ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

Год двадцать первый

№ 1 (81)

январь - март 2017 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.
Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)
Дубовицкий А.В.
Канель-Белов А.Я.
Комаров С.И.
Константинов Н.Н.
Костенко И.П.
Саблин А.И.

№ 1 (81), 2017 г.

©“Математическое образование”, составление, 2017 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2017 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.03.2017 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

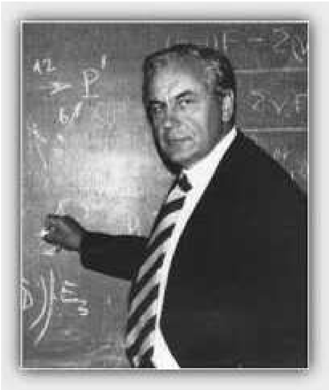
Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (81), январь – март 2017 г.

Содержание

Ушел из жизни Игорь Ростиславович Шафаревич

От редакции



Утром 19 февраля 2017 г. скончался Игорь Ростиславович Шафаревич — человек, который примером всей своей жизни показывал, что мыслить надо независимо, и не поддаваться ни давлению властей, ни инстинктам толпы, ни травле оголтелой стаи.

Его несгибаемая интеллектуальная воля — пример для всего мыслящего российского сообщества.

Игорь Шафаревич — это выдающийся русский математик, который создал российскую школу алгебраической геометрии и алгебраической теории чисел. Если алгебраическая теория чисел имела корни в России, в частности, на И. Шафаревича оказал влияние питерский математик Борис Делоне, то школа алгебраической геометрии — это практически полностью заслуга Шафаревича.

Наука эта очень плохо передается печатными текстами, так как апеллирует как к геометрическим образам, так и к абстрактным формальным конструкциям. Достаточно сказать, что в США школа алгебраической геометрии появилась в результате переезда в 1920-х годах туда из Италии Оскара Зарисского, а в Японии мощная школа алгебраической геометрии была создана во многом Кунихико Кодаирой, который проработал в Штатах 17 лет и Хейсуке Хиронакой, который обучился ей в Гарварде у О. Зарисского и А. Гротендика.

В СССР же, в отсутствие учителей, за Железным Занавесом, потребовались титанические личные усилия Шафаревича, чтобы усвоить базисные идеи итальянской школы конца 19-го – начала 20-го веков и далее по списку продвинуться вместе со своими учениками до самых передовых рубежей этой науки, а затем создать ныне знаменитую на весь мир российскую школу алгебраической геометрии.

И. Шафаревич настойчиво продвигал идею того, что алгебраическая теория чисел должна идти рука об руку с алгебраической геометрией, что вылилось в целый ряд знаменитых результатов московской школы по теории чисел, т.е. школы Шафаревича. Экспорт идей московской школы за Железный Занавес в противоположном направлении осуществлял английский математик Майлс Рид, который провел год в Советском Союзе в окружении Шафаревича и его учеников. Школа Шафаревича продолжает процветать и сейчас в Математическом Институте им. В.А. Стеклова в Москве как одна из немногих крупных научных школ, сохранившихся после развала Советского Союза.

От имени редакции
А.И. Бондал

Более подробно и жизни и деятельности И.Р. Шафаревича планируется рассказать в следующих выпусках журнала.

XXV Межрегиональная олимпиада школьников по математике САММАТ

От редакции

В статье рассказывается о математической олимпиаде для школьников САММАТ с организационным комитетом в Самаре, которая в этом году отмечает свое 25-летие. Приводятся примеры задач (часть из них с решениями) для участников с 6-го по 11-й класс.

Межрегиональная олимпиада школьников по математике САММАТ — ежегодная олимпиада по математике для всех желающих школьников 6–11-х классов. Историю САММАТ начали писать в 1993 году преподаватели Самарских ВУЗов: доцент Андреев А.А. (председатель оргкомитета олимпиады), профессор Радченко В.П., доцент Алякин В.А. В организации и проведении последних олимпиад активное участие принимают призеры прошлых лет и выпускники ведущих Самарских вузов: к.ф.-м.н. Саушкин М.Н., к.ф.-м.н. Саушкин И.Н., к.ф.-м.н. Чернопазова С.В., к.ф.-м.н. Козлова Е.А., Максимова Е.А. а также аспиранты и студенты старших курсов ВУЗов-организаторов Олимпиады.

Первоначально в олимпиаде принимали участие школьники 8–11-х классов, с 1998 года добавился 7-й класс, а с 2010–2011 учебного года и учащиеся 6-х классов. Ежегодно в САММАТ принимает участие более 17 000 человек из школ Самарской, Ульяновской, Оренбургской, Пензенской, Саратовской областей, республик Башкортостан, Мордовия, Белгородской области и др. Начиная с 2009 г. весь обмен информацией между участниками и оргкомитетом олимпиады (регистрация участников, размещение заданий, информация о результатах и итогах олимпиады) проводится с использованием новейших информационных технологий.

С 2011 года Олимпиада САММАТ проводится в два этапа. В 2011 году в отборочном этапе олимпиады, который проводился как в очной, так и в заочной форме, приняли участие более 8000 учащихся 6–11 классов из 40 регионов России. В заключительной этап олимпиады, который проводился на 8 площадках (г. Самара, г. Тольятти, г. Сызрань, г. Оренбург, г. Саранск, г. Тула, г. Саратов, г. Белебей) вышло более 2500 участников. Отметим, что число участников олимпиады с каждым годом увеличивается, об этом свидетельствуют статистические данные отборочного тура Олимпиады САММАТ-2012: более 10 100 участников 5–11 классов из 50 регионов РФ. Впервые в олимпиаде приняли участие школьники из стран СНГ (Казахстан, г. Астана). В 2013–2014 учебном году участниками отборочного тура олимпиады САММАТ стали более 20 000 школьников более чем из 50 регионов Российской Федерации. В 2014–2015 году в отборочном туре приняли участие более 18 000 участников из более чем 60 регионов, а победители и призеры Олимпиады были представлены более чем 20 регионами. В 2015–2016 году в отборочном туре приняли участие более 11 000 участников из 50 регионов, а также из Казахстана и Украины. В 2016–2017 году олимпиада впервые проводилась очно в Томской, Иркутской, Кемеровской и Московской областях. Благодаря современным технологиям, участие в отборочном туре приняли школьники практически из всех регионов Российской Федерации.

Олимпиада — это определенный этап в работе со школьниками. Традиционно в феврале на базе Самарского государственного технического университета председателем оргкомитета Андреевым А.А. проводятся открытые лекции по математике для всех желающих школьников.

Олимпиада САММАТ стала традиционной олимпиадой по математике Самарского государственного технического университета. В последние годы олимпиада САММАТ входит в Перечень олимпиад школьников. В 2016–2017 учебном году состоялась XXV олимпиада школьников САММАТ.

Основными целями и задачами Олимпиады являются выявление и развитие у обучающихся в образовательных учреждениях среднего, начального и среднего профессионального образования регионов Российской Федерации творческих способностей и интереса к научной деятельности, создание условий для интеллектуального развития, поддержки одаренных детей, в том числе содействие им в профессиональной ориентации и в продолжении образования. При всех ВУЗах, участвующих в организации Олимпиады, действуют профильные школы, работа которых направлена на вовлечение учащихся в более интенсивный процесс изучения математики. Победители и призеры Олимпиады поступают в ведущие ВУЗы страны (МГУ, СПбГУ, ГУ ВШЭ и др.) на различные факультеты, активно участвуют в исследовательской работе.

Традиционно в последние дни мая на площадках проведения Олимпиады проходят награждения победителей и призеров олимпиады. В награждении принимают участие руководители ВУЗов-соучредителей Олимпиады, представители школ и непосредственно учащиеся. Церемония награждения проходит в конце мая в 1-м корпусе Самарского государственного технического университета и ВУЗах-организаторах Олимпиады.

Избранные задания и решения олимпиады САММАТ

$\triangleright$ **1** (6 класс). Лимонадопровод последовательно проходит через города К, М и Ч в страну Лимонию. Коротышки, жители города К, несанкционированно забирают 10% сладкого продукта, Малышки из города М — 20%, а Чебурашки из города Ч — 30%. На сколько процентов производителю нужно увеличить производство, чтобы страна Лимония не испытывала недостатка в этом сладком, хотя и не очень полезном продукте (завод работает только на экспорт в страну Лимонию).

Решение. $V_0 = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot V_1$ — объем продукта, который получает страна после несанкционированных действий жителей трех городов, где V_1 — исходный объем.

$$V_1 = \frac{V_0}{\frac{9}{10} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{10}}; \qquad V_0 = \frac{500}{252} V_1 = 1\frac{248}{252} V_1 = 1\frac{62}{63} V_1.$$

Получаем,что на $\frac{62}{63} \cdot 100\% \approx 98,4\%$ нужно увеличить производство.

$\triangleright$ **2** (6 класс). Крест составлен из пяти равных квадратов, рис. 1. Разрежьте его на такие части, из которых можно (без дыр и перекрытий) составить квадрат.

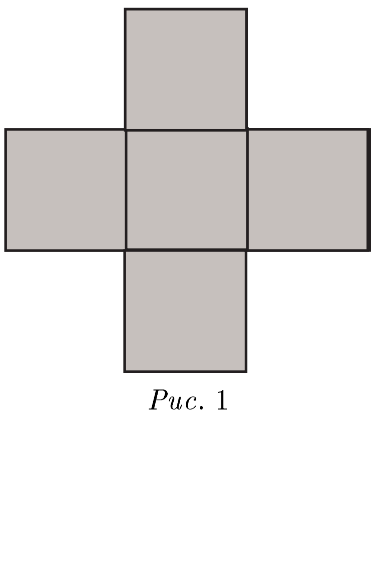


Рис. 1

Решение. См. рис. 2.

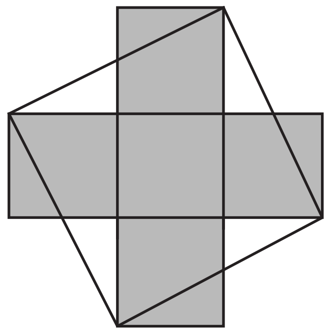


Рис. 2

▷ **3** (6 класс). Расшифровать равенство

$$\mathrm{tg} \times \mathrm{tg} = \mathrm{ctg}$$

Ответ: $25 \times 25 = 625$.

***

▷ **4** (7 класс).Часы пробили ровно 3 часа. Какой угол между часовой и минутной стрелкой будет через 20 часов 16 минут?

Ответ: 143°.

▷ **5** (7 класс). Если от некоторого двузначного числа отнять 2, то результат нацело разделится на 3, а если отнять не 2, а 3, то разделится не на 3, а на 2. Если к числу прибавить 4, то результат разделится нацело на 5, а если от него отнять 5, то разделится на 4. Более того, если от этого числа отнять 5, то разделится нацело на 6, а если же от нашего числа отнять 6, то разделится на 5. И это еще не все: если к этому замечательному числу прибавить 7, то результат разделится на 8, а если прибавить 8, то разделится на 7. Что же это за число?

Ответ: 41.

▷ **6** (7 класс). На интеллектуальной викторине было предложено несколько легких, средних и трудных вопросов, всех из названных поровну. За правильный ответ на легкий вопрос участник получал 3 балла, на средний — 4 баллов, а на трудный — 6 баллов. За неправильный ответ на легкий вопрос у участника вычиталось 3 балла. За неправильный ответ на средний вопрос — 2 балла, а за неправильный ответ на трудный вопрос баллы не вычитались. Вася ответил более чем на половину вопросов правильно и получил 30 баллов.

На сколько всего вопросов Вася ответил правильно, и сколько всего вопросов было предложено на викторине?

Решение. Пусть на викторине было n легких, n средних и n трудных вопросов. Пусть Вася ответил на a легких, b средних и c трудных вопросов. Поэтому он получил $3a-3(n-a)+4b-2(n-b)+6c = 6(a+b+c)-5n$ баллов. Согласно условию $6(a+b+c)-5n = 30$, или $6(a+b+c) = 30+5n$. Из полученного равенства получаем, что $n \vdots 6$. Тогда, очевидно, $n \geq 6$. При $n = 6$ общее число вопросов на викторине $3n = 18$. Из них Вася ответил правильно на

$$a+b+c = (5 \cdot 6 + 30) : 6 = 10$$

вопросов, что составляет более половины от 18. Легко проверить, что все условия выполняются, например, при $a = 5, b = 3, c = 2$.

Докажем, что $n > 6$ не удовлетворяет условию задачи. Действительно, при $n > 6$ и, значит, с учетом делимости на 6, при $n \geq 12$, отношение числа правильно данных Васей ответов к числу вопросов равно

$$\frac{a+b+c}{3n} = \frac{5+5n:6}{3n} = \frac{5}{3n} + \frac{5}{18} < [n \geq 12] < \frac{5}{36} + \frac{5}{18} = \frac{15}{36} < \frac{1}{2},$$

что противоречит условию задачи о том, что Вася правильно ответил более чем на половину вопросов. Таким образом, Вася правильно ответил на 10 вопросов из 18, предложенных на викторине.

***

▷ **7** (8 класс). Однажды первый вторник месяца я провел в Самаре, а первый вторник после первого понедельника — в Белгороде. В следующем месяце я первый вторник провел в Саранске, а первый вторник после первого понедельника — в Тольятти. Какого числа и какого месяца я был в каждом из городов?

Решение. Получается, что в Самаре я был 1 числа месяца, в Белгороде — 8 числа, следовательно, чтобы в следующем месяце 1 число было вторником, надо, чтобы прошло ровно по семь дней недели 4 раза, а значит первый месяц был февралем простого, не високосного года. В итоге, 1 февраля — Самара, 8 февраля — Белгород, 1 марта — Саранск, 8 марта — Тольятти.

▷ **8** (8 класс). С поезда сошли два пассажира и направились в один и тот же пункт. Первый половину времени шел со скоростью a, а вторую половину — со скоростью b. Второй шел первую половину пути со скоростью a, а вторую — со скоростью b. Который из них скорее пришел к месту назначения?

Решение. Пусть первый пассажир пришел в конечный пункт через t_1 часов, а второй через t_2 часов. Расстояние до места назначения обозначим через d. Тогда первый пассажир за первую половину времени $\frac{t_1}{2}$ прошел расстояние $\frac{at_1}{2}$, за вторую — $\frac{bt_1}{2}$. Отсюда:

$$\frac{at_1}{2} + \frac{bt_1}{2} = d, t_1 = \frac{2d}{a+b}.$$

Второй пассажир первую половину расстояния, т. е. $\frac{d}{2}$, шел со скоростью a, вторую половину — со скоростью b. Отсюда:

$$t_2 = \frac{d}{2a} + \frac{d}{2b} = \frac{d(a+b)}{2b}.$$

Возьмем разность

$$t_2 - t_1 = \frac{d(a+b)}{2ab} - \frac{2d}{a+b} = \frac{d((a+b)^2 - 4ab)}{2ab(a+b)} = \frac{d(a-b)^2}{2ab(a+b)}.$$

Так как при $a \neq b$ все множители в правой части положительны, то $t_2 - t_1 > 0$, т. е. $t_2 > t_1$ и, следовательно, первый пришел раньше второго (при $a = b$ будет $t_1 = t_2$).

▷ **9** (8 класс). По высоте, опущенной из вершины прямого угла и разности острых углов построить прямоугольный треугольник.

Решение.

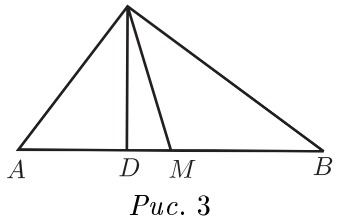


Рис. 3

Пусть треугольник ABC — искомый. Проведем высоту CD и медиану CM. Известно, что

$$\angle DCM = \angle CAB - \angle CBA.$$

Известно также, что $CM = \frac{1}{2}AB$. Таким образом, построив треугольник CDM, можно будет легко построить и треугольник ABC.

▷ **10** (8 класс). Пусть $\mathrm{S}(n)$ — сумма цифр натурального числа n. Найдите наименьшее n такое, что

$$\mathrm{S}(n) + \mathrm{S}(n+1) = 2016.$$

Ответ: $5\underbrace{9\ldots9}_{110}89$

▷ **11** (8 класс). Квадрат со стороной a превратить в прямоугольник, разрезая его на наименьшее число частей притом так, чтобы стороны прямоугольника относились как $3:1$

Решение.

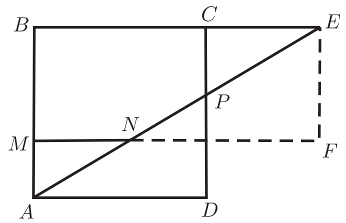


Рис. 4

Пусть сторона квадрата равна a, меньшая сторона прямоугольника x. Тогда:

$$3x^2 = a^2,$$

откуда:

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Большая сторона

$$3x = a\sqrt{3} = a \operatorname{tg} 60^\circ.$$

Строим $\angle BAN = 60^\circ$ и продолжаем AN до пересечения с продолжением BC в точке E. Из треугольника ABE имеем:

$$BE = AB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = a \operatorname{tg} 60^\circ = 3x,$$

т. е. BE — большая сторона искомого прямоугольника. От вершины B по BA отложим меньшую сторону $BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ и проведем $MN \parallel BC$ до пересечения с AE. Тогда имеем:

$$CE = BE - BC = a\sqrt{3} - a = a(\sqrt{3} - 1).$$

С другой стороны, из подобия треугольников AMN и ABE заключаем:

$$\frac{MN}{BE} = \frac{AM}{AB}.$$

Отсюда:

$$MN = \frac{AM \cdot BE}{AB} = \frac{\left(a - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) \cdot a\sqrt{3}}{a} = a(\sqrt{3} - 1).$$

Получаем, что $CE = MN$, значит, $\Delta AMN = \Delta PCE$.

Так же легко показать, что

$$\Delta ADP = \Delta NFE.$$

Итак, для превращения квадрата $ABCD$ в требуемый прямоугольник достаточно разбить его на три части: $MBCPN$, AMN и APD.

***

▷ **12** (9 класс). Назовем хромой ладьей фигуру, которая бьет как обычная ладья, но не далее, чем на 2 клетки. Какое наибольшее число хромых ладей можно поставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

Решение.

22. В каждой горизонтали может быть не более трех хромых ладей, на соседней горизонтали тоже не более 3-х, а на третьей — не более двух, т. е. $8 - 6 = 2$. Получаем не более:

$$3 + 3 + 2 + 3 + 3 + 2 + 3 + 3 = 22 \text{ или } 24 - 2 = 22$$

(две горизонтали не по 3, а по 2).

▷ **13** (9 класс). Найти все простые p и целые x такие, что $x(x+1)(x^4 - x + 1) = 13p - 1$.

Решение. Перепишем в виде

$$(x^2 + x)(x^4 - x + 1) + 1 = 13p; \;\; x^6 + x^5 - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1 = 13p;$$
$$(x^6 + x^5 + x^4) - (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) = 13p; \;\; (x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1) = 13p;$$

Возможны случаи:

1)

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 1; \\ x^4 - x^2 + 1 = 13p \end{cases}$$

$x^2 + x = 0$, т. е. $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, следовательно, $13p = 1$, $p \notin Z$

2)

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 13; \\ x^4 - x^2 + 1 = p \end{cases}$$

$x^2 + x - 12 = 0$, отсюда $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ и $p_1 = 73$, $p_2 = 241$.

3)

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 1; \\ x^4 - x^2 + 1 = 13p \end{cases}$$

$x^4 - x^2 = 0$, т. е. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, получаем, что $13p_1 = 1$, $13p_2 = 3$, $13p_3 = 1$, $p_1, p_2, p_3 \notin Z$

3)

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 13; \\ x^4 - x^2 + 1 = p \end{cases}$$

$x^2 = 4$, получаем $x_1 = 2$, $x_2 = -2$,т. е. $p_1 = 7$, $p_2 = 3$.

Итак, при $x_1 = -2$ $p_1 = 3$, $x_2 = 2$ $p_2 = 7$, $x_3 = 3$ $p_3 = 73$, $x_4 = -4$ $p_4 = 241$.

Ответ: $x_1 = -2$ $p_1 = 3$, $x_2 = 2$ $p_2 = 7$, $x_3 = 3$ $p_3 = 73$, $x_4 = -4$ $p_4 = 241$.

▷ **14** (9 класс). В треугольнике ABC точка M — точка пересечения медианы AA_1 и биссектрисы BB_1, а $\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1}$. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

Решение. Пусть $\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = k$. Положим $B_1M = d$, $MA_1 = e$, $AB = c$, $BC = a$. Тогда по формулам длин биссектрис BB_1 в треугольнике ABC и BM в треугольнике ABA_1:

$$\begin{cases} (k+1)d = \frac{2cd}{c+a} \cos \frac{B}{2}; \\ kd = \frac{2c\frac{a}{2}}{c+\frac{a}{2}} \cos \frac{B}{2}. \end{cases}$$

$$\frac{k+1}{k}=\frac{2}{c+a}(c+\frac{a}{2}),\ \ \frac{a}{c}=k-1.$$

По свойству биссектрисы в треугольнике AA_1B

$$\frac{ke}{e}=\frac{c}{\frac{a}{2}}=\frac{2c}{a}=\frac{2c}{c(k-1)},$$

Отсюда $k=\frac{2}{k-1}$, $k^2-k-2=0$, $k=2$. Значит, $a=c(2-1)=c$. Что и требовалось доказать.

$\triangleright$ **15** (9 класс). В племени древних шумеров считалось, что параллелепипед «красивый», если из его трех ребер, которые измерялись целыми числами, можно сложить прямоугольный треугольник. Какой наименьший объем, кратный 2016, можно было бы отмерить с помощью «красивого» параллелепипеда?

Решение. Пусть a, b, c — стороны «красивого» параллелепипеда, тогда $a^2+b^2=c^2$ и произведение измерений параллелепипеда должно делиться на 60.

При делении a, b, c на 5 остаток равен ±1, т. е. $a, b, c = 3m\pm1 \Rightarrow a^2+b^2\neq c^2$;

При делении a, b, c на 3 остаток равен ±1, т. е.

$$a, b, c=5m\pm21\Rightarrow a^2+b^2=5N+\binom{2}{5};\qquad c^2=5N+\binom{1}{4},$$

т. е. $abc \vdots 60$. Поскольку $2016=4\cdot8\cdot63=12\cdot8\cdot21$, имеем $5V=60\cdot168$, т. е. наименьший объем равен $60\cdot168$.

Ответ: 10080.

***

$\triangleright$ **16** (10 класс). Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=2^{\sin x}+2^{\cos x}.$$

Решение. В силу неравенства $a+b\geq2\sqrt{ab}$ имеем

$$2^{\sin x}+2^{\cos x}\geqslant2\sqrt{2^{\sin x}2^{\cos x}}=2\sqrt{2^{\sin x+\cos x}}=$$
$$=2\sqrt{2^{\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)}}=2\sqrt{2^{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}}\geq2\sqrt{2^{\sqrt{2}(-1)}}2\cdot2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Равенство достигается при

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1;\ \ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \ x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

$\triangleright$ **17** (10 класс). Дан равносторонний треугольник ABC. Найти геометрическое место точек M, для которых $MC^2=MA^2+MB^2$.

Решение.

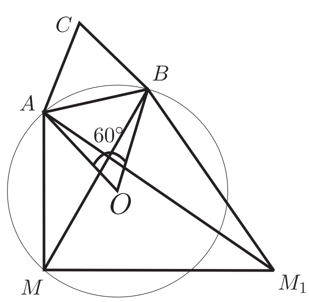


Рис. 5

Пусть точка M взята в плоскости треугольника ABC так, что

$$MC^2 = MA^2 + MD^2$$

На отрезке MB построим равносторонний треугольник BMM_1. Треугольник MBC равен треугольнику M_1BA так как

$$BC = BA, \qquad BM = BM_1, \qquad \angle MBC = \angle M_1BA.$$

Следовательно. $M_1A = MC$. Так как $MM_1 = MB$, то $MC^2 = MA^2 + MB^2 = MA^2 + MM_1^2$ и треугольник AMM_1 — прямоугольный. Отсюда следует, что $\angle AMB = 30°$.

Итак, если точка обладает указанным в условии задачи свойством и находится вне треугольника ABC, то она лежит на дуге сегмента, опирающегося на сторону AB и вмещающего угол в $30°$.

Совершенно таким же путем доказывается, что если точка M лежит внутри треугольника и обладает указанным свойством, то она лежит на дуге сегмента, опирающегося на сторону AB и имеющего угол в $150°$.

Допустим теперь, что точка M принадлежит одной из упомянутых дуг, например внешней по отношению к треугольнику ABC. Надо доказать, что

$$MC^2 = MA^2 + MD^2.$$

Произведя то же построение, что и выше, мы получим треугольник AMM_1, у которого угол AMM_1 — прямой, ибо

$$\angle AMM_1 = \angle AMB + \angle BMM_1 = 30° + 60° = 90°.$$

Так как

$$MM_1 = MB \text{ и } AM_1 = CM,$$

то

$$CM = AM_1^2 = AM + MM_1^2 = AM^2 + MB^2.$$

Итак, искомым геометрическим местом является окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, причем ее центром служит точка O, симметричная вершине C относительно прямой AB (концы также принадлежат искомому геометрическом месту).

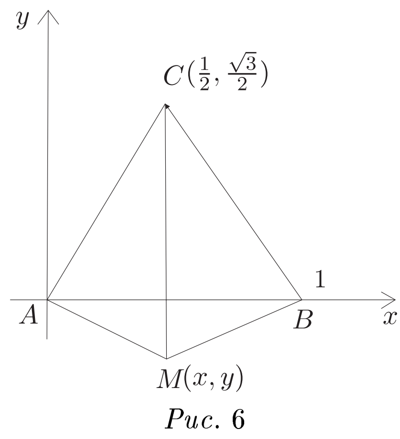


Рис. 6

Совсем просто задача решается с помощью метода координат. Примем вершину A за начало прямоугольной системы координат, а вершину B — за единичную точку оси OX. направление оси OY выберем так, чтобы вершина C находилась в первом квадранте. Тогда ее координатами будут служить числа $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Пусть точка $M(x,y)$ обладает указанным в задаче свойством.

$$MC = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},$$

$$MA = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad MB = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \text{ и } MC^3 = MA^2 + MB^2.$$

Следовательно, $x^2 + y^2 - x + \sqrt{3} \cdot y + \frac{1}{4} = 0$, или $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$.

