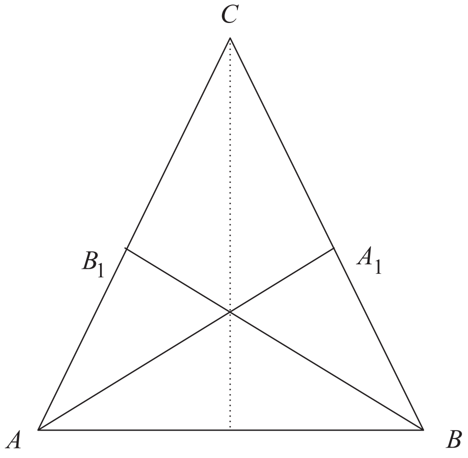


Рис. 2

Заметим, что из этого доказательства следует, что теорема не перестает быть верной, если AA_1 и BB_1 не обязательно биссектрисы, а могут быть равными чевианами, пересекающимися на биссектрисе, но не в ее основании (тогда этими чевианами будет сторона AB). Это наблюдение приводит нас к следующей задаче:

Пусть чевианы AA_1vc и BB_1 треугольника ABC равны и пересекаются в точке O. Каким условиям должна удовлетворять точка O пересечения чевиан AA_1 и BB_1 треугольника ABC, чтобы из равенства $AA_1 = BB_1$ вытекало равенство $AC = BC$?

На биссектрисе

Теорема 1. *Пусть чевианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, прямой, содержащей биссектрису CD ($O \neq D$), равны или параллельны сторонам CB и CA соответственно. Тогда, если точки A_1 и B_1 лежат по одну сторону прямой (AB), то треугольник ABC равнобедренный.*

Доказательство. Рассмотрим первый случай: отрезки AA_1 и BB_1 параллельны сторонам CB и CA соответственно и пересекаются в точке O, лежащей на биссектрисе (рис. 3). Тогда четырехугольник $OABC$ является параллелограммом с диагональю CO, являющейся биссектрисой. Следовательно, $OABC$ — ромб и $CA = CB$.

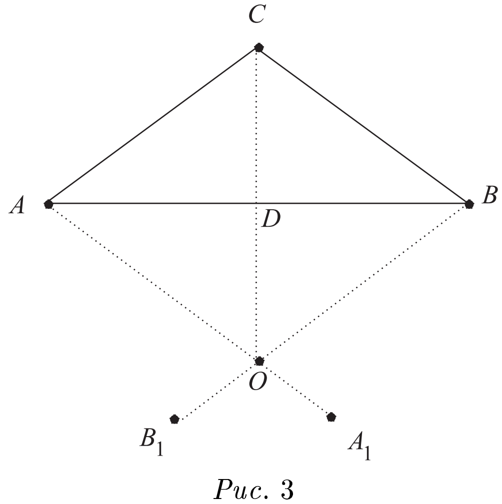


Рис. 3

Второй случай: отрезки AA_1 и BB_1 равны, являются чевианами ΔABC и пересекаются на биссектрисе (CD) в точке O так, что точки A_1 и B_1лежат ниже прямой (AB), рис. 4.

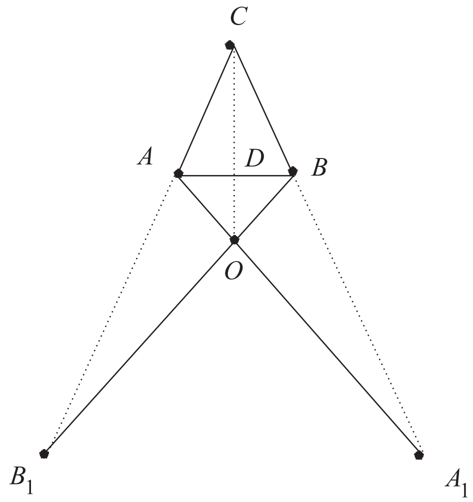


Рис. 4

Здесь, как и выше, из леммы 1 следует равенство треугольников ACA_1 и BCB_1 т.е. $CA = CB$ и треугольник ABC — равнобедренный.

Третий случай: точки A_1 и B_1 лежат над прямой (AB), для этого требуется следующие (аналогичное лемме 1) вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Если сторона, угол, лежащий против этой стороны, и биссектриса внешнего к этому углу угла одного треугольника равны стороне, противолежащему углу и биссектрисе внешнего к нему углу другого, то эти треугольники равны.*

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и ABC_1 такие, что $\angle ACB = \angle AC_1B$. Хорошо известно, что биссектриса внешнего угла треугольника перпендикулярна биссектрисе этого угла. Отсюда следует, что если биссектриса внешнего к $\angle ACB$ угла не пересекает сторону (AB), то биссектриса $\angle ACB$ будет являться высотой ΔABC. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный ($AB = AB$), как и треугольник ABC_1. Поэтому, ΔABC равен ΔABC_1 (по второму признаку равенства треугольников).

Пусть эти биссектрисы пересекают сторону (AB). Обозначим их CE и C_1E_1 (рис. 5).

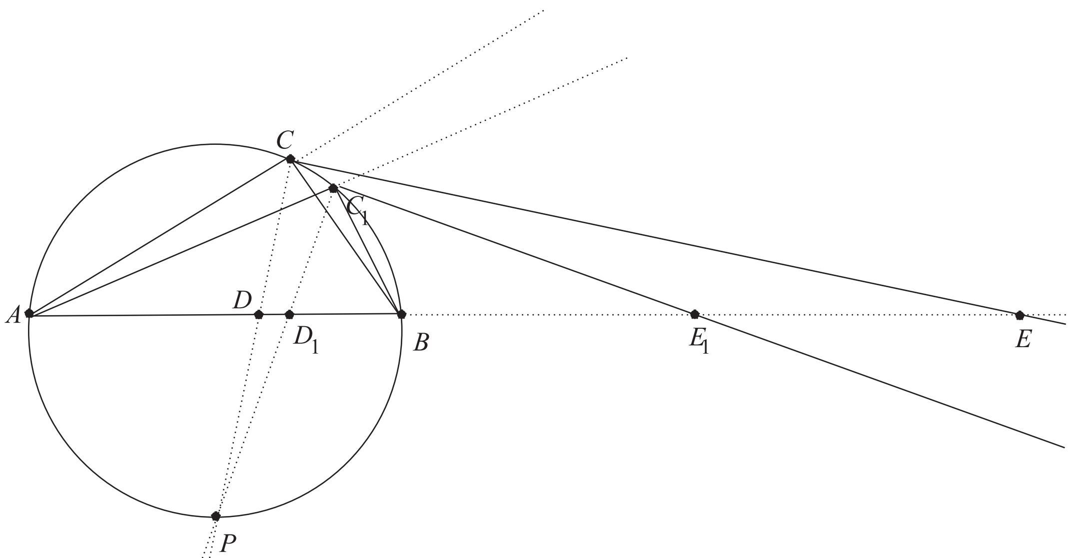


Рис. 5

Из (1) в лемме 1 следует, что катет CD прямоугольного треугольника DCE больше катета C_1D_1 треугольника $D_1C_1E_1$, кроме того, $\angle CDE > \angle C_1D_1E_1$, следовательно, $CE > C_1E_1$, т.е. неравным биссектрисам соответствуют неравные треугольники. Лемма 2 доказана.

Для окончательного доказательства третьего случая рассмотрим рис. 6.

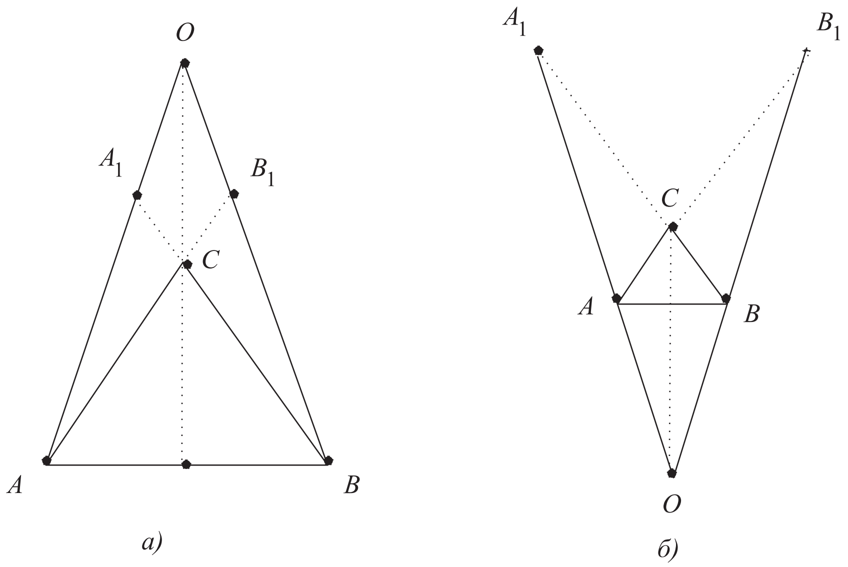


Рис. 6

Здесь треугольники ACA_1 и BCB_1 имеют равные стороны ($AA_1 = BB_1$), равные противолежащие углы ($\angle ACA_1 = \angle BCB_1$) общую равную биссектрису CO внешних углов $\angle ACB$. По лемме 2 эти треугольники равны, т.е. $AC = BC$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Теорема 1 перестает быть верной, если точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны прямой (AB). В качестве контрпримера приведем *треугольник Ботемы*, который рассматривал теорему Штейнера – Лемуса для биссектрис внешних углов треугольника (эти биссектрисы пересекаются на биссектрисе угла C). Ботема построил треугольник ABC, у которого биссектрисы AA_1 и BB_1 внешних углов равны и равны стороне AB (рис. 7).

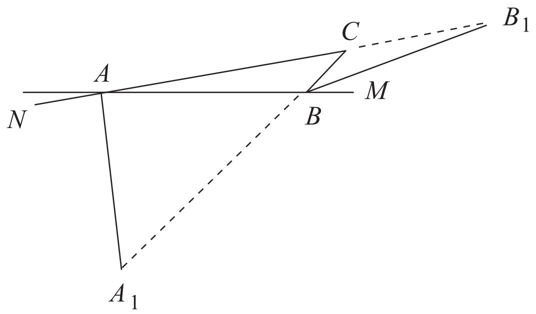


Рис. 7

Действительно, обозначим угол $\angle CAB = \alpha$. Тогда, так как $AB = BB_1$, то $\angle CB_1B = \alpha$. Отсюда и того, что BB_1 — биссектриса угла CBM, имеем $\angle B_1BM = 2\alpha$ и $\angle CBM = 4\alpha$. Так как $AB = AA_1$, то $\angle AA_1B = \angle ABA_1 = \angle CBM = 4\alpha$ и $\angle BAA_1 = \pi - 8\alpha$. Далее, AA_1 — биссектриса угла $\angle BAN = \pi - \alpha$, отсюда имеем $\pi - \alpha = 2(\pi - 8\alpha)$ и $\angle CAB = \alpha = 12^\circ, \angle ACB = 3\alpha = 36^\circ$ и $\angle ABC = 132^\circ$.

Очевидно, что чевианы AA_1 и BB_1 пересекаются на биссектрисе угла C.

Замечание 2. Заметим также, что в любом неравнобедренном треугольнике ABC существуют равные чевианы AA_1 и BB_1, пересекающиеся на биссектрисе угла C. Это следует из таких соображений: пусть точка O двигается от точки D в направлении вектора $\overrightarrow{CD}$, тогда при приближении угла BAO к углу, равному $\angle B$, длина AA_1 будет стремиться к бесконечности, а длина BB_1 — нет (так как $\angle A \neq \angle B$) и при стремлении $\angle ABO$ к углу, равному $\angle A$, длина BB_1 будет стремиться к бесконечности, а длина AA_1 — нет. В силу теоремы 1 точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны основания.

На высоте

Перейдем теперь к равным чевианам треугольника, пересекающимся на его высоте. Как известно, если такие чевианы являются высотами, то треугольник равнобедренный. Однако, уже для прямоугольного ΔABC ($\angle BAC = 90^\circ$) чевиана $AA_1 = AC$ и поэтому для таких треугольников равных чевиан, пересекающихся на высоте (AC) может и не быть (если $AC < BC$), может быть одна (если $AC = BC$), а может быть две (если $AC > BC$).

Если углы $\angle A$ и $\angle B$ треугольника ABC не являются прямыми, то как и в замечании 2, легко показать, что равные чевианы AA_1 и BB_1, пересекающиеся на его высоте CH, всегда существуют. **Нашей задачей является выяснить, сколько может быть таких чевиан и как это связано с равнобедренностью треугольника.**

Далее, как и выше, будем считать AB основанием треугольника ABC, C — его вершиной, обозначать $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ — углы при основании ΔABC, CH — высоту, опущенную на AB и $O \neq H$ — точку пересечения AA_1 и BB_1.

Теорема 2. *Если углы α и β при основании AB треугольника ABC острые и удовлетворяют неравенству:*

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta > (\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)^2 - 3(\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)^{\frac{4}{3}} \tag{2}$$

то из того, что чевианы AA_1 и BB_1 равны и пересекаются на высоте CH следует, что треугольник ABC равнобедренный. Если же углы $\alpha \neq \beta$ не удовлетворяют условию (2), то в таком треугольнике существует одна (в случае равенства в (2)) или две пары равных чевиан, пересекающихся на высоте CH.

Доказательство: Пусть чевианы ΔABC равны:

$$AA_1 = BB_1. \tag{3}$$

Обозначим $y = HO, AH = c_0 > 0, BH = c_1 > 0$ и $CH = h$. Тогда $0 < y \leq h$, кроме того, так как точка H делит сторону AB в отношении $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta = c_1 : c_0$, то без потери общности можно считать, что

$$c_0 = \operatorname{tg}\beta, \quad c_1 = \operatorname{tg}\alpha. \tag{4}$$

Тогда

$$OH = c_0 \cdot c\operatorname{tg}\beta = 1 \text{ и } h = c_1 \cdot c_0, \tag{5}$$

где O — ортоцентр ΔABC.

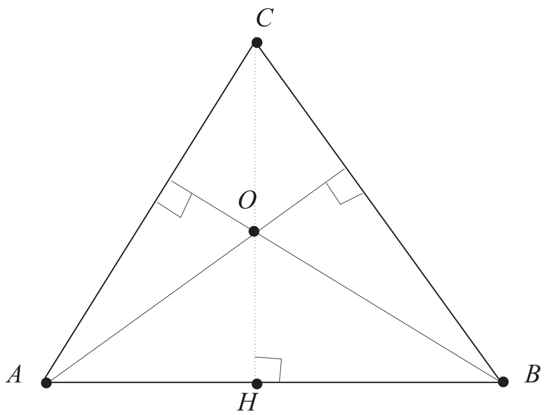


Рис. 8

Далее, из теоремы синусов для ΔABB_1 имеем

$$\frac{BB_1}{\sin BAC} = \frac{AB}{\sin AB_1B} \Rightarrow \frac{BB_1}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\left(\alpha + \arctan\frac{y}{c_1}\right)} \Rightarrow BB_1 = \frac{AB\sin\alpha}{\sin\left(\alpha + \arctan\frac{y}{c_1}\right)}$$

Аналогично, в ΔBAA_1

$$AA_1 = \frac{AB\sin\beta}{\sin\left(\beta + \arctan\frac{y}{c_0}\right)}$$

Отсюда и (3) приходим к равенству:

$$\frac{\sin\left(\beta + \arctan\frac{y}{c_0}\right)}{\sin\beta} = \frac{\sin\left(\alpha + \arctan\frac{y}{c_1}\right)}{\sin\alpha}$$

Применяя формулу синуса суммы, получаем, что

$$\frac{\sin\beta\cos\left(\arctan\frac{y}{c_0}\right) + \cos\beta\sin\left(\arctan\frac{y}{c_0}\right)}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\left(\arctan\frac{y}{c_1}\right) + \cos\alpha\sin\left(\arctan\frac{y}{c_1}\right)}{\sin\alpha}$$

Далее, учитывая (4), после преобразований приходим к уравнению

$$\frac{c_0^2 + y}{c_0\sqrt{c_0^2 + y^2}} = \frac{c_1^2 + y}{c_1\sqrt{c_1^2 + y^2}} \tag{6}$$

Возведя в квадрат обе части этого уравнения получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{c_0^2 + y}{c_0\sqrt{c_0^2 + y^2}} = \frac{c_1^2 + y}{c_1\sqrt{c_1^2 + y^2}} \Rightarrow c_1^2(c_0^2 + y)^2(c_1^2 + y^2) = c_0^2(c_1^2 + y)^2(c_0^2 + y^2);\\
&(c_0^4 + 2c_0^2 y + y^2)(c_1^4 + c_1^2 y^2) = (c_1^4 + 2c_1^2 y + y^2)(c_0^4 + c_0^2 y^2);\\
&y^4(c_1^2 - c_0^2) + y^2(c_0^4 c_1^2 + c_1^4 - c_0^4 - c_1^4 c_0^2) + 2y(c_0^2 c_1^4 - c_1^2 c_0^4) = 0;\\
&y(c_1^2 - c_0^2)(y^3 + y(c_1^2 + c_0^2 - c_1^2 c_0^2) + 2c_1^2 c_0^2) = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

По условию $O \neq H$, поэтому y $\neq 0$, значит $c_1^2 - c_0^2 = 0$, отсюда $AH = BH$ и, следовательно, CH является не только высотой, но и медианой треугольника ABC, поэтому, ΔABC равнобедренный, если только последняя скобка не равна нулю. Предположим противное, пусть

$$y^3 + y(c_1^2 + c_0^2 - c_1^2 c_0^2) + 2c_1^2 c_0^2 = 0 \tag{8}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} c_1^2 + c_0^2 = v, \\ c_1^2 c_0^2 = u. \end{cases} \tag{9}$$

Тогда уравнение (8) примет вид

$$y^3 - y(u - v) + 2u = 0 \tag{10}$$

Известно [2], что если дискриминант $D = -27q^2 - 4p^3$ кубического уравнения: $x^3 + px + q = 0$ больше нуля, то уравнение имеет три различных действительных корня; если же $D = 0$, то оно имеет три действительных корня, причем два из них равны. Если же $D < 0$, то уравнение имеет один корень. В нашем случае

$$D = 27u^2 - (u - v)^3 < 0 \Leftrightarrow u - v < 3u^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow v > u - 3u^{\frac{2}{3}}$$

Отсюда, а также из (9) и (4) получаем условие (2):

$$v = c_1^2 + c_0^2 = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta > u - u^{\frac{2}{3}} = (c_1 c_0)^2 - 3(c_1 c_0)^{\frac{2}{3}} = (\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)^2 - 3(\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)^{\frac{4}{3}}.$$

Кроме того, y — действительный корень уравнения (8), который очевидно меньше нуля. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный.

Если же неравенство (2) не выполняется, то многочлен

$$p(y) = y^3 + y(c_1^2 + c_0^2 - c_1^2 c_0^2) + 2c_1^2 c_0^2$$

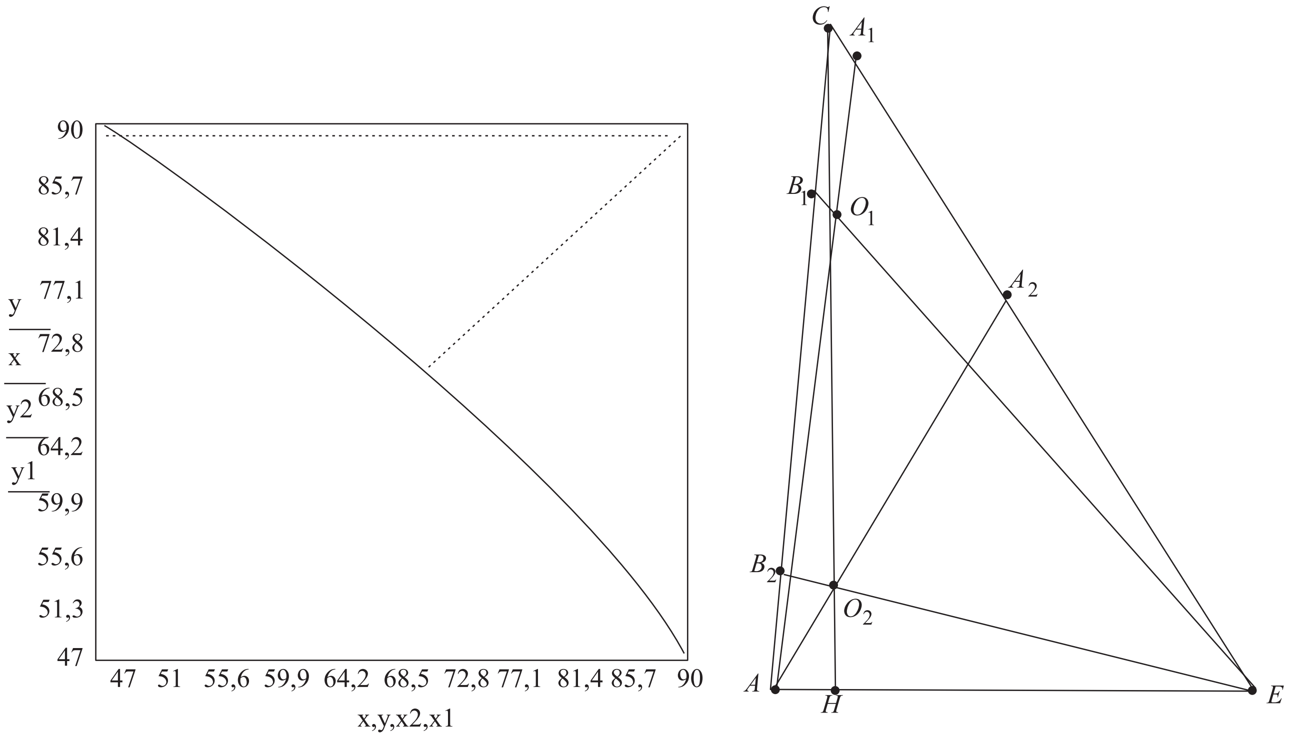
имеет три действительных корня y_0, y_1, y_2. Пусть для определенности $c_0^2 < c_1^2$, и тогда

$$\begin{aligned} p(-c_1^2) &= -c_1^6 + c_1^4 c_0^2 - c_1^4 - c_1^2 c_0^2 + 2c_1^2 c_0^2 = c_1^2(c_1^2 c_0^2 - c_1^2 + c_0^2 - c_1^4) = \\ &= c_1^2(c_1^2(c_0^2 - c_1^2) - c_1^2 + c_0^2) = c_1^2(c_0^2 - c_1^2)(c_1^2 + 1) < 0; \\ p(-c_0^2) &= -c_0^6 + c_0^4 c_1^2 - c_0^4 - c_1^2 c_0^2 + 2c_1^2 c_0^2 = c_0^2(c_1^2 c_0^2 - c_0^2 + c_1^2 - c_0^4) = \\ &= c_0^2(c_1^2 - c_0^2)(c_0^2 + 1) > 0. \end{aligned}$$

Т.е. $y_0 \in (-c_1^2, -c_0^2)$. Далее, производная $p(y)$ должна иметь два корня, несложно видеть, что они разных знаков, следовательно корни $y_{1,2} > 0$, так как по теореме Виета произведение корней $y_0 y_1 y_2 = -2c_1^2 c_0^2 < 0$. Кроме того, $y_{1,2} < h$. В самом деле, если $y \geq h$, то

$$y^3 + y(c_1^2 + c_0^2 - c_1^2 c_0^2) + 2c_1^2 c_0^2 > y^3 - yh^2 = y(y^2 - h^2) \geq 0$$

Таким образом, мы доказали, что если углы α и β не удовлетворяют неравенству (2), то на высоте CH треугольника с такими углами при основании AB существуют две точки (не обязательно различные) через которые проходят равные чевианы $AA_1 = BB_1$ и $AA_2 = BB_2$. Множество таких пар (α, β) и треугольник с углами α =85°, $\beta = 60°$ изображены на рис. 9, а) и рис. 9, б).



а) б)

Рис. 9

Теорема 2 доказана.

Заметим, что рассматривая разные случаи, когда точка O лежит на прямой, содержащей высоту CH треугольника ABC, то идентичными, как в доказательстве теоремы 2, рассуждениями можно получить следующие уравнения:

$$\frac{c_0^2 + y}{c_0\sqrt{c_0^2 + y^2}} = \frac{c_1^2 + y}{c_1\sqrt{c_1^2 + y^2}} \text{ и } \frac{c_0^2 + y}{c_0\sqrt{c_0^2 + y^2}} = -\frac{c_1^2 + y}{c_1\sqrt{c_1^2 + y^2}}.$$

На рисунке представлены такие случаи.

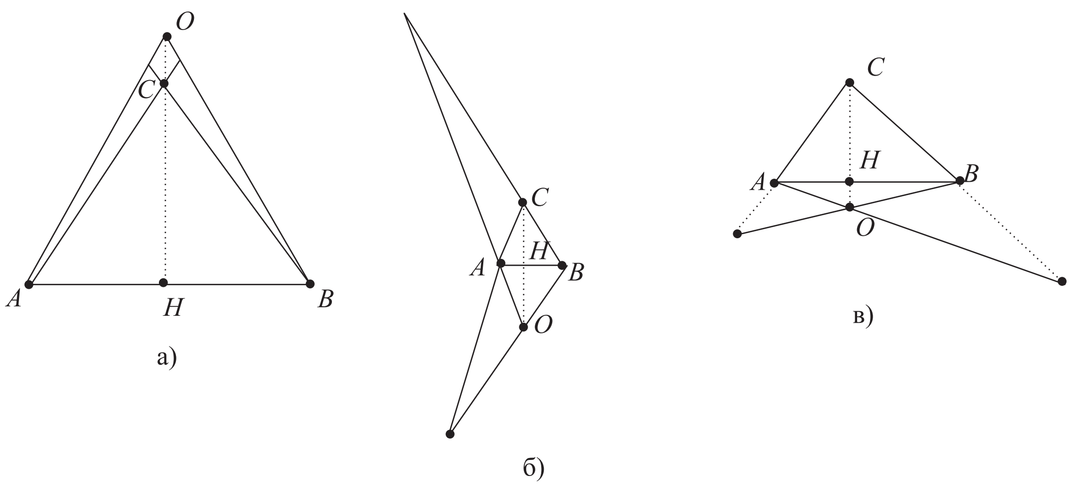


Рис. 10

Поэтому все решения уравнения (8) будут иметь смысл. Таким образом, приходим к теореме.

Теорема 3. *Пусть чевианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC равны и пересекаются в точке O, лежащей на высоте CH или на ее продолжении, тогда ΔABC будет равнобедренным, если $y = \frac{\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{HB}}{|HB|} \neq 0$ не удовлетворяет уравнению:*

$$y^3 + y(\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\alpha) + 2\operatorname{tg}^2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\alpha = 0,$$

где α и β — острые углы при основании AB треугольника ABC. В противном случае через такие точки O проходят равные чевианы треугольника с углами α и β.

Замечание 3. В теорема 2 и 3 не рассмотрен случай, когда отрезки AO и BO, где O — точка лежащая на высоте CH, параллельны сторонам BC и AC соответственно, но в этом случае $AOCB$ — очевидно, параллелограмм с перпендикулярными диагоналями. Поэтому треугольник ABC — равнобедренный ($AC = BC$).

Следствие 1. *На прямой, содержащей высоту CH, любого треугольника ABC с острыми углами α и β при основании AB существуют точки O такие, что проходящие через них чевианы AA_1 и BB_1 равны, причем $y = \frac{\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{HB}}{|HB|}$ удовлетворяет уравнению:*

$$y^3 + y(\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\alpha) + 2\operatorname{tg}^2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\alpha = 0$$

Если в треугольнике ABC угол A тупой, то на его высоте CH существует точка O, через которую проходят две равные чевианы AA_1 и BB_1. В самом деле, при движении точки O от вершины C к основанию чевиана BB_1 будет меняться от BC до BA, а чевиана AA_1 — от $AC < BC$ до бесконечности (приближаясь к прямой, параллельной BC), поэтому найдется точка O, доказывающая это утверждение (рис. 11).

Пользуясь такими же рассуждениями, как и при доказательстве теоремы 1, легко получить следующее утверждение.

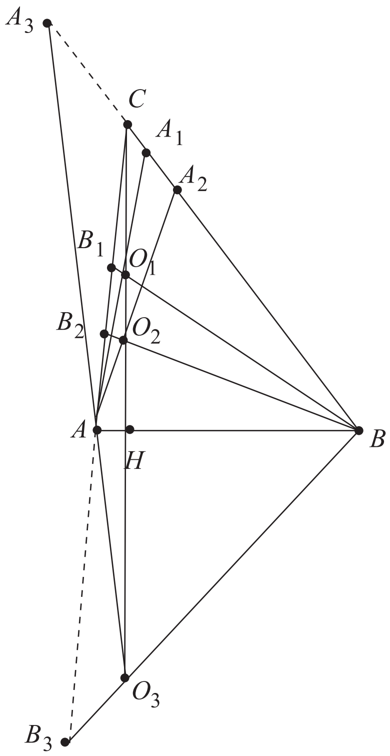


Рис. к следствию 1 ($\alpha = 85$ и $\beta = 55$)

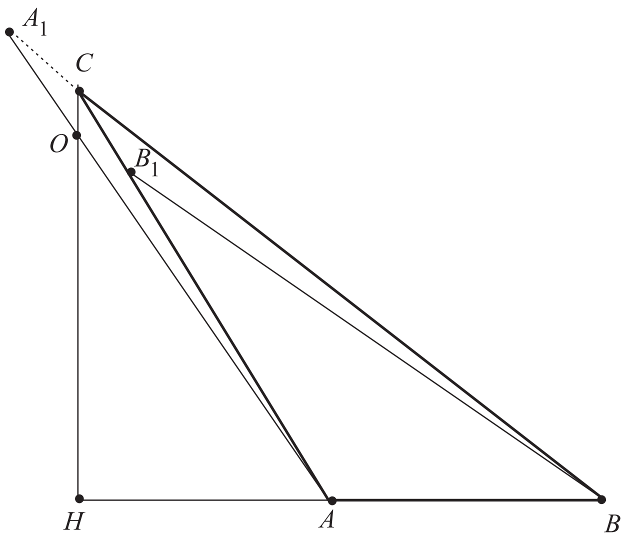


Рис. 11

Теорема 4. *На прямой, содержащей высоту CH, любого треугольника ABC с тупым углом A, существуют точки O такие, что проходящие через них чевианы AA_1 и BB_1 равны, причем $y = \frac{\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HB}}{|HB|}$ удовлетворяет уравнению:*

$$y^3 + y(\operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2 \operatorname{tg}^2 \beta \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = 0.$$

В отличие от уравнения следствия 1, это уравнение всегда имеет один положительный корень и может иметь еще два отрицательных (рис. 12).

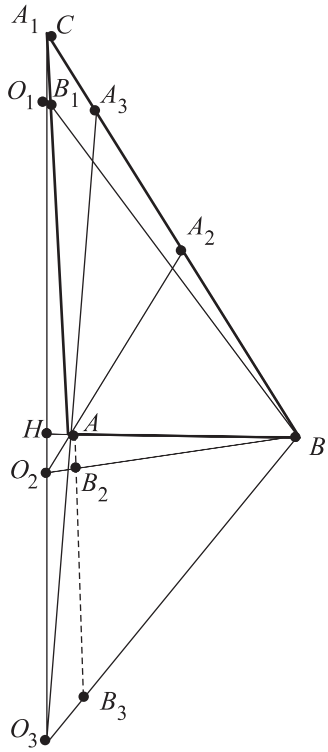


Рис. 12

На медиане

Теорема 5. *Если равные чевианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC, параллельны медиане CM или пересекаются в точке O, лежащей на прямой содержащей медиану CM, причем так, что $CM \neq OM$ и $O \neq M$, то ΔABC равнобедренный ($AC = BC$).*

Доказательство. Пусть точка O лежит на медиане CM треугольника ABC. Тогда ее барицентрические координаты будут $O(1:1:x)$. Несложно видеть, что если $x=-1$, то $AOBC$ — параллелограмм; если $x=0$, то точка O совпадет с точкой M. Поэтому эти значения x исключены формулировкой теоремы 4.

Сначала рассмотрим случай, когда точка O бесконечно удалена. Тогда чевианы AA_1 и BB_1 параллельны и по условию равны. Отсюда следует, что треугольники ACA_1 и BCB_1 имеют равную сторону и равные углы. Следовательно, они равны и треугольник ABC равнобедренный (рис. 13).

Пусть теперь точка O лежит на прямой (CM) и является центром масс системы материальных точек $\{1A, 1B, xC\}$, тогда точка A_1 является барицентром системы материальных точек $\{1B, xC\}$, а B_1 — центр масс системы $\{1A, xC\}$ (рис. 14).

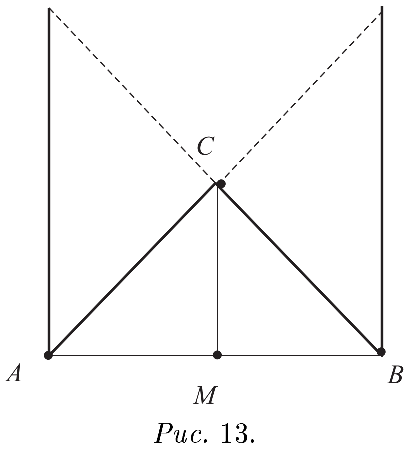


Рис. 13.

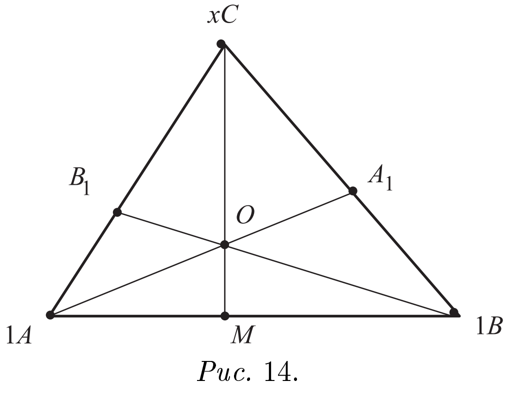


Рис. 14.

Отсюда найдем векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{1+x}\left(x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right), \quad \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{1+x}\left(x\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right)$$

Далее, и из равенства длин чевиан имеем

$$\left(x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)^2 = \left(x\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right)^2 \Leftrightarrow x^2AC^2 + AB^2 + 2x\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = x^2BC^2 + AB^2 + 2x\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA};$$

$$x(AC^2 - BC^2) + 2(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})\cdot(x(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + 2\overrightarrow{AB}) = 0;$$

$$2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}(x+2) = 0.$$

Значит, $x = -2$ или CM перпендикулярна AB. Случай $x = -2$ рассмотрен выше (рис. 13). Следовательно, CM является высотой и медианой ΔABC, т.е. $AC = BC$. Теорема 5 доказана.

Следствие 2. *Пусть точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC соответственно в одинаковых отношениях: $BA_1 : A_1C = AB_1 : B_1C = p : q$, причем $2q + p \neq 0$. Тогда, если $AA_1 = BB_1$, то треугольник ABC равнобедренный.*

Доказательство. Пусть $BA_1 : A_1C = AB_1 : B_1C = p : q$. Рассмотрим систему материальных точек $\{qA, qC, pC\}$. Так как $2q + p \neq 0$, то существует центр масс этой система — точка O. Точки A_1 и B_1 — центры масс систем материальных точек $\{qA, pC\}$ и $\{qC, pC\}$ соответственно. Центр O лежит на пересечении прямых AA_1, BB_1 и CM, где M — барицентр системы $\{qA, qC\}$. Очевидно, что CM — медиана. В силу теоремы 3 следствие доказано.

На окружности

Для треугольника ABC обозначим как $\mathbf{C}_{ABC}$ окружность, симметричную окружности, описанной около треугольника ABC, относительно прямой (AB).

Теорема 6. *Если равные чевианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются на окружности $\mathbf{C}_{ABC}$ в точке $T, T \neq A$ и $T \neq B$. то этот треугольник равнобедренный ($AC = BC$).*

Сначала заметим, что по условию теоремы точка T не является симметричной вершине C относительно середины отрезка AB (в противном случае прямые (AT) и (BT) будут параллельными сторонам BC и AC соответственно). Случаи $T = A$ и $T = B$ так же исключаются из рассмотрения по понятным причинам.

Теорему 6 можно доказать двумя способами — алгебраическим и геометрическим. Алгебраическое (полезное) доказательство заключается в том, что позволяет явно выразить длины чевиан AA_1 и BB_1, проходящих через точку T.

Алгебраическое доказательство теоремы 6.

Обозначим α, β и γ — углы треугольника ABC. Пусть радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 1, а его вершины имеют координаты $A(c_1,0)$, $B(c_2,0), C(h,0)$. Тогда

$$AC = 2\sin\beta,\ BC = 2\sin\alpha,\ AB = 2\sin\gamma,\ c_1 = -2\sin\beta\cos\alpha,$$
$$c_2 = 2\sin\alpha\cos\beta,\ h = 2\sin\alpha\sin\beta,\ \overrightarrow{BC} = (h, c_2)^T,\ \overrightarrow{AC} = (h, c_1)^T$$

где операция $(*)^T$ означает транспонирование.

Уравнение окружности, симметричной относительно AB окружности, описанной около треугольника ABC, запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \sin t + \frac{c_1 + c_2}{2} \\ y = \cos t - \cos\gamma \end{cases},\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Теперь, из векторных уравнений прямых (AT) и (BC) имеем

$$\overrightarrow{AT}\tau + A = \overrightarrow{BC}\tau_1 + B,\ \overrightarrow{AT}\tau = \overrightarrow{BC}\tau_1 + \overrightarrow{AB}$$

Умножим обе части этого равенства на вектор $(h, c_2)^T$ — ортогональный вектору $\overrightarrow{BC}$:

$$\tau \begin{pmatrix} \sin t + \frac{c_1+c_2}{2} - c_1 \\ \cos t - \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ c_2 \end{pmatrix},$$
$$\tau(h\sin t + h\sin\gamma + c_2\cos t - c_2\cos\gamma) = 2h\sin\gamma$$
$$\tau\cdot 2\sin\alpha(\sin\beta\sin t + \cos\beta\cos t + \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$\tau\cdot(\cos(t-\beta) - \cos(\gamma+\beta)) = 2\sin\beta\sin\gamma,\ \tau\cdot(\cos(t-\beta)+\cos\alpha) = 2\sin\beta\sin\gamma,$$
$$\tau\cos\frac{\alpha-t+\beta}{2}\cos\frac{t+\alpha-\beta}{2} = \sin\beta\sin\gamma,\ \tau = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\frac{\gamma+t}{2}\cos\frac{t+\alpha-\beta}{2}}.$$

Отсюда

$$AA_1^2 = \tau^2 AT^2 = \frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\sin^2\frac{\gamma+t}{2}\cos^2\frac{t+\alpha-\beta}{2}}((\sin t+\sin\gamma)^2 + (\cos t - \cos\gamma)^2) =$$
$$= \frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\sin^2\frac{\gamma+t}{2}\cos^2\frac{t+\alpha-\beta}{2}}(2-2\cos(t+\gamma)) = \frac{4\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\frac{\gamma+t}{2}}{\sin^2\frac{\gamma+t}{2}\cos^2\frac{t+\alpha-\beta}{2}} = \frac{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\cos^2\frac{t+\alpha-\beta}{2}}.$$

Аналогично находим BB_1 и окончательно получаем:

$$BB_1 = \frac{4\sin^2\alpha\sin^2\gamma}{\cos^2\frac{t+\alpha-\beta}{2}} \text{ и } AA_1 = \frac{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\cos^2\frac{t+\alpha-\beta}{2}}.$$

Отсюда следует, что если $AA_1 = BB_1$, то $\alpha = \beta$. Теорема доказана

Для геометрического доказательства этой теоремы понадобятся две леммы, аналогичные лемме 1.

Лемма 3. *Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют равные острые углы $\angle C = \angle C_1$, равные стороны $AB = A_1B_1$ (или $CB = C_1B_1$) и $\angle A + \angle A_1 = \pi$. Тогда $CB = C_1B_1$ (или $AB = A_1B_1$).*

Доказательство этой леммы следует из рис. 15.

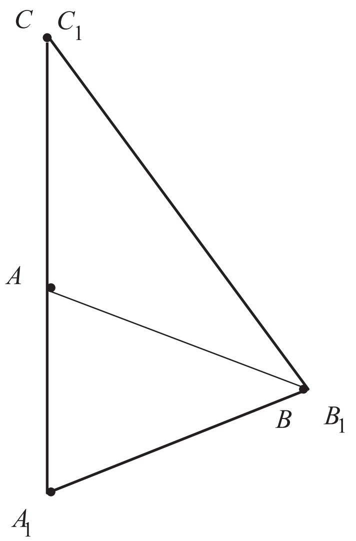


Рис. 15

Доказательство теоремы 5. Из всех возможных конфигураций рассмотрим три, изображенные на рисунке 16, где A, B, C — вершины треугольника ABC, T — точка на окружности, AA_1, BB_1 — чевианы, проходящие через T, C_1 — точка, симметричная точке C относительно прямой AB.