Таким образом, мы получили ту же окружность, о которой шла речь выше.

$\triangleright$ **18** (10 класс). На отрезке [0,4] числовой оси расположены 63 различные точки a_k, $k = \overline{1,63}$. Докажите,что на этом отрезке найдется такая точка x, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{|x-a_1|} + \frac{1}{|x-a_2|} + \dots + \frac{1}{|x-a_{63}|} < 2016.$$

Решение. Пусть $a_k < a_{k+1}$ (без ограничения общности). Найдется, по крайней мере, один отрезок $[a_m; a_{m+1}]$, длина которого больше $\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$ (количество отрезков 64). Это не трудно доказать методом от противного. В качестве x возьмем середину этого отрезка

$$x = \frac{a_m + a_{m+1}}{2}; \quad |x - a_m| = \frac{1}{2}|a_{m+1} - a_m| \geq \frac{1}{32}; \quad |x - a_{m+1}| = \frac{1}{2}|a_{m+1} - a_m| \geq \frac{1}{32};$$

$$|x - a_k| = \frac{1}{2}|a_m + a_{m+1} - 2a_k| = \frac{1}{2}(a_k - a_{m+1}) + \frac{1}{2}(a_k - a_m) > \frac{1}{32};$$

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \dots + \frac{1}{x-a_{63}} < 32 \cdot 64 = 2016.$$

$\triangleright$ **19** (10 класс). Пусть

$$f_1(x) = f(x), f_k(x) = f(f_{k-1}(x)).$$

Существует ли функция $f(x)$, отличная от нуля, такая, что выполняется тождество

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_{2015}(x) = f_{2016}(x)?$$

Решение. Пусть $f_1(x) = f(x) = kx$, $f_2(x) = kf(x) = k^2x \Longrightarrow f_n(x) = k^n x$. Имеем

$$kx + k^2x + \dots + k^{2015}x = k^{2016}x.$$

Пусть

$$g(k) = k^{2015} - \frac{k^{2015} - 1}{k - 1},$$

тогда $g(0) = -1$, $g(2) = 1$, следовательно существует $k_0 \in (0;2)$: $g(k_0) = 0$. Тогда $f(x) = k_0 x$ — искомая функция.

***

$\triangleright$ **20** (11 класс). Два одинаковых куба с ребром a имеют диагонали на одной и той же прямой, вершина второго куба лежит в центре первого, и второй куб повернут вокруг диагонали на 60° по отношению к первому. Найти объем их общей части.

Решение. Общая часть этих двух кубов представляет собой пару правильных треугольных пирамид, сложенных вместе основаниями, причем плоские углы при вершинах этих пирамид все прямые, так что каждая из них представляет собой $\frac{1}{6}$ куба с ребром $b = AB$. Искомый объем V общей части кубов равен, следовательно,

$$2\frac{b^3}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Остается найти ребро b. Для этого заметим, что высота каждой из пирамид равна $\frac{b\sqrt{3}}{3}$, как треть диагонали куба с ребром b. Но удвоенная высота пирамиды равна половине OB диагонали заданного куба с ребром a, т. е.

$$\frac{2}{3}b\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$b = \frac{3}{4}a.$$

Ответ: Объем равен $\frac{9a^3}{64}$.

▷ **21** (11 класс). Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{2\arccos x - \arccos y} \cdot (|x| + |y| - 1) = 0; \\ \sqrt{2\arccos y - \arccos x} \cdot (|x + y| + |x - y| - 1) = 0 \end{cases}$$

Решение. Построив графики функций, находим точки пересечения, которые являются решениями системы:

$$\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)(1),\ (-1;0)(2),\ \left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)(3),\ (0;-1)(4),\ \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)(5),\ \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)(6),\ (1;1)(7)$$

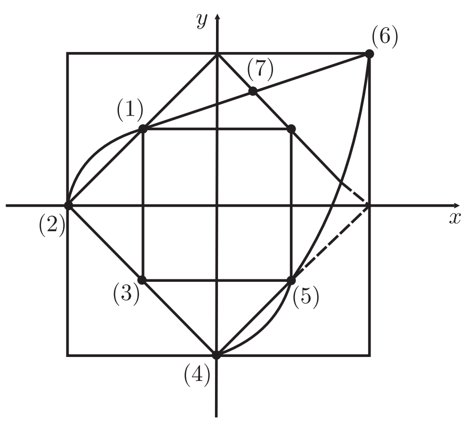


Рис. 7

Составим систему:

$$\begin{cases} x = 2y^2 - 1; \\ x = 1 - y \end{cases}$$

Получаем, $2y^2 + y - 2 = 0$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4};$$
$$x = \frac{5 - \sqrt{17}}{4};$$

Ответ: $(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}), (-1; 0), (0; -1), (1; 1), (\frac{5-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4})$.

▷ **22** (11 класс). В круг вписан правильный шестиугольник. Пользуясь только линейкой, построить $\frac{1}{n}$ часть радиуса, где $n = 2, 3, 4, 5 \ldots$.

Решение. См. рис. 6.

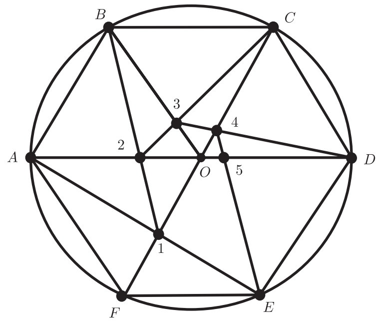


Рис. 8

Для правильного шестиугольника $ABCDEF$

1. Проводим AD.
2. Проводим CF.
3. Проводим AE. Отрезок $O1 = \frac{1}{2}R$.
4. Проводим $B1$. Отрезок $O2 = \frac{1}{3}R$; это следует из подобия треугольников $B1C$ и $21O$

$$\frac{O2}{R} = \frac{O1}{C1} = \frac{1}{3}.$$

5. Проводим BO.
6. Проводим $C2$. Отрезок $O3 = \frac{1}{4}R$.

Из подобия треугольников $23O$ и $2CD$:

$$\frac{O3}{R} = \frac{O2}{D2} = \frac{1}{4}$$

7. Проводим $D3$. Отрезок $O4 = \frac{1}{5}R$.
8. Проводим $E4$. Отрезок $O5 = \frac{1}{6}R$; и т. д.

▷ **23** (11 класс). Построить такой треугольник ABC с целочисленными сторонами, углы которого удовлетворяют соотношению:

$$3\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{3A}{2}\cdot\sin\frac{3B}{2}\cdot\cos\frac{3C}{2} = 0.$$

Решение. Имеем:

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$

и

$$\sin\frac{3A}{2}\cdot\sin\frac{3B}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}(A-B) - \cos\frac{3}{2}(A+B)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}(A-B) - \sin\frac{3}{2}C\right)$$

Будем теперь преобразовывать левую часть данного в условии задачи равенства:

$$3\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{3A}{2}\cdot\sin\frac{3B}{2}\cdot\cos\frac{3C}{2} = \frac{3}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} - \frac{3}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} +$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{3}{2}(A-B)\cdot\cos\frac{3C}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}C\cdot\cos\frac{3}{2}C = \frac{3}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot\sin\frac{(A+B)}{2} - \frac{3}{4}\sin C -$$
$$-\frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}(A-B)\cdot\sin\frac{3}{2}(A+B) + \frac{1}{4}\sin 3C = \frac{3}{4}(\sin A + \sin B) - \frac{3}{4}\sin C - \frac{1}{4}(\sin 3A + \sin 3B) + \frac{1}{4}\sin 3C.$$

Итак, углы треугольника ABC связаны зависимостью

$$3\sin A + 3\sin B - 3\sin C - \sin 3A - \sin 3B + \sin 3C = 0.$$

Преобразуем это равенство следующим образом:

$$3(\sin A + \sin B - \sin C) + (\sin A - \sin 3A) + (\sin B - \sin 3B) - (\sin C - \sin 3C).$$

Далее:

$$2(\sin A + \sin B - \sin C) - 2\cos 2A \cdot \sin A - 2cos2B \cdot \sin B + 2\cos 2C \cdot \sin C = 0$$

и

$$\sin A(1 - \cos 2A) + \sin B(1 - \cos 2B) = \sin C(1 - \cos 2C).$$

Это дает нам:

$$\sin^3 A + \sin^3 B = \sin^3 C.$$

Так как

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

то искомое соотношение между сторонами треугольника имеет вид:

$$a^3 + b^3 = c^3,$$

т. е. по теореме Ферма таких треугольников не существует.

$\triangleright$ **24** (11 класс). Сколько существует натуральных пар чисел $(m; k)$, таких, что последовательность чисел, заданных рекурсивным соотношением

$$x_{n+2} + \frac{1}{x_{n+1}} = x_n, x_1 = m, x_2 = k$$

состоит ровно из 100 чисел.

Решение. $x_{n+1} \neq 0$,

$$x_{n+2}x_{n+1} - x_{n+1}x_n = -1, \text{ где } x_{n+2}x_{n+1} = a_{n+1} \text{ и } x_{n+1}x_n = a_n.$$

Далее. $a_1 = x_1 \cdot x_2 = m \cdot k$; $a_{n+1} = a_1 + dn = mk - n$, $a_{n+1} = x_{n+2} \cdot x_{n+1} = 0 \Rightarrow x_{n+2} = 0$, $n = mk \Rightarrow x_{n+2} = 0$ и $\exists x_k :\ \forall k > n+2$. Имеем набор $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{mk+2}$, где $m \cdot k + 2 = 100$, т. е. $m \cdot k = 98$. Выпишем все возможности:

m	1	2	7	14	49	98
k	98	49	14	7	2	1

Ответ: 6 пар.

Материал предоставлен в редакцию ответственным секретарем оргкомитета Олимпиады Е.А. Максимовой.

Суммирование и гиперсуммирование прогрессий

В. И. Войтицкий

В статье рассматриваются различные задачи, приводящие к вычислению сумм арифметической и геометрической прогрессий, сумм степеней последовательных натуральных чисел и других сложных сумм. Приводится определение понятия и доказательство формул для гиперсумм прогрессий, т.е. сумм элементов последовательностей, каждый член которых является частичной суммой прогрессии или суммой от других частичных сумм (такие последовательности называют также прогрессиями высоких порядков). Описываются различные методы вычисления сумм степеней последовательных натуральных чисел. В качестве приложений рассматриваются три задачи, использующие сложные суммирования: задача о многоугольных и пирамидальных числах, задача о небоскрёбе и кокосах, задача о выплатах по кредиту.

1. Базовые формулы и популярные задачи

С понятием арифметической и геометрической прогрессии знаком каждый школьник. В арифметической прогрессии каждый член больше предыдущего на одинаковое число d, называемое разностью прогрессии. В геометрической прогрессии каждый член больше предыдущего в q раз, при этом число $q \neq 1$ называют знаменателем прогрессии. Непосредственно из определения следует, что арифметическая a_n и геометрическая b_n прогрессии удовлетворяют простейшим рекуррентным соотношениям

$$a_n = a_{n-1} + d, \tag{1}$$
$$b_n = b_{n-1} \cdot q, \tag{2}$$

из которых следует, что

$$a_n = a_1 + d(n-1), \tag{3}$$
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \tag{4}$$

Из формулы (1) следует также, что $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1}$. Отсюда $2s_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1) = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n)n$. Следовательно сумма первых n членов арифметической прогрессии задаётся известной формулой

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \tag{5}$$

В силу (3) выполнена также формула

$$s_n = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}. \tag{6}$$

Далее в тексте часто будет встречаться простейшая арифметическая прогрессия $1, 2, 3, \ldots, n$, для нее очевидно

$$s_n = \frac{(1+n)n}{2}. \tag{7}$$

С помощью этой формулы несложно решить задачу о максимальном числе кусков, которые можно получить, сделав n прямолинейных разрезов пиццы (см. полное решение в [1, с. 21–25]). Очевидно, сделав один разрез, можно получить 1+1=2 куска. Сделав 2 разреза, можно получить максимум 1+1+2=4 куска. Сделав 3 разреза, можно получить максимум 1+1+2+3=7 кусков. В общем случае, сделав n разрезов, можно получить $1+1+2+3+\ldots+n = 1+(1+n)(n/2)$ кусков.

Для геометрической прогрессии $s_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})$. Отсюда $qs_n = b_1(q+q^2+\ldots+q^{n-1}+q^n)$. Следовательно $s_n - qs_n = b_1(1-q^n)$, т.е.

$$s_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}. \tag{8}$$

В силу того, что при $q \in (-1;1)$ слагаемое q^n с ростом n стремится к нулю, можно определить бесконечную сумму

$$s_\infty = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \frac{b_1}{1-q}. \tag{9}$$

Чтобы строго обосновать приведённую здесь формулу необходимо перейти в формуле (8) к пределу при $n \to \infty$ (используется обозначение $s_n \to s_\infty$). При $q \in (-1;1)$ прогрессия называется бесконечно убывающей, её бесконечная сумма является примером сходящегося числового ряда. При $q = 1/2$ формула (9) является вполне очевидной и без формальных определений, поскольку квадрат, имеющий площадь $2b_1$ представим в виде половины — b_1, плюс четверть — $b_1/2$, плюс восьмая часть — $b_1/4$ и т.д.

На основе формулы (9) можно разрешить знаменитый древнегреческий парадокс «Ахиллес и черепаха». Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади неё на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит половину расстояния до черепахи, т.е. 500 шагов, черепаха продвинется в ту же сторону на 50 шагов. Когда Ахиллес пробежит следующую половину расстояния, т.е. 275 шагов, черепаха преодолеет ещё 27,5 шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, следовательно, можно полагать, что Ахиллес так никогда и не догонит черепаху.

В действительности, описывая математически процесс «добегания» Ахиллеса до середины, получаем, что Ахиллес сначала пробегает 500 шагов, затем $(500+50)/2 = 275 = 500 \cdot 11/20$ шагов, затем $(275+27,5)/2 = 151,25 = 500 \cdot (11/20)^2$ шагов и так далее. Таким образом, догоняя черепаху, Ахиллес делает бесконечно много перемещений, каждое из которых является членом бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поэтому весь его путь составляет $500 + 500 \cdot 11/20 + 500 \cdot (11/20)^2 + \ldots = \dfrac{500}{1-11/20} = \dfrac{10000}{9}$ шагов. Этот результат вполне ожидаем. Поскольку относительно черепахи скорость Ахиллеса равна 9/10 его абсолютной скорости, то шагов нужно сделать в 10/9 раз больше.

При $q \notin (-1;1)$ бесконечная сумма элементов геометрической прогрессии не сходится. В частности при $q \geq 2$ такая сумма очень быстро возрастает. Чтобы почувствовать быстроту такого возрастания (оно называется экспоненциальным) стоит вспомнить легенду о создателе шахмат. Согласно легенде мудрец показал своё изобретение правителю страны, которому оно так понравилась, что он позволил изобретателю выбрать самому свою награду. Последний попросил у повелителя за первую клетку шахматной доски заплатить одно зерно пшеницы, за второе — два, за третье — четыре и т.д., удваивая количество зёрен на каждой следующей клетке. Правитель, не разбиравшийся в математике, быстро согласился и приказал казначею подсчитать и выдать изобретателю нужное количество зерна. Спустя неделю казначей показал правителю расчёты и сказал, что расплатиться невозможно, поскольку количество зерна значительно превышает все имеющиеся в стране запасы. И действительно, создатель шахмат возжелал награду в $1+2+\ldots+2^{63} = 2^{64}-1 = 18446744073709551615$ зёрен. Предполагая, что одно зерно весит 0,065 грамм («тройское зерно»), отсюда получаем, что мы имеем дело с массой более 1,2 триллионов тонн. За всю свою историю человечество не собрало в сумме такого урожая. В наши дни за год на Земле вырастает не более 700 миллионов тонн пшеницы. При таком уровне сбора урожая необходимая масса зерна может вырасти не менее чем за 1700 лет.

2. Гиперсуммы прогрессий

Последовательность частичных сумм арифметической или геометрической прогрессии $s_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ (будем использовать далее обозначение $s_n = \sum_{k=1}^n c_k$) описывается явными формулами (5), (6) или (8). Иногда встречаются задачи, когда необходимо вычислять сумму $s_n^{(2)} = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ или даже вводимые по-индукции для $p \geq 3$ суммы $s_n^{(p)} = \sum_{k=1}^n s_k^{(p-1)}$. Будем далее называть такие выражения гиперсуммами заданной прогрессии порядка p. Ниже будут приведены задачи, для решения которых необходимо умение вычислять подобные суммы, поэтому целесообразно вывести формулы для их вычисления.

Рассмотрим простейшую арифметическую прогрессию $1, 2, 3, \ldots, n$, сумма её первых n членов вычисляется по формуле (7), т.е. $s_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n k = C_{n+1}^2$. Напомним, что через

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

обозначается число сочетаний из n элементов по k, известное из комбинаторики (см. [2, с. 49–55]), при этом $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Докажем сейчас с помощью метода математической индукции, что для данной прогрессии $s_n^{(p)} = C_{n+p}^{p+1}$.

Действительно, формула верна при $p = 1$. Предположим, что $s_n^{(p-1)} = C_{n+p-1}^p$. Для всех натуральных чисел p справедливо, что

$$k(k+1)\ldots(k+p-1) = \frac{k(k+1)\ldots(k+p) - (k-1)k\ldots(k+p-1)}{p+1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n s_k^{(p-1)} &= \sum_{k=1}^n C_{k+p-1}^p = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)\ldots(k+p-1)}{p!} = \\
&= \frac{1}{p!(p+1)}\sum_{k=1}^n [k(k+1)\ldots(k+p) - (k-1)k\ldots(k+p-1)] = \\
&= \frac{1}{(p+1)!}\Big(\big[(p+1)! - 0\big] + \big[\frac{(p+2)!}{1!} - (p+1)!\big] + \big[\frac{(p+3)!}{2!} - \frac{(p+2)!}{1!}\big] + \ldots \\
&\quad + \big[\frac{(p+n)!}{(n-1)!} - \frac{(p+n-1)!}{(n-2)!}\big]\Big) = \frac{1}{(p+1)!}\left(\frac{(p+n)!}{(n-1)!} - 0\right) = \\
&= \frac{n(n+1)\ldots(n+p)}{(p+1)!} = C_{n+p}^{p+1} = s_n^{(p)}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Таким образом выполнен индукционный переход.

На основе доказанной формулы (другое доказательство можно найти в [2, с. 74]) несложно получить формулу для гиперсуммы p-того порядка произвольной арифметической прогрессии. Согласно формуле (6)

$$s_n^{(1)} = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2} = (a_1 - d)n + \frac{d(n+1)n}{2} = (a_1 - d)C_n^1 + dC_{n+1}^2. \qquad (11)$$

Отсюда

$$s_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n((a_1 - d)C_k^1 + dC_{k+1}^2) = (a_1 - d)\sum_{k=1}^n C_k^1 + d\sum_{k=1}^n C_{k+1}^2 = (a_1 - d)C_{n+1}^2 + dC_{n+2}^3.$$

В общем случае

$$s_n^{(p)} = (a_1 - d)C_{n+p-1}^p + dC_{n+p}^{p+1}. \qquad (12)$$

На основе формулы для геометрической прогрессии (8) получаем, что

$$\begin{aligned}s_n^{(2)} &= b_1 + b_1(1+q) + \ldots + b_1(1+q+\ldots+q^{n-1}) = \\ &= b_1(q^{n-1} + 2q^{n-2} + 3q^{n-3} + \ldots + (n-1)q + n) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b_1(q^k-1)}{q-1} = \frac{b_1}{q-1}\left(\sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n} 1\right) = \frac{b_1}{q-1}\left(\frac{q(q^n-1)}{q-1} - n\right). \quad (13)\end{aligned}$$

Несложно убедиться в том, что при $p \geq 2$ выполнена формула

$$s_n^{(p)} = \frac{b_1}{q-1}\left(\frac{q^{p-1}(q^n-1)}{(q-1)^{p-1}} - \frac{q^{p-2}C_n^1}{(q-1)^{p-2}} - \frac{q^{p-3}C_{n+1}^2}{(q-1)^{p-3}} - \ldots - \frac{qC_{n+p-3}^{p-2}}{q-1} - C_{n+p-2}^{p-1}\right).$$

3. Суммы степеней последовательных натуральных чисел

Формула (10) позволяет находить явное выражение для суммы одинаковых (невысоких) степеней последовательных натуральных чисел. Действительно, $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{k+1}^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = C_{n+2}^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$. Отсюда $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Следовательно

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (14)$$

Аналогично $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{k+2}^3 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(k+2)}{3!} = C_{n+3}^4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$. Отсюда $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - 2\frac{n(n+1)}{2} - 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \cdot (n^2 + 5n + 6 - 4 - 2(2n+1)) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (15)\end{aligned}$$

Подобным образом можно находить формулы для суммы четвёртых степеней и выше. Другим приёмом для решения данной задачи является применение формулы Бинома Ньютона, на основании которой справедливо равенство

$$(k+1)^{m+1} - k^{m+1} = C_{m+1}^1 k^m + C_{m+1}^2 k^{m-1} + \ldots + C_{m+1}^m k + 1.$$

Суммирование этого соотношения по k от 1 до n приводит к тождеству

$$(n+1)^{m+1} - 1 = C_{m+1}^1 \sum_{k=1}^{n} k^m + C_{m+1}^2 \sum_{k=1}^{n} k^{m-1} + \ldots + C_{m+1}^m \sum_{k=1}^{n} k + n, \quad (16)$$

из которого можно находить сумму m-тых степеней последовательных натуральных чисел, зная формулы суммы меньших степеней. Эту формулу можно найти, например, в [3, с. 111-112]. Данный приём более подробно описан в статье [4]. Кроме этого, в данной работе доказана удобная явная формула для вычисления суммы m-тых степеней

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^m &= C_n^1 + \left[2^m - 1\right]C_n^2 + \left[3^m - 2\cdot 2^m + 1\right]C_n^3 + \ldots + \\ &+ \left[(m+1)^m - C_m^1 m^m + C_m^2 (m-1)^m - \ldots + (-1)^m\right]C_n^{m+1}. \quad (17)\end{aligned}$$

Имеет место и другая явная формула

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} B_k C_{m+1}^k (n+1)^{m+1-k}, \tag{18}$$

доказанная еще в 1713 году Якобом Бернулли. Здесь рациональные числа B_k называются числами Бернулли, они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$B_0 = 1, \quad B_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k+1} B_{n-k}. \tag{19}$$

Последовательность чисел Бернулли устроена весьма хаотично. Вот ее первые тринадцать членов:

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ 0,\ -\frac{1}{30},\ 0,\ \frac{1}{42},\ 0,\ -\frac{1}{30},\ 0,\ \frac{5}{66},\ 0,\ -\frac{691}{2730},\ \ldots \tag{20}$$

Интересно, что все числа Бернулли с нечётными номерами, начиная с трёх, равны нулю, при этом $B_1 = -1/2$. Доказательство этого факта, а также более подробную информацию о числах Бернулли можно найти, например, в статье [5].

Умение вычислять сумму m-тых степеней последовательных натуральных чисел позволяет выводить некоторые формулы из геометрии и физики, минуя формальное использование интегрального исчисления. Например, известную формулу для объёма прямого кругового конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ можно получить на основе формулы прямого кругового цилиндра $V = \pi R^2 H$. Для этого разобъём высоту конуса на n равных частей и через каждую точку на высоте проведём плоскость, параллельную основанию. Заменим каждый из образованных усеченных конусов цилиндром с тем же основанием. Объём исходного конуса мало отличается от суммы объемов полученных цилиндров, причём отличие тем меньше, чем больше число n. Несложно установить, что радиусы оснований цилиндров образуют арифметическую прогрессию: $\frac{R}{n}, \frac{2R}{n}, \ldots, \frac{nR}{n}$, при этом их высоты равны $\frac{H}{n}$. Следовательно, сумма объёмов всех цилиндров равна

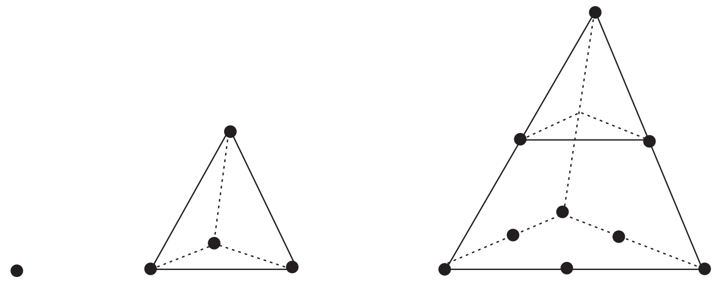
$$\sum_{k=1}^{n} \pi\left(\frac{kR}{n}\right)^2 \frac{H}{n} = \frac{\pi R^2 H}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{\pi R^2 H n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \frac{\pi R^2 H}{3} \quad (n\to\infty).$$

Конечно без формального определения кубируемости и использования предельного перехода данный вывод не является строгим, однако в нём отражен принцип вычисления объёмов сложных фигур, практический приём численного интегрирования с помощью перехода к конечным суммам.

4. Задачи, приводящие к вычислению гиперсумм прогрессий

4.1. Многоугольные и пирамидальные числа. По-видимому, самой древней задачей, приводящей к вычислению гиперсумм является задача о фигурных и пирамидальных числах. Еще древнегреческие математики (в особенности школа пифагорийцев) интересовались свойствами чисел, соответствующих тем или иным фигурам. О фигурных числах можно прочитать в книгах по истории математики, а также в статье [6].

Число T_n называется треугольным, если T_n одинаковых кружков могут быть расставлены в форме правильного треугольника. Например, треугольными являются числа 1, 3, 6, 10, 15 и т.д. Несложно понять, что треугольные числа — это частичные суммы простейшей арифметической прогрессии $1, 2, 3, \ldots$. Согласно формуле (7) $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Если теперь пытаться составлять правильные треугольные пирамиды из n одинаковых шаров, то мы придём к понятию треугольных пирамидальных чисел $T_n^{(2)} = 1, 4, 10, 20, 35$ и т.д., см. рисунок ниже.