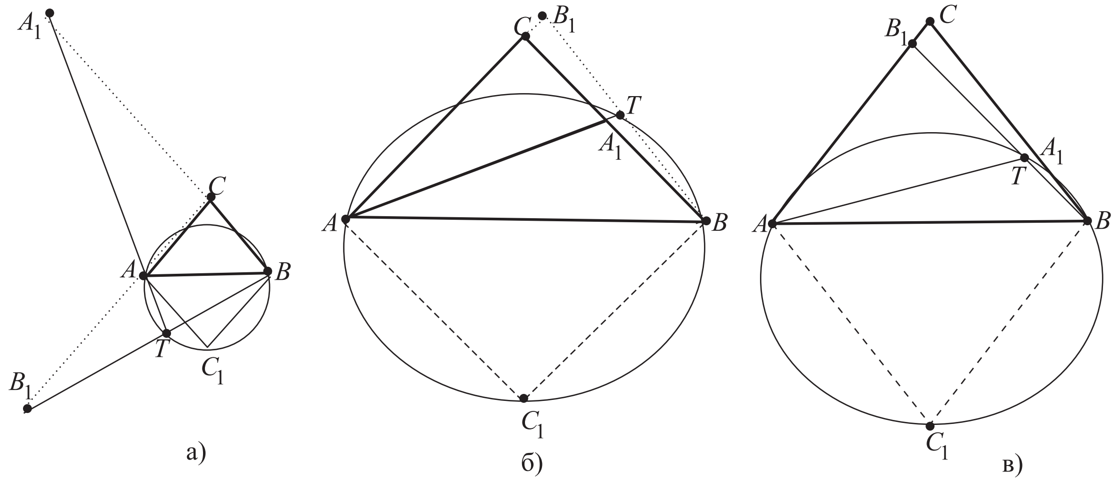


Рис. 16

Для случая а), когда точка T лежит вне треугольника и под стороной AB, рассмотрим треугольники AA_1C и AB_1T. Углы B_1AT и A_1AC равны как вертикальные. Так как $\angle ATB$ и $\angle ACB$ вписанные и опираются на дугу AB, то $\angle ATB_1 = \angle ACA_1$, значит, $\angle AB_1T = \angle AA_1C$. Отсюда следует, что треугольники AA_1C и BB_1C имеют равные углы ($\angle AB_1T = \angle AA_1C$), равные стороны ($BB_1 = AA_1$) и $\angle ACA_1 + \angle BCB_1 = \pi$. По лемме 3 стороны BC и AC равны.

В случае б) рассмотрим треугольники BA_1T и BB_1C. Они имеют общий угол A_1BT и равные углы BTA_1 и BCB_1, значит, $\angle CB_1B \quad = \angle TA_1B = \angle AA_1C$. Следовательно, треугольники ACA_1 и BCB_1 имеют равные углы ($\angle AA_1C = \angle BB_1C$), равные стороны AA_1 и BB_1 и $\angle ACA_1 + \angle BCB_1 = \pi$. По лемме 3 стороны BC и AC равны.

В случае в) заметим, что сумма углов B_1TA_1 и B_1CA_1 равна π. Значит, треугольники ACA_1 и BCB_1 имеют общий угол C, равные стороны AA_1 и BB_1 и $\angle AA_1C + \angle BB_1C = \pi$. По лемме 3 стороны BC и AC равны.

Теорема 6 доказана.

Равные части углов

В этом разделе рассмотрим такие чевианы треугольника ABC, которые отсекают от его углов равные части. Дадим следующее определение:

Определение 2. Для угла $\angle BAC$ луч AA_1 назовем *k-трисой* ($-\infty < k < \infty$), если $\angle BAA_1 = k\angle BAC$ и вектор $\overrightarrow{AA_1}$ откладывается от вектора $\overrightarrow{AB}$ в направлении вектора $\overrightarrow{AC}$ при положительном k и в противоположную сторону — при отрицательном.

Очевидно, что если чевианы AA_1 и BB_1 являются 0-трисами углов BAC и ABC, то они совпадают со стороной AB; если же они являются 1-трисами, то совпадут со сторонами AC и BC соответственно. Если $0 < k < 1$, то точка пересечения таких чевиан лежит внутри треугольника ABC и если $k < 0$ или $k > 1$, точка пересечения лежит вне ABC.

Теорема 7. *Если k-трисы (AA_1) и (BB_1) не пересекают соответственно стороны BC и AC треугольника ABC, то ΔABC равнобедренный ($AC = BC$).*

Доказательство. Так как $AA_1 \parallel BC$ и $BB_1 \parallel AC$ и (AA_1) и (BB_1) — k-трисы, то

$$\begin{cases} k\alpha + \beta = \pi \\ k\beta + \alpha = \pi \end{cases} \Rightarrow \ \alpha = \beta$$

Значит, ΔABC — равнобедренный. Что и требовалось доказать.

Теорема 8. *Пусть $0 < k \leq 1$, а чевианы AA_1 и BB_1 равны и являются k-трисами треугольника ABC. Тогда ΔABC равнобедренный.*

Доказательство. Пусть, как и раньше, $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$. По теореме синусов для треугольников ΔABB_1 и ΔBAA_1 имеем:

$$\frac{AB}{\sin(k\alpha+\beta)} = \frac{AA_1}{\sin\beta}, \quad \frac{AB}{\sin(k\beta+\alpha)} = \frac{BB_1}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\sin(k\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin(k\beta+\alpha)\sin\beta} = 1$$

Так как $AA_1 = BB_1$, то отсюда имеем

$$\begin{aligned}
&\sin(k\alpha+\beta)\sin\alpha = \sin(k\beta+\alpha)\sin\beta,\\
&\cos((k-1)\alpha+\beta) - \cos((k+1)\alpha+\beta) = \cos((k-1)\beta+\alpha) - \cos((k+1)\beta+\alpha),\\
&\cos((k-1)\alpha+\beta) - \cos((k-1)\beta+\alpha) = \cos((k+1)\alpha+\beta) - \cos((k+1)\beta+\alpha),\\
&\sin\frac{(\alpha+\beta)k}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta)(k-2)}{2} = \sin\frac{(\alpha+\beta)(k+2)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta)k}{2}.
\end{aligned}$$

Это равенство будет выполняться, при $\alpha = \beta$. В этом случае треугольник равнобедренный и утверждение верно. Предположим, что $\alpha \neq \beta$ и будем считать, что $\alpha > \beta$. Обозначим $u = \frac{\beta+\alpha}{2}$, $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Тогда

$$0 < v < u < \pi/2 \text{ или } \sin ku \cdot \sin(k-2)v = \sin(k+2)u \cdot \sin kv, \tag{11}$$

или

$$\frac{\sin(k+2)u}{\sin ku} = \frac{\sin(k-2)v}{\sin kv} \tag{12}$$

Положим $t = ku, \tau = kv$ и $\gamma = \frac{2}{k}$. Тогда наше равенство примет вид:

$$\frac{\sin(\gamma+1)t}{\sin t} = -\frac{\sin(\gamma-1)\tau}{\sin\tau}.$$

Очевидно, что $0 < t < \frac{\pi}{\gamma}$ по определению, а $\gamma \geq 2$ — по условию теоремы. Рассмотрим функции

$$f(t) = \frac{\sin(\gamma+1)t}{\sin t} \quad \text{и} \quad g(t) = -\frac{\sin(\gamma-1)t}{\sin t}, \tag{13}$$

где $0 < t < \frac{\pi}{\gamma}$. На этом отрезке функция $f(t)$ убывает, а $g(t)$ — возрастает, причем $f(0) = \gamma+1, g(0) = 1 - \gamma$ и $f\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) = g\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) = -1$. Следовательно, при $0 < t < \frac{\pi}{\gamma}$ функции $f(t)$ и $g(t)$ не принимают одинаковых значений. Это и доказывает теорему 8.

При $k > 1$ теорема 2 перестает быть верной, например, легко показать, что в любом прямоугольном треугольнике ($\angle C = 90°$) 2-трисы равны и равны стороне AB. Однако, имеет место следующие утверждения.

Утверждение 1. *Не прямоугольный треугольник с равными 2-трисами ($AA_1 = BB_1$) равнобедренный ($AC = BC$).*

Доказательство утверждения следует из равенств (1) при $k = 2$.

Утверждение 2. *Для любого $k > 1$ существуют неравнобедренные треугольники с равными k-трисами.*

Доказательство утверждения следует из свойств функций (13).

Утверждение 3. *Для любых $\alpha > \beta > 0, \alpha+\beta < \pi$ существуют $k > 1$ такие, что в треугольнике ABC с углами $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$ k-трисы равны. Причем для первого такого k выполняется неравенство: $k\alpha \leq \pi$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$r(k) = \sin(k+2)u \cdot \sin kv - \sin ku \cdot \sin(k-2)v$$

Тогда,

$$\begin{aligned}r(k) &= \sin ku \cdot \sin kv \cdot (\cos 2u - \cos 2v) + \sin ku \cdot \cos kv \cdot \sin 2v + \sin kv \cdot \cos ku \cdot \sin 2u = \\ &= \sin ku \cdot \sin kv \cdot (\cos 2u - \cos 2v) + \sin k(u+v) \cdot \sin 2u - \sin ku \cdot \cos kv \cdot (\sin 2u - \sin 2v) = \\ &= -2\sin ku \cdot \sin\beta \cdot (\sin kv \cdot \sin\alpha + \cos kv \cdot \cos\alpha) + \sin k\alpha \cdot \sin 2u = \\ &= -2\sin ku \cdot \sin\beta \cdot \cos(kv - \alpha) + \sin k\alpha \cdot \sin 2u.\end{aligned}$$

Эта функция имеет бесконечно много нулей и

$$r(1) = \sin 3u \cdot \sin v + \sin u \cdot \sin v = \sin v \cdot (\sin 3u + \sin u) = 2\sin v \cdot \sin 2u \cdot \cos u > 0$$

$$r\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = -2\sin ku \cdot \sin\beta \cdot \cos(kv - \alpha) < 0$$

Значит, между 1 и $\frac{\pi}{\alpha} > 1$ есть такое k, что $r(k) = 0$.

Утверждение доказано.

О некоторых кониках

Коники или *кривые второго порядка* обладают многими интересными свойствами [1]. В барицентрических координатах уравнение коники имеет вид [6, стр. 41]:

$$ux^2 + vx^2 + wx^2 + 2fyz + 2gyz + 2hyz = 0. \tag{14}$$

Там же указано определение вида коники и координат центра по ее уравнению. Положим $\Phi = U + V + W + 2(F + G + H)$, где $U = vw - f^2, V = uw - g^2, W = vu - h^2, F = gh - uf, G = fh - vg, H = fg - wh$. Тогда, если $\Phi > 0$, то коника является эллипсом, если $\Phi = 0$ — параболой, а если $\Phi < 0$ — гиперболой. Кроме того, известно условие Карно [6, стр. 41], [1, стр. 14]:

Теорема (Карно). *Пусть $A_1, A_2 \in (BC)$; $B_1, B_2 \in (CA)$; $C_1, C_2 \in (AB)$. Тогда эти шесть точек лежат на додной конике, если и только если выполнено условие Карно*:

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right) = 1$$

Недавно ученицей 10 класса Валерией Немычниковой была доказана следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть $AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2$ — чевианы треугольника ABC, причем имеют место равенства углов: $\angle A_1AB = \angle A_2AC$, $\angle B_1BC = \angle B_2BA$ и $\angle C_1CB = \angle C_2CA$. Тогда точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ принадлежат одной конике* (рис. 17).

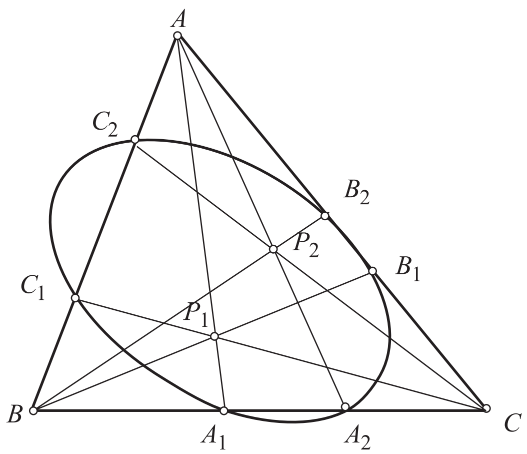


Рис. 17

Если в теореме 9 чевианы AA_1, BB_1, и CC_1 считать k-трисами углов $\angle BAC, \angle CBA$ и $\angle BCA$, соответственно, то при $k \to 0$ коники теоремы 9 будут стремиться к некоторой конике (не окружности). В барицентрических координатах она имеет вид:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}yz + \frac{\sin^2\beta\gamma}{\beta}xz + \frac{\sin^2\gamma}{\gamma}xy = 0$$

барицентрические координаты центра:

$$\left(\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\left(\frac{\sin^2\gamma}{\gamma} + \frac{\sin^2\beta}{\beta} - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\right) : \frac{\sin^2\beta}{\beta}\left(\frac{\sin^2\gamma}{\gamma} + \frac{\sin^2\alpha}{\alpha} - \frac{\sin^2\beta}{\beta}\right) : \right.$$
$$\left. : \frac{\sin^2\gamma}{\gamma}\left(\frac{\sin^2\beta}{\beta} + \frac{\sin^2\alpha}{\alpha} - \frac{\sin^2\gamma}{\gamma}\right)\right)$$

Этот центр внесен в Международную энциклопедию замечательных точек треугольника (ETC) [4] как

$X(5945)$ — *точка Немычниковой.*

Это обстоятельство заставляет нас провести в треугольнике шесть равных чевиан и доказать следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть шесть чевиан треугольника ABC равны ($AA_1 = AA_2 = BB_1 = BB_2 = CC_1 = CC_2$). Тогда точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ принадлежат одной конике.*

Доказательство. Пусть $AA_1 = AA_2 = BB_1 = BB_2 = CC_1 = CC_2 = l$. Обозначим также h_a, h_b и h_c, — высоты треугольника ABC, опущенные на стороны BC, AC и AB соответственно, а H_a, H_b и H_c — основания этих высот.

Тогда, $C_1H_c = C_2H_c$ и

$$BC_1 \cdot BC_2 = (BH_c - C_1H_c)\cdot(BH_c + C_1H_c) = BH_c^2 - C_1H_c^2 = BH_c^2 - (l^2 - h_c^2) =$$
$$= BH_c^2 + h_c^2 - l^2 = BC^2 - l^2.$$

Аналогично, получаем:

$$CA_1 \cdot CA_2 = AC^2 - l^2; \quad AC_1 \cdot AC_2 = AC^2 - l^2; \quad BA_1 \cdot BA_2 = AB^2 - l^2;$$
$$AB_1 \cdot AB_2 = AB^2 - l^2; \quad CB_1 \cdot CB_2 = BC^2 - l^2$$

Легко видеть, что условие Карно выполняется:

$$\left(\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{BA_2}{CA_2}\right)\cdot\left(\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{CB_2}{AB_2}\right)\cdot\left(\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{AC_2}{BC_2}\right) = \frac{AB^2 - l^2}{AC^2 - l^2}\cdot\frac{BC^2 - l^2}{AB^2 - l^2}\cdot\frac{AC^2 - l^2}{BC^2 - l^2} = 1$$

Теорема доказана.

Найдем барицентрические координаты точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. Введем обозначения: $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$ и пользуясь обозначениями предыдущей теоремы, положим $l_a = A_1H_a = A_2H_a$, $l_b = B_1H_b$, $l_c = C_1H_c$. Тогда барицентрические координаты точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ имеют вид:

$$A_1(0 : CA_1 : BA_1) = A_1(0 : b\cos\gamma + l_a \ : c\cos\beta - l_a); A_2(0 : b\cos\gamma - l_a \ : c\cos\beta + l_a);$$
$$B_1(a\cos\gamma - l_b : 0 : c\cos\alpha + l_b); B_2(a\cos\gamma + l_b : 0 : c\cos\alpha - l_b);$$
$$C_1(a\cos\beta - l_c : b\cos\alpha + l_c \ : 0); C_2(a\cos\beta + l_c : b\cos\alpha - l_c \ : 0).$$

Подставляя их в (14) и решая соответствующие системы уравнений, придем к конике со следующими параметрами:

$$\begin{aligned}
&u=(b^2-l^2)(c^2-l^2), \quad v=(a^2-l^2)(c^2-l^2), \quad w=(a^2-l^2)(b^2-l^2),\\
&f=-\frac{(a^2-l^2)(a^2-b^2-c^2+2l^2)}{2}, \quad g=-\frac{(b^2-l^2)(b^2-a^2-c^2+2l^2)}{2},\\
&h=-\frac{(c^2-l^2)(c^2-a^2-b^2+2l^2)}{2}
\end{aligned}$$

и центром $O(x_0:y_0:z_0)$, где

$$\begin{aligned}
x_0&=(a^2-l^2)(a^4-(b^2-c^2)^2)(a^2-b^2-c^2+l^2),\\
y_0&=(b^2-l^2)(b^4-(a^2-c^2)^2)(b^2-a^2-c^2+l^2)\\
z_0&=(c^2-l^2)(c^4-(a^2-b^2)^2)(c^2-b^2-a^2+l^2).
\end{aligned}$$

Любопытно, что при неограниченном возрастании l центр стремится к ортоцентру треугольника ABC.

Множество точек пересечения равных чевиан

Найдем геометрическое место точек пересечения равных чевиан произвольного треугольника ABC, проведенных из вершин A и B. Сразу же отметим, что все точки, лежащие на основание AB, принадлежат этому множеству.

Для треугольника ABC введем систему координат с центром в точке M, где CM — медиана ΔABC, а ось абсцисс содержит основание AB. Тогда, из теоремы синусов, координаты вершин ΔABC имеют вид:

$$\begin{aligned}
&A(-c,0), \quad B(c,0),\\
&C\left(c-\frac{2c\sin\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}, \frac{2c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}\right)=C\left(\frac{c\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}, \frac{2c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right),
\end{aligned} \tag{15}$$

где $c>0$ — некоторое число, а α,β,γ — углы ΔABC.

Если AA_1 и BB_1 — равные чевианы ΔABC, а (x_0,y_0) — точка их пересечения, то из параметрических уравнений прямых (AA_1) и (BC) имеем

$$\begin{pmatrix}x_0+c\\ y_0\end{pmatrix}\tau+\begin{pmatrix}-c\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}c\\ 0\end{pmatrix} \quad \left[\text{умножим на }\begin{pmatrix}\sin\beta\\ \cos\beta\end{pmatrix}\right]$$

$$((x_0+c)\,\sin\beta+y_0\cos\beta)\tau=2c\sin\beta\Rightarrow\tau=\frac{2c\sin\beta}{(x_0+c)\,\sin\beta+y_0\cos\beta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|AA_1|^2=\left|\begin{pmatrix}x_0+c\\ y_0\end{pmatrix}\frac{2c\sin\beta}{(x_0+c)\,\sin\beta+y_0\cos\beta}\right|^2=\frac{4c^2\sin^2\beta((x_0+c)^2+y_0^2)}{(y_0\cos\beta+(x_0+c)\,\sin\beta)^2}$$

Аналогично найдем квадрат длины BB_1:.

$$|BB_1|^2=\frac{4c^2\sin^2\alpha((x_0-c)^2+y_0^2)}{(y_0\cos\alpha-(x_0-c)\,\sin\alpha)^2}$$

Отсюда, учитывая равенство этих чевиан, приходим к уравнению:

$$\frac{\sin^2\beta((x_0+c)^2+y_0^2)}{(y_0\cos\beta+(x_0+c)\,\sin\beta)^2}=\frac{\sin^2\alpha((x_0-c)^2+y_0^2)}{(y_0\cos\alpha-(x_0-c)\,\sin\alpha)^2}$$

или

$$\begin{aligned}
&\sin^2\beta((x_0+c)^2+y_0^2)(y_0^2\cos^2\alpha-y_0(x_0-c)\,\sin 2\alpha+(x_0-c)^2\,\sin^2\alpha)=\\
&\qquad=\sin^2\alpha((x_0-c)^2+y_0^2)(y_0^2\cos^2\beta+y_0(x_0+c)\sin 2\beta+(x_0+c)^2\,\sin^2\beta).
\end{aligned}$$

После несложных преобразований и, полагая для удобства $x_0 = x, y_0 = y$ и $2c = 1$, приходим к уравнению:

$$
\begin{aligned}
&y((x^2+y^2)(y\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)-2x\sin\alpha\sin\beta)+\\
&\qquad+(y^2-x^2)\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)+xy(\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha-\\
&\qquad-2\sin^2\beta\sin^2\alpha)+\frac{1}{2}x\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta+\alpha)+\frac{1}{4}y\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)+\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha))=0.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем первое (тривиальное) решение: $y = 0$ и кубическую кривую, определяемую уравнением:

$$
\begin{aligned}
&(x^2+y^2)\sin(\beta+\alpha)(y\sin(\beta-\alpha)-2x\sin\alpha\sin\beta)+\\
&\qquad+(y^2-x^2)\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)+xy(\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha-\\
&\qquad-2\sin^2\beta\sin^2\alpha)+\frac{1}{2}x\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta+\alpha)+\frac{1}{4}y\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)+\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)=0. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Как известно, кривые третьего порядка имеют довольно сложные классификации [7], [8]. Мы не будем останавливаться на полном исследовании нашей кривой, но отметим лишь некоторые ее свойства.