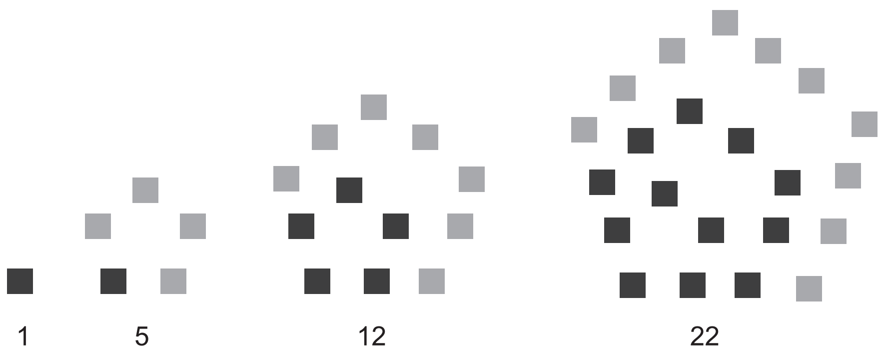
Поскольку каждый слой пирамиды должен быть треугольным числом, то $T_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$ — гиперсумма второго порядка. Вообще, в пространстве размерности m гиперсумма порядка $m-1$ будет соответствовать числу m-мерных шаров, из которых можно составить m-мерный симплекс (обобщение понятия тетраэдра). Такие числа соответствуют m-той строке прямоугольника Тартальи, см. [7, с. 21–24].

По аналогии, число K_n называется квадратным, если K_n одинаковых кружков могут быть расставлены в форме квадрата. Очевидно, что квадратные числа являются точными квадратами, при этом $K_n = n^2 = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$ — сумма арифметической прогрессии с $a_1 = 1$ и $d = 2$. Гиперсумма этой прогрессии второго порядка будет соответствовать квадратным пирамидальным числам $K_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1, 5, 14, 30, 55$ и т.д. Имея такие количества шаров, можно составлять правильные четырёхугольные пирамиды.

В общем случае l-угольные числа соответствуют количеству кружков, которые можно расставить в форме правильного l-угольника. Несложно сообразить, что этим числам соответствуют частичные суммы арифметической прогрессии с $a_1 = 1$ и $d = l-2$. Отсюда, с учётом (6), получаем явную формулу последовательности l-угольных чисел: $L_n^{(1)} = n + (l-2)\frac{n(n-1)}{2}$. Соответствующая гиперсумма второго порядка будет являться l-угольным пирамидальным числом. Согласно формуле (12) получаем, что

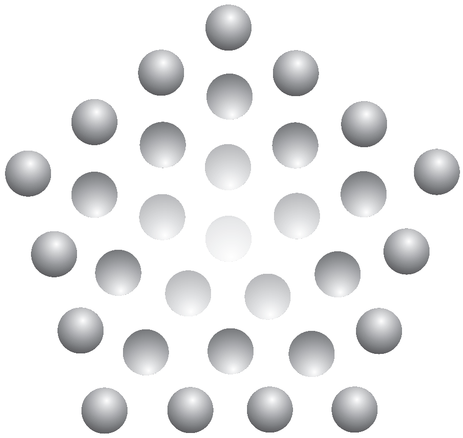
$$L_n^{(2)} = (l+1)C_{n+1}^2 + (l-2)C_{n+2}^3. \tag{21}$$

Например, пятиугольными являются числа $1, 5, 12, 22, 35$ и т.д., см. рисунок.



При этом пятиугольными пирамидальными числами являются $1, 6, 18, 40, 75$ и т.д.

Интерес представляют также центрированные многоугольные и пирамидальные числа. Центрированное l-угольное число — это количество кружков, которые расположены вокруг центрального кружка таким образом, что вокруг формируются слои l-угольников с возрастающими на единицу длинами сторон. Например, числа $1, 6, 16, 31, 51$ и т.д. являются центрированными пятиугольными числами. В-частности, число 31 соответствует количеству кружков на рисунке ниже.



Исходя из определения, получаем, что каждый слой, начиная со второго, содержит на l кружков больше, чем предыдущий. Отсюда можно заключить, что центрированные l-угольные числа — суть частичные суммы арифметической прогрессии $0, l, 2l, 3l, \ldots$, увеличенные на единицу, т.е. $s_n = \dfrac{n(n+1)l}{2} + 1$. Соответственно, центрированные l-угольные пирамидальные числа находятся по формуле $s_n^{(2)} = \dfrac{n(n+1)(n+2)l}{3} + n$.

4.2. Задача о небоскрёбе и кокосах. В октябре 2016 года на сайте журнала «Квантик» (см. http://kvantik.com/test-zadachi.html) была размещена тест-задача под названием «Эксперимент». Вот ее условие: «Мартышка поднимается на один из 100 этажей небоскрёба и бросает вниз кокос. Она пытается выяснить, с какого наименьшего этажа нужно бросить кокос, чтобы тот разбился. Каково минимальное число попыток, достаточное для этого, если у мартышки всего два кокоса?»

Ясно, что, имея один кокос, его нужно бросать подряд со всех этажей, начиная с первого, т.е. достаточно 100 попыток. Посчитаем, какова может быть максимальная этажность здания, если имеется два кокоса и максимум n попыток. Первый бросок выгодно сделать с n-того этажа. В случае, если кокос разобьётся, то останется второй, который максимум за $n-1$ бросков даст результат. Если первый кокос сразу не разобьётся, то второй раз его следует бросить так, чтобы в случае его крушения, с помощью $n-2$ попыток (бросков второго кокоса) можно было определить минимальный этаж. То есть после n-того этажа его нужно бросить с $n+(n-1)$ этажа. Остальные варианты не являются оптимальными, поскольку приведут либо к увеличению числа попыток, либо к уменьшению максимальной этажности. Рассуждая далее, получаем, что в случае, когда бросок с $n+(n-1)$ этажа не разбил первый кокос, его нужно бросить с $n+(n-1)+(n-2)$ этажа и так далее. Действуя таким образом и имея n попыток, можно максимум подняться до этажа с номером $S_n^{(1)} = s_n^{(1)} = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = n(n+1)/2$. Решая неравенство $n(n+1)/2 \geq 100$ в целых числах, отсюда заключаем, что $n \geq 14$. Следовательно $n = 14$ является решением исходной тест-задачи.

Предложенную задачу можно обобщить на случай произвольного числа кокосов. Будем далее всюду через $s_n^{(p)}$ обозначать p-тую гиперсумму простейшей прогрессии $1, 2, 3, \ldots$. А через $S_n^{(k-1)}$ — максимальную этажность здания, подлежащего проверке с помощью k кокосов и $n+k-2$ попыток.

Пусть у мартышки есть три кокоса и максимум $n+1$ попытка. Если первый кокос разбивается, упав с этажа m_1, то, имея оставшиеся n попыток и два кокоса, можно, повторяя проведенные выше рассуждения, максимум дойти до этажа $s_n^{(1)}$. То есть первый бросок нужно делать с этажа $m_1 = s_n^{(1)} + 1$. Если он не привёл к крушению, то нужно делать второй бросок с этажа $m_2 > m_1$. При этом остаётся $n-1$ попытка и два кокоса. Оптимальная стратегия приводит максимум до $m_1 + s_{n-1}^{(1)}$ этажа. Таким образом $m_2 = m_1 + s_{n-1}^{(1)} + 1 = s_n^{(1)} + s_{n-1}^{(1)} + 2$. Рассуждая аналогично, в итоге получаем, что максимальная этажность здания определяется по формуле $S_n^{(2)}=m_{n+1}=m_n+1$, где $m_n=s_n^{(1)}+s_{n-1}^{(1)}+\ldots+s_1^{(1)}+n$. Действительно, если n подряд бросков первого кокоса не привели к крушению, то имея последнюю попытку, можно сделать следующий бросок лишь этажом выше. Таким образом $S_n^{(2)}=s_n^{(2)}+n+1=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3!}+n+1$. Решая неравенство $S_n^{(2)}\geq 100$ получаем минимальное целое $n=8$, то есть минимум нужно иметь $n+1=9$ попыток.

Пусть теперь у мартышки имеется 4 кокоса и максимум $n+2$ попытки. Повторяя приведенные выше рассуждения, получаем, что первый кокос нужно сразу бросать с этажа $m_1=S_n^{(2)}+1$, если он не разбивается, то с этажа $m_2=m_1+S_{n-1}^{(2)}+1=S_n^{(2)}+S_{n-1}^{(2)}+2$ и так далее, $m_n=S_n^{(2)}+S_{n-1}^{(2)}+\ldots+S_1^{(2)}+n$. Если n подряд бросков первого кокоса не привели к крушению, то, имея две попытки и 4 кокоса, можно максимум дойти до этажа $m_{n+2}=m_n+3$. Действительно, очевидно, что $m_{n+2}=m_{n+1}+1$, при этом $m_{n+1}=m_n+2$ (если $m_{n+1}>m_n+2$, то в случае крушения с этажа m_n останется одна попытка и более двух вариантов для последнего броска). Таким образом, получается формула $S_n^{(3)}=m_{n+2}=S_n^{(2)}+S_{n-1}^{(2)}+\ldots+S_1^{(2)}+n+3=\sum_{k=1}^n(s_k^{(2)}+k+1)=s_n^{(3)}+s_n^{(1)}+n+n+3=s_n^{(3)}+s_n^{(1)}+2n+2^2-1$. Решая неравенство $S_n^{(3)}\geq 100$, получаем минимальное целое $n=6$, то есть минимум нужно иметь $n+1=7$ попыток.

Обобщение приведённых выше рассуждений приводит к следующему результату. Имея, $k\geq 4$ кокосов и $n+k-2$ попыток, можно максимум дойти до этажа

$$\begin{aligned}S_n^{(k-1)}&=S_n^{(k-2)}+S_{n-1}^{(k-2)}+\ldots+S_1^{(k-2)}+n+(2^{k-2}-1)=\\&=s_n^{(k-1)}+s_n^{(k-3)}+2s_n^{(k-4)}+2^2s_n^{(k-5)}+\ldots+2^{k-4}s_n^{(1)}+2^{k-3}n+(2^{k-2}-1)=\\&=C_{n+k-1}^k+C_{n+k-3}^{k-2}+2C_{n+k-4}^{k-3}+2^2C_{n+k-5}^{k-4}+\ldots+2^{k-3}C_n^1+(2^{k-2}-1).\end{aligned}\tag{22}$$

Оставляю строгое доказательство этой формулы (методом математической индукции по k) в качестве упражнения.

Интересно, что в данной задаче, имея пять кокосов и более, мартышке всё равно не удастся найти минимальный этаж за меньшее число попыток, чем семь. Действительно, если кокосов достаточно много, то оптимальная стратегия меняется — «нужно делить оставшиеся этажи пополам». Именно, первый бросок нужно делать из среднего этажа или соседнего с ним. Если кокос разбился (не разбился), то следующий делается из середины оставшихся этажей ниже (выше) и так далее. Например, в худшей ситуации, если имеется семь кокосов, которые разбиваются даже при броске с первого этажа, номера этажей в порядке бросков будут, например, такие: $50, 25, 13, 7, 4, 2, 1$. Вообще, если имеется здание в 2^k-1 этажей или ниже (но более $2^{k-1}-1$ этажей), то, минимум k кокосов и k бросков достаточно для решения задачи. В этом нас убеждает равенство $1+2+4+\ldots+2^{k-1}=2^k-1$. В исходной задаче $2^6-1<100<2^7-1$. Формула (22) согласуется и с этой стратегией. Действительно, при $n=0$ формально получаем, что $S_n^{(k-1)}=2^{k-2}-1$, число попыток равно $k-2$. При $n=1$ получаем $S_n^{(k-1)}=1+1+2+4+\ldots+2^{k-3}+(2^{k-2}-1)=1+2(2^{k-2}-1)=2^{k-1}-1$ при числе попыток $k-1$. Аналогично, при $n=2$ число попыток равно k, а $S_n^{(k-1)}=2^k-1$ (проверку оставляю в качестве упражнения).

4.3. Задача о выплатах по кредиту. В последние годы в связи с развитием предпринимательской деятельности большую популярность приобрели задачи о выплатах по кредитам. Достаточно сказать, что большинство задач экономического содержания из профильного ЕГЭ по математике посвящено этой теме (см. http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege).

Рассмотрим достаточно общую постановку задачи при различных схемах выплат. Будем считать, что в банке взят кредит на сумму S_0 рублей, причём ежемесячно сумма долга возрастает на $r\%$ по сравнению с предыдущим месяцем. Пусть после очередного k-того повышения кредитор возвращает в банк некоторую сумму $a_k\geq 0$, после чего сумма долга составляет S_k. Если таким путём удаётся погасить весь кредит ровно за n месяцев (платежей), то мы полагаем, что $S_n=0$. Между введёнными параметрами существует определённая связь, позволяющая находить один из них, зная остальные. Эта связь существенно зависит от схемы выплат, т.е. от последовательности a_k. Ясно, что долг можно выплатить за конечно число месяцев, если среди членов a_k есть достаточно большие числа. Если все $a_k = 0$, то, согласно формуле сложных процентов, долг будет расти очень быстро (экспоненциально) по формуле $S_k = S_0(1 + \frac{r}{100})^k = S_0 q^k$. Здесь и далее считаем, что $q = 1 + \frac{r}{100} > 1$. Будем далее также использовать обозначение $f_n \searrow f$ $(n \to \infty)$, если $f_n \to f$ при $n \to \infty$ и последовательность f_n является монотонно убывающей, т.е. $f_{n+1} < f_n$ для всех натуральных n.

1. *Схема равных выплат.* Пусть $a_k \equiv a > 0$. Тогда простой подсчёт приводит к тому, что $S_1 = S_0 q - a$, $S_2 = S_1 q - a = S_0 q^2 - a(1+q)$, $S_3 = S_2 q - a = S_0 q^3 - a(1 + q + q^2)$,

$$S_n = S_0 q^n - a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$a = \frac{S_0 q^n}{1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}} = \frac{S_0 q^n (q-1)}{q^n - 1} \searrow S_0(q-1) \quad (n \to \infty). \tag{23}$$

Следовательно

$$q^n = \frac{a}{a - S_0(q-1)}. \tag{24}$$

Ясно, что чем больше число месяцев n, тем выплата a может быть меньше, однако в случае $a \le S_0(q-1)$ долг невозможно погасить. Если $S_0(q-1) < a \le S_0 q$, то кредит удастся погасить за конечное число месяцев n, где n — минимальное целое число, превосходящее $\log_q \dfrac{a}{a - S_0(q-1)}$.

Например в базе заданий ЕГЭ можно найти такую задачу: 1 июня 2013 года некто взял кредит на сумму 900000 рублей. Первого числа каждого следующего месяца банк увеличивает долг на 1%, затем в банк переводится платёж. На какое минимальное количество месяцев можно взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300000 рублей. Ясно, что минимальное n будет достигаться, если все выплаты составят $a = 300000$ (кроме, возможно, последней). Отсюда получаем, что $n > \log_{1,01} \dfrac{300}{300 - 900 \cdot 0,01} = \log_{1,01} \dfrac{300}{291} > \log_{1,01} 1,030301 = 3$. Итого, ответ 4 месяца.

2. *Выплаты по арифметической прогрессии.* Пусть теперь выплаты производятся по формуле $a_k = a + d(k-1)$. Тогда

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_0 q - a,\\
S_2 &= S_1 q - a - d = (S_0 q - a)q - a = S_0 q^2 - aq - a - d,\\
S_3 &= S_2 q - a - 2d = S_0 q^3 - a(q^2 + q + 1) - d(q + 2),\\
S_4 &= S_3 q - a - 3d = S_0 q^4 - a(q^3 + q^2 + q + 1) - d(q^2 + 2q + 3).
\end{aligned}$$

В общем случае

$$S_n = S_0 q^n - a(q^{n-1} + \ldots + q^2 + q + 1) - d\big[q^{n-2} + 2q^{n-3} + 3q^{n-4} + \ldots + (n-2)q + (n-1)\big].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, есть не что иное, как гиперсумма геометрической прогрессии второго порядка $s^{(2)}_{n-1}$ со знаменателем q и $b_1 = 1$. Согласно формуле (13) получаем, что

$$S_n = S_0 q^n - \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} - \frac{d}{q-1}\left[\frac{q(q^{n-1} - 1)}{q - 1} - (n-1)\right] = 0. \tag{25}$$

Можно доказать, что для всех натуральных n выражение в квадратных скобках будет положительным числом. Отсюда следует, что для любого $a \ge 0$ существует некоторое $d > 0$ приводящее к выплатам всего долга за n месяцев. Аналогично для любого $d \in \mathbb{R}$ существует $a > 0$ приводящее к погашению кредита за n месяцев. Формулу (25) можно переписать в виде

$$q^n \left(S_0 - \frac{a}{q-1} - \frac{d}{(q-1)^2}\right) = -n\frac{d}{q-1} - \frac{a}{q-1} - \frac{d}{(q-1)^2}. \tag{26}$$

Поскольку при $n \geq 0$ правая часть отрицательна, то необходимым условием погашения кредита является условие

$$S_0 < \frac{a}{q-1} + \frac{d}{(q-1)^2}. \tag{27}$$

Очевидно, что при $n = 0$ левая часть больше правой на величину $S_0 > 0$. При этом показательная функция возрастает быстрее линейной, поэтому условие (27) является и достаточным, т.е. при его выполнении существует единственное $n_0 > 0$ удовлетворяющее уравнению (26). Так как число месяцев n должно быть целым, то нужно полагать, что n — минимальное целое число, превосходящее n_0. При этом самая последняя выплата может быть меньше запланированной по схеме.

Например, пусть взят кредит в 10 000 руб под 2% ежемесячных процентов. Некто выплачивает его по описанной выше схеме, при этом первый взнос $a = 0$, и в каждый следующий месяц в банк вносится не более чем на 500 рублей больше, чем в предыдущий. Через сколько минимум месяцев может быть погашен кредит? Очевидно, в данном случае условие (27) является выполненным. Подставляя данные задачи в формулу (26) получаем, что $1{,}02^n(10\,000 - 1\,250\,000) = -25\,000n - 1\,250\,000$. Отсюда

$$1240 \cdot 1{,}02^n - 25n = 1250.$$

Подсчёт показывает, что при $n = 7$ левая часть меньше правой, а при $n = 8$ — больше. Следовательно, для полного погашения долга необходимо 8 месяцев. Например, со второго по седьмой месяц можно производить выплаты по арифметической прогрессии 500, 1000, 1500 и т.д., при этом в последний восьмой месяц выплата будет менее 3500 рублей.

3. *Выплаты по геометрической прогрессии.* Пусть выплаты производятся по формуле $a_k = ap^{k-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_0q - a, \\
S_2 &= S_1q - ap = S_0q^2 - aq - ap, \\
S_3 &= S_2q - ap^2 = S_0q^3 - a(q^2 + qp + p^2), \quad \ldots \\
S_n &= S_0q^n - a(q^{n-1} + q^{n-2}p + \ldots + qp^{n-2} + p^{n-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Если $p = q$, то $S_n = S_0q^n - aq^{n-1}n = 0$, т.е. $a = S_0q/n$. Если $p > q$, то

$$0 = S_0q^n - a(q^{n-1} + q^{n-2}p + \ldots + qp^{n-2} + p^{n-1}) < S_0q^n - aq^{n-1}n. \tag{28}$$

Отсюда $a < S_0q/n$. Очевидно, верно и обратное, при $a < S_0q/n$ имеем $p > q$. В этом случае

$$a = \frac{S_0q^n(p-q)}{p^n - q^n} \searrow 0 \quad (n \to \infty). \tag{29}$$

Таким образом для любого $a > 0$ и $p > q$ кредит удастся погасить за конечное число месяцев. Также для любого натурального $n \geq 2$ и $a < S_0q/n$ существует единственное решение $p > q$ уравнения (29).

В случае $a > S_0q/n$ должно быть выполнено условие $p < q$, при этом

$$a = \frac{S_0q^n(q-p)}{q^n - p^n} \searrow S_0(q-p) \quad (n \to \infty). \tag{30}$$

Таким образом для заданного $p < q$ кредит можно погасить за конечное число месяцев лишь при выполнении условия $a > S_0(q-p)$. Также для любого натурального $n \geq 2$ и $a > S_0q/n$ существует единственное решение $p < q$ уравнения (29). Отметим еще, что при $p = 1$ получаем те же формулы, что и для схемы равных выплат.

Например, пусть снова взят кредит 10 000 руб под 2% ежемесячных процентов. Некто хочет выплатить его за год по описанной схеме, при этом первый взнос $a = 1000$. Необходимо найти знаменатель геометрической прогрессии p. Так как $1000 = a > S_0q/n = (10\,000 \cdot 1{,}02)/12$, то $p < q = 1,02$. Преобразование (30) приводит к уравнению

$$1000 = \frac{10\,000 \cdot 1{,}02^{12}(1{,}02 - p)}{1{,}02^{12} - p^{12}}. \tag{31}$$

Отсюда с точностью до 10^{-4} получаем $12{,}6824p = 11{,}6678 + p^{12}$. Это уравнение имеет два вещественных корня: 0,9893 и 1,0200. Второй корень, очевидно, является посторонним, поэтому $p = 0{,}9893$. Следовательно каждая следующая выплата должна быть на 1,07% меньше предыдущей.

4. *Схема равномерного погашения долга.* Пусть выплаты производятся таким образом, что величина долга убывает по арифметической прогрессии, т.е. $S_1 = S_0 - \dfrac{S_0}{n}$, $S_2 = S_0 - \dfrac{2S_0}{n}$, …, $S_n = S_0 - \dfrac{nS_0}{n} = 0$. Исходя из этого, получаем, что

$$\begin{aligned}
&S_1 = S_0q - a_1 = S_0(1 - \frac{1}{n}),\\
&S_2 = S_1q - a_2 = S_0(1 - \frac{2}{n}), \quad \ldots\\
&S_n = S_{n-1}q - a_n = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&a_1 = S_0\Big(q - 1 + \frac{1}{n}\Big),\\
&a_2 = S_0\Big(\big[1 - \frac{1}{n}\big]q - 1 + \frac{2}{n}\Big), \quad \ldots\\
&a_k = S_0\Big(\big[1 - \frac{k-1}{n}\big]q - 1 + \frac{k}{n}\Big), \quad \ldots\\
&a_n = S_0\big[1 - \frac{n-1}{n}\big]q.
\end{aligned}$$

Сумма всех выплат за n месяцев составляет

$$\begin{aligned}
A_n = S_0\left(\big[n - \frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \ldots - \frac{n-1}{n}\big]q - n + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right) =\\
= \frac{S_0}{2}\big(\big[2n - (n-1)\big]q - 2n + (n+1)\big) = \frac{S_0}{2}\big([n+1]q - (n-1)\big). \quad (32)
\end{aligned}$$

Пользуясь этой формулой, можно рассчитать переплату, найти неизвестный параметр, зная остальные. Например, в базе заданий ЕГЭ можно найти такую задачу: Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. Он должен погасить его ежемесячными платежами так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц. Известно, что каждый месяц банк увеличивает долг на r% и за весь срок кредитования Алексей заплатил на 13% больше, чем взял изначально. Так как по условию $A_{12} = S_0 \cdot 1,13$, то согласно формуле (32) получаем уравнение $2,26 = 13q - 11$. Следовательно $q = 1,02$, $r = 2\%$.

5. *Схема погашения долга по заданному правилу.* Пусть имеется некоторая убывающая последовательность l_k, такая что $l_0 = 1, l_n = 0$. Будем полагать, что $S_k = S_0 \cdot l_k$ — величина долга, спустя k месяцев. Тогда

$$\begin{aligned}
&S_1 = S_0q - a_1 = S_0l_1\\
&S_2 = S_1q - a_2 = S_0l_2, \quad \ldots\\
&S_n = S_{n-1}q - a_n = S_0l_n.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$a_1 = S_0(q - l_1),$$
$$a_2 = S_0(l_1 q - l_2), \quad \ldots$$
$$a_n = S_0(l_{n-1} q - l_n).$$

Пусть $L_n = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$, тогда сумма всех выплат за n месяцев составляет

$$A_n = S_0((1 + L_n)q - L_n). \tag{33}$$

Пользуясь этой формулой, несложно решить следующую задачу из базы заданий ЕГЭ. 15-го января планируется взять кредит на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия возврата таковы, что 1 числа каждого следующего месяца долг увеличивается на целое число r процентов, со 2 по 14 число необходимо выплатить некоторую часть долга так, чтобы на 15 число каждого месяца (с января по июль) долг убывал по заданному правилу: 1; 0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0 млн рублей. Необходимо найти наибольшее значение r при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей. По условию задачи $L_6 = 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0 = 1{,}6$. Согласно (33) имеем $A_6 = (1+1,6)q - 1,6 < 1,2$. Отсюда $q = 1 + \frac{r}{100} < \frac{2{,}8}{2,6} = 1 + \frac{0,2}{2,6}$, т.е. $r < \frac{20}{2,6} = \frac{100}{13} = 7\frac{9}{13}$. Следовательно условию задачи удовлетворяет $r = 7\%$.

Литература

[1] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* — М.: Мир, 1998. — 703 с.

[2] Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. *Комбинаторика.* — М.: издательство МЦНМО, 2006. — 400 с.

[3] Прасолов В.В. *Задачи по алгебре, арифметике и анализу.* — М.: МЦНМО, 2005. — 560 с.

[4] Абрамович В. *Суммы одинаковых степеней натуральных чисел* // Научно-популярный журнал «Квант». — № 5. — 1973. — с. 22–25.

[5] Абрамович В. *Числа Бернулли* // Научно-популярный журнал «Квант». — № 6. — 1974. — с. 10–14.

[6] Бендукидзе А. *Фигурные числа* // Научно-популярный журнал «Квант». — № 6. — 1974. — с. 53–56.

[7] Успенский В.А. *Треугольник Паскаля (Популярные лекции по математие, вып. 43).* — М.: Наука, 1979. — 48 с.

Войтицкий Виктор Иванович,
доцент кафедры математического анализа
Таврической академии Крымского федерального
университета им. В.И. Вернадского, Симферополь,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: victor.voytitsky@gmail.com

Формула Фусса

В. Б. Дроздов

В статье доказывается формула Фусса, выражающая квадрат расстояния между центрами двух окружностей — вписанной в четырехугольник и описанной вокруг него. Статья адресуется всем любителям математики.

1. Математические вопросы

В пособии для студентов педагогических институтов «Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия)» (авторы З.А. Скопец, В.А. Жаров, М., «Учпедгиз», 1962) на с. 17 приведена формула

$$l^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}, \tag{1}$$

выражающая квадрат расстояния между центрами двух окружностей — вписанной в четырехугольник и описанной вокруг него. Характерно, что нигде далее речь об этой формуле не идет.

В «Сборнике задач по специальному курсу элементарной математики» (автор П.С. Моденов, М., «Советская наука», 1957) на с. 198 имеется задача № 36: «Доказать, что для четырехугольника, который одновременно может быть вписан в окружность, и описан около окружности, справедливо соотношение

$$\frac{1}{(R+l)^2} + \frac{1}{(R-l)^2} = \frac{1}{r^2}, \tag{2}$$

где r и R — радиусы вписанной и описанной окружности, а l — расстояние между их центрами». Задача относится к § 2 «Четырехугольники». Отсутствует не только доказательство, но даже указание.

В той же книге на с. 201 есть задача 21: «В четырехугольник можно вписать окружность (радиуса r) и описать окружность (радиуса R). Доказать, что

$$\left(R^2 - l^2\right)^2 = 2r^2\left(R^2 + l^2\right), \tag{3}$$

где l — расстояние между центрами окружностей». Задача относится к § 3 «Окружность». Ни доказательства, ни хотя бы указания в книге нет.

Легко проверить, что формулы (1), (2), (3) математически эквивалентны. По сути дела, это одна формула. Естественно возникают вопросы.

1) Почему нет ни доказательства, ни даже указания, способствующего решению, очевидно, весьма сложной задачи?

2) Почему во второй книге одна и та же фактически задача приведена дважды с интервалом в три страницы?

3) Кто вывел впервые формулы (1), (2), (3)?

4) Наконец, сколько лет этим формулам?

2. Автор формулы

В биографическом справочнике «Математики. Механики» (автор А.Н. Боголюбов, Киев, «Наукова думка», 1983) на с. 498–499 так дана биография первооткрывателя формулы:

«Фусс Николай Иванович (29.01.1755–23.12.1825). Русский математик, ординарный академик Петербургской АН (с 1783, адъюнкт с 1776). Родился в Базеле. С 1768 учился в Базельском университете. В 1773 по ходатайству Леонарда Эйлера был приглашен в Петербург. Вместе с И.А. Эйлером, А.И. Лекселем, М.Е. Головиным, Л.Ю. Крафтом был секретарем и сотрудником Л. Эйлера. С 1783 — профессор Сухопутного кадетского корпуса, с 1796 — Морского кадетского корпуса, с 1800 — Академического университета. Член Комитета для пересмотра уставов Петербургской АН и Академии художеств, член Московского и Виленского университетов (1802), непременный секретарь Петербургской АН (1800–1825).

Основные исследования посвящены геометрии и математическому анализу. Работал также в области алгебры, теории вероятностей, механики, физики, астрономии. Развил исследования Лекселя по сферической геометрии. Ему принадлежат труды об учении о многоугольниках и по тригонометрии, а также ряд учебников. Член многих академий наук».

Формула Фусса для вписано-описанных четырехугольников была им выведена в 1792 году. Так что в наступающем 2017 году ей исполняется 225 лет — юбилей. Докажем ее к круглой дате.

3. Трапеция

Из школьного курса геометрии известны две теоремы.

Теорема 1. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Теорема 2. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны.

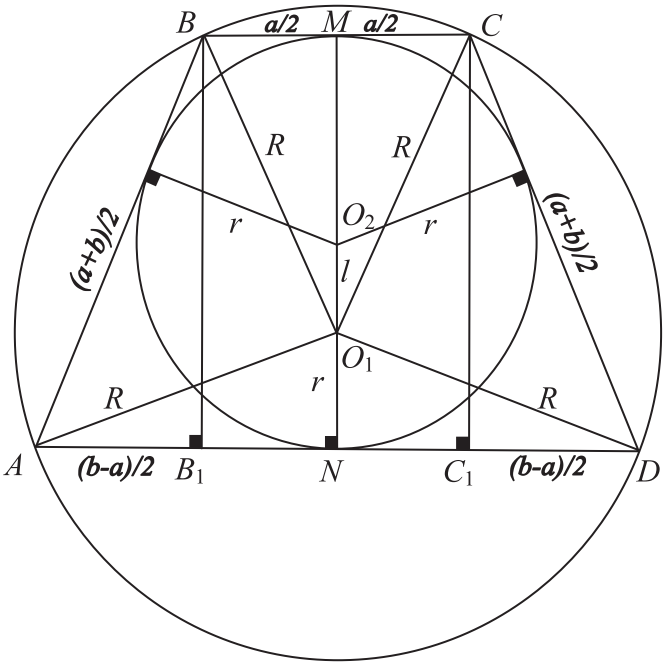


Рис. 1

В силу теоремы 2 около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность. Если же её средняя линия равна боковой стороне, то в нее в силу теоремы 1 можно еще и вписать окружность.

Естественно рассмотреть такую трапецию как частный симметричный случай вписанно-описанного четырехугольника, см. рисунок 1. Пусть O_1 — центр описанной окружности, O_2 — центр вписанной окружности, $O_1O_2 = l$. Тогда из треугольников ABB_1, BO_1M, AO_1N соответственно по теореме Пифагора имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} (2r)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (r+l)^2 = R^2 \\ \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (r-l)^2 = R^2, \end{cases}$$

что легко приводится к виду:

$$\begin{cases} \frac{a^2}{4} \cdot \frac{b^2}{4} = r^4, \\ \frac{a^2}{4} = R^2 - (r+l)^2, \\ \frac{b^2}{4} = R^2 - (r-l)^2. \end{cases}$$

Исключая отсюда a^2 и b^2, приходим к уравнению

$$l^4 - 2\left(R^2 + r^2\right) l^2 + \left(R^4 - 2R^2r^2\right) = 0.$$

Значит, $l^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}$.

Второй корень не подходит, ибо $l < R$.

4. Дельтоид

Интересно рассмотреть другой частный случай вписано-описанного четырехугольника. Возьмем прямоугольник со сторонами a и b, проведем в нем одну диагональ, разрежем по ней. Затем переформатируем прямоугольник так, как показано на рисунке 2.

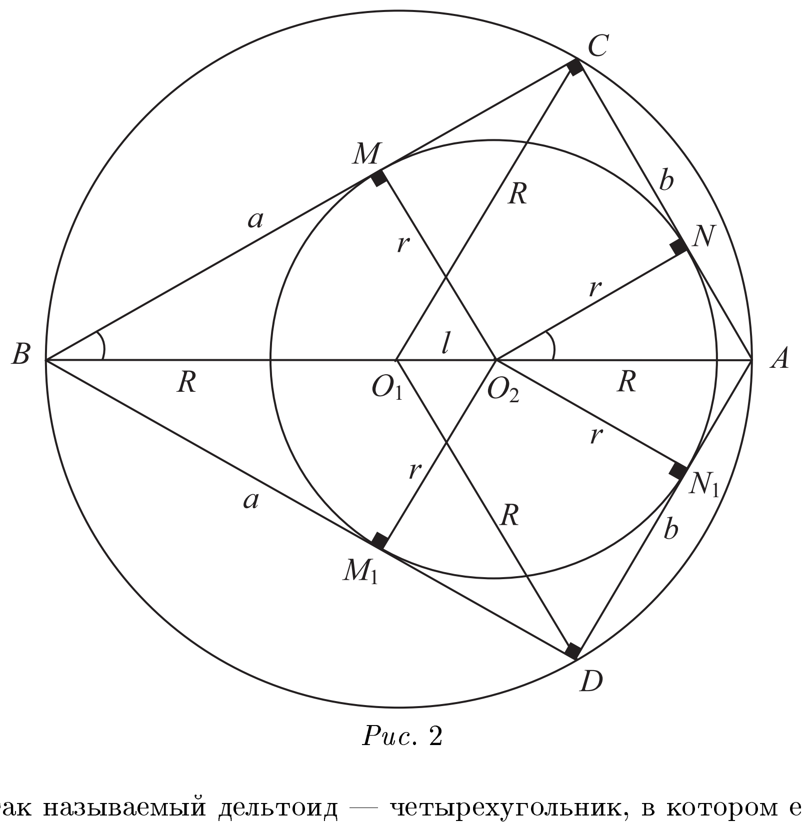


Рис. 2

Мы получим так называемый дельтоид — четырехугольник, в котором есть две пары равных смежных сторон. Точнее — частный случай дельтоида с прямым углом между неравными сторонами.

Теоремы 1 и 2 свидетельствуют, что этот дельтоид вписано-описанный. O_1 — центр описанной окружности, O_2 — центр вписанной окружности, l — расстояние между ними: $O_1O_2 = l$. Из треугольника BMO_2 следует: $\sin\frac{B}{2} = \frac{r}{R+l}$. Из треугольника ANO_2 следует, что $\cos\frac{B}{2} = \frac{r}{R-l}$.

Так как $\sin^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{B}{2} = 1$, то $\frac{r^2}{(R+l)^2} + \frac{r^2}{(R-l)^2} = 1$, откуда немедленно вытекает формула (2).

5. Произвольный четырехугольник

Теоремы 1 и 2 в совокупности дают необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять вписано-описанные четырехугольники. Запишем эти условия в удобной для дальнейших вычислений форме. См. рисунок 3.

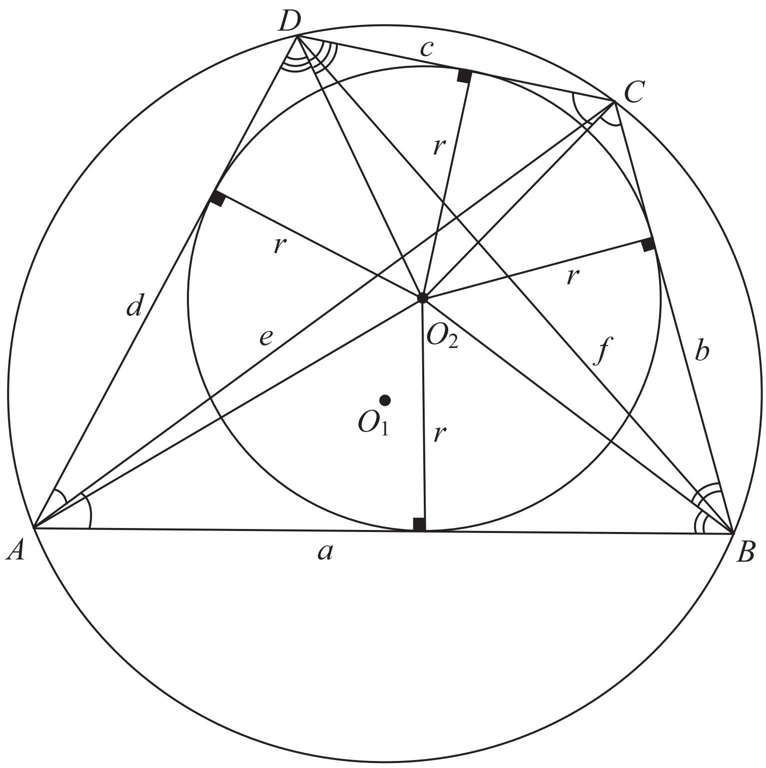


Рис. 3

$ABCD$ — описанный четырехугольник. Следовательно, справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} a = r\,\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right) \\ b = r\,\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) \\ c = r\,\left(\operatorname{ctg}\frac{C}{2} + \operatorname{ctg}\frac{D}{2}\right) \\ d = r\,\left(\operatorname{ctg}\frac{D}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right). \end{cases}.$$

$ABCD$ — вписанный четырехугольник. Значит, верна система уравнений:

$$\begin{cases} C = \pi - A \\ D = \pi - B. \end{cases}$$

$ABCD$ — вписано-описанный четырехугольник. Поскольку

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{A}{2} \text{ и } \operatorname{ctg}\frac{D}{2} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{B}{2},$$

то необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяет любой вписано-описанный четырехугольник, таковы:

$$\begin{cases} a = r\,\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right), \\ b = r\,\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right), \\ c = r\,\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right), \\ d = r\,\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right). \end{cases} \tag{4}$$

6. Отношение квадратов радиусов

Для доказательства формулы Фусса нам потребуется выразить отношение квадратов радиусов $\frac{R^2}{r^2}$ через тригонометрические функции углов четырехугольника $ABCD$. См. рисунок 3. Из треугольника ADB по теореме синусов $\frac{f}{\sin A} = 2R$. Аналогично из треугольника ABC — $\frac{e}{\sin B} = 2R$. Перемножим почленно два последних равенства:

$$4R^2 = \frac{ef}{\sin A \sin B}.$$

По теореме Птолемея произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон: $ef = ac + bd$. Тогда $4R^2 = \frac{ac+bd}{\sin A \sin B}$.

Теперь применяем формулы (4) и выполняем несложные алгебраические действия с дробями. Еще понадобится формула синуса двойного угла. В результате придем к такому результату:

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin^2 A \sin^2 B}. \tag{5}$$

Формула (5) интересна и сама по себе. Так как $0 < \sin A \leq 1$ и $0 < \sin B \leq 1$, то наименьшее значение отношения $\frac{R^2}{r^2}$ равно двум, что возможно только в случае $A = B = \frac{\pi}{2}$. Но описанный прямоугольник есть квадрат. Для него $R = r\sqrt{2}$, а обе окружности — концентрические. Если вписано-описанный четырехугольник отличен от квадрата, то для него $R > r\sqrt{2}$. Ясно, что отношение $\frac{R}{r}$ может быть сколь угодно велико.

7. Доказательство формулы Фусса

Впишем вписано-описанный четырехугольник в прямоугольную декартову систему координат, как показано на рисунке 4.

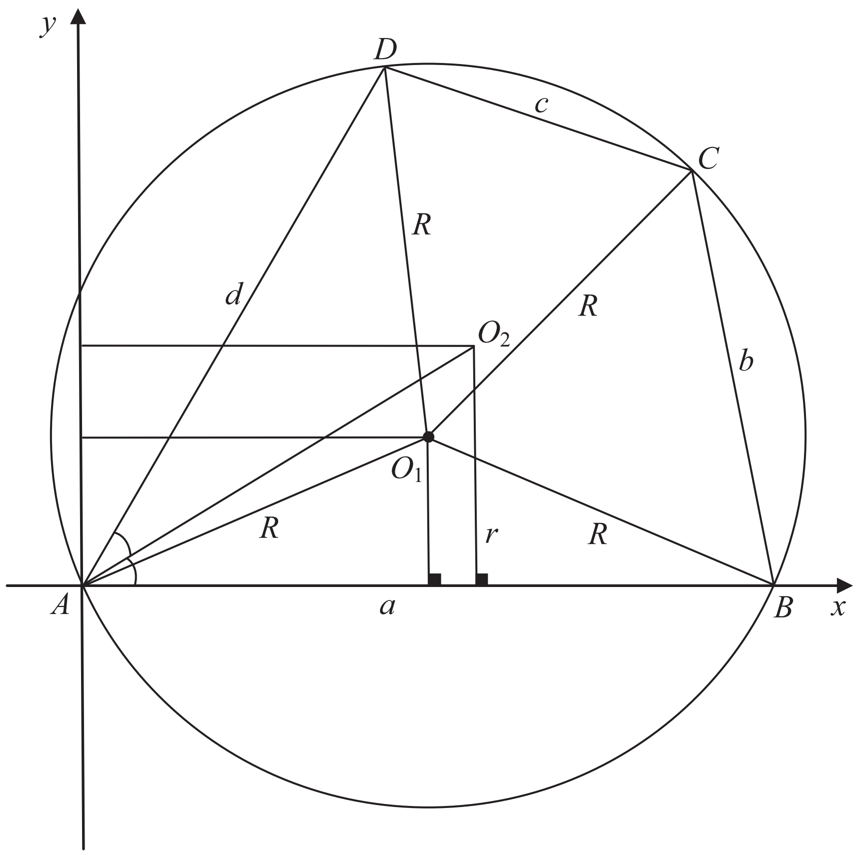


Рис. 4

Координаты центров описанной и вписанной окружностей соответственно равны:

$$O_1\left(\frac{r}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right);\ \sqrt{R^2-\frac{r^2}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right)^2}\right),\quad O_2\left(r\operatorname{ctg}\frac{A}{2};r\right).$$

По формуле квадрата расстояния между двумя точками получим:

$$O_1O_2^2=l^2=\left(\tfrac{r}{2}\left(\operatorname{ctg}\tfrac{B}{2}-\operatorname{ctg}\tfrac{A}{2}\right)\right)^2+\left(\sqrt{R^2-\tfrac{r^2}{4}\left(\operatorname{ctg}\tfrac{A}{2}+\operatorname{ctg}\tfrac{B}{2}\right)^2}-r\right)^2=$$
$$=R^2+r^2-r\left(r\operatorname{ctg}\tfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{B}{2}+2\sqrt{R^2-\tfrac{r^2}{4}\left(\operatorname{ctg}\tfrac{A}{2}+\operatorname{ctg}\tfrac{B}{2}\right)^2}\right).$$

Осталось доказать, что

$$r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\sqrt{4R^2-r^2\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right)^2}=\sqrt{4R^2+r^2}.$$

Нам удобнее перераспределить слагаемые так, чтобы тригонометрические величины были в обеих частях равенства:

$$\sqrt{4R^2-r^2\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right)^2}=\sqrt{4R^2+r^2}-r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}. \tag{6}$$

Однако в конце необходимо убедиться в положительности правой части равенства (6).

Возведем обе части равенства (6) в квадрат:

$$2\sqrt{\frac{4R^2+r^2}{r^2}}=2+\frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}.$$

После элементарных тригонометрических выкладок получим:

$$\sqrt{\frac{4R^2}{r^2}+1}=1+\frac{2}{\sin A\sin B}. \tag{7}$$

Если возвести обе части равенства (7) в квадрат, сразу придем к равенству (5).

Рассмотрим правую часть формулы (6) и убедимся, что она положительна: $\sqrt{4R^2+r^2}-r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}>0$, что равносильно

$$4R^2+r^2>r^2\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}.$$

С учетом формулы (5) быстро преобразуем последнее неравенство к очевидному ввиду того, что его левая часть больше единицы, а правая часть меньше единицы:

$$1+\sin A\sin B>\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\left(\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\right).$$

В силу обратимости проведенных выше преобразований, формула академика Фусса доказана.

Дроздов Виктор Борисович
г. Рязань.

E-mail: drozdov.viktor2012@yandex.ru

Операторы вида $Af(x) = f(ax+b) - \lambda f(x)$ и функциональные уравнения в задачах математических конкурсов

Е. И. Знак

В статье изучены свойства операторов вида $Af(x) = f(ax+b) - \lambda f(x)$ для различных классов функций, рассмотрены также некоторые обобщения этого вида операторов.

В известной книге «Задачи студенческих олимпиад по математике» (Садовничий В.А., Подколзин А.С., М.: Наука, 1978) встречаются задачи следующих типов:

1) для данного $c > 1$ найти все решения функционального уравнения $f(cx) = f(x)$ в классе непрерывных на R функций;

2) для данных $\eta > 0, c > 1$ и заданного многочлена $p(x)$ найти все решения функционального уравнения $f(x) - \eta f\left(\dfrac{x}{c}\right) = p(x)$ в классе ограниченных в окрестности нуля функций;

3) для данных $\eta > 0, s > 1$ найти все решения функционального уравнения $f(x^s) = \eta f(x)$ на луче $(0; +\infty)$.

Отметим, что посредством подходящей замены переменной и простейших преобразований все три функциональных уравнения легко свести к функциональному уравнению $f(ax) - \lambda f(x) = \mathrm{g}(x)$ $(0 < a < 1)$ с заданной функцией g и искомой функцией f.

Ниже изложен исчерпывающий анализ этой проблематики для аналитических функций комплексной переменной. Эти результаты достаточно очевидным образом переносятся с соответствующими изменениями на случай действительной переменной.

Теорема 1. *Оператор* $Af(z) = f(az+b) - \lambda f(z)$, *при* $|a| < 1, a \neq 0$ *и* $|\lambda| \geq 1, \lambda \neq 1$, *отображает пространство целых функций на себя и является обратимым.*

Доказательство. Для обоснования сюръективности оператора A при $|\lambda| > 1$, по произвольной целой функции g построим последовательность

$$f_n(z) = -\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\lambda^{j+1}} \mathrm{g}\left(a^j z + \frac{1-a^j}{1-a} b\right).$$

Если $R > 0$ и $|z| \leq R$, то

$$\left|a^j z + \frac{1-a^j}{1-a} b\right| \leq R + 2\left|\frac{b}{1-a}\right| = \rho \quad \text{и} \quad \left|\frac{1}{\lambda^{j+1}} \mathrm{g}\left(a^j z + \frac{1-a^j}{1-a} b\right)\right| \leq M \left|\frac{1}{\lambda}\right|^{j+1},$$

где M есть наибольшее значение функции $|\mathrm{g}|$ в замкнутом круге радиуса ρ с центром в нуле. Следовательно, последовательность целых функций f_n равномерно сходится в каждом круге и сходится к некоторой целой функции f.

Очевидно

$$f_n(az+b) = -\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\lambda^{j+1}} \mathrm{g}\left(a^{j+1} z + \frac{1-a^{j+1}}{1-a} b\right) = \lambda \left(f_{n+1}(z) + \frac{1}{\lambda}\mathrm{g}(z)\right).$$

Переходя к пределу в тождестве $f_n(az+b) - \lambda f_{n+1}(z) = g(z)$, получим $Af = g$. Сюръективность для случая $|\lambda| > 1$ доказана.

В случае $|\lambda| = 1, \lambda \neq 1$, рассмотрим оператор $Bh(z) = h(az+b) - \frac{\lambda}{a}h(z)$.

Поскольку $\left|\frac{\lambda}{a}\right| > 1$, то согласно доказанному выше, для произвольной целой функции g существует такая целая функция h, что $Bh(z) = \frac{1}{a}g'(z)$. Через f обозначим целую функцию, удовлетворяющую условиям $f'(z) \equiv h(z), f\left(\frac{b}{1-a}\right) = \frac{1}{1-\lambda}g\left(\frac{b}{1-a}\right)$. Тогда $Af = g$ и сюръективность для случая $|\lambda| = 1, \lambda \neq 1$ тоже доказана.

Если f принадлежит ядру, то $A^n f = 0$ и $f\left(a^n z + \frac{1-a^n}{1-a}b\right) \equiv \lambda^n f(z)$. При $n \to \infty$ левая часть имеет предельное значение $f\left(\frac{b}{1-a}\right)$, следовательно, при $|\lambda| \geq 1$ и $\lambda \neq 1$ необходимым образом выполняется тождество $f(z) \equiv 0$. Обратимость при $\lambda \neq 1$ доказана.

Очевидно при $\lambda = 1$ ядро оператора A состоит из тождественных констант.

Теорема 2. *Оператор $Af(z) = f(az+b) - f(z)$, при $|a| < 1, a \neq 0$ отображает пространство целых функций на подпространство целых функций, для которых точка $\zeta = \frac{b}{1-a}$ является нулём. Ядро оператора состоит из тождественных констант.*

Доказательство. Положим $g(z) \equiv \left(z - \frac{b}{1-a}\right)q(z)$ и рассмотрим последовательность $f_n(z) = -\sum\limits_{j=0}^{n} g\left(a^j z + \frac{1-a^j}{1-a}b\right)$ (для произвольной целой функции q).

Если $R > 0$ и $|z| \leq R$, то $\left|a^j z + \frac{1-a^j}{1-a}b\right| \leq R + 2\left|\frac{b}{1-a}\right| = \rho$ и

$$\left|g\left(a^j z + \frac{1-a^j}{1-a}b\right)\right| = \left|a^j\left(z - \frac{b}{1-a}\right)q\left(a^j z + \frac{1-a^j}{1-a}b\right)\right| \leq \rho M\,|a|^j\,,$$

где M есть наибольшее значение функции $|q|$ в замкнутом круге радиуса ρ с центром в нуле.

Следовательно, последовательность целых функций f_n равномерно сходится в каждом круге и сходится к некоторой целой функции f.

Очевидно $f_n(az+b) = -\sum\limits_{j=0}^{n} g\left(a^{j+1}z + \frac{1-a^{j+1}}{1-a}b\right) = f_{n+1}(z) + g(z)$.

Переходя к пределу в тождестве $f_n(az+b) - f_{n+1}(z) = g(z)$, получим $Af = g$.

Теорема 3. *Оператор $Af(z) = f(az+b) - \lambda f(z)$, при $|a| < 1, a \neq 0$ и $|\lambda| < 1, \lambda \neq 0$, отображает пространство целых функций на себя и является обратимым тогда и только тогда, когда λ не является целой неотрицательной степенью a.*

Доказательство. Для обоснования сюръективности оператора A при $|\lambda| < 1$, $\lambda \notin \{a^{n-1}|n$ — натуральное$\}$, положим $m = \left[\frac{\ln|\lambda|}{\ln|a|}\right] + 1$ и рассмотрим оператор $Bh(z) = h(az+b) - \frac{\lambda}{a^m}h(z)$. Поскольку $\left|\frac{\lambda}{a^m}\right| > 1$, то, согласно доказанному выше, для произвольной целой функции g существует такая целая функция h, что $Bh(z) = \frac{1}{a^m}g^{(m)}(z)$.

Через f обозначим целую функцию, удовлетворяющую условиям

$$f^{(m)}(z) \equiv h(z), f^{(j)}\left(\frac{b}{1-a}\right) = \frac{1}{a^j - \lambda}g^{(j)}\left(\frac{b}{1-a}\right) (j \in \overline{0, m-1}).$$

Тогда $Af = g$ и сюръективность для случая $|\lambda| < 1, \lambda \notin \left\{a^{n-1}|n - \textit{натуральное}\right\}$ доказана.