В [7, стр. 44] показано, что если кубическая кривая имеет вид:

$$Ax^3+3Bx^2y+3Cy^2x+Dy^3+3Ex^2+6Fxy+3Gy^2+3Hx+3Ky+L=0,$$

а $y = kx + b$ — уравнение ее асимптоты, то угловой коэффициент k и начальная ордината b определяются равенствами:

$$A+3Bk+3Ck^2+Dk^3=0, \quad (B+2Ck+Dk^2)b=-(E+2Fk+Gk^2).$$

При этом начальная ордината b может не существовать. Но в нашем случае k и b находятся легко и определяются равенствами:

$$
\begin{aligned}
&(k^2+1)(k\sin(\beta-\alpha)+2\sin\alpha\sin\beta)=0, \quad k=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)},\\
&b=-\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta+\alpha)}{\sin^2(\beta-\alpha)+4\sin^2\alpha\sin^2\beta}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, наша кривая имеет одну асимптоту:

$$y=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}x-\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta+\alpha)}{\sin^2(\beta-\alpha)+4\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

или

$$x=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha\sin\beta}\left(y+\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta+\alpha)}{\sin^2(\beta-\alpha)+4\sin^2\alpha\sin^2\beta}\right). \qquad (17)$$

Согласно классификации Ньютона [7, стр. 47], эта кривая относится ко второй группе, имеет одну асимптоту и одну бесконечную ветвь прямолинейного типа (прямолинейной называется гиперболическая ветвь, вытянутая вдоль прямой, являющейся асимптотой). Кривые этой группы называют *hyperbolae defectivae* (*дефективные гиперболы*).

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению

Теорема 11. *Геометрическое место точек пересечения пар равных чевиан AA_1 и BB_1 треугольника ABC есть объединение отрезка AB и кубической кривой hyperbolae defectivae (по классификации Ньютона). Эта кривая обладает следующими свойствами:*

а) пересекает прямую (AB) ровно в трех точках: A, B и E, причем E симметрична относительно точки M — середины AB — точке H — основанию высоты CH треугольника ABC;
б) пересекает серединный перпендикуляр стороны AB только в одной точке N, лежащей ниже основания AB, причем $MN{=}CH$, где CH — высота треугольника ABC;
в) ее асимптота параллельна медиане CM треугольника ABC;
г) точка D самопересечения (узел) гиперболы симметрична вершине C относительно M (середины AB).

Доказательство. *а*) Заметим, что $A(-\frac{1}{2}, 0)$, $B(\frac{1}{2}, 0)$, $C\left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin(\alpha+\beta)}, \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right)$. Теперь, подставляя в уравнение (16) $y=0$, получим утверждение *а*):

$$-2x^3\sin(\beta+\alpha)\sin\alpha\sin\beta - x^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha) + \frac{1}{2}x\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta+\alpha) + \\ + \frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha) = 0$$

или

$$x^3\sin(\beta+\alpha) + \frac{1}{2}x^2\sin(\beta-\alpha) - \frac{1}{4}x\sin(\beta+\alpha) - \frac{1}{8}\sin(\beta-\alpha) = 0,$$
$$x\sin(\beta+\alpha)\left(x^2-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)\left(x^2-\frac{1}{4}\right) = 0; \quad x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = -\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin(\beta+\alpha)}.$$

Аналогично докажем б), подставляя в (16) $x=0$:

$$y^3\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) + y^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha) + \frac{1}{4}y\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha) + \\ + \frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha) = 0,$$
$$y^3\sin(\beta+\alpha) + y^2\sin\alpha\sin\beta + \frac{1}{4}y\sin(\beta+\alpha) + \frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta = 0,$$
$$\left(y + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta+\alpha)}\right)\left(y^2+\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow y_N = -\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta+\alpha)} = -y_C.$$

Для доказательства в) найдем котангенс угла CMB:

$$\operatorname{ctg} CMB = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}}{\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}} = \frac{\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha\cos\beta}$$

Отсюда и (17) получаем утверждение в).

Пункт г) достаточно очевиден, т.к. $ACBD$ — параллелограмм. То есть, при приближении к точке D, чевианы становятся параллельными сторонам треугольника (их длины бесконечно возрастают). Однако приведем более строгие рассуждения, полезные для построения нашей кривой.

Для построения полученной гиперболы найдем ее параметрическое представление. В качестве параметра будем использовать величину l — длины чевиан. Очевидно, что $l \geq \max\{h_a, h_b\}$, где h_a и h_b — высоты ΔABC, опущенные из вершин A и B соответственно.

Пусть AA_1, AA_2, BB_1 и BB_2 — чевианы ΔABC, длины которых равны l. Тогда, легко видеть, что т.к. $AB=1$, то

$$AB_i = \cos\alpha \pm \sqrt{l^2-\sin^2\alpha},\ BA_i = \cos\beta \pm \sqrt{l^2-\sin^2\beta}, \qquad i = 1,\ 2. \tag{18}$$

Найдем точки $(x_{i,j}, y_{i,j})$ — пересечения чевиан AA_i, BB_j, используя параметрические уравнения прямых (AA_i) и (BB_j), $i,j = 1,\ 2$:

$$
\begin{aligned}
&\left[AB_i\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right]t+\begin{pmatrix}0{,}5\\0\end{pmatrix}=\left[BA_j\begin{pmatrix}-\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\tau+\begin{pmatrix}-0{,}5\\0\end{pmatrix}\\
&\begin{pmatrix}AB_i\cos\alpha-1\\ AB_i\sin\alpha\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-BA_j\cos\beta+1\\ BA_j\sin\beta\end{pmatrix}\tau\\
&\left[\begin{pmatrix}AB_i\cos\alpha-1\\ AB_i\sin\alpha\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}BA_j\sin\beta\\ BA_j\cos\beta-1\end{pmatrix}=0\\
&t=\frac{-BA_j\sin\beta}{AB_iBA_j\sin(\alpha+\beta)-(BA_j\sin\beta+AB_i\sin\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем параметрическое уравнение нашей кривой. Точнее, мы получили уравнения 4-х кривых, из которых и состоит наша гипербола.

$$
\begin{pmatrix}x_{i,j}\\ y_{i,j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-BA_jAB_i\sin\beta\cos\alpha+2cBA_j\sin\beta}{AB_iBA_j\sin(\alpha+\beta)-BA_j\sin\beta-AB_i\sin\alpha}+\frac{1}{2}\\ \frac{-BA_jAB_i\sin\alpha\sin\beta}{AB_iBA_j\sin(\alpha+\beta)-BA_j\sin\beta-AB_i\sin\alpha}\end{pmatrix},\quad i,j=1,2 \tag{19}
$$

С помощью этих уравнений легко строить наши гиперболы. Кроме того, из (19) видно, что при неограниченном увеличении длин чевиан l полученные 4 кривые пересекаются в узловой точке D:

$$
\lim_{l\to\infty}\begin{pmatrix}x_{i,j}\\ y_{i,j}\end{pmatrix}=\lim_{l\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{-\sin\beta\cos\alpha+\frac{\sin\beta}{AB_i}}{\sin(\alpha+\beta)-\frac{\sin\beta}{AB_i}-\frac{\sin\alpha}{BA_j}}+\frac{1}{2}\\ \frac{-\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)-\frac{\sin\beta}{AB_i}-\frac{\sin\alpha}{BA_j}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-\sin(\beta-\alpha)}{2\sin(\alpha+\beta)}\\ \frac{-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\end{pmatrix}
$$

Сравнивая с точкой $C\left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin(\alpha+\beta)},\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right)$ получаем утверждение д).

На рисунках ниже представим примеры наших кривых. На рисунке 18 представлена кривая для углов $\alpha=20^\circ$ и $\beta=40^\circ$, на рисунке 19 — для $\alpha=40^\circ$ и $\beta=120^\circ$.

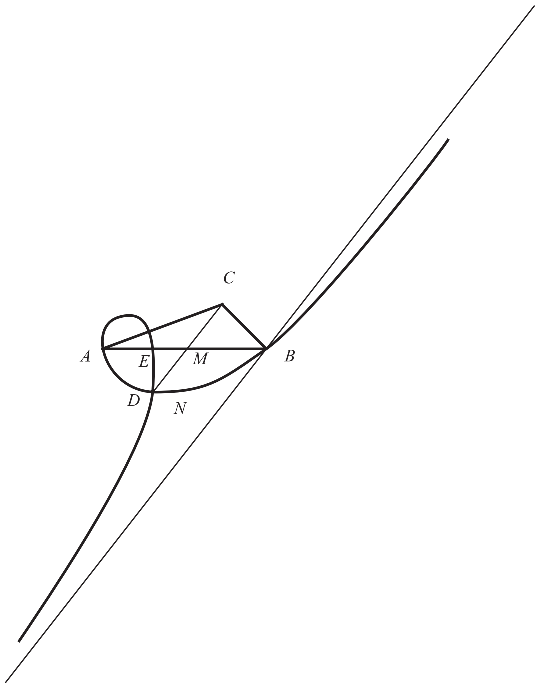


Рис. 18.

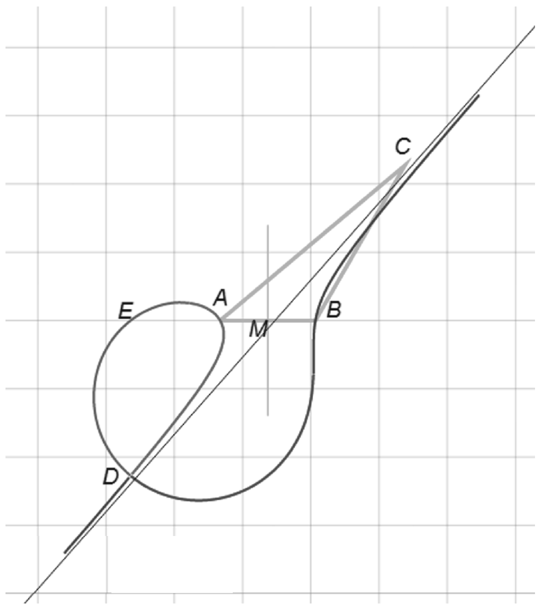


Рис. 19.

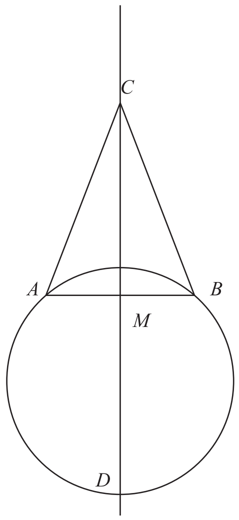


Рис. 20.

В заключение приведем полезное следствие для равнобедренных треугольников:

Следствие 3. *Геометрическое место точек пересечения пар равных чевиан AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) есть объединение отрезка AB, оси его симметрии и окружности, симметричной окружности, описанной около ΔABC, относительно прямой (AB).*

Доказательство. Подставляя в (16) $\alpha = \beta$, получим

$$-2x(x^2+y^2)\sin 2\alpha \sin^2\alpha + 2xy(\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha) + \frac{1}{2}x\sin^2\alpha\sin 2\alpha = 0,$$

$$-x(2(x^2+y^2)\sin 2\alpha - 2y\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha) = 0.$$

Отсюда имеем первое решение $x = 0$, т.е. ось симметрии ΔABC. Далее, имеем

$$x^2\sin 2\alpha + y^2\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha = 0, \quad y^2 - y\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + x^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\left(y + \frac{\cos\gamma}{2\sin\gamma}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{1}{2\sin\gamma}\right)^2 = R^2,$$

где $\gamma = \pi - 2\alpha$, а R — радиус, описанной около ΔABC окружности. Следствие доказано.

Литература

[1] Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. - М.: МЦНМО, 2011.

[2] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. Изд. 7-е, стереотипное. - М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1967. - С. 138-139.

[3] Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. - М.: Наука. Физматлит, 1978

[4] Kimberling. Encyclopedia of Triangle Centers. URL: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia

[5] Мякишев А.Г. Элементы геометрии треугольника. - М.: МЦНМО, 2002.

[6] Мякишев А.Г. // Математическое Образование. - № 4(68). - 2013.

[7] Савелов А.А. Плоские кривые, систематика, свойства, применения. - М.: Наука. Физматлит, 1960.

[8] Смогоржевский А.С., Столова Е.С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. - М.: Наука. Физматлит, 1961.

Привалов Александр Андреевич,
доцент кафедры “Теоретическая информатика
и дискретная математика” Московского
Государственного педагогического университета,
учитель математики Московского
химического лицея № 1303,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: a_privalov@bk.ru

Рабе Алексей Дмитриевич,
ученик 9Б класса Московского
химического лицея № 1303.

Об одном способе построения эллипса

Е. Г. Смольянова

Если вершины отрезка фиксированной длины скользят по сторонам угла, его середина описывает дугу некоторого эллипса. На основе этого факта разработан способ построения эллипса, заданного уравнением в декартовой системе координат.

Пусть в системе координат XOY имеются прямые с уравнениями $y = \pm k \cdot x$ для некоторого $k > 0$. Обозначим через Γ график функции $y = k \cdot |x|$. Выберем положительное число p и рассмотрим хорду A_1A_2 длины $d = 2 \cdot p$ «угла» Γ, где $(x_1; -k \cdot x_1)$ и $(x_2; k \cdot x_2)$ — координаты точек A_1 и A_2 соответственно $(x_1 \leq 0; x_2 \geq 0)$, рис. 1.

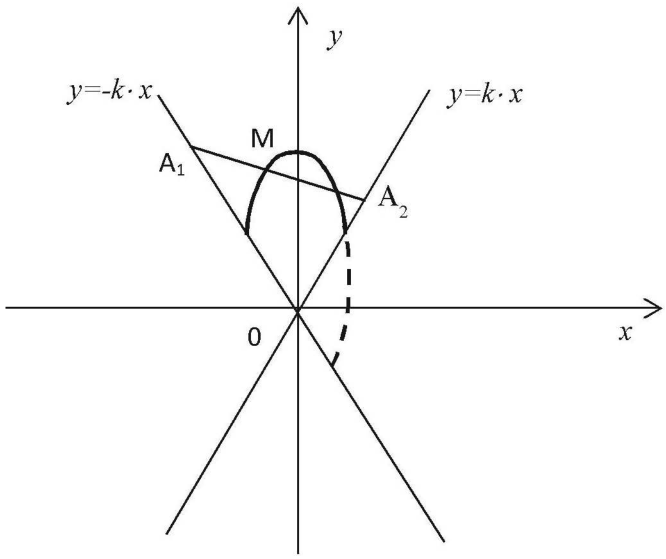


Рис. 1

Тогда

$$(x_1 - x_2)^2 + k^2 \cdot (x_1 + x_2)^2 = d^2. \tag{1}$$

Будем непрерывно изменять положение хорды A_1A_2 (от $x_2 = 0$ до $x_2 = \dfrac{d}{\sqrt{1+k^2}}$). Интерес представляет ответ на вопрос о геометрическом месте T переменных середин M движущейся хорды. Проведем соответствующее исследование, а именно найдем зависимость между координатами $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ и $y_M = k \cdot \dfrac{-x_1 + x_2}{2}$ при условии (1). Так как

$$\begin{cases} 2 \cdot x_M = x_1 + x_2, \\ 2 \cdot y_M = k \cdot (-x_1 + x_2), \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} 4 \cdot x_M^2 \cdot k^2 = (x_1 + x_2)^2 \cdot k^2, \\ 4 \cdot \frac{y_M}{k^2} = (-x_1 + x_2)^2. \end{cases}$$

Следовательно, $(k \cdot x_M)^2 + \left(\dfrac{1}{k} \cdot y_M\right)^2 = p^2$ или, что то же,

$$\frac{x_M^2}{(p/k)^2} + \frac{y_M^2}{(p \cdot k)^2} = 1.$$

Итак, T — это дуга эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

(в «угле» Г) с полуосями $a=\dfrac{p}{k}$ и $b=p\cdot k$. Заметим сразу, что

1) $a\cdot b=p^2=\dfrac{d^2}{4}$ — не зависит от выбора углового коэффициента k;

2) при $k=1$ уравнение (2) определяет окружность с центром $O(0;0)$ и радиусом $R=p=d/2$. Поэтому T — соответствующая дуга этой окружности.

Как начертить эллипс (2) полностью? Осуществим замену координат:

$$x'=-y; \qquad y'=x,$$

т.е. по сути — поворот координатных осей на угол 90° (по часовой стрелке). Тогда новые координаты точки M будут такими:

$$(x'_M;y'_M)=\left(\frac{y'_1+y'_2}{2};\frac{1}{k}\cdot\frac{x'_1-x'_2}{2}\right)$$

и поэтому

$$\frac{(x'_M)^2}{(p\cdot k)^2}+\frac{(y'_M)^2}{(p/k)^2}=1.$$

Выясняется, что в результате точка M «начертит» еще одну часть эллипса (2), расположенную между теми же прямыми $y=\pm k\cdot x$, только в других координатных четвертях: I и IV (на рис. 1 эта часть эллипса изображена пунктирной линией). Вывод: середина М движущейся хорды продолжит вычерчивать эллипс (2), если применять те же рассуждения к «углу» из прямых $y=\pm k\cdot x$ в I-й и IV-й координатных четвертях. Поэтому мы окончательно достроим эллипс, задействовав оставшиеся две пары четвертей координатной плоскости XOY.

Пример 1. Пусть требуется построить эллипс с уравнением

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}=1.$$

Так как $a=2, b=8$, то $a\cdot b=4^2=p^2$ и значит, $d=2p=8$ — длина хорды. Угловой коэффициент k определяется любым из условий:

$$\frac{p}{k}=a \text{ или } p\cdot k=b,$$

поэтому $k=2$. Итак, для решения поставленной задачи понадобятся прямые $y=\pm 2\cdot x$ и хорда длины $d=8$.

Попытаемся обобщить предыдущее на случай прямых с различными по модулю угловыми коэффициентами k_1 и k_2.

Если $A_1(x_1;k_1\cdot x_1)$ и $A_2(x_2;k_2\cdot x_2)$ — концы хорды «угла» из прямых $y=k_1\cdot x$ и $y=k_2\cdot x$, то условие неизменности ее длины выразится уравнением

$$(x_1-x_2)^2+(k_1\cdot x_1-k_2\cdot x_2)^2=d^2 \tag{1$'$}$$

Координаты точки M: $x_M=(x_1+x_2)/2, y_M=(k_1\cdot x_1+k_2\cdot x_2)/2$. Тогда уравнение связи этих переменных координат (с учетом $(1')$) будет таким:

$$\left(1+\left(\frac{2\cdot k_1\cdot k_2}{k_1+k_2}\right)^2\right)\cdot x_M^2-4\cdot\frac{1+k_1\cdot k_2}{k_1+k_2}\cdot x_M\cdot y_M+\left(1+\frac{4}{(k_1+k_2)^2}\right)\cdot y_M^2=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\cdot p\right)^2$$

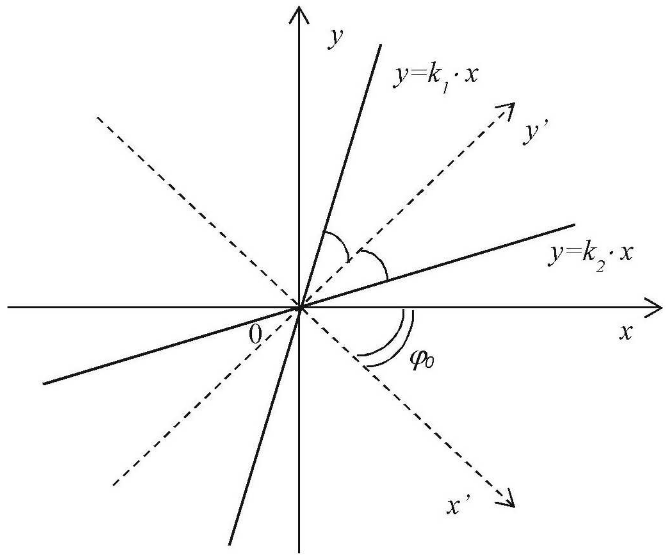


Рис. 2

и, значит, геометрическое место середин движущейся хорды «угла» из этих прямых определяется уравнением 2-го порядка

$$A' \cdot x^2 + 2 \cdot B' \cdot x \cdot y + C' \cdot y^2 = D', \qquad (2')$$

где $A', 2 \cdot B', C', D'$ — соответствующие коэффициенты из предыдущего уравнения.