Если f принадлежит ядру оператора $\tilde{h}^{-1}(\tilde{h}(x)+1) \equiv \tilde{\phi}(x)$, то $f^{(m)}$ принадлежит ядру обратимого (так как $\left|\frac{\lambda}{a^m}\right| > 1$) оператора B и, следовательно, f является многочленом. А так как λ не является целой неотрицательной степенью числа a, то из тождества $f(az+b) \equiv \lambda f(z)$ следует, что многочлен f является нулевым. Таким образом, обратимость оператора при $|\lambda| < 1, \lambda \notin \left\{a^{n-1}|n\text{ — натуральное}\right\}$ доказана.

Теорема 4. *Оператор $Af(z) = f(az+b) - a^n f(z)$, при $|a| < 1, a \neq 0$ и натуральном n отображает пространство целых функций на подпространство целых функций, для которых* *точка $\zeta = \frac{b}{1-a}$ является нулём производной порядка n. Ядро оператора одномерно и состоит из многочленов вида $q(z) = c\left(z - \frac{b}{1-a}\right)^n$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную целую функцию g с условием $g^{(n)}\left(\frac{b}{1-a}\right) = 0$ и оператор $Bh(z) = h(az+b) - h(z)$. Согласно доказанному выше, существует такая целая функция h, что $Bh(z) = \frac{1}{a^n} g^{(n)}(z)$.

Если f есть целая функция, удовлетворяющая условиям $f^{(n)}(z) \equiv h(z)$, $f^{(j)}\left(\frac{b}{1-a}\right) = \frac{1}{a^j - \lambda} g^{(j)}\left(\frac{b}{1-a}\right)$ $(j \in \overline{0, n-1})$, то $Af = g$.

Если f принадлежит ядру оператора $\tilde{h}^{-1}(\tilde{h}(x)+1) \equiv \tilde{\phi}(x)$, то $f^{(n)}$ принадлежит ядру оператора B и, следовательно, $f^{(n)}$ является тождественной константой, а f является многочленом. Последовательные замены $z = w + \frac{b}{1-a}$ и $f\left(\cdot + \frac{b}{1-a}\right) = p$ позволяют перейти от уравнения $f(az+b) = a^n f(z)$ к уравнению $p(aw) = a^n p(w)$, которому удовлетворяют многочлены вида $p(w) = cw^n$ и только такие многочлены.

Дополнение 1

Для того, чтобы выйти на некоторые обобщения, рассмотрим линейный оператор $Af(z) = f(\phi(z)) - \lambda f(z)$, определённый на пространстве аналитических в заданной области G функций. Функция ϕ предполагается аналитической в G и обладающей следующим свойством: для любого замкнутого круга $K \subset G$ можно указать такой компакт $D \subset G$, что $K \subset D$ и $\phi[D] \subset D$.

Теорема 5. *Если $|\lambda| > 1$, то оператор $Af(z) = f(\phi(z)) - \lambda f(z)$ отображает пространство аналитических в G функций на себя и является обратимым.*

Доказательство. Для обоснования сюръективности, по произвольной аналитической в области G функции g построим последовательность $f_n(z) = -\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{1}{\lambda^{j+1}} g(\phi_j(z))$, где последовательность $(\phi_j)_{j=1}^{\infty}$ есть последовательность итераций: $\varphi_0(z) = z, \varphi_{k+1}(z) = \varphi(\varphi_k(z))$. Для произвольно взятого замкнутого круга $K \subset G$ существует такой компакт $D \subset G$, что $K \subset D$ и $\phi_k[D] \subset D$ для всех k. Если $z \in K$ и M есть наибольшее значение функции $|g|$ на компакте D, то $\left|\frac{1}{\lambda^{j+1}} g(\phi_j(z))\right| \le M \left|\frac{1}{\lambda}\right|^{j+1}$ и, следовательно, последовательность функций f_n равномерно сходится в каждом круге в G и сходится к некоторой аналитической функции f.

Очевидно $f_n(\phi(z)) = -\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{1}{\lambda^{j+1}} g(\phi_{j+1}(z)) = \lambda\left(f_{n+1}(z) + \frac{1}{\lambda} g(z)\right)$. Переходя к пределу в тождестве $f_n(\phi(z)) - \lambda f_{n+1}(z) = g(z)$, получим $Af = g$. Сюръективность доказана.

Если f принадлежит ядру, то $A^n f = 0$ и $f(\phi_n(z)) \equiv \lambda^n f(z)$. При $n \to \infty$ левая часть ограничена, следовательно, необходимым образом выполняется тождество $f(z) \equiv 0$. Обратимость доказана.

Свойства оператора $Af(z) = f(\phi(z)) - f(z)$ $(\lambda = 1)$ зависят от того, содержит ли замыкание $\overline{G}$ неподвижные точки функции ϕ, или не содержит. В первом случае наложим на ϕ дополнительное условие $|\phi(z) - z_0| \le |z - z_0|$ $(z \in G)$ и раздельно рассмотрим две ситуации: точка z_0 принадлежит области G и точка z_0 принадлежит границе области $D \subset T$.

Теорема 6. *Если $z_0 \in G$, то при указанном выше дополнительном условии оператор $Af(z) = f(\phi(z)) - f(z)$ отображает пространство аналитических в G функций на подпространство функций с нулём в точке z_0. Ядро оператора состоит из тождественных констант.*

Доказательство. Положим $g(z) \equiv (z - z_0)\, q(z)$ и рассмотрим последовательность $f_n(z) = -\sum\limits_{j=0}^{n} g\big(\phi_j(z)\big)$ (для произвольной аналитической в G функции q). Для произвольно взятого замкнутого круга $K \subset G$ радиуса r существует такой компакт $D \subset G$, что $K \subset D$ и $\phi_k[D] \subset D$

для всех k. При этом существует такое положительное $\eta < 1$ (зависящее от D), что $|\phi_j(z) - z_0| \leq \eta^j |z - z_0|$
($z \in D, j \in \mathbb{N}$). Если расстояние от центра круга K до неподвижной точки z_0 равно l, $z \in K$ и M есть наибольшее значение функции $|q|$ на компакте D, то

$$|\mathrm{g}\left(\phi_j(z)\right)| = |(\phi_j(z) - z_0)q\left(\phi_j(z)\right)| \leq \eta^j |z - z_0| \left|q\left(\phi_j(z)\right)\right| \leq \eta^j (l + r)M$$

и, следовательно, последовательность функций f_n равномерно сходится в каждом круге в G и сходится к некоторой аналитической функции f. Очевидно $f_n(\varphi(z)) = -\sum\limits_{j=0}^{n} \mathrm{g}\left(\varphi_{j+1}(z)\right) = f_{n+1}(z) + \mathrm{g}(z)$. Переходя к пределу в тождестве $f_n(\phi(z)) - f_{n+1}(z) = \mathrm{g}(z)$, получим $Af = \mathrm{g}$. Сюръективность доказана.

Если f принадлежит ядру, то $A^n f = 0$ и $f\left(\phi_n(z)\right) \equiv f(z)$. Так как при указанных условиях последовательность $\left(\phi_j(z)\right)_{j=1}^{\infty}$ сходится к неподвижной точке z_0 для любой точки $z \in G$, то ядро оператора состоит из тождественных констант.

Если же z_0 принадлежит границе области $D \subset T$, то для существования аналитического в $D \subset T$ решения функционального уравнения $f(\phi(z)) - f(z) = \mathrm{g}(z)$ достаточно, чтобы точка z_0 была правильной для функции g. При этом возможность продолжения ϕ несущественна (точка z_0 может быть особой для функции ϕ), а решение функционального уравнения будет единственным с точностью до постоянного слагаемого.

Что касается второй возможности (замыкание $\overline{G}$ не содержит неподвижных точек функции ϕ), то в конце статьи приводятся с доказательствами некоторые результаты для того случая, когда функция g является тождественной константой (см. Дополнение **2**). Кроме того, выше был детально разобран случай линейной функции $\phi(z) = az + b$.

Благодаря линейности ϕ удаётся исчерпывающим образом проанализировать оператор $Af(z) = f\left(\phi(z)\right) - \lambda f(z)$ также и при $|\lambda| \leq 1$.

Чтобы привести примеры возможных обобщений, рассмотрим хаусдорфово топологическое пространство T, компакт $D \subset T$, пространство L непрерывных функционалов, определённых на D, и определённый на этом L линейный оператор $Af(x) = f\left(\phi(x)\right) - \lambda f(x)$, где $|\lambda| > 1$ и отображение $\phi : D \to D$ является непрерывным.

Теорема 7. *Оператор A отображает пространство L на себя и является обратимым.*

Доказательство. По произвольному функционалу g построим последовательность $f_n(x) = -\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{1}{\lambda^{j+1}} \mathrm{g}\left(\phi_j(x)\right)$, где последовательность отображений $\left(\phi_j\right)_{j=1}^{\infty}$ задаётся рекурсивно: $\phi_0(x) = x, \phi_{k+1}(x) = \phi\left(\phi_k(x)\right)$. Для всех k выполняется включение $\phi_k\left[D\right] \subset D$. Если M есть наибольшее значение функционала $|\mathrm{g}|$ на компакте D, то $\left|\frac{1}{\lambda^{j+1}} \mathrm{g}\left(\phi_j(x)\right)\right| \leq M \left|\frac{1}{\lambda}\right|^{j+1}$ и, следовательно, последовательность функционалов f_n равномерно сходится на компакте D к некоторому $f \in L$. При этом $f_n(\phi(x)) = -\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{1}{\lambda^{j+1}} \mathrm{g}\left(\phi_{j+1}(x)\right) = \lambda f_{n+1}(x) + \mathrm{g}(x)$. Переходя к пределу в тождестве $f_n(\phi(x)) - \lambda f_{n+1}(x) = \mathrm{g}(x)$, получим $Af = \mathrm{g}$. Если f принадлежит ядру оператора, то $A^n f = 0$ и $f\left(\phi_n(x)\right) \equiv \lambda^n f(x)$. При $n \to \infty$ левая часть ограничена, следовательно, $f = 0$.

Возвращаясь к аналитическим функциям, отметим, что если некоторый многочлен ϕ обладает тем свойством, что последовательность итераций $\left(\phi_n(z)\right)_{n=1}^{\infty}$ ограничена для любого z, то $\phi(z) \equiv az + b$, где $|a| < 1$.

Это обстоятельство, а также указанные функциональные уравнения из «Задач студенческих олимпиад по математике» и мотивировали появление теорем **1** – **4** (см. начало).

Дополнение 2

Рассмотрим пространство L аналитических функций действительной переменной (определённых на всей действительной оси) и действующий в L оператор $Af(x) = f\left(\phi(x)\right) - f(x)$, где

$\phi \in L$. Всякий элемент из L является сужением некоторой аналитической функции на действительную ось. Подмножество $H \subset L$ аналитических биекций прямой на себя со всюду положительной производной образует группу с операцией композиции.

Для всякого $h \in H$ отображение $t \mapsto h^{-1}(t + h(x))$ описывает некоторую однопараметрическую подгруппу в H (например, $t \mapsto \phi_t(x) \equiv \ln\left(-1 + \sqrt{1 + e^t(2e^x + e^{2x})}\right)$, $\phi_s \circ \phi_t = \phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$).

Диффеоморфизм $\phi \in H$ входит в подобную подгруппу (то есть сопряжён со сдвигом) тогда и только тогда, когда образ оператора $Af(x) = f(\phi(x)) - f(x)$ содержит тождественные константы и, при этом, прообраз хотя бы одной из констант содержит элемент из H.

Аналогичный круг вопросов можно рассматривать и для диффеоморфизмов прямой класса C^n.

Теорема 8. *Для каждого натурального n и всякого возрастающего диффеоморфизма прямой $\phi \in C^n$ без неподвижных точек существуют такой возрастающий диффеоморфизм прямой $h \in C^n$ и такая константа c, что $\phi(x) \equiv h^{-1}(c + h(x))$.*

Доказательство. Лемма. Для каждого натурального n, произвольного действительного набора $a_0, a_1, \ldots, a_n$ с положительными a_0 и a_1 существует такая функция $p \in C^\infty$, что $p' > 0$ на отрезке $[0;1]$, $p(0) = 0$, $p(1) = a_0$, $p^{(j)}(1) = a_j p'(0)^j (j \in \overline{1,n})$ и $p^{(j)}(0) = 0 (j \in \overline{2,n})$ (если $n \geq 2$).

Доказательство. При $n = 1$ годится многочлен $p_1(x) \equiv \frac{2a_0}{1+a_1}x - \frac{(1-a_1)a_0}{1+a_1}x^2$. Допустим, для некоторого натурального k утверждение верно, если $n \leq k$, и p_k есть та функция, для которой утверждение справедливо при $n = k$ (для набора $a_0, a_1, \ldots, a_k$).

Положим

$$p_{k+1}(x) \equiv p_k(x) + \frac{\alpha x + \beta}{(2\pi m)^{k+1}(k+1)!} \sin^{k+1}(2\pi m x),$$

где

$$\alpha = p_1'(0)^{k+1} a_{k+1} - p_k^{(k+1)}(1) + p_k^{(k+1)}(0), \;\; \beta = -p_k^{(k+1)}(0), \;\; m = \left[\frac{|\alpha| + |\beta|}{\gamma}\right] + 1$$

и $\gamma = \min\limits_{0 \leq x \leq 1} p_k'(x)$. Тогда

$$p_{k+1}^{(j)}(0) = p_k^{(j)}(0), p_{k+1}^{(j)}(1) = p_k^{(j)}(1) \;\text{ при }\; (j \in \overline{0,k}),$$

$$p_{k+1}^{(k+1)}(0) = p_k^{(k+1)}(0) + \beta = 0 \;\text{ и }\; p_{k+1}^{(k+1)}(1) = p_k^{(k+1)}(1) + \alpha + \beta = p_1'(0)^{k+1} a_{k+1}.$$

При этом

$$p_{k+1}'(x) \geq p_k'(x) - \frac{|\alpha|}{(2\pi m)^{k+1}(k+1)!} - \frac{|\alpha x + \beta|}{(2\pi m)^k k!} \geq \gamma - \frac{2\,|\alpha| + |\beta|}{2\pi m} \geq \frac{\gamma}{2}$$

на отрезке $[0;1]$.

Для доказательства основного утверждения положим $a_j = \phi^{(j)}(0)$ $(j \in \overline{0,n})$ и рассмотрим функцию p, существование которой обеспечивается леммой (считаем, для определённости, что $\phi(0) > 0$).

Рассмотрим двустороннюю последовательность функций $(\phi_k)_{-\infty}^{+\infty}$, определяемую рекурсивно равенствами $\phi_0 = id$ и $\phi_{k+1} = \phi_k \circ \phi$.

Определим на действительной оси функцию g следующим образом:

$$\mathrm{g}(x) \equiv \varphi_m \circ p(x - m)\,(x \in [m; m+1\,)\,, m \text{ — целое})\,.$$

Покажем, что g является диффеоморфизмом прямой на себя класса C^n и функция $h = \mathrm{g}^{-1}$ удовлетворяет тождеству $\phi(x) \equiv h^{-1}(1 + h(x))$.

Во-первых, $\varphi_m \circ p(x-m)|_{x=m+1} = \varphi_m(p(1)) = \varphi_m(\varphi(0)) = \varphi_{m+1}(0)$ и $\varphi_{m+1} \circ p(x-m-1)|_{x=m+1} = \varphi_{m+1}(p(0)) = \varphi_{m+1}(0)$. Следовательно, функция g является непрерывной и возрастающей.

Во-вторых,

$$(\varphi \circ p)^{(j)}(x - m - 1)|_{x=m+1} = \varphi^{(j)}(0) p'(0)^j = p^{(j)}(1)$$

и, следовательно,

$$(\varphi_{m+1}\circ p(x-m-1))^{(j)}\,|_{x=m+1}=(\varphi_m\circ(\varphi\circ p(x-m-1)))^{(j)}\,|_{x=m+1}=(\varphi_m\circ p(x-m))^{(j)}\,|_{x=m+1}$$

для каждого $j\in\overline{1,n}$. Таким образом, $\mathrm{g}\in C^n$ и g имеет всюду положительную производную.

Отметим, что предположение об ограниченности сверху или снизу двусторонней последовательности $(\varphi_k(0))_{-\infty}^{+\infty}$ влечёт вывод о наличии у функции ϕ неподвижной точки, что противоречит условию. Так как $\lim\limits_{m\to\pm\infty}\mathrm{g}(m)=\lim\limits_{m\to\pm\infty}\varphi_m(0)=\pm\infty$, то g сюръективна и, следовательно, является диффеоморфизмом прямой на себя класса C^n.

Если $x\in[m-1;m)$ (m *— целое*), то $(x+1)\in[m;m+1)$ и
$\mathrm{g}(x+1)=\phi_m\circ p(x+1-m)=\phi\circ\phi_{m-1}\circ p(x-(m-1))=\phi(\mathrm{g}(x))$. Следовательно, $\mathrm{g}\left(\mathrm{g}^{-1}(x)+1\right)\equiv\phi(x)$ и функция $h=\mathrm{g}^{-1}$ удовлетворяет условию.

Теперь допустим, что $\phi(x)<x$ для любого x. Рассмотрим функцию ψ, для которой $\psi(x)\equiv-\phi(-x)$. Так как $\psi(0)>0$, то существует такой диффеоморфизм k, что $k^{-1}\left(k(x)+1\right)\equiv\psi(x)$ (согласно доказанному).

В таком случае функция h, удовлетворяющая тождеству $h(x)\equiv-k(-x)$, удовлетворяет тождеству $h^{-1}\left(h(x)-1\right)\equiv\phi(x)$, что и требовалось получить.

И для диффеоморфизмов прямой на себя класса C^∞ аналогичное утверждение также справедливо.

Теорема 9. *Для всякого возрастающего диффеоморфизма прямой $\phi\in C^\infty$ без неподвижных точек существуют такой возрастающий диффеоморфизм прямой $h\in C^\infty$ и такая константа c, что $\phi(x)\equiv h^{-1}\left(c+h(x)\right)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\phi(0)>0$ (см. доказательство предыдущей теоремы). Положим $a_j=\phi^{(j)}(0)$ для каждого целого неотрицательного j и $p_1(x)\equiv\frac{2a_0}{1+a_1}x-\frac{(1-a_1)a_0}{1+a_1}x^2$. Далее, определим совместно числовые последовательности $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$, $(\beta_j)_{j=1}^\infty$, $(\gamma_j)_{j=1}^\infty$, $(m_j)_{j=1}^\infty$ и последовательность функций $(p_j)_{j=1}^\infty$ посредством следующего совместного рекурсивного описания:

$$\alpha_k=p_1'(0)^{k+1}a_{k+1}-p_k^{(k+1)}(1)+p_k^{(k+1)}(0),\quad \beta_k=-p_k^{(k+1)}(0),\quad \gamma_k=\min_{0\le x\le1}p_k'(x),$$
$$m_k=\left[\frac{|\alpha_k|+|\beta_k|}{\gamma_k}\right]+[\gamma_k]+1 \text{ и } p_{k+1}(x)\equiv p_k(x)+\frac{\alpha_kx+\beta_k}{(2\pi m_k)^{k+1}(k+1)!}\sin^{k+1}(2\pi m_kx).$$

Предельная функция p последовательности $(p_j)_{j=1}^\infty$ — это сумма ряда

$$p_1(x)+\sum_{k=1}^\infty\frac{\alpha_kx+\beta_k}{(2\pi m_k)^{k+1}(k+1)!}\sin^{k+1}(2\pi m_kx).$$

Ряд сходится равномерно на отрезке $[-2;2]$, так как

$$\frac{|\alpha_kx+\beta_k|}{(2\pi m_k)^{k+1}(k+1)!}\le\frac{2\,|\alpha_k|+|\beta_k|}{(2\pi m_k)^2(k+1)!}\le\frac{|\alpha_k|+|\beta_k|}{m_k\gamma_k}\frac{\gamma_k}{m_k}\frac{1}{(k+1)!}<\frac{1}{(k+1)!}\quad.$$

Ряд производных произвольного порядка n также сходится равномерно на отрезке $[-2;2]$, так как при $k\ge2n$ выполняются неравенства

$$\frac{\left|\left((\alpha_kx+\beta_k)\sin^{k+1}(2\pi m_kx)\right)^{(n)}\right|}{(2\pi m_k)^{k+1}(k+1)!}\le\frac{(3\,|\alpha_k|+|\beta_k|)\,(2\pi m_k)^n(k+1)^n}{(2\pi m_k)^{k+1}(k+1)!}\le$$

$$\le\frac{3\,|\alpha_k|+|\beta_k|}{(2\pi m_k)^2(k+1-2n)!}\le\frac{1}{(k+1-2n)!}\,.$$

Таким образом, $p \in C^\infty$, $p^{(j)}(0) = 0$ для любого целого неотрицательного j, отличного от единицы, и $p^{(j)}(1) = a_j p'(0)^j$ для любого целого неотрицательного j.

Теперь отметим, что на отрезке $[0;1]$

$$p'_{k+1}(x) \geq p'_k(x) - \frac{|\alpha_k|}{(2\pi m_k)^{k+1}(k+1)!} - \frac{|\alpha_k x + \beta_k|}{(2\pi m_k)^k k!} \geq \gamma_k - \frac{2\,|\alpha_k| + |\beta_k|}{2\pi m_k k!} \geq \gamma_k - \frac{\gamma_k}{2k!}$$

и, следовательно, $\gamma_{k+1} \geq \gamma_k \left(1 - \frac{1}{2k!}\right)$ и

$$\min_{0\leq x\leq 1} p'(x) \geq \gamma_1 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2k!}\right) > \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k!}\right) > \frac{\gamma_1}{10} > 0\,.$$

Определим, наконец, на действительной оси функцию g следующим образом: $\mathrm{g}(x) \equiv \phi_n \circ p(x-n)\,(x \in [n; n+1)\,, n$ *— целое*). То, что g является диффеоморфизмом прямой на себя класса C^∞ и обратный диффеоморфизм $h = \mathrm{g}^{-1}$ удовлетворяет тождеству $\phi(x) \equiv h^{-1}\,(1 + h(x))\,$, устанавливается в полной аналогии с тем, как это проделано в конце доказательства предыдущей теоремы (см. доказательство теоремы **8**).

Знак Евгений Иосифович,
доцент кафедры математики
Михайловской Артиллерийской Академии (СПб).

E-mail: evgematem@mail.ru

Решение трехреберников типов $eee(I)$ и $eee(III)$ на гиперболической плоскости положительной кривизны

Л. Н. Ромакина, И. В. Федоров

Посвящается 190-летию неевклидовой геометрии[1]

В модели Кэли – Клейна доказаны аналоги теоремы Стюарта для трехреберников типов $eee(I)$ и $eee(III)$ на гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны и двойственное к ним утверждение. Как следствия получены выражения длин медиан и биссектрис указанных трехреберников.

1. Введение

В проективной модели Кэли – Клейна полная плоскость Лобачевского Λ^2 реализуется на внутренней области проективной плоскости P_2 относительно некоторой овальной линии γ. На идеальной области плоскости Λ^2, т. е. на внешней области плоскости P_2 относительно линии γ, реализуется геометрия *гиперболической плоскости* $\widehat{H}$ *положительной кривизны.* Плоскости $\widehat{H}$ и Λ^2 служат компонентами *расширенной гиперболической плоскости* H^2: $H^2 = \widehat{H} \cup \Lambda^2 = P_2 \backslash \gamma$. Линию γ называют *абсолютом*, а группу G ее проективных автоморфизмов — *фундаментальной группой преобразований* плоскостей Λ^2, $\widehat{H}$ и H^2.

В качестве прямых плоскости $\widehat{H}$ приняты прямые (или части прямых) трех топологических типов. Прямые, имеющие с абсолютом две общие мнимо сопряженные точки, называют *эллиптическими* прямыми плоскости $\widehat{H}$. Собственные для плоскости $\widehat{H}$ части прямых, имеющих две общие действительные точки с абсолютом, называют *гиперболическими*, а касательные к абсолюту прямые — *параболическими* прямыми плоскости $\widehat{H}$ [1 – 3]. Абсолют плоскости $\widehat{H}$ позволяет ввести инвариантное относительно группы G гиперболическое (эллиптическое) измерение расстояний на гиперболических (эллиптических) прямых. Параболические прямые являются на $\widehat{H}$ изотропными.

В отличие от плоскости Лобачевского, топологически эквивалентной открытому диску, плоскость $\widehat{H}$ гомеоморфна листу Мебиуса без границ. Никакая прямая не разбивает плоскость $\widehat{H}$ на части [3, Приложение 3].

В псевдоевклидовом пространстве R^3_1 плоскость $\widehat{H}$ может быть реализована на сфере действительного радиуса ρ с отождествленными диаметрально противоположными точками, вследствие чего кривизна плоскости $\widehat{H}$ равна $1/\rho^2$. Число ρ называют *радиусом кривизны* данной плоскости.

В зависимости от положения относительно абсолюта различают 15 типов углов плоскости $\widehat{H}$. Измеримыми с помощью абсолюта являются углы шести типов, углы трех типов имеют вещественные меры [3, §§4.3, 4.5; 4].

В данной работе потребуются следующие определения.

Две эллиптические прямые разделяют плоскость $\widehat{H}$ на две связные топологически различные части. Ту часть, которая содержит (не содержит) абсолют, называют *эллиптическим псевдоуглом* (*эллиптическим углом*) плоскости $\widehat{H}$ между данными прямыми.

Замкнутая линия плоскости $\widehat{H}$ может быть либо односторонней, ее удаление не нарушает связность плоскости, либо двусторонней, разбивающей плоскость на две связные компоненты. Трехвершинники плоскости $\widehat{H}$, ограниченные двусторонними линиями, называют *трехреберниками.* Вообще, все конечные трехвершинники плоскости $\widehat{H}$ относятся к 22 инвариантным

[1] 23 февраля 1826 года в Казанском университете состоялся первый доклад по неевклидовой геометрии, в котором Николай Иванович Лобачевский представил новую геометрическую систему, названную им “воображаемой геометрией”. Это событие принято считать рождением неевклидовой геометрии.

относительно группы G типам [3, Теорема 5.1.1]. Трехреберниками являются трехвершинники следующих десяти типов: $eee(I)$, $eee(III)$, $eeh(I)$, $ehh(I)$, $hhh(I)$, $eep(I)$, $ehp(I)$, $epp(I)$, $hpp(I)$, где символы e, h и p обозначают эллиптический, гиперболический и, соответственно, параболический тип ребра трехвершинника.

Различные вопросы решения трехреберников плоскости $\widehat{H}$ рассмотрены в работах [3 – 12]. Аналоги евклидовых теорем синусов и косинусов для трехвершинников 22 типов доказаны в книге [3]. В [6, 7, 12] получены общие формулы для вычисления площадей трехреберников, в [9] доказаны аналоги формулы Герона для трехреберников типов $eee(I)$ и $eee(III)$.

Напомним, что все внутренние точки относительно трехреберника типа $eee(I)$ являются собственными для плоскости $\widehat{H}$. Два внутренних угла при вершинах трехреберника этого типа — эллиптические углы, один — эллиптический псевдоугол. Ребро трехреберника типа $eee(I)$, противолежащее внутреннему псевдоуглу (углу), называют *основанием* (*боковым ребром*) данного трехреберника. Внутренность трехреберeника типа $eee(III)$ содержит весь абсолют, т. е. всю бесконечность плоскости $\widehat{H}$. Все внутренние углы при вершинах такого трехреберника — эллиптические псевдоуглы. Основные тригонометрические соотношения в трехреберниках типов $eee(I)$ и $eee(III)$ установлены в теоремах 5.4.1, 5.4.3, 5.4.5 – 5.4.8 из [3]. В данной работе для трехреберников этих типов докажем аналоги теоремы Стюарта, двойственное к ним утверждение о зависимости мер внутренних углов и выражения длин медиан и биссектрис через длины ребер и меры внутренних углов при вершинах.

2. Аналоги теоремы Стюарта

Теорема 2.1. *Пусть на плоскости $\widehat{H}$ длины ребер трехреберника ABC типа $eee(I)$ или $eee(III)$ удовлетворяют условиям $|AB| = c$, $|BC| = a$ и $|AC| = b$, а точка D разбивает ребро BC на отрезки длиной a_b и a_c, считая от вершины C. Если прямая AD эллиптическая (гиперболическая), а ее часть Θ, принадлежащая внутренности трехреберника ABC, имеет длину d, то выполняется соотношение*

$$\cos\frac{b}{\rho}\sin\frac{a_c}{\rho} + \cos\frac{c}{\rho}\sin\frac{a_b}{\rho} = \cos\frac{d}{\rho}\sin\frac{a}{\rho}, \tag{1}$$

$$\left(\cos\frac{b}{\rho}\sin\frac{a_c}{\rho} + \cos\frac{c}{\rho}\sin\frac{a_b}{\rho} = \operatorname{ch}\frac{d}{\rho}\sin\frac{a}{\rho}\right). \tag{2}$$

Если прямая AD параболическая, то справедливо соотношение

$$\cos\frac{b}{\rho}\sin\frac{a_c}{\rho} + \cos\frac{c}{\rho}\sin\frac{a_b}{\rho} = \varepsilon\sin\frac{a}{\rho}, \tag{3}$$

где $\varepsilon = 1$ $(\varepsilon = -1)$, если ABC — трехреберник типа $eee(I)$ $(eee(III))$.

Доказательство. Запишем для данного трехреберника ABC типа $eee(I)$ или $eee(III)$ соотношение (5.5) или соответственно аналогичное соотношение (5.34) из [3]:

$$\cos\frac{c}{\rho} = \cos\frac{a}{\rho}\cos\frac{b}{\rho} + \sin\frac{a}{\rho}\sin\frac{b}{\rho}\operatorname{ch}C. \tag{4}$$

Согласно условию теоремы выполняется равенство

$$a = a_b + a_c. \tag{5}$$

Далее рассуждения для трехреберников типов $eee(I)$ и $eee(III)$ проведем отдельно.

I. Рассмотрим все возможные варианты расположений трехреберника ABC типа $eee(I)$ и прямой AD относительно абсолюта.

1. Если в трехребернике ABC ребро BC боковое, т. е. противолежит внутреннему эллиптическому углу A (рис. 1, a), то прямая AD является эллиптической, а трехреберники ABD и ACD

принадлежат типу $eee(I)$. В этом случае часть Θ прямой AD является эллиптическим отрезком. Применяя к трехребернику ACD равенство (5.5) из [3], получаем

$$\cos\frac{d}{\rho} = \cos\frac{a_b}{\rho}\cos\frac{b}{\rho} + \sin\frac{a_b}{\rho}\sin\frac{b}{\rho}\operatorname{ch} C. \qquad (6)$$

Исключая выражение $\operatorname{ch} C$ из равенств (4), (6) и учитывая условие (5), находим формулу (1).

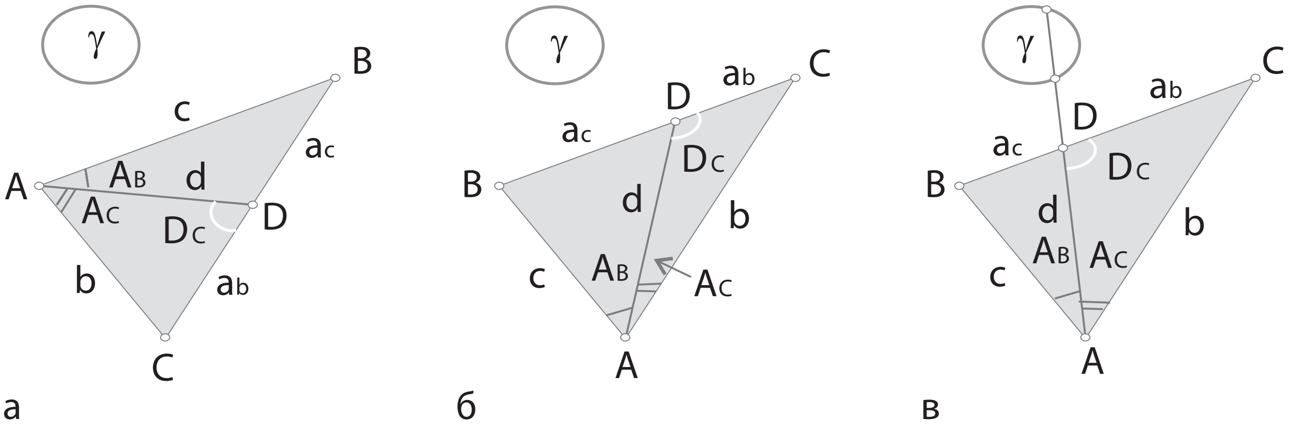


Рис. 1. Абсолют γ и трехреберник ABC типа $eee(I)$ плоскости $\widehat{H}$. Эллиптический отрезок AD, соединяющий вершину A с точкой D на боковом ребре BC (*а*); эллиптический отрезок AD, соединяющий вершину A с точкой D на основании BC (*б*); гиперболический отрезок AD, соединяющий вершину A с точкой D на основании BC (*в*).

2. Если ребро BC является основанием трехреберника ABC, т. е. противолежит внутреннему эллиптическому псевдоуглу A, то для прямой AD возможны все три типа расположения относительно абсолюта. Рассмотрим все возможные случаи.

2.1. Если прямая AD эллиптическая (рис. 1, *б*), то трехреберники ABD и ACD принадлежат типу $eee(I)$. Повторяя действия, описанные в пункте **1**, докажем выполнимость соотношения (1).

2.2. Если прямая AD гиперболическая (рис. 1, *в*), то Θ является гиперболическим отрезком, а трехреберники ABD и ACD принадлежат типу $eeh(I)$. Основные тригонометрические соотношения в трехребернике типа $eeh(I)$ доказаны в теореме 5.4.11 из [3]. Выразим длину d гиперболического ребра AD трехреберника ABD по формуле (5.48) из [3]:

$$\operatorname{ch}\frac{d}{\rho} = \cos\frac{a_b}{\rho}\cos\frac{b}{\rho} + \sin\frac{a_b}{\rho}\sin\frac{b}{\rho}\operatorname{ch} C. \qquad (7)$$

Исключая значение $\operatorname{ch} C$ из выражений (4), (7), при условии (5) получаем соотношение (2).

2.3. Если прямая AD параболическая, то Θ — параболический отрезок, а трехреберники ABD и ACD принадлежат типу $eep(I)$. Согласно теореме 5.5.1 из [3] для трехреберника ABD выполняется равенство

$$\cos\frac{a_b}{\rho}\cos\frac{b}{\rho} + \sin\frac{a_b}{\rho}\sin\frac{b}{\rho}\operatorname{ch} C = 1. \qquad (8)$$

Из выражений (4), (8) при условии (5) получаем зависимость (3) при $\varepsilon = 1$, соответствующую трехребернику типа $eee(I)$.

Итак, для трехреберника типа $eee(I)$ теорема доказана.

II. Если ABC — трехреберник типа $eee(III)$, то все его внутренние углы при вершинах — эллиптические псевдоуглы. Для секущей прямой AD возможны все три типа расположения относительно абсолюта. Рассмотрим все случаи.

1. Если прямая AD эллиптическая, то Θ — эллиптический отрезок (рис. 2, *а*). Один из трехреберников ABD и ACD принадлежит типу $eee(I)$, а другой — типу $eee(III)$. В трехреберниках этих типов соотношения теорем косинусов имеют одинаковую запись (см. (5.5) или

(5.34) из [3]). Применим теорему косинусов к трехребернику ABD. Выражая длину d рабра AD, получим зависимость (6). В силу условий (4) – (6) справедливо тождество (1).

2. Если прямая AD гиперболическая, то ее часть Θ, внутренняя относительно трехреберника ABC, состоит из двух лучей плоскости $\widehat{H}$ и полной прямой плоскости Лобачевского (рис. 2, *б*). Эта часть дополняет отрезок $\widetilde{\Theta}$ между точками A и D до полной гиперболической прямой плоскости H^2. Длина полной гиперболической прямой равна $i\pi\rho$ (см., например, [3, п. 4.4.3]). Поэтому длину d части Θ выразим как разность $i\pi\rho - \widetilde{d}$, где $\widetilde{d}$ — длина отрезка $\widetilde{\Theta}$. С этой целью рассмотрим трехреберник F_0 типа $eee(I)$ с вершинами в точках A, B, C, смежный с исследуемым трехреберником $F = ABC$ типа $eee(III)$ по ребру BC (на рис. 2 внутренность трехреберника F_0 выделена светлой заливкой). Трехреберники F и F_0 имеют смежные ребра на прямых AB и AC. Обозначим $\widetilde{b}$ ($\widetilde{c}$) длину ребра трехреберника F_0, противолежащую вершине B (C). Поскольку длина эллиптической прямой равна $\pi\rho$ (см., например, [3, п. 4.4.1]), то длины смежных отрезков между точками A, C и между точками A, B связаны соответственно условием

$$b + \widetilde{b} = \pi\rho, \qquad c + \widetilde{c} = \pi\rho. \tag{9}$$

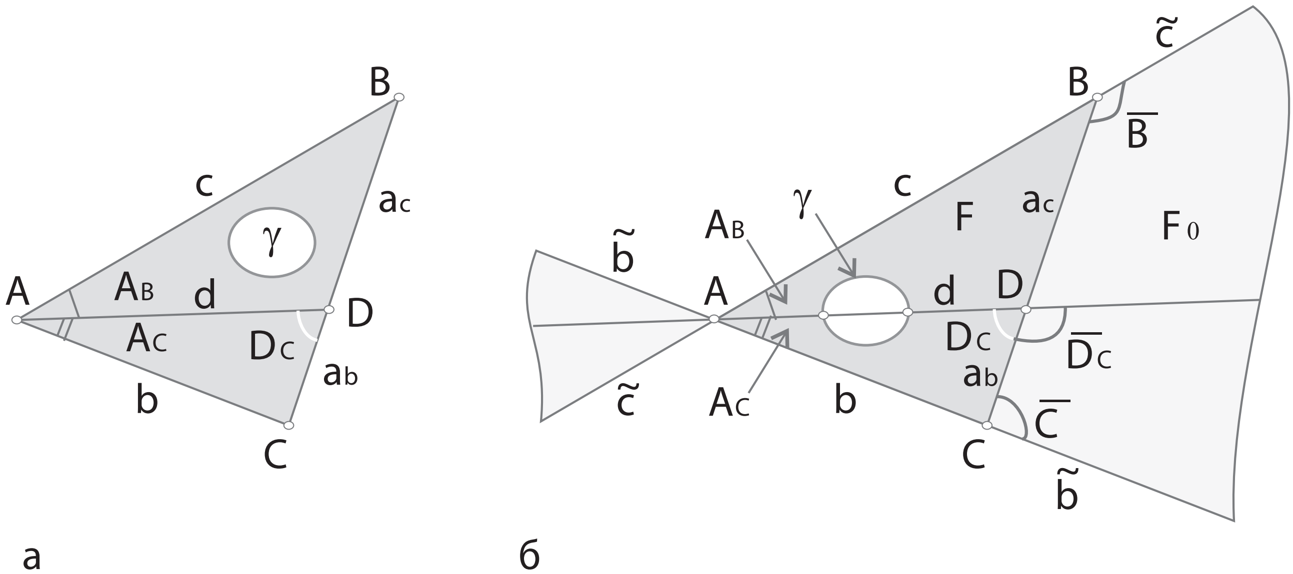


Рис. 2. Абсолют γ и трехреберник ABC типа $eee(III)$ плоскости $\widehat{H}$. Эллиптическая секущая AD (*а*); гиперболическая секущая AD и смежные по ребру BC трехреберники F типа $eee(III)$ и F_0 типа $eee(I)$ с вершинами A, B, C (*б*).

В первой части доказательства теоремы для трехреберника типа $eee(I)$ установлено соотношение (2). Перепишем это соотношение в принятых для трехреберника F_0 обозначениях

$$\cos\frac{\widetilde{b}}{\rho}\sin\frac{a_c}{\rho} + \cos\frac{\widetilde{c}}{\rho}\sin\frac{a_b}{\rho} = \operatorname{ch}\frac{\widetilde{d}}{\rho}\sin\frac{a}{\rho}. \tag{10}$$

Переходя к длинам b, c, d, приведем выражение (10) к виду

$$\cos\left(\pi - \frac{b}{\rho}\right)\sin\frac{a_c}{\rho} + \cos\left(\pi - \frac{c}{\rho}\right)\sin\frac{a_b}{\rho} = \operatorname{ch}\left(i\pi - \frac{d}{\rho}\right)\sin\frac{a}{\rho}. \tag{11}$$

По свойству $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y - \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$ гиперболического косинуса и формулам $\operatorname{ch}(ix) = \cos x$, $\operatorname{sh}(ix) = i\sin x$ связи между гиперболическими и эллиптическими тригонометрическими функциями, находим

$$\operatorname{ch}\left(i\pi - \frac{d}{\rho}\right) = \operatorname{ch}(i\pi)\operatorname{ch}\frac{d}{\rho} - \operatorname{sh}(i\pi)\operatorname{sh}\frac{d}{\rho} = \cos\pi\operatorname{ch}\frac{d}{\rho} - i\sin\pi\operatorname{sh}\frac{d}{\rho} = -\operatorname{ch}\frac{d}{\rho}.$$

Подставляя полученное значение в выражение (11) и применяя формулы приведения к эллиптическим косинусам, получим соотношение (2).

3. Если прямая AD является параболической, то ее часть Θ состоит из двух параболических лучей плоскости $\widehat{H}$. Соотношение между длинами a, b, c, a_b, a_c отрезков в трехребернике $F = ABC$ типа $eee(III)$ найдем из соотношения (3) при $\varepsilon = 1$, полученного для трехреберника типа $eee(I)$ в первой части доказательства теоремы. Согласно этому соотношению длины a, $\widetilde{b}$, $\widetilde{c}$ ребер трехреберника F_0 (см. предыдущий пункт) и длины a_b, a_c отрезков, составляющих ребро BC, связаны условием

$$\cos\frac{\widetilde{b}}{\rho}\sin\frac{a_c}{\rho} + \cos\frac{\widetilde{c}}{\rho}\sin\frac{a_b}{\rho} = \sin\frac{a}{\rho}. \tag{12}$$

Зависимость (12) после замены величин $\widetilde{b}$ и $\widetilde{c}$ их выражениями из равенств (9) принимает вид (3) при $\varepsilon = -1$.

Таким образом, утверждения теоремы выполняются и для трехреберника типа $eee(III)$. Теорема доказана. □

Следствие 2.1. *Длина m_a эллиптической (гиперболической) медианы трехреберника типа $eee(I)$ или $eee(III)$ плоскости $\widehat{H}$, проведенная к ребру длиной a, выражается через длины a, b, c ребер данного трехреберника по формуле*

$$\cos\frac{m_a}{\rho} = \frac{\cos\frac{b}{\rho} + \cos\frac{c}{\rho}}{2\cos\frac{a}{2\rho}} \qquad \left(\operatorname{ch}\frac{m_a}{\rho} = \frac{\cos\frac{b}{\rho} + \cos\frac{c}{\rho}}{2\cos\frac{a}{2\rho}}\right). \tag{13}$$

На плоскости $\widehat{H}$ длины ребер трехреберника типа $eee(I)$ ($eee(III)$), медиана которого, проведенная к ребру длиной a, лежит на параболической прямой, связаны соотношением

$$\cos\frac{b}{\rho} + \cos\frac{c}{\rho} = 2\varepsilon\cos\frac{a}{2\rho}, \quad \varepsilon = 1 \quad (\varepsilon = -1). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть на плоскости $\widehat{H}$ в трехребернике ABC типа $eee(I)$ или $eee(III)$ точка D — середина[2] ребра BC. Тогда в принятых при доказательстве теоремы 2.1 обозначениях $a = 2a_b = 2a_c$ и согласно условию данной теоремы $d = m_a$. Поэтому в случае эллиптической (гиперболической) прямой AD равенство (1) ((2)) принимает вид

$$\cos\frac{b}{\rho}\sin\frac{a}{2\rho} + \cos\frac{c}{\rho}\sin\frac{a}{2\rho} = 2\sin\frac{a}{2\rho}\cos\frac{a}{2\rho}\cos\frac{m_a}{\rho}, \tag{15}$$

$$\left(\cos\frac{b}{\rho}\sin\frac{a}{2\rho} + \cos\frac{c}{\rho}\sin\frac{a}{2\rho} = 2\sin\frac{a}{2\rho}\cos\frac{a}{2\rho}\operatorname{ch}\frac{m_a}{\rho}\right). \tag{16}$$

Из равенства (15) ((16)) следует первая (вторая) формула из (13). Равенства (3) при условиях $a = 2a_b = 2a_c$ принимают вид (14).

Что и требовалось доказать. □

3. Соотношения для внутренних углов трехреберников

Теорема 3.1. *Пусть в плоскости $\widehat{H}$ точка D лежит на ребре BC трехреберника ABC типа $eee(I)$ или $eee(III)$, а прямая AD разбивает внутренний угол при вершине A на углы величиной A_B, A_C, считая от ребра AB. Если прямая AD непараболическая, а внутренний угол при вершине D трехреберника ACD, принадлежащего данному трехребернику ABC, имеет меру D_C, то справедливо соотношение*

$$\operatorname{ch}B\operatorname{sh}A_C - \operatorname{ch}C\operatorname{sh}A_B = \operatorname{ch}D_C\operatorname{sh}A. \tag{17}$$

[2] Определение середины отрезка плоскости $\widehat{H}$ см. в [3, §4.2].

Доказательство. Для углов трехреберника ABC типа $eee(I)$ или $eee(III)$ выполняется условие теорем косинусов (см. соотношения (5.6), (5.7) и (5.35) из [3])

$$\operatorname{ch} B = -\operatorname{ch} A \operatorname{ch} C - \operatorname{sh} A \operatorname{sh} C \cos \frac{b}{\rho}. \tag{18}$$

При всех возможных вариантах расположения вершин трехреберника ABC и прямой AD относительно абсолюта (см. доказательство теоремы 1) рассуждения можно провести по одной из двух следующих линий.

1. Если данный трехреберник типа $eee(I)$, то при всех возможных расположениях вершин A, B, C относительно абсолюта непараболическая прямая AD разбивает его на трехреберники типа $eee(I)$ или $eeh(I)$ (см. рис. 1). Если данный трехреберник типа $eee(III)$, то эллиптическая прямая AD разбивает его на трехреберники типов $eee(I)$ и $eee(III)$ (см. рис. 2, *а*). Теоремы косинусов для углов, противолежащих эллиптическому ребру, в трехреберниках типов $eee(I)$, $eee(III)$ и $eeh(I)$ имеют одинаковую формальную запись (см. соотношения (5.6), (5.7), (5.35) и (5.50) из [3]). Применяя эту запись для внутреннего угла при вершине D в трехребернике ACD, получаем равенство

$$\operatorname{ch} D_C = -\operatorname{ch} A_C \operatorname{ch} C - \operatorname{sh} A_C \operatorname{sh} C \cos \frac{b}{\rho}. \tag{19}$$

Исключая из выражений (18), (19) значение $\cos \frac{b}{\rho}$ и проводя необходимые преобразования полученного равенства с учетом условия $A_B + A_C = A$, находим соотношение (17).

2. Если данный трехреберник типа $eee(III)$, то гиперболическая прямая AD разбивает его на два обощенных трехреберника с бесконечными ребрами (см. рис. 2, *б*). В этом случае рассмотрим вспомогательный трехребеник F_0 типа $eee(I)$, построенный при доказательстве теоремы 2.1, для которого равенство (17) доказано в п. **1**. Перепишем равенство (17) для мер $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{A}_B$, $\bar{A}_C$, $\bar{D}_C$ углов в трехребернике F_0 соответственно принятым обозначениям:

$$\operatorname{ch} \bar{B} \operatorname{sh} \bar{A}_C - \operatorname{ch} \bar{C} \operatorname{sh} \bar{A}_B = \operatorname{ch} \bar{D}_C \operatorname{sh} \bar{A}. \tag{20}$$

Величина развернутого угла с внешней относительно абсолюта плоскости $\widehat{H}$ вершиной равна $i\pi$ [3, §4.5]. Поэтому меры углов в трехреберниках F типа $eee(III)$ и F_0 типа $eee(I)$ с вершинами в точках A, B, C связаны условиями:

$$\bar{A} = A,\ \bar{A}_B = A_B,\ \bar{A}_C = A_C,\ \bar{B} = i\pi - B,\ \bar{C} = i\pi - C,\ \bar{D}_C = i\pi - D_C. \tag{21}$$

Переходя в равенстве (20) к мерам A, B, C, A_B, A_C, D_C согласно условиям (21), получим соотношение (17) для данного трехреберника ABC.

Теорема доказана. □

Следствие 3.1. *Длина l_a эллиптической (гиперболической) биссектрисы трехреберника типа $eee(I)$ или $eee(III)$ плоскости $\widehat{H}$, проведенная из вершины A, выражается через меры A, B, C внутренних углов данного трехреберника по формуле*

$$\cos \frac{l_a}{\rho} = -\frac{\operatorname{cth} \frac{A}{2} (\operatorname{ch} B + \operatorname{ch} C)}{\sqrt{(\operatorname{ch} B - \operatorname{ch} C)^2 - 4 \operatorname{ch}^2 \frac{A}{2}}}, \tag{22}$$

$$\left(\operatorname{ch} \frac{l_a}{\rho} = -\frac{\operatorname{cth} \frac{A}{2} (\operatorname{ch} B + \operatorname{ch} C)}{\sqrt{(\operatorname{ch} B - \operatorname{ch} C)^2 - 4 \operatorname{ch}^2 \frac{A}{2}}} \right). \tag{23}$$

Доказательство. Пусть в трехребернике ABC типа $eee(I)$ или $eee(III)$ точка D лежит на ребре BC, и прямая AD делит внутренний угол при вершине A данного трехреберника пополам. Тогда в принятых при доказательстве теоремы 3.1 обозначениях получаем: $A = 2A_B = 2A_C$. При этих условиях по формуле (17) находим

$$\operatorname{ch} D_C = \frac{\operatorname{ch} B - \operatorname{ch} C}{2 \operatorname{ch} \frac{A}{2}}. \tag{24}$$

Из выражения (24) согласно основному тождеству для гиперболических функций следует выражение

$$\operatorname{sh} D_C = \frac{\sqrt{(\operatorname{ch} B - \operatorname{ch} C)^2 - 4 \operatorname{ch}^2 \frac{A}{2}}}{2 \operatorname{ch} \frac{A}{2}}. \tag{25}$$

Рассмотрим все возможные случаи.

1. Если прямая AD эллиптическая, то она разбивает трехреберник ABC типа $eee(I)$ ($eee(III)$) на два трехреберника типа $eee(I)$ (типов $eee(I)$ и $eee(III)$), см. рис. 1, *а*, *б* (2, *а*). Формальные записи теорем косинусов для углов в трехреберниках типов $eee(I)$ и $eee(III)$ совпадают (см. соотношения (5.6), (5.7) и (5.35) из [3]). Применяя указанные теоремы к трехребернику ACD, отсекаемому от данного трехреберника биссектрисой AD, получим формулу

$$\operatorname{ch} C = -\operatorname{ch} \frac{A}{2} \operatorname{ch} D_C - \operatorname{sh} \frac{A}{2} \operatorname{sh} D_C \cos \frac{l_a}{\rho}, \tag{26}$$

где D_C — мера внутреннего угла при вершине D трехреберника ACD.

На основании выражений (24), (25), (26) справедлива формула (22).

2. Если трехреберник ABC принадлежит типу $eee(I)$, то гиперболическая прямая AD разбивает его на два трехреберника ABD и ACD типа $eeh(I)$ (см. рис. 1, *в*). Применяя к трехребернику ACD теорему косинусов для углов (см. соотношение (5.51) из [3]), находим выражение

$$\operatorname{ch} C = -\operatorname{ch} \frac{A}{2} \operatorname{ch} D_C - \operatorname{sh} \frac{A}{2} \operatorname{sh} D_C \operatorname{ch} \frac{l_a}{\rho}. \tag{27}$$

На основании выражений (24), (25), (27) справедлива формула (23).