Заметим, что если $k_1 \cdot k_2 = -1$ (т.е. если прямые взаимно перпендикулярны), то $(2')$ является уравнением окружности с центром $O(0,0)$ и радиусом $R = p = d/2$. Какую кривую 2-го порядка определяет уравнение $(2')$ в общем случае? Совершенно очевидно из предыдущего, что эта кривая — эллипс, уравнение которого «приобретет» канонический вид при соответствующем повороте координатных осей (рис. 2). В этой новой системе координат угловые коэффициенты прямых $y = k_1 \cdot x$ и $y = k_2 \cdot x$ «сравняются» по модулю: $|k_1'| = |k_2'| = k'$, а само уравнение будет таким:

$$\frac{(x')^2}{(p/k')^2} + \frac{(y')^2}{(p \cdot k')^2} = 1. \qquad (2'')$$

Разумеется, алгоритмы преобразования уравнений любой кривой 2-го порядка к каноническому виду — известны. Но нас будет интересовать другое, а именно: как подобрать коэффициенты k_1 и k_2 и длину d хорды «угла» чтобы построить описанным выше способом эллипс с уравнением вида

$$A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 - D = 0, \qquad (B \neq 0, A > 0, D > 0). \qquad (3)$$

Можно, конечно, обратиться к уравнению $(2')$. Однако коэффициенты квадратичных форм в $(2')$ и (3) не обязаны совпадать, так как уравнение (3), вообще говоря, — результат алгебраического преобразования уравнения $(2')$:

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = \mu$$

для некоторого $\mu \neq 0$. Это обстоятельство не добавляет оптимизма, поскольку задача приобретает бóльшую степень сложности. Пойдем другим путем, а именно — перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho \cdot \cos t, \quad y = \rho \cdot \sin t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Результат преобразования уравнения (3):

$$\rho^2 = \frac{2 \cdot D}{(A + C) + [(A - C) \cdot \cos 2t + 2 \cdot B \cdot \sin 2t]}.$$

Поскольку

$$\min_{0\le t<2\pi}\left[(A-C)\cdot\cos 2t+2\cdot B\cdot\sin 2t\right]=-\sqrt{(A-C)^2+(2\cdot B)^2}=-U,$$
$$\max_{0\le t<2\pi}\left[(A-C)\cdot\cos 2t+2\cdot B\cdot\sin 2t\right]=\sqrt{(A-C)^2+(2\cdot B)^2}=U,$$

то

$$\min\rho=\sqrt{\frac{2\cdot D}{A+C+U}},\qquad \max\rho=\sqrt{\frac{2\cdot D}{A+C-U}}.$$

Эти «крайние» значения ρ соответствуют полярным радиусам вершин эллипса (3), а так как $a\cdot b=p^2$, то

$$\min\rho\cdot\max\rho=a\cdot b=\frac{2\cdot D}{\sqrt{(A+C)^2-U^2}}=\frac{D}{\sqrt{A\cdot C-B^2}}=p^2,$$

($A\cdot C-B^2>0$ для любого эллипса). Следовательно, $d=2\cdot\sqrt[4]{\frac{D^2}{A\cdot C-B^2}}$. Подобрана длина хорды A_1A_2.

Далее, определим угол φ_0 поворота координатных осей из известного соотношения $\operatorname{ctg}(2\cdot\varphi_0)=(A-C)/(2\cdot B)=N$.

Случай 1. $N\neq 0$, то есть $A\neq C$.

Если $k_0=\operatorname{tg}\varphi_0$, то k_0 определяем из уравнения

$$k_0^2+2\cdot N\cdot k_0-1=0, \tag{4}$$

выбирая из двух решений то число, знак которого совпадает со знаком N.

Обозначим: $k_1=\operatorname{tg}\varphi_1, k_2=\operatorname{tg}\varphi_2$, где k_1 и k_2 — искомые угловые коэффициенты. Так как $a=p/k'$ и $b=p\cdot k'$, то

$$(k')^2=\frac{p^2}{a^2}=\frac{p^2}{\max\rho^2}=\sqrt{\frac{A+C-U}{A+C+U}}\ \text{ в случае }\ b<a$$

и

$$(k')^2=\sqrt{\frac{A+C+U}{A+C-U}}\ \text{ в случае }\ b>a\ (k'>0).$$

Остается найти k_1 и k_2 из условий:

$$\begin{cases} k'=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_0)=\dfrac{k_2-k_0}{1+k_2\cdot k_0}\\ \dfrac{k_1+k_2}{1-k_1\cdot k_2}=\frac{1}{N}\ \left(\text{поскольку }\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\text{ равно }(90^\circ+\varphi_0)\text{ или }\varphi_0\right).\end{cases}$$

Окончательно:

$$\begin{cases} k_2=\dfrac{k_0+k'}{1-k_0\cdot k'},\\ k_1=\dfrac{1-N\cdot k_2}{N+k_2},\end{cases} \tag{5}$$

причем при отборе пары $(k_1;k_2)$ имеем ввиду, что $A>C$ или $A<C\Leftrightarrow|k_1\cdot k_2|>1$ или $|k_1\cdot k_2|<1$ соответственно. Полуоси эллипса найдутся через p и k' известным образом.

Случай 2. $N=0$, т.е. $A=C$.

Тогда из уравнения $(2')$: $|k_1\cdot k_2|=1$. Если допустить, что $k_1\cdot k_2=-1$, то $(2')$ — уравнение окружности.

Значит, $k_1\cdot k_2=1$, $B\neq 0$. Тогда k_1 и k_2 имеют один и тот же знак. Найдем их непосредственно из условия пропорциональности коэффициентов уравнений $(2')$ и (3):

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}.$$

Получим:

$$B \cdot (k_1 + k_2)^2 + 4 \cdot A \cdot (k_1 + k_2) + 4 \cdot B = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = 1, \\ k_1 + k_2 = \dfrac{k_1^2 + 1}{k_1} = \dfrac{-2 \cdot (A \pm \sqrt{A^2 - B^2})}{B} = V. \end{cases}$$

Задача свелась к решению квадратного уравнения

$$t^2 - V \cdot t + 1 = 0. \tag{6}$$

Остается отобрать корни, учитывая, что k_1 и k_2 противоположны числу B по знаку.

Пример 2. Пусть уравнение эллипса такое:

$$17x^2 + 4xy + 5y^2 - 36 = 0.$$

Тогда $A = 17, B = 2, C = 5, D = 36 \Rightarrow N = (A - C)/(2B) = 3 > 0$.

Коэффициент k_0 найдется из уравнения (4):

$$k_0^2 + 6 \cdot k_0 - 1 = 0.$$

Положительный корень $k_0 = \sqrt{10} - 3$. Так как $U = \sqrt{(A - C)^2 + (2 \cdot B)^2}$, то $U = 4 \cdot \sqrt{10}$. Тогда

$$\sqrt{\frac{A + C - U}{A + C + U}} = \sqrt{\frac{11 - 2\sqrt{10}}{11 + 2\sqrt{10}}}, \qquad \sqrt{\frac{A + C + U}{A + C - U}} = \sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{10}}{11 - 2\sqrt{10}}}.$$

Соответствующие значения k':

$$\sqrt[4]{\frac{11 - 2\sqrt{10}}{11 + 2\sqrt{10}}} \text{ и } \sqrt[4]{\frac{11 + 2\sqrt{10}}{11 - 2\sqrt{10}}}.$$

Выполним расчеты по формулам (5) для определения k_1 и k_2. Получим, что либо $(k_1; k_2) = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, либо $(k_1; k_2) = (-1; 2)$. А так как $A = 17 > 5 = C$, то $|k_1 \cdot k_2| > 1$. Значит, искомая пара: $(k_1; k_2) = (-1; 2)$.

Соответствующая хорда будет иметь длину

$$d = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{D^2}{A \cdot C - B^2}} = 4.$$

Итак, для построения данного эллипса понадобятся прямые $y = -x, y = 2x$ и хорда длины $d = 4$.

Пример 3. Найдем (k_1, k_2, d) для эллипса с уравнением

$$17x^2 - 30xy + 17y^2 - 392 = 0.$$

Имеем: $A = 17, B = -15, C = 17, D = 392 \Rightarrow N = 0$. Применим (6) при $V = V_1 = -2 \cdot (17 - 8)/(-15) = 6/5$:

$$t^2 - \frac{6}{5} \cdot t + 1 = 0.$$

У этого уравнения отрицательный дискриминант, поэтому $t \in \varnothing$. Применим (6) при $V = V_2 = -2 \cdot (17 + 8)/(-15) = 10/3$:

$$t^2 - \frac{10}{3} \cdot t + 1 = 0.$$

Решения этого уравнения: $t_1 = 3$ и $t_2 = 1/3$, то есть $(k_1; k_2) = ((1/3); 3)$. Осталось найти длину хорды:

$$d = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{392^2}{(17)^2 - (-15)^2}} = 14.$$

Итак, $(k_1, k_2, d) = \left(3; \frac{1}{3}; 14\right)$.

В заключение отметим, что с помощью описанного алгоритма можно построить эллипс общего вида с уравнением

$$A \cdot x^2 + 2 \cdot Bxy + C \cdot y^2 + 2 \cdot E \cdot x + 2 \cdot G \cdot y + D = 0,$$

предварительно упрощая линейную часть соответствующим переносом центра системы координат.

Смольянова Елена Григорьевна
доцент кафедры математического анализа,
ФГБОУ ВО Мордовский государственный
университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск.

E-mail: janovaeg@mail.ru

О методике преподавания теории графов

И. В. Сухан, Г. Г. Кравченко, О. В. Иванисова

В статье обсуждаются вопросы методики преподавания теории графов студентам математических специальностей вузов. Предложена методическая схема курса, приведен пример типового расчета, контролирующего освоение материала студентами.

В настоящее время дискретная математика и смежные с ней разделы привлекают большое внимание специалистов различных областей науки и техники, так как служат эффективным аппаратом формализации современных инженерных задач, связанных с дискретными объектами. Особое значение с практической точки зрения имеет теория графов, использующаяся при проектировании интегральных схем и схем управления, исследовании автоматов и логических цепей, при системном анализе, автоматизированном управлении производством, при разработке вычислительных и информационных сетей и т.д.

В приложениях часто приходится рассматривать графы с ориентированными ребрами, т.е. ребрами, для которых указаны начало и конец. Примерами таких графов являются сети автомобильных дорог с односторонним движением или схемы программ для ЭВМ. Недостаточно простых (неориентированных) графов и для описания несимметричных отношений. Примерами подобных отношений могут служить порядок выполнения комплекса работ, задаваемый с помощью сетевого графика, или турнирная ситуация в спортивных соревнованиях.

Являясь одним из основных разделов дискретной математики, теория графов в то же время оказывается достаточно трудным объектом изучения.

Теория графов — наука сравнительно молодая и как учебная дисциплина еще окончательно не сформировалась. Это затрудняет разработку рабочих программ и оценочных средств текущего контроля успеваемости, а также промежуточной и итоговой аттестации.

Содержание дисциплины, в рамках которой изучается теория графов, охватывает круг вопросов, связанных с основами современной теории графов, классическими алгоритмами на графах, спецификой их применения, а также с использованием алгоритмов для доказательства теоретических результатов о графах.

Опыт преподавания дискретной математики на факультете математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета позволил сделать вывод, что для гибкого планирования для разных направлений подготовки бакалавров теорию графов как учебную дисциплину удобно разбить на три модуля.

Первый модуль — это основы теории графов: представление графов и изоморфизм, операции с графами, маршруты, метрические характеристики графов, деревья, связность и планарность графов.

Второй модуль — это специальные вопросы теории графов: эйлеровы и гамильтоновы графы, раскраски графов, независимость и покрытия, паросочетания.

Третий модуль — это вопросы, относящиеся к ориентированным графам.

Теория графов может изучаться в разных объемах в рамках различных дисциплин.

По нашему мнению, в общий курс дискретной математики достаточно включить материал, относящийся только к первому или к первому и второму модулям, а материал, относящийся к ориентированным графам, лучше оформить в специальный курс.

Например, для студентов направления "Математика и компьютерные науки" КубГУ предусмотрен отдельный курс "Комбинаторные алгоритмы", который посвящен изучению классических алгоритмов решения задач на графах; построению новых алгоритмов и модификации и комбинации уже известных схем для решения конкретных задач; оценке эффективности указанных алгоритмов.

В дальнейшем для отдельных профилей разработан курс “Алгоритмы на ориентированных графах”, в рамках которого студенты обучаются применять на практике методы теории орграфов, алгоритмы решения оптимизационных задач на орграфах; получают четкое представление о видах моделей, основанных на теории орграфов, о способах их построения; учатся разрабатывать алгоритм применяемого метода решения; реализовать программно алгоритм с помощью инструментальных средств и прикладных программ; анализировать полученные результаты, осуществлять выбор методики решения и построения алгоритма той или иной задачи, давать анализ результатов решения и оценивать границы применимости выбранного метода.

Наиболее полным и доступным пособием, в котором приведены соответствующие теоретические сведения по теории графов, является [2]. Достаточно объемный сборник задач, как типовых, так и нестандартных, представлен в пособиях [3] и [4].

Остановимся подробнее на дисциплинах, изучающих неориентированные графы.

Преподавателями кафедры вычислительной математики и информатики КубГУ было создано учебное пособие [7], в котором собран теоретический материал по первым двум модулям и приведены разноплановые задачи, призванные закрепить умения и навыки работы с графами.

В процессе преподавания данной дисциплины сложилась практика использования так называемого *типового расчета* по теории графов для текущего контроля успеваемости. Типовой расчет представляет собой набор небольших расчетных заданий, направленных на отработку базовых понятий теории графов.

Ниже приведены задания, общие для всех студентов. Согласно номеру варианта преподаватель указывает граф (не более 8 вершин), с которым предстоит работать студенту.

Типовой расчет

1. Пометьте вершины графа числами 1, 2, 3, ... Найдите степени всех вершин графа. Проверьте справедливость леммы о рукопожатиях для данного графа. Является ли граф регулярным? Полным?

2. Сколько ребер содержит дополнение графа? Нарисуйте его. Является ли граф самодополнительным? Приведите пример графа, изоморфного данному.

3. Постройте матрицу смежности графа и матрицу инцидентности. Как по ним определить степени вершин? Покажите связь между этими матрицами.

4. Приведите пример графа, гомеоморфного данному. Постройте граф, производными от которого являются эти графы.

5. Есть ли в графе циклы? Приведите три примера. Чему равен обхват графа?

6. Является ли граф двудольным? (Воспользуйтесь поиском в ширину и теоремой Кенига).

7. Постройте матрицу расстояний графа. Найдите эксцентриситеты всех вершин графа, его радиус, диаметр, центр, периферию и медианы.

8. Постройте подграф, порожденный вершинами 1, 2, 3, 4. Найдите в нем все маршруты длины 3. Сколько их? Какие из них являются цепями? Простыми цепями? Какие из них являются циклами?

9. Чему равно цикломатическое число графа?

10. Сколько остовов имеет граф? Нарисуйте один из них, построив его при помощи обхода в ширину или глубину или разрушая циклы.

11. Постройте для остова из п.10 код Прюфера, затем переведите этот код обратно в дерево. (Убедитесь, что это одно и то же дерево).

12. Постройте матрицу фундаментальных циклов данного графа.

13. Найдите число вершинной связности и число реберной связности графа. Есть ли в графе точки сочленения и мосты?

14. Является ли граф планарным? Воспользовавшись алгоритмом γ, постройте его плоскую укладку или докажите, что граф не планарный.

15. Проверьте справедливость формулы Эйлера для плоской укладки из п.14. Триангулируйте полученный плоский граф. Сколько у него ребер и граней?

16. Найдите род, толщину, число скрещиваний, искаженность графа.

17. Является ли граф эйлеровым, гамильтоновым? Если нет, то проверьте, имеет ли он эйлерову и/или гамильтонову цепь.

18. Постройте правильную раскраску графа. Определите его хроматическое число.

19. Постройте хроматический полином данного графа.

20. Найдите независимые подмножества вершин графа, максимальные независимые подмножества вершин графа, наибольшие независимые подмножества вершин графа. Определите число независимости графа.

21. Найдите доминирующие подмножества вершин графа, минимальные доминирующие подмножества вершин графа, наименьшие доминирующие подмножества вершин графа. Найдите число доминирования.

22. Найдите ядро графа.

23. Найдите вершинные покрытия графа, минимальные вершинные покрытия графа, наименьшие вершинные покрытия графа. Найдите число вершинного покрытия.

24. Найдите реберные покрытия графа, минимальные реберные покрытия графа, наименьшие реберные покрытия графа. Найдите число реберного покрытия.

25. Найдите клики графа, максимальные клики графа, наибольшие клики графа. Нарисуйте подграфы, порожденные максимальными кликами. Найдите плотность графа. Найдите число кликового покрытия. Постройте матрицу клик, граф клик.

26. Найдите паросочетания графа, максимальные паросочетания, наибольшие паросочетания графа. Найдите число паросочетания.

На выполнение данных заданий студенту отводится весь семестр. Умение решать подобные задачи является необходимым “минимумом” для допуска студента к зачету или экзамену.

Практика выполнения таких заданий демонстрирует достаточный уровень овладения студентами базовыми понятиями теории графов и формулировками основных теорем.

С ориентированными графами дело обстоит сложнее.

При подготовке соответствующего курса авторы столкнулись с тем, что в литературе по теории графов раздел “Ориентированные графы” представлен довольно поверхностно, а алгоритмы решения задач на орграфах даны выборочно и с разной степенью детализации. Наиболее удачными для наших целей оказались пособия [5] и [8].

В курсе “Алгоритмы на ориентированных графах” рассматриваются следующие алгоритмы: выявление маршрутов с заданным количеством ребер; упорядочивание вершин и дуг орграфа; определение экстремальных путей на графах; алгоритм Дейкстры; алгоритм Беллмана-Мура; алгоритм нахождения максимального пути; алгоритм нахождения максимального потока.

Концентрируя внимание на алгоритмическом подходе к задачам теории графов, учебный курс раскрывает взаимосвязь между различными типами структур на графах и сетях, проявляющуюся в единстве алгоритмических моделей, применяемых для исследования этих структур.

При выполнении лабораторных работ по данному курсу студенты должны продемонстрировать умение применять изучаемые алгоритмы к решению типовых задач (базовый уровень освоения курса), а также решать прикладные задачи, реализуя изученные алгоритмы (повышенный уровень).

Известно, что алгоритмы теории графов не адаптированы для непосредственной реализации на ПЭВМ, поэтому в качестве семестрового зачетного задания студентам предлагается один из рассматриваемых на занятиях алгоритмов закодировать на языке программирования высокого уровня и исследовать трудоемкость полученного варианта, см. [1], так как выделять часы на лабораторные работы для непосредственного программирования типовых графовых алгоритмов под руководством преподавателя не всегда представляется возможным.

В учебном пособии [6] приведены (где это возможно) эквивалентные алгоритмы теории графов, решающие одну и ту же задачу. В качестве “творческого” задания можно предложить студентам провести их сравнительный анализ.

Практика преподавания алгоритмов работы с орграфами показывает, что достаточно добиться понимания студентами постановок задач и схем работы алгоритмов, а их полную программную реализацию имеет смысл внести в рамки курсовой работы.

Литература

1. Авдеюк О.А., Крохалев А.В., Приходькова И.В. Общие подходы к формированию методики преподавания теории графов в вузе // Молодой ученый. - 2011. - № 5. Т.2. - С. 115-116.

2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов: уч. пос. Изд. 4-е. - М.: ЛЕНАНД, 2015.

3. Емеличев В.А., Зверович И.Э., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Теория графов в задачах и упражнениях: Более 200 задач с подробными решениями. - М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2013.

4. Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. - М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009.

5. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование: учеб. пособие / А.В. Кузнецов [и др.]; под общ. ред. А.В. Кузнецова. - Минск: Вышэйшая школа, 1995.