3. Если трехреберник ABC принадлежит типу $eee(III)$, то гиперболическая прямая AD разбивает его на два обобщенных бесконечных трехреберника с общим ребром длиной l_a, состоящим из полной прямой плоскости Лобачевского и двух лучей плоскости $\widehat{H}$ (см. рис. 2, *б*). Для смежного с данным трехреберником по ребру BC трехреберника F_0, построенного при доказательстве теоремы 2.1 согласно предыдущему пункту выполняется равенство (23). Пусть $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ — меры внутренних углов соответственно при вершинах A, B, C в трехребернике F_0. Выразим по формуле (23) длину $\bar{l}_a$ биссектрисы трехреберника F_0, проведенной из вершины A:

$$\operatorname{ch} \frac{\bar{l}_a}{\rho} = -\frac{\operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} (\operatorname{ch} \bar{B} + \operatorname{ch} \bar{C})}{\sqrt{(\operatorname{ch} \bar{B} - \operatorname{ch} \bar{C})^2 - 4 \operatorname{ch}^2 \frac{\bar{A}}{2}}}. \tag{28}$$

Для смежных трехреберников F типа $eee(III)$ и F_0 типа $eee(I)$ с общими вершинами A, B, C выполняются равенства: $\bar{A} = A$, $\bar{B} = i\pi - B$, $\bar{C} = i\pi - C$, $\bar{l}_a = i\pi\rho - l_a$. Поэтому согласно формуле (28) для трехреберника F справедливо выражение (23).

Что и требовалось доказать. □

Заметим, что согласно определению биссектрисы эллиптического угла (псевдоугла) плоскости $\widehat{H}$ (см. [3, §4.3]) биссектриса трехреберника типа $eee(I)$ или $eee(III)$ является непараболической прямой.

Литература

[1] *Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства.* - М.: Наука, 1969.

[2] *Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии.* - М.: ГИТТЛ, 1955.

[3] *Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1: Тригонометрия.* - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013.

[4] *Ромакина Л. Н.* Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны // *Сиб. электрон. матем. изв.* - 2013. - Т. 10. - С. 393–407.

[5] *Ромакина Л. Н.* Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* - 2010. - Т. 10. - Вып. 3. - С. 14–26.

[6] *Ромакина Л. Н.* Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны // *Дальневост. матем. журн.* - 13:1. - 2013. - С. 127–147.

[7] *Ромакина Л. Н.* О площади трехреберника на гиперболической плоскости положительной кривизны // *Матем. тр.* - 17:2. - 2014. - С. 184–206.

[8] *Ромакина Л. Н.* Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны правильными орициклическими n-трапециями // *Чебышевский сб.* - 16:3. - 2015. - С. 376–416.

[9] *Ромакина Л. Н.* Аналоги формулы Герона для трехреберников типов $eee(I)$, $eee(III)$ гиперболической плоскости положительной кривизны // *Математика. Механика.* - 17. - 2015. - С. 52–55.

[10] *Ромакина Л. Н., Чурилова В. О.* Эллиптические орициклические n-реберники плоскости $\widehat{H}$ // *Математика. Механика.* - 17. - 2015. - С. 56–59.

[11] *Ромакина Л. Н.* Площади вписанных в гиперцикл правильных многоугольников гиперболической плоскости положительной кривизны // *Инновационная наука.* - 6:3. - 2016. - С. 20–23.

[12] *Romakina L. N.* The Area of a Generalized Polygon without Parabolic Edges of a Hyperbolic Plane of Positive Curvature // *Asian Journal of Mathematics and Computer Research.* - 10:4. - 2016. - С. 293–310.

Ромакина Людмила Николаевна,
доцент кафедры геометрии Саратовского
государственного университета им. Н.Г. Чернышевского,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: romakinaln@mail.ru

Федоров Иван Владимирович,
учитель информатики МАОУ “Лицей № 37” г. Саратов,
магистрант механико-математического факультета
СГУ им. Н.Г. Чернышевского.

E-mail: ivan260393@gmail.com

Геометрические идеи Н.И. Лобачевского (к 225-летию со дня рождения)

С. В. Жаров

В заметке приведена краткая биографическая справка о жизни и деятельности великого русского математика, одного из создателей неевклидовой геометрии, Николая Ивановича Лобачевского, а также дан очерк его геометрических идей.

В 2017 году исполняется 225 лет со дня рождения выдающегося русского математика профессора Николая Ивановича Лобачевского — основателя неевклидовой геометрии (геометрии Лобачевского). В течение 19 лет с 1827 по 1846 годы он являлся ректором Казанского университета. Открытие Лобачевского, впервые представленное в письменном виде 11(23) февраля 1826 года на заседании физико-математического факультета Казанского университета, в дальнейшем не получившее признания современников, совершило научный переворот в представлении о природе пространства, в основе которого более двух тысяч лет лежало учение Евклида. Учение Лобачевского оказало огромное влияние на развитие математического мышления, но это уже произошло гораздо позднее.

Небольшая биографическая справка. Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря (20 ноября по старому стилю) 1792 года в Нижнем Новгороде в небогатой семье служащего. Вся его жизнь связана с Казанским университетом, в который он поступил по окончании гимназии в 1807 году. Сразу же проявляется особенная склонность к физико-математическим наукам, и обнаруживаются выдающиеся способности. С момента обучения в гимназии неоценимое влияние на Лобачевского оказал талантливый учитель, воспитанник Московского университета Г.И. Карташевский, но в университете слушать его лекции не удалось, так как тот был уволен «как проявивший дух неповиновения и несогласия». Математические курсы в университете стал вести М.Ф. Бартельс, прибывший в Казань в 1808 году.

В 1811 году Н.И. Лобачевский утверждается магистром. Под руководством профессора М.Ф. Бартельса молодой Н.И. Лобачевский изучил классические труды по математике и механике: «Теорию чисел» К. Гаусса, «Небесную механику» П.С. Лапласа. Представив две большие работы по механике и алгебре, Николай Иванович Лобачевский произведен в адъюнкт-профессоры (доцент), с 1816 года — экстраординарный профессор, с 1822 года — ординарный профессор университета.

После смещения М.Л. Магницкого новый попечитель Казанского учебного округа М.Н. Мусин-Пушкин сумел оценить кипучую деятельную натуру Н.И. Лобачевского. Великого геометра избирают вскоре, в 1827 году, ректором и 19 лет он самоотверженно трудится на этом посту, добиваясь расцвета Казанского университета. Лобачевский стремился претворить в жизнь свою широкую передовую программу университетского образования, представление о которой дает его речь «О важнейших предметах воспитания», произнесенная им через год после назначения ректором. Перечислим основные геометрические труды Н.И. Лобачевского [3]. В 1829 году опубликован труд «О началах геометрии», где очень сжато были изложены основы «воображаемой» геометрии. Эта работа была представлена Советом университета в 1832 г. в Академию наук. Но даже академик М.В. Остроградский не понял ее значения и дал отрицательный отзыв на труд, «не заслуживающий внимания». Второй мемуар «Воображаемая геометрия» [4], опубликованный в «Ученых записках Казанского университета», относится к 1835 году. С 1836 года Н.И. Лобачевский издает в «Ученых записках» обширный труд «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» [4]. Из всех сочинений Н.И. Лобачевского по геометрии первое место по простоте и изяществу изложения занимает небольшая брошюра «Геометрические исследования по теории параллельных линий» [3,5], опубликованная в Германии в 1840 году. В конце своей жизни в 1855 году к пятидесятилетию Казанского университета в «Ученых записках» было помещено сочинение «Пангеометрия» [5], в котором изучается «геометрия в обширном виде, где обыкновенная геометрия будет частный случай» [5]. Вместе с этим представляет интерес выделить также и другие труды Н.И. Лобачевского по алгебре, математическому анализу, механике, физике и астрономии.

Мужественная борьба за научную истину резко отличает Н.И. Лобачевского от других современников, приближавшихся также к открытию неевклидовой геометрии. Замечательный венгерский математик Янош Больяи опубликовал на три года позже Н.И. Лобачевского свое исследование «Аппендикс» — добавление к книге своего отца. В этой работе он несколько с иной стороны подошел к тем же результатам, что и Н.И. Лобачевский. Но, не встретив одобрения и поддержки, он прекратил борьбу. Выдающийся немецкий математик Карл Гаусс, как выяснилось из опубликованной посмертно его переписки, получил некоторые начальные соотношения новой геометрии, но, оберегая свой покой, а также, быть может, не будучи уверен в правильности и объективной значимости этих результатов, запретил своим корреспондентам какие-либо высказывания об его взглядах.

Насильственно отстранение от деятельности, которой Н.И. Лобачевский посвятил свою жизнь, ухудшение материального положения, а затем и семейной несчастье (в 1852 году у него умер старший сын) разрушающе отразилось на его здоровье, он сильно одряхлел и стал слепнуть. Но и лишенный зрения, Н.И. Лобачевский не переставал приходить на экзамены, на торжественные собрания, присутствовал на ученых диспутах и не прекращал научных трудов. Непонимание значения его новой геометрии, жестокая неблагодарность современников не сломили его мужественного духа.

Открытие Николая Ивановича Лобачевского поставило перед наукой два очень важных вопроса: что такое геометрия вообще? И какая геометрия описывает геометрию реального мира? Двадцать столетий за основу выбиралась только евклидова геометрия, изложенная в известном труде «Начала» (3 век до н.э.). Ответы на оба вопроса дало последующее развитие науки: в 1872 Феликс Клейн [1] определил геометрию как науку об инвариантах той или иной группы преобразований (различным геометриям соответствуют различные группы движений, т. е. преобразований, при которых сохраняются расстояния между любыми двумя точками). Что же касается геометрии Лобачевского, то она действует в пространстве релятивистских (т. е. близких к скорости света) скоростей. Совершенно правильно один из ученых назвал Геометрию Лобачевского «звездной геометрией».

С древности никто не сомневался в истинности постулатов Евклида. Что касается V постулата, то именно этот постулат о параллельных привлек к себе особое внимание ряда геометров, считавших неестественным помещение его среди постулатов. Вероятно, это было связано с относительно меньшей очевидностью и наглядностью. Возможно, что уже сам Евклид пытался доказать постулат о параллельных. В пользу этого предположения говорит то обстоятельство, что первые 28 предложений «Начал» не опираются на V постулат. Евклид как бы старался отодвинуть применение этого постулата до тех пор, пока использование его не станет настоятельно необходимым. Многие известные математики (Прокл, Насир-Эддин, Валлис, Л. Бертран, Лежандр, Саккери) старались доказать постулат о параллельных, применяя только другие постулаты и те теоремы, которые можно вывести из последних, не используя сам V постулат. Все такие попытки оказались неудачными. Их общий недостаток в том, что в доказательстве неявно применялось какое-нибудь предположение, равносильное доказываемому постулату [1].

Остановимся на некоторых моментах цитированной выше брошюры «Геометрические исследования по теории параллельных линий» [3, 5]. Первые 15 утверждений не зависят от постулата параллельных и относятся с так называемой «абсолютной геометрии» (термин был предложен Яношем Больяи в 1832 году). К ним относятся, например, «в прямолинейном треугольнике равным углам противолежат равные стороны и обратно», «вертикальные углы равны», «пересечение шара плоскостью есть круг», признаки равенства треугольников [3]. Многие из этих свойств включены в программу средней школы. Следует отметить, что это далеко не полный список утверждений абсолютной геометрии.

Геометрия Лобачевского начинается непосредственно с утверждения, являющегося отрицанием постулата о параллельных. Его формулировка следующая: «все прямые линии, выходящие в некоторой плоскости из одной точки, могут быть по отношению к некоторой заданной прямой той же плоскости разделены на два класса, именно на *пересекающие и непересекающие. Граничная линия* одного и другого классов этих прямых линий называется *параллельной заданной линии»* [3].

На представленном ниже чертеже прямая AF относится к классу «пересекающих» прямых, а прямые AE, AG — «непересекающих» прямых, которые в учебной литературе по основания геометрии [1] называются *расходящимися прямыми.* Надо принять во внимание еще две прямые

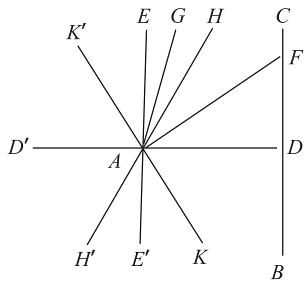


Рис. 1

AH и AK, которые называются параллельными, при этом надо отличать *стороны параллельности.* Угол HAD между параллелью AH и перпендикуляром AD называется *углом параллельности* и обозначается $\Pi(x)$, где $AD = x$ и $\Pi(x) < \pi/2$. Значение угла параллельности изменяется от $\pi/2$ до 0, когда x меняется от 0 до ∞. Для каждого угла параллельности существует единственный отрезок x и обратно. Таким образом, раскрываются все определения и теоремы новой «неевклидовой геометрии» (гиперболической геометрии). Развивая геометрию своего пространства, Н.И. Лобачевский заканчивает элементарную часть изложения построением полной системы формул тригонометрии. Он находит следующее выражение для формулы угла параллельности: $\Pi(x) = \operatorname{arctg} e^{-x/k}$, где k — постоянная, зависящая от единицы масштаба. В настоящее время ее называют радиусом кривизны пространства Лобачевского [1, 2].

Среди начальных особенностей геометрии Лобачевского можно выделить понятие окружности и ее предельного положения при бесконечном увеличении радиуса — орицикла, а в пространстве — понятие орисферы. В евклидовой геометрии при увеличении радиуса окружность превращается в прямую, а сфера — в плоскость, в гиперболической геометрии возникают два новых понятия. Сама евклидова геометрия в результате исследования Лобачевского выступает, как частный случай гиперболической геометрии в бесконечно малом пространстве.

Николай Иванович Лобачевский проверял первое основное требование аксиоматического построения математической теории — ее непротиворечивость. Суть состоит в том, что в терминах данной теории нельзя одновременно доказать некоторое утверждение и его отрицание. Заменив аксиому параллельных на ее отрицание, Н.И. Лобачевский не нашел ни одного противоречия и таким образом создал новую «воображаемую» геометрию.

В заключение данного очерка следует отметить имена тех ученых, кто способствовал распространению идей геометрии Лобачевского: Ф. Клейн и А. Кэли создали модель[1], которая подтвердила непротиворечивость и полноту неевклидовой геометрии [2]. Еще одна известная

[1] В частности, статья на стр. 40 настоящего выпуска журнала посвящена выводу некоторых теорем в этой модели — *Прим. ред.*

модель А. Пуанкаре также подтвердила состоятельность великих творений Н.И. Лобачевского [2].

Особенно должны быть отмечены труды профессора Вениамина Федоровича Кагана (1869–1953), который всю свою долгую научную жизнь посвятил распространению и развитию идей Н.И. Лобачевского. Ему принадлежит первое и, надеемся, что единственное оригинальное изложение неевклидовой геометрии под названием «Основания геометрии» [1, 2], а также большое количество статей и брошюр, посвященных данному вопросу. Последним подвигом В.Ф. Кагана было издание полного собрания сочинений Н.И. Лобачевского, главным редактором которого он являлся [3].

Литература

[1] Каган В.Ф. Основания геометрии. Часть 1. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. - 492 с.

[2] Каган В.Ф. Основания геометрии. Часть 2. - М.: ГИТТЛ, 1956. - 344 с.

[3] Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений / Сочинения по геометрии. Том 1. - М.: ГИТТЛ, 1946. - 416 с.

[4] Лобачевский Н.И. Избранные труды по геометрии. - М.: Изд-во АН СССР, 1956. - 596 с.

[5] Лобачевский Н.И. Три сочинения. - М.: ГИТТЛ, 1956. - 416 с.

Жаров Сергей Викторович,
доцент Ярославского
государственного педагогического
университета им. К.Д. Ушинского,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: szharv@rambler.ru

Пьер Картье о математике и искусстве

Доклад на коллоквиуме 3 сентября 1991 г., Cerisy, Франция

В 2017 году исполняется 85 лет Пьеру Картье — выдающемуся французскому математику, участнику знаменитой группы Бурбаки (об этой уникальной в истории математике группе мы планируем рассказать в одной из следующих публикаций). Кроме математических трудов, Картье известен широкими гуманитарными интересами. 3 сентября 1991 г. на коллоквиуме "Математика и искусство" (2-9 сентября 1991 г.) в Международном культурном центре Cerisy он выступил с вступительной речью о взаимоотношении математики и искусства, основные положения которой, на наш взгляд, и сейчас интересные и актуальные, мы предлагаем читателю. Текст выступления на французском языке подготовлен Марион Картье по записи, сделанной 3 сентября 1991 г. в Cerisy-la-Salle, Франция. В редакцию предоставлен А.И. Бондалом. Перевод на русский язык выполнила Е.В. Татарченко.

В качестве вступления к этому коллоквиуму я бы хотел сделать ряд замечаний по поводу взаимоотношений между математикой и искусством. Впрочем, я выйду за рамки этой проблемы: мне слишком трудно отделить размышления о математике от размышлений о математической физике. Я буду часто обращаться к последней, ведь она так часто служила мне помощницей. С другой стороны, недавно мне попалась небольшая книга Гейзенберга, составленная из статей и докладов, сделанных незадолго до его смерти, которая подвигла меня к настоящей работе. Из нее я извлек некоторое число примеров и аналогий, в частности, ссылку на Гёте, которая ранее мне была неизвестна. Я собираюсь разделить свое сообщение на три части. В первой, с некой полуисторической точки зрения, я попытаюсь объяснить, какой мне видится взаимосвязь математических дисциплин и различных видов искусства. Во второй части,которая создана под непосредственным влиянием Гейзенберга, я остановлюсь на паре "наука точная (Гейзенберг пользуется термином "структурная") — наука прикладная (Гейзенберг говорит об "описательной науке")" и попытаюсь выявить то, что мы имеем в виду под понятием "структура" (это слово чрезвычайно модно сегодня). В третьей, заключительной части, я попытаюсь уточнить роль языка, как в чистой науке (математике, математической физике), так и в искусстве, конечно, с соответствующей скромностью, ведь я не художник. Я сделаю некоторые заключения по поводу новых перспектив, новых форм, создаваемых на сверх-языковом уровне, тех, что имеют тенденцию к исчезновению и тех, которые находятся на стадии зарождения. К тому же, я попытаюсь свести счеты с некоторыми современными философскими течениями, если, конечно, такая возможность представится.

1. Взаимоотношения между математикой и искусством

Это, конечно, банальность, но вспомним, что в университетской структуре, которую мы унаследовали от средних веков, различались **trivium** (отсюда пошло наше слово "тривиальный"), он соответствовал в общих чертах первому университетскому циклу, и **quadrivium**, который являлся циклом более специализированным. Итак, четыре основных дисциплины (существовали незначительные вариации) — это музыка, астрономия, геометрия и арифметика. Этот факт позволяет моментально покончить с предубеждением, существовавшим на последнем этапе средневековой схоластики, и утверждает равноправие этих четырех взаимно дополняющих и помогающих друг другу дисциплин. Если мы хотим проиллюстрировать историческую кооперацию между математикой и искусством, несколько имен напрашиваются сами собой. Одна из наиболее выдающихся книг Дюрера — это "Геометрия" 1525 года. Это очень редкое издание. Мы располагаем лишь несколькими экземплярами книги 16-го века. К счастью, один из них имеется в Математической библиотеке Страсбургского университета. Это — геометрия, предназначенная для художников. На одной известной картине-иллюстрации Дюрера изображен геометр. Представленный геометр окружен рабочими инструментами, там присутствуют: карты полушарий, циркули, линейки, оптические приборы. Таким образом, в конце Средних веков и в начале эпохи Возрождения математик рассматривался не как манипулятор словами, не как чистый адепт логоса, а как ремесленник, окруженный предметами труда, главным образом, чертежными инструментами. Следовательно, было совершенно естественным рассматривать математика как человека, призванного создавать изображения. К тому же в те времена не было четкого деления науки на геометрию, географию, живопись и архитектуру. Гораздо позднее появилась большая Энциклопедия (Encyclopedie) Дидро — философа и художника — и Даламбера — математика, энциклопедия науки и искусства. Известно, какую большую роль в ней играют вкладки и иллюстрации. Энциклопедия была задумана как всеобъемлющий справочник практических и теоретических знаний. Даже в наши дни она является бесценным источником при изучении технологий и художественных средств той эпохи. Во все времена художники пытались призвать на помощь геометрию. Взять хотя бы кубизм. Одним из наиболее известных представителей этого направления является Эшер. Возможно, именно он предпринял самые последовательные попытки использовать геометрию в своих художественных поисках, геометрию достаточно абстрактную и продвинутую[1]. Думаю, что для достижения нашей цели вышеприведенных примеров окажется вполне достаточно.

Каким же образом влияют друг на друга математические дисциплины и искусство? Мне видятся два взаимно противоположных направления, и оба я считаю одинаково важными. Одно, когда математика в целом или математические дисциплины в частности рассматриваются в качестве инструмента, как теоретического, так и практического, состоящего на службе у искусства, другое — это искусство, способное вдохновлять и снабжать новыми идеями математику. Я не буду слишком долго задерживаться на первом, поскольку эти рассуждения достаточно хорошо известны. Но все же поговорим о математике как инструменте. Сама природа математики двойственна (по меньшей мере). Зачастую это проявляется даже в структуре математических обществ, когда происходит деление на чистых и прикладных математиков. Я вовсе не приветствую этого деления и нахожу его крайне предосудительным. Оно ведет к заблуждениям и очень сильно зависит от исторического момента. Еще каких-то 15 лет назад те, кто занимались наиболее абстрактными разделами алгебры (теорией Галуа, например), естественно были отнесены в университетах к секциям чистых математиков. Сегодня, когда мы открыли и разрабатываем кодирование и системы трансляции, те же специалисты, которые считались чистейшими математиками из чистейших, получают очень выгодные контракты, если они в них, конечно, заинтересованы. Теория вероятностей, напротив, в течение длительного времени рассматривалась как дисциплина, едва ли достойная войти в величественный храм математики. Сегодня в секциях теории вероятностей я встречаю коллег, занимающихся гораздо более абстрактными вещами, нежели я сам, отнесенный к разряду чистых математиков. Таким образом, эти различия достаточно подвижны, достаточно изменчивы. Однако их не станет меньше сразу после того, как мы начнем рассматривать математику одновременно и как науку в себе, и в качестве инструмента для других наук (любая наука может быть в одно и то же время наукой для себя и инструментом иных дисциплин; это касается, например, физики и химии). Математика, тем не менее, находится в несколько особом положении, поскольку согласно классификации Конта, она расположена на вершине, или, скорее, у основания древа познания. Я не рассматриваю этот факт как бесспорное превосходство, а лишь хочу отметить, что, возможно, математика находится во взаимоотношении с бóльшим числом дисциплин, чем, например, химия или биология —

[1]Обратим также внимание читателя на живопись академика А.Т. Фоменко, на многих картинах которого проявляются точные геометрические конструкции — *Прим. ред.*

хотя с этим тоже можно поспорить.

Когда мы говорим о математике как об инструменте, мы имеем в виду прикладную математику. Ясно, что в процессе исторического развития геометрия рассматривалась, прежде всего, как наука практическая. Не будем углубляться в античную историю, а возьмем в проводники полотно Дюрера. Здесь на коллоквиуме мы поговорим об истории перспективы и увидим, как под влиянием развития законов перспективы потребности живописи постепенно подвели нас к созданию проективной геометрии; в этом случае развитие достаточно очевидно. Архитектура тесно связана с геометрией, однако, существуют цивилизации и исторические традиции, где эта связь является еще более тесной. В европейской культуре она была почти забыта и вернулась в моду лишь в 50-60-ые годы под влиянием творчества Ле Корбюзье. Но и при нем использование геометрии оставалось крайне ограниченным, поскольку многообразие геометрических форм не исчерпывается примитивным кубом. У китайцев же, например, очень хорошо разработанная по сравнению с нашей терминология трехмерных твердых тел непосредственно инспирирована архитектурой.

Развитие географии и картографии поставило многочисленные математические проблемы. Например, мы знаем, что один из самых выдающихся прорывов в геометрии был осуществлен Гауссом в начале XIX века, он тут же привел Римана к созданию его концепции обобщенной геометрии. Это как раз тот случай, когда абсолютно конкретным работам по геодезии и картографической съемке северной части Германии, которые Гаусс осуществлял как придворный географ Герцога Ганноверского, была придана сугубо теоретическая форма. То, что математика служила инструментом для различных наук, связанных с пространственными изображениями, само собой разумеется. Совершенно очевидно, что сегодня, когда благодаря спутниковым наблюдениям, мы обладаем новыми возможностями представления объектов, география должна вернуть свою значимость в различных ипостасях: управление природными ресурсами, облагораживание территорий, и, следовательно, у математики опять появится возможность протянуть руку помощи при решении вполне конкретных задач. Я закончу, в своей третьей части, обзором перспектив, открывающихся благодаря развитию информатики и компьютерной графики. Мы увидим новую роль математики как инструмента, позволяющего создавать изображения и управлять ими. Я прежде всего геометр, поэтому мои размышления касаются главным образом этой области, но и музыка (к ней я перейду через минуту) также очень тесно связана с математикой. Музыка начала использовать математику в качестве инструмента очень давно, начиная с первых попыток теоретизирования у Пифагора и заканчивая Эйлером.

С другой стороны, искусство также часто давало математике толчок к развитию новых направлений. Абсолютно точно, что идея симметрии или, по крайней мере, пространственной симметрии пришла от живописи, от искусства. Столь же фундаментальная идея редукции — создание макета согласно определенному масштабу, будь то плоский макет (карта) или макет в трех измерениях — тоже была заимствована из практики, возможно, религиозной или художественной (впрочем, "религиозное" и "художественное" было и остается трудно разделяемым). Гомотетия — уменьшение или, напротив, увеличение (оптические приборы натолкнули на это понятие) — один из фундаментальных инструментов геометрии. Мы знаем сегодня, что идея гомотетии (под именем иерархии масштабов) является абсолютно фундаментальной и для физики. Один из любимчиков последнего времени — фрактал — опять-таки является лишь иллюстрацией принципа изменения масштаба. В этой связи можно было бы припомнить и гомункулуса Гёте, который хотел быть уменьшенной копией человека. Очевидно, что художественные объекты выявляют определенное число категорий, которые становятся фундаментальными для математической мысли. Я говорил о пространственной симметрии, но существует и гораздо более тонкая категория временно́й симметрии, которая приводит нас к гармоническому анализу в обоих смыслах — музыкальном и математическом — этого понятия. Может быть, я говорю в несколько абстрактной манере, но совершенно очевидно, что эта временна́я симметрия, пусть даже глубоко запрятанная, служит мощным мотивирующим началом для различных математических дисциплин. Многие математические раздумья никогда бы не родились, если бы не существовало вполне конкретной проблемы представления изображений. Вся геометрия в некотором смысле зависит от представления, но это утверждение в равной степени верно и для научных доктрин гораздо более тонких и современных.