6. Сухан И.В. Ориентированные графы: уч. пос. - Краснодар: КубГУ, 2016.

7. Сухан И.В., Иванисова О.В., Кравченко Г.Г. Графы: уч. пос., изд. 2-е, испр. и доп. - Краснодар: КубГУ, 2015.

8. Шапорев С.Д. Дискретная математика: курс лекций и практических занятий. - СПб.: БХВ-Петербург, 2007.

Сухан Ирина Владимировна,
старший преподаватель кафедры
вычислительной математики и информатики
Кубанского государственного университета,
г. Краснодар.

E-mail: irina-sukhan@yandex.ru

Иванисова Ольга Владимировна,
доцент кафедры вычислительной математики
и информатики Кубанского государственного
университета, кандидат физ.-мат. наук,
г. Краснодар.

E-mail: zah-ivanisov@yandex.ru

Кравченко Григорий Григорьевич,
доцент кафедры вычислительной математики
и информатики Кубанского государственного
университета, кандидат техн. наук,
г. Краснодар.

E-mail: grigoriks1@mail.ru

Об альтернативном определении логарифма

С. В. Шведенко

В заметке рассматривается альтернативное определение логарифма, из которого удобно выводить основные свойства логарифмической функции.

Помимо традиционного определения *логарифма* $y = \ln x$ как функции, обратной к *экспоненциальной*[1], существуют его прямые определения, одно из которых, состоящее в том, что

$$\boxed{\ln x \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x}-1),\ x>0\,,}$$

обсуждается в данной заметке. Не претендуя сменить традиционное, это определение обладает тем преимуществом, что несколько упрощает вывод базовых свойств пары взаимно обратных функций *экспонента — логарифм*.

Следующее утверждение служит основанием для данного определения *логарифма*.

Для любого положительного числа x последовательность $\{l_n\} = \{n(\sqrt[n]{x}-1)\}$ является сходящейся, и при обозначении ее предела $\ln x$ справедливыми оказываются соотношения:

$1^\circ\ \ln e = 1$, $2^\circ\ \ln(x_1x_2) = \ln x_1 + \ln x_2\ \ (x_1, x_2 > 0)$, $3^\circ\ \ln(1/x) = -\ln x\ \ (x>0)$, $4^\circ\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Доказательство. Введение обозначения $\alpha_n = x^{\frac{1}{n(n+1)}}$ позволяет записать:

$$l_n = n(\sqrt[n]{x}-1) = n(\alpha_n^{n+1}-1) = n(\alpha_n-1)(\alpha_n^n + \alpha_n^{n-1} + \cdots + \alpha_n + 1),$$

$$l_{n+1} = (n+1)(\sqrt[n+1]{x}-1) = (n+1)(\alpha_n^n-1) = (n+1)(\alpha_n-1)(\alpha_n^{n-1} + \cdots + \alpha_n + 1).$$

Отсюда следует, что $l_n - l_{n+1} = (\alpha_n - 1)(n\alpha_n^n - \alpha_n^{n-1} - \cdots - \alpha_n - 1) > 0$, так что при любом положительном $x \neq 1$ последовательность $\{l_n\} = \{n(\sqrt[n]{x}-1)\}$ является *убывающей*. При $x > 1$ эта последовательность *ограничена снизу* (нулем) и поэтому имеет предел. В случае же $0<x<1$ установить существование предела этой последовательности позволяет запись ее элементов как $l_n = -n(\sqrt[n]{x^{-1}}-1)\sqrt[n]{x}$.

1°. Вычисление $\ln e \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{e}-1)$ основывается на том известном факте, что число e есть общий предел *возрастающей* последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ и *убывающей* последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$. При любом $n>1$ справедливы поэтому неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$, а следовательно и соотношения $1 = n\left(\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right) < n(\sqrt[n]{e}-1) < n\left(\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}-1\right) = \frac{n}{n-1}$, в силу которых $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{e}-1) = 1$.

2°. Для любых положительных x_1, x_2

$$\ln(x_1x_2) = \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x_1x_2}-1) = \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x_1x_2} - \sqrt[n]{x_2} + \sqrt[n]{x_2} - 1) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x_1}-1)\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_2} + \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x_2}-1) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

[1] Т. е. $y = \ln x \overset{\text{def}}{\iff} x = e^y \equiv \exp y \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{y}{1!}+\cdots+\frac{y^n}{n!}\right)$; как оперировать данным определением *экспоненты*, оставаясь в рамках программы первого семестра (т. е. не прибегая к сведениям о рядах), обсуждалось в заметке автора [**1**]. К сожалению, в вузовских курсах анализа вопросы определения и обоснования свойств степени обычно оставляют в стороне, так что немалая часть слушателей воспринимает e^π как *число e, умноженное на себя примерно 3,14 раза*.

3°. Для любого положительного x

$$\ln 1/x = \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{1/x}-1) = -\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1/x} = -\ln x.$$

4°. Поскольку

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} n\big(\sqrt[n]{x+1}-1\big)}{x} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n((x+1)-1)}{x(\sqrt[n]{x+1})^{n-1}+\cdots+\sqrt[n]{x+1}+1)},$$

а

$$\frac{n}{n(\sqrt[n]{x+1})^n} < \frac{n((x+1)-1)}{x(\sqrt[n]{x+1})^{n-1}+\cdots+\sqrt[n]{x+1}+1)} < \frac{n}{n}, \quad \text{если } x>0,$$

и

$$\frac{n}{n(\sqrt[n]{x+1})^n} > \frac{n((x+1)-1)}{x(\sqrt[n]{x+1})^{n-1}+\cdots+\sqrt[n]{x+1}+1)} > \frac{n}{n}, \quad \text{если } -1<x<0,$$

можно сделать вывод:

$$\min\Big\{1,\frac{1}{x+1}\Big\} \leqslant \frac{\ln(x+1)}{x} \leqslant \max\Big\{1,\frac{1}{x+1}\Big\} \text{ при всех } x>-1, \text{ а следовательно } \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Обычным путем из установленных свойств функции $y=\ln x \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$, $x>0$, выводится как наличие производной $\ln' x = 1/x$, так и то, что множеством значений этой функции служит вся действительная ось. Остается определить *экспоненту* как *обратную функцию*: $x=e^y\equiv\exp y \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} y=\ln x \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$, «бесплатно» получая при этом ее базовые свойства:

$$\exp 1 = e, \quad e^{y_1+y_2}=e^{y_1}e^{y_2}, \quad e^{-y}=(e^y)^{-1}, \quad \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1, \quad (e^y)'=e^y.$$

Литература

[1] Шведенко С.В. К определению экспоненты и выводу формулы Эйлера и основных предельных соотношений // Математическое образование. - 2013. - № 1-2(65-66). - с. 67-74.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

Библиографические материалы к юбилейным датам 2017 года. I полугодие

Р. З. Гушель

Календарь юбилейных дат первой половины 2017 г., связанных с именами известных деятелей в области математики и математического образования, а также с важнейшими событиями в этой сфере. После краткой информации о человеке или событии приводится небольшой список литературы.

1 января — 100 лет со дня рождения отечественного математика и педагога, профессора (с 1963), специалиста как в области конструктивной алгебраической геометрии, так и в области методики преподавания геометрии, ближайшего сотрудника академика А.Н. Колмогорова в проведении реформы преподавания геометрии в средней школе, члена редколлегии журнала "Математика в школе" (1962-1984) **Залмана Алтеровича Скопеца** (умер 3 ноября 1984).

1. Залман Алтерович Скопец // МШ. - 1985. - № 1.

2. Коршунова Н.И., Медведева Л.Б. Из истории ярославской геометрической школы // История математики и математического образования как предмет исследования и преподавания. - Ярославль, 2003. - С. 226-240.

3. Розенфельд Б.А., Элькина Э.М. Памяти З.А. Скопеца // МПр. - М., 2004. - Вып. 8.

4. Скопец З.А. Некоторые методы получения специальных кремоновых преобразований // Уч. зап. МГУ. Математика. - М., 1952. - Т. 155. - Вып. 5. - С.73-93.

5. Скопец З.А. О понятии поворота вектора на плоскости // МШ. - 1975. - № 4.

6. Скопец З.А. Отображение пространства на плоскость посредством тетраэдрального циклического комплекса // Изв. вузов. Математика. - Казань, 1964. - Вып. 4. - С. 144-159.

7. Скопец З.А. Приложения комплексных чисел к задачам элементарной геометрии // МШ. - 1967. - № 1. - С. 63-71.

8. Скопец З.А. Циклографическое отображение пространства Лобачевского // Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. 1826-1951. - М.- Л., 1952. - С. 129-150.

9. Клопский В.М., Скопец З.А., Ягодовский М.И. Геометрия. Учебное пособие для 9 и 10 класса средней школы // Под ред. З.А. Скопеца. - М., 1980. - Изд. 6.

3 января — 100 лет со дня рождения отечественного математика, академика АН УССР (с 1964), академика АН СССР (с 1984), лауреата Ленинской премии (1965), занимавшегося теорией колебаний и качественной теорией дифференциальных уравнений **Юрия Алексеевича Митропольского** (умер 14 июня 2008).

1. Боголюбов Н.Н. Митропольский Юрий Алексеевич (к 60-летию со дня рождения) // УМН. - 1977. - Т. 32. - Вып. 1. - С. 217-228.

2. Боголюбов Н.Н. и др. Юрий Алексеевич Митропольский (к 70-летию со дня рождения) // УМН. - 1987. - Т. 42. - Вып. 4. - С. 193-195.

3. Соколов Ю.Д. и др. Юрий Алексеевич Митропольский // Диф. ур. - 1967. - Т.3. - № 1. - С. 158-166.

4. Митропольский Ю.А. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике. - Киев, 1966. - 469 с.

5. Митропольский Ю.А. О некоторых дифференциальных уравнениях, встречающихся в теории релаксационных колебаний // УМЖ. - 1957. - Т. 9. - С. 296-309.

6. Митропольский Ю.А. О периодических решениях систем нелинейных дифференциальных уравнений, правые части которых недифференцируемы // УМЖ. - 1959. - Т. 11. - Вып. 4. - С. 366-379.

7. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М., 1955. - 447 с.

13 января — 180 лет со дня рождения отечественного математика, профессора (с 1869), члена-корреспондента Петербургской АН (1884), одного из основателей Московского математического общества, специалиста в области дифференциальных уравнений и теории функций, опубликовавшего перевод с немецкого языка работы Н.И. Лобачевского “Геометрические основы теории параллельных” в III томе “Математического сборника” **Алексея Васильевича Летникова** (умер 10 марта 1888).

1. Слудский Ф.А. Жизнь и труды Летникова // МСк. - 1888. - Т. 14. - Вып. 1.

2. Шостак Р.Я. Алексей Васильевич Летников // ИМИ. - 1952. - Вып. V. - С.167-240.

3. Летников А.В. Об условиях интегрируемости некоторых дифференциальных уравнений // МСк. - 1866. - Т. 1. - С. 297-350.

4. Летников А.В. Общее доказательство основных формул тригонометрии // МСк. - 1867. - Т. 2. - Вып. 2. - Отд. 2. - С. 96-99.

5. Летников А.В. О кривизне поверхностей в данной точке // МСк. - 1867. - Т.2.- Вып. 1. - Отд. 2. - С. 3-19.

3 февраля — 100 лет со дня рождения известного отечественного математика, профессора Московского университета (с 1952), специалиста по теории функций, функциональному анализу, алгебре и другим разделам математики **Георгия Евгеньевича Шилова** (умер 17 января 1975).

1. Горин Е.А. Об исследованиях Г.Е. Шилова по теории коммутативных банаховых алгебр и их дальнейшем развитии // УМН. - 1978. - Т. 33. - Вып. 4. - С. 169-188.

2. Мышкис А.Д., Овчаренко И.Е. Г.Е. Шилов и преподавание математики // ИМИ. - 1997. - Вып. 2 (37). - С. 155-179.

3. Тихомиров В.М. Г.Е. Шилов и пути развития математического образования // ИМИ. - 1997. - Вып. 2 (37). - С. 153-155.

4. Шилов Георгий Евгеньевич (1917-1974). Некролог // УМН. - 1976. - Т. 31. - Вып. 1. - С. 217-228.

5. Шилов Г.Е. Аналог одной теоремы Лорана Шварца // Изв. вузов. Математика. - Казань, 1961. - Т. 4. - С. 137-147.

6. Шилов Г.Е. Локальные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // УМН. - 1959. - Т.14.- Вып. 5. - С. 3-44.

7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. - М., 1961. - Изд. 2. - 436 с.

8. Шилов Г.Е. Однородные кольца функций // УМН. - 1951. - Т. 6. - Вып. 1. - С.91-137.

9. Шилов Г.Е. Что такое функция? // МШ. - 1964. - № 1. - С. 7-15.

10. Шилов Г.Е., Гельфанд И.М. Категории конечномерных пространств // Вестн. МГУ. - Сер. математ. - 1963. - Вып. 4. - С. 27-48.

11. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная. Общая часть. - М.,1967. - Изд. 2. - 219 с.

5 февраля — 175 лет со дня рождения известного отечественного математика, специалиста в области теории аналитических функций комплексного переменного, профессора Петербургского университета (с 1882) **Юлиана Васильевича Сохоцкого** (умер 14декабря 1927).

1. Ермолаева Н.С. Аналитические исследования Ю. В. Сохоцкого // ИМИ. - 1993. - Вып. 34. - С. 60-103.

2. Маркушевич А.И. Вклад Ю.В. Сохоцкого в общую теорию аналитических функций // ИМИ. - 1950. - Вып. 3. - С. 399-406.

3. Сохоцкий Ю.В. Высшая алгебра. - М., 1882.

4. Сохоцкий Ю.В. Начала общего наибольшего делителя в применении к теории делимости алгебраических чисел. - СПб., 1893.

5. Сохоцкий Ю.В. Об определённых интегралах и функциях, употребляемых при разложении в ряды. - СПб., 1873.

6. Сохоцкий Ю.В. Теория чисел. - СПб., 1888.

9 февраля — 110 лет со дня рождения известного канадского математика британского происхождения, одного из крупнейших геометров XX века, профессора университета в Торонто (с 1948), члена Лондонского Королевского общества **Гарольда Кокстера** (умер 31 марта 2003).

1. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. - М., 1966.

2. Кокстер Г.С.М. Действительная проективная плоскость. - М., 1959.

3. Кокстер Г.С.М., Грейтцер С.П. Новые встречи с геометрией. - М., 1978.

16 февраля — 125 лет со дня рождения известного отечественного педагога-математика, члена-корреспондента АПН РСФСР (с 1947), преподавателя математики в педвузах Москвы, с 1944 - методиста-консультанта Управления школ Министерства просвещения РСФСР, члена редколлегии журнала "Математика в школе" **Павла Афанасьевича Ларичева** (умер 12 марта 1963).

1. Андронов И.К. Полвека развития школьного математического образования в СССР. - М., 1967. - С. 156-171.

2. Новоселов С.И. Павел Афанасьевич Ларичев // МШ. - 1952. - № 3. - С. 63-65.

3. Ларичев П.А. Вопросы улучшения преподавания математики в школе // МШ. - 1955. - № 4.

4. Ларичев П.А. О проверке письменных работ по математике // МШ. - 1958. - № 3.

5. Ларичев П.А. О письменных работах по математике на аттестат зрелости // Нар. обр. - 1946. - № 1-2. - С. 59-64.

6. Ларичев П.А. О теме "Степени и корни" в VIII классе школы // МШ. - 1956. - № 4.

7. Ларичев П.А. Сборник задач по алгебре для средней школы. - М., 1965. - Ч.II. - Изд. 16. - 223 с. (Изд. 1. - 1949).

16 февраля — 80 лет со дня рождения замечательного отечественного математика, члена-корреспондента РАН (1991), члена ряда зарубежных научных обществ и академий, одного из основоположников некоммутативной алгебраической геометрии и квантовой информатики, профессора Московского университета (1965-1992), профессора Северо-Западного университета США (с 2002), лауреата Ленинской премии (1967), премии Бойяи (2010) и ряда других наград, ученика И.Р. Шафаревича **Юрия Ивановича Манина**.

1. Жижченко А.Б. Юрий Иванович Манин // МШ. - 1968. - № 1. - С. 3.

2. Манин Юрий Иванович (к 50-летию со дня рождения) // УМН. - 1987. - Т.42. - Вып. 4.

3. Манин Ю.И. Введение в теорию схем и квантовые группы. - М. 2012. - 256 с.

4. Манин Ю.И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. - М., 1984. - 336 с.

5. Манин Ю И. Лекции по алгебраической геометрии. Ч. I, II. - М., 1970 ; 1971.

6. Манин Ю.И. Лекции по математической логике. В 2-х частях. - М., 1974. - 133 + 69 с.

7. Манин Ю.И. Математика как метафора. - М., 2008. - 400 с.

8. Манин Ю.И. Рациональные кривые, эллиптические кривые и уравнение Пенлеве. - М., 1998.

9. Манин Ю.И. Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространство модулей. - М., 2002. - 344 с.

3 марта — 180 лет со дня рождения профессора Петербургского университета (с 1868), с 1886 г. — заслуженного профессора Петербургского университета, крупного специалиста в области теории чисел и дифференциальных уравнений с частными производными **Александра Николаевича Коркина** (умер 1 сентября 1908).

1. Александр Николаевич Коркин (некролог) // ВОФЭМ. - 1909. - № 471.

2. Ермолаева Н.С. Мотивы обращения петербургских математиков к задачам картографии // ИМИ. - 2002. - Вып. 7 (42). - С. 92-119.

3. Ожигова Е.П. Александр Николаевич Коркин (1837-1908). - Л., 1968. - 148 с.

4. Поссе К.А. А.Н. Коркин (некролог) // МСк. - 1909. - Т. 27. - Вып. 1. - С. 1-27; также ЖМНП. - 1908. - № 11. - С. 25-46.

5. Коркин А.Н. Изыскания о множителях дифференциальных уравнений первого порядка // МСк. - 1904. - Т. 24. - Вып. 2. - С. 194-350 ; Вып. 3. - С. 351-416.

6. Коркин А.Н. О кривизне поверхностей // МСк. - 1887. - Т. 13. - Вып. 3. - С.491-499.

7. Коркин А.Н. О распределении целых чисел по простому модулю и о двучленных сравнениях с таблицей первообразных корней и характеров, к ним относящихся, для простых чисел, меньше 4000 // МСк. - 1909. - Т. 27. - Вып.1,2.

8. Коркин А.Н. Сочинения. - СПб., 1911. - Т. 1.

5 марта — 175 лет со дня рождения немецкого математика, профессора Страсбургского университета, автора известного учебника по алгебре в трёх томах и одного из авторов “Энциклопедии элементарной математики” **Генриха Вебера** (умер 30 мая 1913).

1. Шатуновский С. Генрих Вебер // ВОФЭМ. - 1913. - № 580. - С. 233-238.

2. Вебер Г. Задача Ферматa // ВОФЭМ. - 1904. - № 357.

3. Вебер Г. Из истории алгебры // ВОФЭМ. - 1906. - № 424.

4. Вебер Г. Место элементарной математики в математической науке // ВОФЭМ. - 1904. - № 354.

5. Вебер Г., Вельштейн Д. Энциклопедия элементарной математики (в трёх томах) / пер. с примеч. В.Ф. Кагана. - Одесса, 1906-1911.

20 марта — 125 лет со дня рождения известного польского математика, члена-корреспондента Академии наук в Кракове, специалиста в области функционального анализа, создателя Львовской математической школы функционального анализа **Стефана Банаха** (умер 31 августа 1945).

1. Банах Стефан (30 марта 1892 - 31 августа 1945) (некролог) // УМН. - 1946. - Т.1. - Вып. 3-4. - С. 13-16.

2. Синкевич Г.И. Георг Кантор & польская школа теории множеств. - СПб., 2012.

3. Банах С. Интеграл Лебега в абстрактном пространстве // Сакс С. Теория интеграла. - М., 1949. - С. 463-477.

4. Банах С. Мера Хаара // Сакс С. Теория интеграла. - М., 1949. - С. 454-462.

5. Банах С. О “Высшем законе” Гёне-Вронского // ИМИ. - 1979. - Вып. 24. - С.176-185.

3 апреля — 110 лет со дня рождения отечественного математика, ученика Н.Г. Чеботарева, специалиста по функциональному анализу, профессора Одесского университета (с1934), члена Московского, Харьковского и Американского математических обществ, члена-корреспондента АН УССР (с 1939), лауреата премии фонда Вольфа (1982) **Марка Григорьевича Крейна** (умер 17 октября 1989).

1. Аров Д.З. и др. Крейн Марк Григорьевич (к 80-летию со дня рождения) // УМН. - 1987. - Т. 42. - Вып. 4. - С. 201-206.

2. Боголюбов Н.Н. и др. Марк Григорьевич Крейн // УМН. - 1968. - Т. 23. - Вып.3. - С. 196-214.

3. Колмогоров А.Н., Красносельский М.А. Марк Григорьевич Крейн (к 50-летию со дня рождения) // УМН. - 1958. - Т. 13. - Вып. 3. - С. 213-224.

4. Крейн М.Г. Интегральные уравнения по полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УМН. - 1958. - Т. 13. - Вып. 5. - С. 3-120.

5. Крейн М.Г. К теории симметрических полиномов // МСк. - 1933. - Т. 40. - С.271-283.

6. Крейн М.Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - Киев, 1964. - 186 с.

7. Крейн М.Г. О нагруженных интегральных уравнениях, функции распределения которых не монотонны // Сборник памяти Граве. - 1940. - С. 88-103.

8. Крейн М.Г. О признаках устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем // ПММ. - 1955. - Т. 19. - С. 641-680.

9. Крейн М.Г. Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах // УМЖ. - 1949. - Т. 1. - Вып. 4. - С. 64-98.

12 апреля — 170 лет со дня рождения отечественного математика, адъюнкта Петербургской АН, создателя теории идеалов и теории делимости целых алгебраических чисел **Егора Ивановича Золотарева** (умер 19 июля 1878).

1. Башмакова И.Г. Обоснование теории делимости в трудах Е.И. Золотарева // ИМИ. - 1949. - Вып. 2. - С. 233-251.

2. Кузьмин Р.О. Е.И. Золотарев // УМН. - 1947. - Т. 2. - Вып. 6. - С. 21-51.

3. Ожигова Е.П. Егор Иванович Золотарев. - М., 1966. - 143 с.

4. Чеботарев Н.Г. Об обосновании теории идеалов по Золотареву // УМН. - 1947. - Т. 2. - Вып. 6. - С. 52-67.

5. Золоторев Е.И. Об учёных трудах академика О.И. Сомова // Зап. Имп. АН. - 1878. - Т. 31.

6. Золоторев Е.И. Собрание сочинений в двух томах. - М.-Л., 1931.

15 апреля — 310 лет со дня рождения выдающегося математика, механика и астронома, академика Петербургской АН автора замечательных открытий и в анализе, и в алгебре, и в теории вероятностей, и в теории чисел, и в ряде других областей точного естествознания, **Леонарда Эйлера** (умер 18 сентября 1783).

1. Башмакова И.Г., Юшкевич А.П. Леонард Эйлер // ИМИ. - 1955. - Вып. 7. - С.453-512.

2. Делоне Б.Н. Леонард Эйлер // Квант. - 1974. - № 5.

3. Котек В.В. Леонард Эйлер. М., 1961.

4. Крылов А.Н. Леонард Эйлер. Л., 1933.

5. Матвиевская Г.П. О неопубликованных рукописях Леонарда Эйлера по диофантову анализу // ИМИ. - 1960. - Вып. 13. - С. 107-186.

6. Мельников И.Г. Эйлер и его арифметические работы// ИМИ. - 1957. - Вып. 10. - С. 211-228.

7. Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. - М., 1988.

8. Симонов Н.И. Прикладные методы анализа у Эйлера. - М., 1957. - 168 с.

9. Юшкевич А.П. Леонард Эйлер и математическое просвещение в России // МШ. - 1983. - № 5.

10. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. - М., 1961.

11. Эйлер Л. Письма к учёным. - М.-Л., 1963.

18 апреля — 125 лет со дня рождения члена-корреспондента АН СССР (с 1953), ученика Н.Н. Лузина, профессора Московского университета (с 1922), сотрудника МИАН СССР, крупного специалиста в теории тригонометрических и ортогональных рядов и теории функций комплексного переменного, лауреата Государственной премии СССР (1951) **Дмитрия Евгеньевича Меньшова** (умер 25 ноября 1988).

1. Александров П.С., Ульянов П.Л. Меньшов Дмитрий Евгеньевич (к 70-летию со дня рождения) // УМН. - 1962. - Т. 17. - Вып. 5. - С. 161-175.

2. Бари Н.К., Люстерник Л.А. Дмитрий Евгеньевич Меньшов // УМН. - 1952. - Т. 7. - Вып. 3. - С. 145-150.

3. Виноградова И.А. и др. Меньшов Дмитрий Евгеньевич (некролог) // УМН. - 1989. - Т. 44. - Вып. 5. - С. 144-151.

4. Ярина Т.Б., Разумовская Б.П. Дмитрий Евгеньевич Меньшов. Библиографический указатель литературы. - М., 1977. - 23 с.

5. Меньшов Д.Е. Взаимоотношение между определениями интеграла Borel'я и Denjoy // МСк. - 1916. - Т. 30. - Вып. 2. - С. 288-295.

6. Меньшов Д.Е. Избранные труды: математика. - М., 1996.

7. Меньшов Д.Е. О пределах неопределённости рядов Фурье // МСк. - 1952. - Т.30 (72). - Вып. 3. - С. 601-650.

8. Меньшов Д.Е., Ульянов П.Л. О метрической теории функций в Московском университете за 50-летие // Вестн. МГУ. - Мат. и физ. - 1967. - № 5. - С. 24-36.

30 апреля — 240 лет со дня рождения выдающегося немецкого математика и астронома, крупнейшего специалиста в области алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, небесной механики и других разделов физико-математических наук, профессора Геттингенского университета (с 1807) **Карла Фридриха Гаусса** (умер 23 февраля 1855).

1. Бобынин В.В. Карл Фридрих Гаусс. - М., 1889.

2. Бюлер В.К. Гаусс. - М., 1989. - 208 с.

3. Венков Б.А. Труды К.Ф. Гаусса по теории чисел и алгебре // Вопр. ИЕТ. - 1956. - Вып. 1. - С. 54-60.

4. Каган В.Ф. Основания геометрии. - М.-Л., 1949. - Ч. I.

5. Карл Фридрих Гаусс. 100 лет со дня смерти (1855-1955). Сб. ст. - М., 1956.

6. Ливанова А. Три судьбы. Постижение мира. - М., 1969.

7. Норден А.П. Гаусс и Лобачевский // ИМИ. - 1956. - Вып. 9. - С. 145-168.

8. Ожигова Е.П. О научных связях Гаусса с Петербургской АН // ИМИ. - 1976. - Вып. 21. - С. 273-284.

9. Гаусс К.Ф. Общие исследования о кривых поверхностях // Об основаниях геометрии. - М., 1956. - С. 123-161.

10. Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. - М., 1959.

2 мая — 150 лет со дня рождения отечественного математика, профессора ряда Петербургских (Ленинградских) вузов, члена Учёного комитета министерства народного просвещения (с 1903), члена русской национальной подкомиссии Международной комиссии по преподаванию математики (1908-1917), ученика А.Н. Коркина и А.А. Маркова **Бориса Михайловича Кояловича** (умер 29 декабря 1941).

1. Международная комиссия по преподаванию математики // ВОФЭМ. - 1909. - № 487.

2. Михельсон Н.Н. Борис Михайлович Коялович // ИМИ. - 1973. - Вып. 18. - С.310-321.

3. Коялович Б.М. Исследование о бесконечных системах линейных уравнений // Труды физ.-мат. ин-та АН. - 1930. - Т. 3. - С. 41-167.

4. Коялович Б.М. О неопределённых дифференциальных уравнениях // Ж. физ.-мат. об-ва. - Л., 1926. - Т. 1. - С. 66-76.

5. Коялович Б.М. Лекции по математике (высшая алгебра). - СПб., 1901.

6. Коялович Б.М. Рецензия на книгу А. Киселева “Начальное учение о производных” // ЖМНП. - 1908. - Ноябрь. - С. 120-121.

6 мая — 110 лет со дня рождения отечественного математика и механика, академика АН СССР (с 1958), лауреата Ленинской (1963) и Государственной (1950) премий, ректора Новосибирского (1958-1965) и Тбилисского (1965-1972) университетов **Ильи Несторовича Векуа** (умер 3 декабря 1977).

1. Александров П.С. и др. Векуа Илья Несторович (к 70-летию со дня рождения) // УМН. - 1977. - Т. 32. - Вып. 2. - С. 3-21.

2. Бицадзе А.В. Илья Несторович Векуа. - Тбилиси, 1967.

3. Боголюбов Н.Н. и др. Векуа Илья Несторович (к 80-летию со дня рождения) // УМН. - 1987. - Т. 42. - Вып. 3. - С. 213-217.

4. Векуа И.Н. Интегрирование уравнений сферической оболочки // ПММ. - 1945. - Т. 9. - Вып. 5.

5. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. - М.-Л., 1948. - 296 с.

6. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. - М., 1959. - 628 с.

7. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа. - Новосибирск, 1964. - 138 с.

8. Векуа И.Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением теории оболочек // МСк. - 1952. - Т. 31 (73). - С. 217-314.

19 мая — 90 лет со дня рождения американского математика, члена знаменитой группы "Николя Бурбаки", специалиста в области алгебры и алгебраической геометрии **Сержа Ленга** (умер 12 сентября 2005).

1. Ленг С. Алгебра. - М., 1968.

2. Ленг С. Алгебраические числа. - М., 1972.

3. Ленг С. Введение в алгебраические и абелевы функции. - М., 1976.

4. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. - М., 1967.

5. Ленг С. Основы диофантовой геометрии. - М., 1986.

6. Ленг С. Рецензия Морделла, письмо Зигеля Морделлу, диофантова геометрия и математика XX века // ИМИ. - 1996. - Сер. 2. - Вып. 1 (36). - № 2. - С. 235-256.

7. Ленг С. Эллиптические функции. - М., 1984.

27 мая — 120 лет со дня рождения отечественного учёного-геометра, ученика профессора В.Ф. Кагана, одного из основателей известного не только в Москве научного семинара по векторному и тензорному анализу, переводчика ряда зарубежных учебников и монографий на русский язык, занимавшегося также и вопросами элементарной математики и её преподавания, профессора (1962) **Абрама Мироновича Лопшица** (умер 22 мая 1984).

1. Баренблатт Г.И. и др. Абрам Миронович Лопшиц (некролог) // МШ. - 1984.- № 5.

2. Бескин Н.М. и др. Абрам Миронович Лопшиц // МШ. - 1977. - № 3.

3. Коршунова Н.И., Медведева Л.Б. Из истории ярославской геометрической школы // История математики и математического образования как предмет исследования и преподавания. Труды V Всероссийской школы по истории математики. - Ярославль, 2003. - С. 240-251.

4. Лопшиц А.М. Алгебраическая задача теории римановых пространств первого класса // Тр. сем. по вект. и тензор. анализу. - 1952. - Вып. 9. - С. 462-490.

5. Лопшиц А.М. Аналитическая геометрия. - М., 1948. - 576 с.

6. Лопшиц А.М. Векторное решение геометрических задач // Квант. - 1979. - № 9.

7. Лопшиц А.М. Геометрическая характеристика аффинного отображения // Тр. сем. по начертат. геом. - М., 1958. - С. 213-221.

8. Лопшиц А.М. Некоторые задачи тензорной алгебры в линейных безразмерных пространствах // Тр. сем. по вект. и тензор. анализу. - 1948. - Вып. 6. - С. 365-419.

9. Лопшиц А.М. Эквивалентность систем сил в аффинном пространстве // Доклады по науч. конф. ЯГПИ. - Ярославль, 1964. - Т. 2. - Вып. 3. - С. 75-84.

6 июня — 160 лет со дня рождения замечательного отечественного математика и механика, академика Петербургской АН (с 1901), профессора Харьковского университета (1885-1902), ученика академика П.Л. Чебышева, члена многих академий мира **Александра Михайловича Ляпунова** (умер 3 ноября 1918).

1. Гнеденко Б.В. О работах А.М. Ляпунова по теории вероятностей // ИМИ. - 1959. - Вып. 12. - С. 135-160.

2. Лукомская А.М. Александр Михайлович Ляпунов. - М.-Л., 1953.

3. Смирнов В.И. Обзор научного творчества А.М. Ляпунова // Александр Михайлович Ляпунов. - М.-Л., 1953.

4. Стеклов В.А. Александр Михайлович Ляпунов. 1857-1918 // Изв. АН. - 1919. - Т. 13. - № 8-11. - С. 367-388.

5. Цесевич В.П. А.М. Ляпунов. - М., 1988.

6. Юшкевич А.П. Александр Михайлович Ляпунов // МШ. - 1949. - № 1. - С. 13-16.

7. Ляпунов А.М. Избранные труды. - М., 1948.

8. Ляпунов А.М. Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами // Сообщ. Харьк. МО. - 1897. - Т. 5. - С. 193-254.

9. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - М.-Л., 1935. - Изд.2. - 386 с. (1-ое изд. - 1892 г.).

10 июня — 130 лет со дня рождения замечательного отечественного математика, академика АН СССР (с 1943 г.), ученика В.А. Стеклова, лауреата Государственной премии СССР (1948), Героя Социалистического Труда (1967) **Владимира Ивановича Смирнова** (умер 11 февраля 1974). Основные работы учёного относятся к теории функций комплексного переменного, математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, истории математики.

1. Александров П.С., Векуа И.Н. Смирнов Владимир Иванович // УМН. - 1957. - Т. 12. - Вып. 6. - С. 197-205.

2. Ладыженская О.А. О жизни и научной деятельности Владимира Ивановича Смирнова // УМН. - 1987. - Т. 42. - Вып. 6. - С. 3-23.

3. Лебедев Н.А., Лозинский С.М. Владимир Иванович Смирнов и математика в Ленинградском университете за 1917-1967 гг. // Вестн. ЛГУ. - 1967. - № 7. - Вып. 2. - С. 7-18

4. Владимир Иванович Смирнов / сост. Матвиевская Г.П., ОжиговаЕ.П.; под. ред. О.А. Ладыженской. - СПб., 1994. - 287 с.

5. Смирнов В.И. Интегральные уравнения // Математика в СССР за 30 лет. - М.-Л., 1948. - С. 593-607.

6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. - М., 1957. - Т. 1-5.

7. Смирнов В.И. О конформном преобразовании односвязной области в себя // Зап. матем. каб. Крымск. ун-та. - Симф., 1921. - Т. 3. - С. 145-152.

8. Смирнов В.И. О рациональных преобразованиях линейных дифференциальных уравнений второго порядка // МСк. - 1927. - Т. 34. - С. 101-108.

9. Смирнов В.И. О сопряженных функциях в многомерном евклидовом пространстве // Вестн. ЛГУ. - 1954. - Вып. 5. - С. 3-17.

10. Смирнов В.И. Очерк научного творчества А.М. Ляпунова // ПММ. - 1948. - Т. 12. - Вып. 5. - С. 479-532.

11. Смирнов В.И. Памяти Владимира Андреевича Стеклова // Труды МИАН. - 1964. - Т. 73. - С. 5-13.

12. Смирнов В.И. Решение предельных задач теории упругости в случае круга и сферы // ДАН. - 1937. - Т. 14. - С. 69-72.

12 июня — 80 лет со дня рождения выдающегося отечественного учёного, специалиста в области топологии, теории дифференциальных уравнений, теоретической механики, академика АН СССР (с 1990), главного научного сотрудника Математического института имени В.А. Стеклова РАН, президента Московского математического общества (с 1996 - 2010), лауреата Ленинской премии (1965), премии имени Н.И. Лобачевского (1992), премии Вольфа (2001) и других, члена многих академий и научных обществ мира, ученика академика А.Н. Колмогорова **Владимира Игоревича Арнольда** (умер 3 июня 2010).

1. Аносов Д.В. и др. Владимир Игоревич Арнольд (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. - 1997. - Т. 52. - Вып. 5.

2. Владимир Игоревич Арнольд (к семидесятилетию со дня рождения) // УМН. - 2007. - Т. 62. - Вып. 5. - С. 175-184.

3. Ландо С.К. Владимир Игоревич Арнольд и математическое просвещение // МПр. - 2011. - Вып. 15. - С. 6-19.

4. Памяти Владимира Игоревича Арнольда // Изв. РАН. - Сер. матем. - 2010. - Т.74. - № 4.

5. Арнольд В.И. Второй закон Кеплера и топология абелевых интегралов // Квант. - 1987. - № 12.

6. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М., 2002. - 400 с.

7. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М., 2002.- 40 с.

8. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., 1989. - Изд.3. - 472 с.

9. Арнольд В.И. О некоторых задачах псевдопериодической топологии // МПр. - 1997. - Вып. 1.

10. Арнольд В.И. Топология и статистика формул арифметики // УМН. - 2003. - Т.58. - Вып. 4. - С. 3-28.

30 июня — 110 лет со дня рождения известного отечественного математика, профессора ЛГУ (с 1937), члена-корреспондента АН СССР (с 1964), крупного специалиста в области алгебры, теории чисел, приближенных и численных методов, президента Ленинградского математического общества, лауреата Государственной премии СССР (1981) **Дмитрия Константиновича Фаддеева** (умер 20 октября 1989).

1. Боревич З.И. и др. Дмитрий Константинович Фаддеев (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. - 1968. - Т. 23. - Вып. 3. - С. 189-195.

2. Дмитрий Константинович Фаддеев (некролог) // Алгебра и анализ. - 1989. - Т.1. - Вып. 6. - С. 244-245.

3. Фаддеев Д.К. К теории гомологии для конечных групп операторов // Изв. АН СССР. - Сер. матем. - 1955. - Т. 19. - Вып. 3. - С. 193-200.

4. Фаддеев Д.К. Об эквивалентности систем целочисленных матриц // Изв. АН СССР. - Сер. матем. - 1966. - Т. 30. - Вып. 2. - С. 449-454.

5. Фаддеев Д.К. Простые алгебры над полем алгебраических функций от одной переменной // Труды МИАН СССР. - 1951. - Т. 38. - С. 321-344.

6. Фаддеев Д.К. Таблицы основных унитарных представлений федоровских групп // Труды МИАН СССР. - 1961. - Т. 56. - С. 3-174.

7. Фаддеев Д.К. Теория Галуа (в МИАНе) // Труды МИАН СССР. - 1984. - Т.168. - С. 46-71.

8. Фаддеев Д.К., Делоне Б.Н. Теория иррациональностей третьей степени // Труды МИАН. - 1940. - Т. 11. - С. 3-340.

Список сокращений

АПН - Академия педагогических наук.

ВОФЭМ - Вестник опытной физики и элементарной математики. Журнал, выходил в Одессе в 1886-1917 гг.

Вопр. ИЕТ - Вопросы истории естествознания и техники. Сборник статей.

Диф. ур. - Дифференциальные уравнения. Журнал.

ЖМНП - Журнал Министерства народного просвещения, издавался в 1834-1917гг.

ИМИ - Историко-математические исследования. Сборник статей.

МШ - Математика в школе. Журнал.

МИАН - Математический институт академии наук имени В.А. Стеклова.

МСк. - Математический сборник. Выходит с 1866 г.

МО - Математическое общество.

МПр. - Математическое просвещение. Сборник статей.

Нар. обр. - Народное образование. Журнал.

ПММ - Прикладная математика и механика. Журнал.

УМЖ - Украинский математический журнал.

УМН - Успехи математических наук. Журнал.

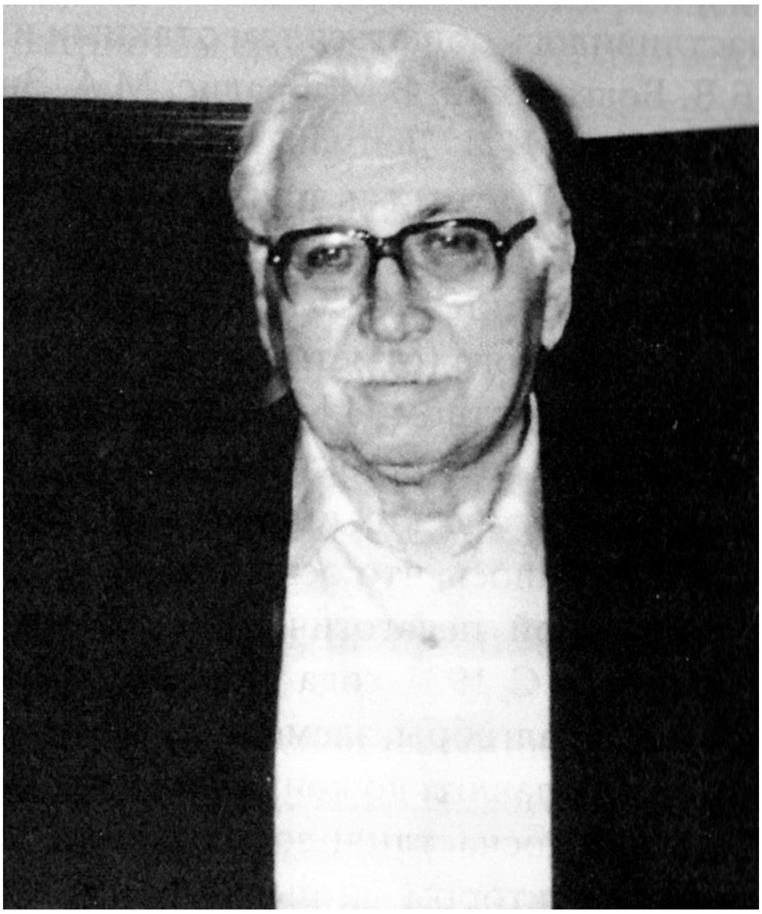
Гушель Ревекка Залмановна,
г. Ярославль.

E-mail: gushelr@yandex.ru

Ушёл из жизни законодатель отечественной методики преподавания математики Юрий Михайлович Колягин...

Т. И. Кузнецова, О. А. Саввина, О. В. Тарасова

Настоящая статья — некролог, в котором рассказывается о жизни, деятельности и творчестве недавно ушедшего от нас талантливого педагога и выдающегося специалиста по методике преподавания математики академика РАО Юрия Михайловича Колягина (25.04.1927 – 07.11.2016).



7 ноября 2016 г. на 90-м году жизни скончался академик Юрий Михайлович Колягин. Перефразируя слова горячо любимого Юрием Михайловичем русского поэта Тютчева, не будем предаваться тоске, а с благодарностью скажем, что был в нашей жизни этот замечательный человек, неординарная личность, истинный патриот России, автор блестящих учебников математики, законодатель отечественной методики преподавания математики.

Юрий Михайлович родился 25 апреля 1927 г. в Сибири, в Красноярске, но детство и отрочество провел преимущественно в Москве. В 1953 г. поступил на заочное отделение физико-математического факультета Московского областного педагогического института имени

Н.К. Крупской. В том же году начал свою педагогическую деятельность, совмещая учебу с непростой службой сельского учителя математики в Борисовской сельской школе Московской области. В 1957 г. окончил МОПИ, а в 1959 г. там же поступил в аспирантуру — к члену-корреспонденту АПН СССР Ивану Козьмичу Андронову. Юрий Михайлович высоко ценил роль Ивана Козьмича в своей творческой жизни. Иван Козьмич каждый понедельник в 19.00 собирал своих аспирантов в своём домашнем кабинете, где часто до полуночи обсуждал с ними актуальные проблемы методики обучения математике. Именно здесь, в кабинете Учителя, Юрию Михайловичу посчастливилось общаться со многими замечательными методистами-математиками: К.С. Барыбиным, Б.В. Болгарским, В.М. Брадисом, И.С. Бровиковым, И.Я. Депманом, М.И. Каченовским, Н.М. Матвеевым, С.И. Новоселовым, В.В. Репьевым, И.Ф. Тесленко. С другими известными педагогами можно было общаться и на научно-методическом семинаре "Новые идеи в преподавании математики" (в настоящее время — "Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом"), организованном при Академии педагогических наук СССР в 1959 г. и руководимом Иваном Козьмичом.

После окончания аспирантуры в 1962 г. Ю.М. Колягин был оставлен на кафедре высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики МОПИ им. Н.К. Крупской, возглавляемой И.К. Андроновым. Здесь он последовательно занимал должности ассистента, старшего преподавателя и доцента, одновременно работая учителем математики в московской школе № 352. Шестнадцать лет проработал Юрий Михайлович учителем. Многие выпускники школы № 352 помнят его как прекрасного преподавателя и воспитателя.

В 1963 г. Ю.М. Колягин защитил кандидатскую диссертацию по педагогическим наукам на тему "О реформе математического образования и новой постановке преподавания арифметики в средней школе". С 1971 г. Юрий Михайлович Колягин — сотрудник НИИ школ МП РСФСР, где он проявил себя как умелый и инициативный организатор сначала на посту заведующего сектором обучения математике, а затем заместителя директора по научной работе (1975-1990). Однако преподавание в пединституте он не оставил, более того, после кончины И.К. Андронова (1975) два года заведовал кафедрой, проявив себя как блестящий лектор и прекрасный педагог.

Вообще, 1970-1980-е гг. — расцвет научной, общественной и педагогической деятельности Юрия Михайловича. Много сил и энергии было отдано разработке вопросов, связанных с использованием задач в обучении. Результат — в 1977 г. была защищена докторская диссертация на тему "Роль и место задач в обучении математике и развитии мышления школьников". В методических работах Ю.М. Колягина представлены различные методы изучения в школе ведущих математических понятий, освещен российский и зарубежный опыт; разработана методика обучения математике "на задачах", в том числе оригинальная методическая модель дестандартизации учебных задач, которая позволяет учителю на базе любой задачи самостоятельно конструировать ее аналог, имеющий поисковый или проблемный характер. Эта проблематика объединяет его учеников и последователей в научную школу, в которой представлены сотрудники научно-исследовательских институтов, преподаватели университетов и пединститутов, методистов и учителей. Ю.М. Колягин подготовил более 30 кандидатов и докторов наук.

Он был активным участником мероприятий Андроновского семинара, т.е. Всероссийского научно-методического семинара "Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом", неоднократно выступал на нём с докладами. С 1981 г. он — член бюро семинара.

В 1982 г. Ю.М. Колягину было присвоено звание профессора. В 1985 г. он был избран членом-корреспондентом АПН СССР, в 1993 г. — академиком Российской академии образования. С 1990 г. Юрий Михайлович — главный научный сотрудник Института общего образования Министерства образования СССР (в настоящее время — Федеральный институт развития образования Министерства образования и науки РФ).

Ю.М. Колягин — один из авторов программ и учебников по математике для средней школы и для техникумов, студентов педагогических вузов и учителей. Видный учёный в области методики преподавания математики, ещё в 70-е гг. Ю.М. Колягин возглавил большой коллектив учёных, методистов и учителей для выполнения задания Министерства просвещения СССР и

РСФСР по подготовке учебников математики для средней общеобразовательной школы. Эти учебники математики для 7–11 классов выдержали десятки переизданий, действуют в средних школах России с 1978 г. по настоящее время. С 2003 г. реализуется концепция создания учебно-методических комплексов для средней общеобразовательной школы с компьютерной поддержкой (на примере Электронного образовательного комплекса по математике для 5–6 классов), проходящего экспериментальную проверку в школе. Пособие по методике преподавания математики остается до настоящего времени непревзойденным по фундаментальности изложения и самым востребованным в профессиональной подготовке учителя математики.

На счету Юрия Михайловича, кроме школьных учебников, — более трёхсот научных и методических работ. Выделим некоторые, наиболее значительные, книги: "Основные понятия школьного курса математики" (1975), "Задачи в обучении математике" (1977), "Методика преподавания математики" (1977, 1980), "Математика. Алгебра и элементарные функции. Часть 1" (1999), "Алгебра и начала анализа. 10-11 классы" (1999, 2002), "Математика. Учебное пособие для гуманитарных 10-11 классов средней школы" (2001), "Русская школа и математическое образование" (2001), книги из серии "Математика для техникумов" (в 3 тт., 3-е изд., 1987–1989).

Многие работы, написанные с участием Ю.М. Колягина или под его редакцией, в том числе пособия и учебники, широко известны не только в России и странах СНГ: они переведены на английский, польский, болгарский, испанский, японский и другие языки. Совместно с болгарскими методистами им разработана и опубликована в Болгарии методика обучения математике для болгарских учителей (1993, 1995), совместно с южнокорейским методистом разработано и опубликовано в Южной Корее пособие "Обучение решению задач" (2003).

Юрий Михайлович вёл большую научно-общественную работу: он был членом Научно-методического совета по математике МП СССР, Учёного методического совета по средней школе МП РСФСР, экспертного совета ВАК при Совете Министров СССР, входил в состав нескольких ученых и диссертационных советов, принимал активное участие в работе редколлегии журнала "Математика в школе" и редсовета по математике издательства "Просвещение".

Ю.М. Колягин — Заслуженный учитель РФ (1987), Заслуженный деятель науки РФ (2002). За успешную научно-педагогическую деятельность награждён медалью К.Д. Ушинского, значками "Отличник народного просвещения РСФСР" и "Отличник просвещения СССР", медалью "Ветеран труда", медалью "В память 850-летия г. Москвы".

Последние труды ученого посвящены осмыслению истории российского математического образования, из них особо следует выделить книгу "Русская школа и математическое образование: наша гордость и наша боль", написанную с огромной любовью к России. В этой книге историко-методические факты раскрываются не в рамках развития самой математики, а на фоне истории нашего государства, поэтому прочесть ее познавательно любому российскому человеку.

Лейтмотивом работы является доказательство того обстоятельства, что все отечественные достижения (в образовании, науке, культуре, экономике и пр.) напрямую связаны с преподаванием родного языка и математики. Именно усиленное внимание к этим предметам обеспечивало стабильность и успешность российской системы образования.

Ю.М. Колягин проявил себя как достойный продолжатель плодотворных идей русского классического образования. Сам академик говорил так: "... Наша школа переживала взлеты и падения, но всегда оставалась школой, обеспечивающей высокий уровень обучения, воспитания и развития учащихся. И сегодня она переживает тяжелый период, но ее история говорит о том, что в будущее русской школы следует смотреть с оптимизмом. Нам есть чем гордиться и есть о чем сожалеть...".

В памяти учеников, коллег, участников семинара "Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом", которым посчастливилось общаться и работать с Юрием Михайловичем Колягиным, навсегда останется этот чистый, добрый, глубоко порядочный, необычайно скромный, бескорыстный, но при этом яркий, жизнерадостный, искрящийся юмором человек, всегда готовый помочь советом и делом. Он был примером ответственнейшего отношения к делу, скрупулезности и самоотдачи, когда это касалось судьбы российского математического образования.

До последних дней своей земной жизни Юрий Михайлович держал руку на пульсе событий в мире, следил за новостями и жил большой надеждой на возрождение России. Хотя правильно было бы сказать, что он не просто надеялся, а делал все возможное и невозможное для процветания нашего Отечества.

Кузнецова Татьяна Ивановна,
профессор кафедры общеобразовательных предметов Института русского языка и культуры МГУ имени М.В. Ломоносова, доктор педагогических наук, доцент, руководитель Всероссийского научно-методического семинара "Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом".

E-mail: kuzti45@gmail.com

Саввина Ольга Алексеевна,
заведующая кафедрой математики и методики её преподавания Елецкого государственного университета имени И.А. Бунина, доктор педагогических наук, профессор.

E-mail: oas5@mail.ru

Тарасова Оксана Викторовна,
заведующая кафедрой геометрии и методики преподавания математики Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева, доктор педагогических наук, профессор.

E-mail: tarasova_orel@mail.ru

Содержание журнала "Математическое образование" за 2015–2016 гг.

От редакции

№ 3 (73), январь – март 2015 г.

Учащимся и учителям средней школы

А. Р. Рязановский. Многочлены с одним неизвестным 2

Е. З. Скворцова. Тригонометрические многочлены 12

А. Ю. Эвнин. Метод масс в задачах 27

Студентам и преподавателям математических специальностей

В. В. Ивлев. Об одном представлении выборочных распределений 48

Е. Н. Петрова, С. А. Пирогов. Разное сложение разных величин 53

Содержание образования: геометрия

К. Лезан. Что такое вектор? 56

Из истории математического образования

Т. И. Кузнецова. Дело И. К. Андронова живо: Семинару «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» – 55. Его основателю И. К. Андронову – 120 60

Информация

От редакции. О выходе книги "Загадка магнита" 77

№ 2 (74), апрель – июнь 2015 г.

Актуальные вопросы математического образования

И. П. Костенко. 1970 – 1986 гг. Реализация реформы-70, удержание её результатов (статья шестая) 2

Учащимся и учителям средней школы

А. Р. Рязановский. Многочлены с одним неизвестным (окончание) 18

Е. З. Скворцова. Тригонометрические многочлены (продолжение) 27

Студентам и преподавателям математических специальностей

И. Ф. Акулич. От Адама Ризе к Симплекс-методу или Непростые следствия простой задачи 42

Замечательные даты в мире математики и математического образования

Р. З. Гушель. Библиографические материалы к юбилейным датам 2015 года. II полугодие 55

№ 3 (75), июль – сентябрь 2015 г.

Учащимся и учителям средней школы

О. Р. Каюмов, К. Е. Каширина. Элементарное доказательство гипотезы Штейнгарца для биссектрис 2

К. В. Козеренко. Формальный язык 14

Е. З. Скворцова. Тригонометрические многочлены (окончание) 19

Содержание образования: геометрия

А. М. Прерис. О понятии формы 35

Т. Эренфест-Афанасьева. Упражнения по экспериментальной геометрии 39

Из истории математического образования

Р. З. Гушель. П. А. Некрасов и русская средняя школа конца XIX – начала XX века 47

Информация

От редакции. Памяти Алексея Геннадьевича Мякишева 53

№ 4 (76), октябрь – декабрь 2015 г.

Актуальные вопросы математического образования

И. П. Костенко. Уроки “ВТУ-реформы” (статья седьмая, заключительная) 2

Учащимся и учителям средней школы

А. А. Остапенко. Математика для старшеклассников: от фрагментарности к системности 22

Студентам и преподавателям математических специальностей

А. Ю. Эвнин. Задачи математического конкурса в ЮУрГУ 26

Т. В. Дудникова. О принципе предельной амплитуды для одномерного нелинейного волнового уравнения 53

Содержание образования: геометрия

Т. Эренфест-Афанасьева. Упражнения по экспериментальной геометрии (окончание) 59

Замечательные даты в мире математики и математического образования

Р. З. Гушель. Библиографические материалы к юбилейным датам 2016 года. I полугодие 72

Информация

От редакции. О деятельности ФМОП в 2015 г. 80

№ 1 (77), январь – март 2016 г.

Актуальные вопросы математического образования

Н. Х. Розов. Логика и школа 2

Учащимся и учителям средней школы

В. Б. Дроздов. Физика и математика треугольника Шварца 6

А. Ф. Ляхов. Построение линии сгиба в оригами 10

Студентам и преподавателям математических специальностей

В. В. Ивлев. Об одном приближении схемы гибели и размножения (продолжение) 19

Д. В. Гусев. Обход конечным автоматом с четырьмя камнями k-мерного пространства за полиномиальное время 23

Из истории математического образования

С. В. Жаров. Педагогическое наследие профессора Е. С. Березанской и современное начальное образование 44

Содержание образования: математика

А. А. Привалов. К изучению основ теории множеств на математическом кружке средней школы 49

№ 2 (78), апрель – июнь 2016 г.

Международная математическая олимпиада

А. И. Буфетов, А. Я. Канель-Белов. Живая математика: о подготовке к олимпиадам 2

Учащимся и учителям средней школы

В. Б. Дроздов. Решение четырехугольников 11

С. В. Жаров. Обобщение и специализация свойств геометрических фигур при решении планиметрических задач 17

С. И. Калинин. Опровержение одного алгоритма решения иррациональных уравнений, основанного на применении неравенства Коши 21

Студентам и преподавателям математических специальностей

С. В. Костин. Метод математической индукции. Статья 1. Возможности и ограничения метода математической индукции 26

С. В. Шведенко. К определению системы комплексных чисел 33

Содержание образования: геометрия

А. М. Прерис. О содержании курса элементарной геометрии 35

Замечательные даты в мире математики и математического образования

Р. З. Гушель. Библиографические материалы к юбилейным датам 2016 года. II полугодие 51

Из истории математического образования

С. В. Жаров. Наследие профессора И.Я. Депмана по истории и педагогике математики 59

№ 3 (79), июль – сентябрь 2016 г.

Юбилей

От редакции. Независимому Московскому Университету — 25 лет 2

Актуальные вопросы математического образования

К. А. Лебедев. О методических и научных принципах создания школьного учебника математики серии “МГУ — школе”. I. Числовые системы (5-6 классы) 3

Учащимся и учителям средней школы

С. В. Буфеев. Поворотное растяжение треугольника 21

В. И. Войтицкий. К проблеме качественного поведения линейных рекуррентных последовательностей 30

Е. Д. Куланин, Н. А. Шихова. Окружности Эйлера вписанного и вневписанных треугольников 38

Студентам и преподавателям математических специальностей

Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов. Гладкие функции, формальные ряды и теоремы Уитни 49

С. М. Тахаев. Построение треугольников с заданными свойствами 66

Из истории математического образования

Г. В. Кондратьева. К вопросу о времени на обучение математике в дореволюционных средних учебных заведениях 88

В. А. Попов. Иван Семенович Бровиков (к 100-летию со дня рождения) 93

№ 4 (80), октябрь – декабрь 2016 г.

Актуальные вопросы математического образования

Ю. А. Неретин. ЕГЭ и агония математики в школе 2

Учащимся и учителям средней школы

Б. Ямром. О двух треугольниках с общей стороной 15

Студентам и преподавателям математических специальностей

А. А. Привалов, А. Д. Рабе. О некоторых свойствах равных чевиан треугольника 20

Е. Г. Смольянова. Об одном способе построения эллипса 42

И. В. Сухан, Г. Г. Кравченко, О. В. Иванисова. О методике преподавания теории графов 48

С. В. Шведенко. Об альтернативном определении логарифма 52

Замечательные даты в мире математики и математического образования

Р. З. Гушель. Библиографические материалы к юбилейным датам 2017 года. I полугодие 54

Памяти Ю. М. Колягина

Т. И. Кузнецова, О. А. Саввина, О. В. Тарасова. Ушёл из жизни законодатель отечественной методики преподавания математики Юрий Михайлович Колягин... 63

Информация

От редакции. Содержание журнала “Математическое образование” за 2015–2016 гг. 67

От редакции. О деятельности ФМОП в 2016 г. 71

О деятельности ФМОП в 2016 г.

От редакции

В 2016 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся старших классов ГОУ СОШ № 179 и учебного комплекса № 2090 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов.
- Выпуск журнала "Математическое образование", учредителем которого ФМОП является; в 2016 г. вышли номера 1(77), 2(78), 3(79), 4(80).
- Поддержка выпуска книги "Георгий Гамов" о жизни и деятельности выдающегося физика Георгия Гамова.
- Поддержка выпуска книги "Турнир им. М.В.Ломоносова. 150 задач по физике".
- Поддержка издания брошюр "34-й Международный математический Турнир Городов", "35-й Международный математический Турнир Городов".
- Приобретение книг для награждения участников педагогической Олимпиады ФПО МГУ, февраль.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников регионального тура Всероссийской Олимпиады школьников, г. Королев, май.
- Предоставление изданий Фонда для участников летних математических лагерей "Алый Парус" и "Берендеевы Поляны" Костромской области, июнь–август.
- Приобретение учебных пособий, в частности, материалов для подготовки к ЕГЭ для учащихся старших классов нескольких школ г. Москвы.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал "Математическое образование" ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.
Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2016 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2016 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.
Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!
Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.
Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

Yu. Neretin. Unified State Exam and Agony of School Mathematics 2

The influence of the Unified State Exam on the level of school mathematics education is discussed.

B. Yamrom. On Two Triangles with Common Side 15

Let triangles ABC and ABD have the common side AB. It is proven that the distance between the incenters of the triangles ABC and ABD is less than CD.

A. Privalov, A. Rabe. On some Properties of Equal Chevians of a triangle 20

Let a triangle has two equal chevians. The authors investigate some conditions under which the triangle is isosceles.

E. Smolyanova. On a Certain Method of Constructing an Ellipsis 42

A special geometric method of constructing an ellipsis is discussed.

I. Suhan, G. Kravchenko, O. Ivanisova. On Methodology of Teaching Graph Theory 48

Methodology of teaching graph theory for higher school students is discussed.

S. Shvedenko. On Alternate Definition of Logarithm 52

A special definition of logarithm is given and the basic properties of logarithm are derived.

R. Gushel. Bibliography for Anniversary Dates of 2017, the First Half 54

Anniversary dates for the first half of 2017 connected to some outstanding people and events of mathematics or math education are given. A short description of a person or an event is followed by bibliographic list.

T. Kuznetsova, O. Savvina, O. Tarasova. In the Memory of Yu. Kolyagin 63

The obituary notice is devoted to Yuri Kolyagin, the outstanding Russian specialist in methodology of teaching mathematics.

Current Information 67

ISSN 1992-6138
9 771992 613776 >