Одним из последних моментов, демонстрирующих связь между математикой и искусством, является природа объекта. Мы много размышляли над природой математических объектов. Должен признаться, что для меня этот вопрос остается открытым. Что же такое математический объект, каков его онтологический статус? В одном недавнем опусе Connes и Changeux вы встретите очень четко очерченные и столь же резко отличающиеся точки зрения обоих авторов. Для Changeux, являющегося признанным материалистом, понятия существуют лишь в качестве физико-химического субстрата мозговой деятельности. Я как умеренный рационалист готов принять эту позицию, т.е. согласиться с тем, что люба мысль или понятие являются физико-химической субстанцией, но, если мы и дальше будем двигаться в этом направлении, то придем к солипсизму, позиции которого защищать крайне сложно. С другой стороны, Alain Connes, являющийся очень тонким математиком, защищает тезис, который я бы назвал инстинктивным платонизмом (эта позиция характерна для большинства математиков даже в том случае, если они никогда специально не задумывались над данным вопросом) и который заключается в утверждении, что объекты существуют сами в себе. Для него последовательность простых чисел или связность конечных групп — это вещи той же категории, что и физические объекты. Эта точка зрения весьма распространена, поскольку математика в настоящее время (в прошлом году мы уже обсуждали здесь этот вопрос) строится на теоретико-множественной концепции Кантора. Многие симптомы указывают на то, что это величественное сооружение покрылось глубокими трещинами, но совершенно верно и то, что для Кантора и поборников канторовой точки зрения множества существуют сами в себе как конкретные объекты. Этот взгляд, конечно, нуждается в гораздо более тонком исследовании и представлении; в порядке провокации мы могли бы сопоставить утверждения Connes и Моцарта, который часто заявлял, что музыку пишет не он сам, подразумевая при этом вмешательство неких высших сил. Почему же мы, обсуждая природу математических объектов (ниспосланы ли они Богом? Существуют ли в неком пространстве?) рассматриваем это как некую серьезную дискуссию? Если же музыкант будет утверждать, что, сочиняя кантату, Бах лишь переносит на бумагу музыку ангелов, математик, возможно, только усмехнется в ответ... Однако едва мы поставим рядом высказывания Моцарта или наиболее одухотворенных учеников Баха и утверждения некоторых математиков, как аналогия оказывается шокирующей, даже убийственной.

Одним из оснований для сопоставления математики и искусства является возможность поразмышлять о практике. Каждый практик имеет обыкновение рассматривать некие особенности своей профессиональной деятельности или своей науки как исключительно ей принадлежащие, однако, сравнительный взгляд способен продемонстрировать гораздо большую универсальность этих особенностей. Существует некий тип индивидуального поведения, некий тип действия, который математик воображает принадлежащим исключительно математике. Но если он попытается сравнить свой опыт с опытом других творцов, например, художников, то заметит множество аналогий. Определенное число психологических иллюзий исчезнет в процессе сопоставления.

2. Наука описательная и наука точная

Перейдем к следующему пункту, который кажется мне более фундаментальным. Это противопоставление (здесь Гейзенберг не без основания ссылается на Гёте) науки описательной и науки точной. Мы могли бы, конечно, использовать и другие антагонистические пары того же рода. Наука описательная есть наука субъективная, в то время как наука точная есть наука объективная — подобные утверждения надо использовать с известной долей осторожности. Наука описательная — это наука, занимающаяся классификациями, тогда как наука точная — это наука, исследующая механизмы, и часто механизмы скрытые. Наука описательная — это наука случая, наука точная — это наука закона. Мы могли бы таким же образом, например, противопоставить “частное” и “общее”. Все эти антагонистические пары, которые не являются в то же время полными противоположностями, отражают сходные трудности. Гёте, безусловно — один из наиболее последовательных приверженцев описательной науки. Всем известно, что спектр его интересов был очень широк — излишне говорить о нем как о поэте, художнике, политическом деятеле — он также был ученым геологом и ботаником. Его деятельность пришлась как раз на момент, когда геология и ботаника начали развиваться как науки описательные, классификационные. Наука, которая развивалась в дальнейшем, “наука” в современном смысле слова является в гораздо большей степени наукой точной. Гейзенберг довольно далеко продвинулся в этом направлении, но я думаю, что сейчас, пятнадцать-двадцать лет спустя, настало время несколько охладить его воодушевление.

Каков объект точной (по Гейзенбергу — структурной) науки? Я продемонстрирую его на трех примерах: один я взял из истории геометрии, другой — из истории акустики и третий (на нем я задержусь несколько дольше) — из истории оптики. Само по себе слово “структура” довольно сложно для определения. Мне кажется, что здесь стоит искать архитектурное происхождение. Идея структуры подобна идее несущей конструкции здания, будь то деревянный или железный остов в старинных постройках или даже скрытый каркас в виде металлических прутьев, которые придают жесткость бетону в наших современных зданиях. Структура — это то, что постоянно под воздействием изменений, то, что обеспечивает сходство, и что часто скрыто от глаз. Структурная наука, по сути дела, пытается найти то, что постоянно, но скрыто под различными личинами, выявить законы, заключенные в событиях. Реальность же существует, чтобы устанавливать этим попыткам разумные границы: например, крупный социальный и политический замысел развивался вокруг того, что мы могли бы назвать “фиксизмом” — идеи, согласно которой можно достичь идеального состояния общества, и тут же история окажется завершенной. Тем не менее, один вдохновенный наблюдатель революции 17 года Герберт Уэллс уже в 1920 году высказал очень существенные соображения по этому поводу; в своей Современной Утопии он замечательно объяснил, что после Дарвина уже невозможно поверить в креационистскую утопию. К сожалению, мы не слишком-то его читали. Итак, поиск скрытых механизмов, того, что действительно является мотором, спрятанным под внешним обликом, — вот роль структурной науки.

Сформулируем четко наши три примера. Первый, — геометрический. Основная задача проективной геометрии — поиск того, что незыблемо в геометрическом объекте вне зависимости от точки обзора. Мы наблюдаем один тот же объект с различных точек, и все способы представления изображения (например, начертательная геометрия Монжа) являются действительно систематизацией методов, позволяющих представить один и тот же объект, обозреваемый с различных точек. Сегодня это становится очень актуальной темой. Развитие компьютерной графики приводит к исследованиям, чрезвычайно важным для робототехники и других дисциплин подобного рода, которые требуют именно автоматизации изменения точки наблюдения, создания автоматического вращения изображения. Вот необычайно важная тема с актуальным практическим применением в области архитектуры, обустройства территорий, планирования. Проективная геометрия научила нас, что окружность, эллипс и гипербола (то, что мы называем коническими сечениями), кажущиеся очень разными, в действительности представляют собой один и тот е объект, наблюдаемый с различных точек. Не надо путать: эти геометрические фигуры действительно обладают своими собственными характеристиками, но в то же время они есть не что иное, как проекции одного и того же объекта. Если мы спроецируем окружность соответствующим образом, то на экране получим изображение эллипса, при проектировании другим способом это будет гипербола или парабола, а может, даже окружность. Таким образом, мы вынуждены признать, что это один и тот же объект, вопреки различному внешнему виду.

Мало-по-малу, по мере признания факта, что суть объектов не меняется, развивалась идея преобразования. На первом этапе точка преобразовывалась в точку. Когда мы рисуем некий объект, то каждой точке объекта соответствует определенная точка рисунка (например, так получается географическая карта). Известно, что преобразование Понселе посредством обратных поляр стало началом более глубокого видения геометрической симметрии. При этом преобразовании мы каждой точке некоторой фигуры сопоставляем прямую и наоборот. Это гораздо менее очевидная ситуация, когда, со структурной точки зрения, фактор случайности опять исчезает. Развитие всей геометрии 19-го века шло в направлении "от случая к закону". Мало-по-малу мы все подчинили проективной геометрии, а затем понятию преобразования, которое является просто более глубоким пластом по отношению к понятию "проективный". Мы можем вспомнить знаменитую программу Феликса Клейна, где каждому телу из геометрической теории ставится в соответствие одна из групп симметрий. Но этот процесс имеет свои границы. Например, при развитии геометрии до сравнительно недавнего периода, отстоящего от нас на двадцать-тридцать лет, объектом исследований служила почти исключительно "комплексная проективная геометрия", в которой допускается существование мнимых точек наряду с точками действительными, а также точками, удаленными в бесконечность, — все,что позволяет синтезировать ситуации, очевидно, весьма несхожие и вместе с тем, укладывающиеся в одну и ту же форму. Только недавно удалось заметить, каким образом в "действительной" алгебраической геометрии, в которую вводятся дополнительно прямым образом объединенные мнимые элементы, возникает противоречие. Развитие этой "действительной" геометрии, не являющейся ни "комплексной", ни "мнимой", существенно опоздало, чему уже двадцать лет: мы пришли к парадоксу, обладая чрезвычайно развитой **мнимой** геометрией, в то время как **вещественная** геометрия — слова не являются пустыми в этом вопросе — оказалась отставшей. К счастью, мы сейчас находимся в процессе переоткрытия важности роли случая в геометрии.

С ролью случая дел обстоит непросто. Когда Ньютон взялся за классификацию так называемых кубических кривых, т.е. тех, которые описываются уравнениями третьей степени, он выделил 74 случая! Мы могли бы сравнить эту ситуацию с упомянутым выше простым подразделением конических сечений (кривых второго порядка) на эллипсы, параболы и гиперболы. В некоторых современных работах, например, русского геометра Арнольда, мы находим классификации, насчитывающие сотни геометрических случаев: здесь мы далеко уходим от семи катастроф Р. Тома, который отметил только наиболее простые ситуации. Таким образом, геометрия частного случая оказалась настолько сложной, что бесспорно было оправдано преимущественное развитие более простой структурной геометрии. Время, которое всех нас породило, подверглось гипнозу структурализма; и вовсе неслучайно, что именно в эту эпоху мы пренебрегали исторической наукой или искажали ее в рамках некой структурной версии, а сами жили с иллюзией полностью завершившейся истории; но история пробудилась, как мы четко видим в последнее время.

Вот что я хотел сказать о развитии геометрии. Можно параллельно рассмотреть эволюцию акустики и музыки. Продвигаясь от Пифагора к Эйлеру, мы замечаем некоторое аналогичное развитие, более и более глубокое исследование структуры, скрывающейся за частным случаем. Напомним в двух словах историю. Пифагорейская школа заметила связь между длиной струны арфы или трубы духового инструмента и высотой звука. Законы простых зависимостей между длиной струны и музыкальными интервалами (гамма Пифагора) суть открытие античности. Но тогда это касалось непосредственной связи инструмента, производящего звук, того инструмента, который мы видим и каким он изготовлен, — скрипки или арфы с определенной длиной струн — и исследуемого музыкального эффекта или созданного музыкального произведения. В 18 веке мы достигаем значительно более высокого уровня абстракции. Специалисты, более искушенные, нежели я, могли бы поговорить о Рамо, о хорошо темперированных гаммах или об Эйлере. Эйлерова "Теория музыки" 1739-го года — произведение крайне важное. Одна из его основополагающих идей (она не принадлежит Эйлеру, но он очень широко использует ее, а позднее берет на вооружение и Даламбер) состоит в том, что все явное, т.е. длина струны или трубы, не суть важно. Важен феномен вибрации сам по себе, частота вибрации. Музыкальный инструмент служит лишь для придания импульса среде, некоему медиуму. Различные музыкальные инструменты (вот она — фундаментальная идея!) могут одинаково инициировать медиум. Конечно, музыканту известно, что существует скрипка, фортепиано или духовые и струнные инструменты. Каждый из них обладает определенной, присущей только ему, тональностью, атакой, тембром, т.е. вполне конкретными характеристиками. Согласно Эйлеру, помимо тембра, основополагающей является высота звука, которая, в свою очередь, определяется осцилляциями акустического медиума. Таким образом, наш интерес перемещается от инструмента в сторону медиума. Это есть абсолютно фундаментальное открытие, позволившее Эйлеру дать определение того, чем измеряются музыкальные интервалы: логарифм отношения частот двух сравниваемых звуков. Оно стало также основой математической и физико-математической теории, широко развитой Гельмгольцем в следующем веке. Здесь мы приходим к высшей степени абстракции, и исследования Фурье, посвященные **гармоническому** анализу — в этом случае слово опять-таки небезразлично, покажут, что эти вибрационные явления значительно более универсальны, чем это казалось ранее. Движение волн описывается теми же математическими уравнениями, что и музыка, а это вовсе не является очевидным a priori. Таким образом, за внешней стороной мы обнаруживаем первоначально скрытые абстрактные понятия.

Развитие оптики еще более впечатляет. Если мы пройдемся, пусть очень быстро, по двум тысячелетиям, разделяющим Аристотеля и Гамильтона, мы отметим поступательное изменение существовавших воззрений. Сначала оптика, та, какой она описана у Евклида или Аристотеля, занималась непосредственным созданием изображений. В те времена не различали оптику физиологическую (глаз как таковой) и оптические инструменты, которые оставались крайне примитивными. Вначале было открыто ортоскопическое распространение света, т.е. формирование теней и т.д. Оптика, так же как и живопись, занималась главным образом созданием изображений, следуя идее существования изображаемого предмета и его изображения. В процессе развития оптики в конце XVI и в XVII веках она прежде всего будет рассматриваться как прогресс в создании изображений. Еще каких-то 15 лет назад основным предназначением телескопа было воспроизведение изображений солнца и звезд на фотопленке или на экране. Идея изображения есть поточечное соответствие, когда каждая точка объекта (будь то солнце или звезда) согласно некоему геометрическому закону преобразуется в точку на рисунке или фотопластинке. Эта основополагающая идея поточечного преобразования все еще остается основой явления: в данном случае геометрическая точка рассматривается как частичка, важная частичка или маленькая часть объекта, имеющего изображение.

То, что заставит изменить эту точку зрения и перейти на более абстрактный уровень, — это идея аберрации. Начало настоящей оптики в привычном для нас сегодня смысле — это момент изобретения линз, прежде всего линз сферической формы. Я не буду пытаться углубиться в историю этого изобретения, оно было сделано в конце XVI века и непрерывно развивалось в XVII от Галилея к Гюйгенсу. Было замечено, что оптический инструмент не безупречен, т.е. звезда не дает абсолютно точечного изображения в фокусе телескопа, а наблюдается некое светящееся пятно. Именно это явление мы называем в оптике аберрацией. Тот, кто пользовался плохо отрегулированным биноклем, знаком с проблемой. В наше время был достигнут необычайный прогресс, поскольку мы научились изготавливать линзы с переменным коэффициентом преломления и таким образом получили почти безупречное решение назойливой проблемы аберрации. Так что же это за проблема? То, что было точкой объекта, более не является точкой после прохождения через оптический прибор; оно разрозненно, увеличено, деформировано. Классические оптические проблемы соответствуют различным аберрациям — хроматической, сферической аберрации и другим, имеющим чрезвычайно важные практические последствия.

Наиболее существенным моментом в этом историческом развитии является открытие Гюйгенсом волнового фронта. Идея заключалась в том, что неотъемлемое свойство световых лучей — это их перпендикулярность по отношению к некоторой поверхности, называемой волновым фронтом или волновой поверхностью. (Эта поверхность не единственна, и один и тот же световой пучок соответствует нескольким волновым поверхностям. Здесь в зародыше присутствует понятие о распространении волн). Эта идея получит широчайшее развитие. В чем же, по нашему мнению, состоит изменение мировоззрения? Античной оптике не было известно, то ли глаз испускает световые лучи, то ли лучи приходят извне и проникают в глаз. Очень длинные дебаты, которые велись на эту тему, былы завершены только в XIX веке. В любом случае глаз (не важно, считали его пассивным или же активным) в процессе последовательного развития оптики отождествлялся с этим пучком лучей, либо входящим, либо исходящим. Именно здесь лежит начало усовершенствованных геометрических форм, тех, развитием которых займется XIX век: геометрическая точка, замещенная объектом, который есть множество всех лучей, всех прямых, проходящих через эту точку. Только что я упомянул геометрию Понселе, где фундаментальной идеей является соответствие точка–прямая. Таким образом, мы приходим к новой концепции, когда глаз (глаз, конечно же, является не точкой, а неким объектом, но для упрощения ситуации рассматривается в качестве одной-единственной точки) отождествляется, по крайней мере, отвлеченно, с множеством лучей, проходящих через него. С другой стороны, объект так же рассматривается как совокупность лучей. Эта роль объекта особенно шокирует в астрономии, где звезды видятся лишь точками, лишенными структуры. Но задумайтесь о поступательном изменении онтологического статуса: до 1958 года, т.е. до начала космических исследований, удаленные космические объекты существовали лишь как математические точки, отвлеченные объекты. Даже Луна не более чем некая абстракция: она становится реальностью, когда на нее ступает нога человека, и именно в этот момент приобретает смысл открытие лунных гор, сделанное Галилеем. Здесь также предоставляется повод поразмышлять о диалектике "случая" и "структуры", "случая" и "закона". Если мы признаем существование некой структуры у звезды, то сможем утвердиться во мнении, что светящаяся точка — это источник, а глаз — рецептор. Как бы то ни было, математическая точка, будь она объектом или субъектом, рассматривается как множество всех проходящих через нее лучей.

Центральный поворот в развитии оптики — это теорема Malus. Развивая идеи Гюйгенса, Malus обнаружил, что при изучении объектов и аберраций в пусть даже очень сложных оптических системах, мы сталкиваемся с неким постоянством. Осветите такую сложную систему линз, зеркал точечным источником света, например, какой-нибудь удаленной звездой. Лучи будут перемещаться очень сложным образом, и на выходе мы получим сильно искаженное изображение, а вовсе не точку. Но идея Гюйгенса о существовании волнового фронта остается применимой: множество лучей, выходящих из оптической системы, пусть даже очень сложной, суть множество нормалей к некой поверхности. Это и есть теорема Malus. В своем великом открытии Гамильтон оперирует обратной точкой зрения: постоянным является не тот объект, который мы имеем на входе в оптическую систему, т.е. светящаяся точка (рассматриваемая как излучатель или приемник), а эта волновая поверхность или, скорее, множество лучей. После работ Malus и Гамильтона оптика перестает быть исследованием объектов, а начинает изучать световые лучи. Объект отождествляется с множеством лучей, которые он испускает, а оптическая система рассматривается как некий преобразователь этого множества лучей. Этот подход мгновенно открывает невиданные доселе горизонты: с математической точки зрения — это начало симплектической геометрии, геометрии Гамильтона. Мы быстро забыли о вкладе Гамильтона в оптику и сохранили из его идей лишь транспозиции в механике, которые, конечно, являются фундаментальными. Я не располагаю достаточным временем, чтобы задержаться на переходе от классической механики к так называемой волновой или квантовой механике, но для меня очевидно, что объяснение двойственности интересов Гамильтона (оптика/механика) скрыто именно здесь.

Если мы задумаемся над взаимоотношениями между объектом искусства и математическим объектом, то поймем, что важным является отвлеченная и фундаментальная роль оптического прибора, пусть даже очень сложного, т.е. преобразования, которое трансформирует пучок световых лучей, имеющийся на входе в систему, в пучок световых лучей, получаемый на выходе из нее. Это порождает широчайшую свободу, поскольку очень разные оптические системы могут порождать одинаковые преобразования. Таким образом, акценты перемещаются с объекта в сторону среды (в данном случае это свет, система световых лучей). И то, что оптика затем эволюционирует из оптики лучей в сторону волновой оптики, не суть важно. С того момента, как объект рассматривается только в качестве источника световых лучей, основной реальностью становится свет. Вся современная физика, которая суть физика полей, зарождается безусловно, в этот момент, но так же верно и то, что такое революционное направление в искусстве, как импрессионизм, тоже восходит к этому времени. Основополагающий тезис импрессионистов, используемый ими очень часто, заключается в том, что важен не объект, а свет. Совершенно не случайно, что они творили в Нормандии, где из-за частых туманов объекты призрачны и нереальны. Зато свет, световые колебания, преобразования света играют основную роль. Таким образом, перспектива изменяется, и это изменение направлено от случайности в сторону сущности. Я попытался проследить это изменение, выступив в роли геометра, матфизика, оставаясь в рамках моих собственных интересов, но надеюсь, что за ними вы разглядели и все другие идеи, так или иначе связанные с искусством. Импрессионизм — это один из возможных ответов на все ожидания, связанные со светом, но тема эта, однако, имеет очень длинную историю: у Saint Jean de la Croix и у многих других мистиков мы встречаем гимны свету. Мы можем также обратиться к Евангелию от Иоанна, который взывает к Христу как к вселенскому свету...

Таким образом, эта эволюция оптики приводит к тому, что теперь на первый план ставится не объект, а множество световых лучей и в то же самое время преобразование. Теория преобразования систем световых лучей — это отправная точка так называемого гамильтонова метода в механике. Искусство, по большей части, есть преобразование определенного числа полученных физиологических или психологических впечатлений в выражение. Идея гравитационных линз, с которой мы встречаемся в астрономии, имеет сходную природу: гравитационная линза — это некая галактика, недоступная для непосредственного наблюдения, но о которой мы можем судить по тем преобразованиям, которым она подвергает изображения. Значит не только инструмент, но и объект может рассматриваться в качестве преобразователя. Наивысший взлет физики сегодня — та точка зрения, одним из поклонников которой является Гейзенберг, и которая очень справедливо утверждает, что элементарные частицы (протоны, нейтроны) не существуют. А существуют на самом деле поля, которые мы называем сегодня пространственными полями и которые суть очень тонкое проявление симметрии. Согласно Гейзенбергу в природе существуют не объекты, а просто их симметрии. Нам хорошо известен успех этого сугубо отвлеченного приближения в теории элементарных частиц. Но поражает тот факт, что оно очень близко понятию “майя”, а также иллюзиям, столь дорогим для буддийских философов.

3. Роль языка

В области языкознания мы также сталкиваемся с диалектикой объекта и сюжета, науки описательной и науки точной. Анализ роли языка позволит уточнить “иллюзионистскую” точку зрения, утверждая объект и его существование. Какова же роль языка? Она очень важна. В искусстве мы очень часто разделяли конкретный художественный объект и дискуссию об этом художественном объекте. Для непосвященных дискуссия об искусстве порой настолько сложна для понимания, что кажется, будто язык просто не приспособлен для передачи опыта подобного рода. Каждому известно, что художественная критика — искусство очень деликатное, что она полна условностей, часто зависит от прихоти моды, однако, это далеко не всегда носит негативный характер. Я не настолько философ и эстет, чтобы долго задерживаться на этом предмете, многие участники нашего собрания значительно более компетентны, нежели я, но мне часто приходилось задумываться о языке как математику. Если в искусстве мы должны разделить художественное творчество, художественный объект и дискуссию о художественном объекте, а также вынуждены признать, что дискуссия лишь частично адекватна объекту и творчеству, то для математики мы постановили, что язык безупречно соответствует описанию математического объекта и математического творчества, причем до такой степени, что современные ортодоксы отождествляют математику и язык. Здесь, вслед за Расселом и его единомышленниками, мы приходим к полной идентификации математики логосу, дискуссии о математике.

У этой точки зрения есть очевидные преимущества, равно как и не менее очевидные слабые стороны.

Отождествление математики и дискуссии о математике позволяет рассматривать саму дискуссию о математике как некий математический объект. Этот тезис имеет непосредственное отношение к идее, возникшей в начале нашего века и принадлежащей таким логикам, как Russel, Whitehead, и Frege: дискуссия может быть математическим и даже геометрическим объектом, т.е. объектом, поддающимся иному, нежели он сам, способу представления. Это явилось поистине основополагающей идеей. Сегодня, по прошествии шестидесяти–восьмидесяти лет, мы можем утверждать, что первоначальные амбиции, которые заключались в стремлении создать некую завершенную Математику, рассеялись. Мы пытались разрешить знаменитые парадоксы математики начала века, хотели обладать наукой, защищенной от всех противоречий, стремились даже доказать, что она останется таковой во веки веков — здесь мы опять сталкиваемся с заблуждениями фиксизма. История заставила нас пересмотреть эту точку зрения, так что можно считать, что в какой-то мере первоначальная программа таких логиков, как Рассел, и формалистов, как Гильберт, заключавшаяся в создании некой всеобъемлющей науки-сущности, потерпела крах. Но другой взгляд на проблему, а именно рассмотрение языка как научного объекта (конечно же, язык изучался и ранее, но никогда на столь продвинутом уровне абстракции) привело к совершенно неожиданным результатам: созданию искусственных языков и потрясающему развитию различных форм информатики, при которых сам язык становится объектом преобразования — вот она новинка! Фундаментальное предвидение Шеннона и Винера заключается в том, что язык или информация могут быть подвергнуты преобразованию. Стало быть, подобно тому, как оптический прибор отныне рассматривается в качестве преобразователя изображений, мы можем считать средства информатики преобразователями языка. Таким образом, можно манипулировать объектами языка так же, как мы манипулируем графическими объектами. Я думаю, что Roubaud нам расскажет об этой стороне поэзии, котора ему очень хорошо знакома.

Формализованный язык рассматривался как некая безусловная гарантия от ошибок интуиции. Но после длительных размышлений и анализа того, что произошло за последние десятилетия, я пришел к выводу, что мы оказались не правы, осудив интуитивный подход в геометрии: обманывает не зрительная интуиция, это рассудок оказывается слеп. Сегодня нас подвели к открытию фрактальных форм. Фрактальные формы — это некий особый способ организации пространства, некий особый способ организации изображений, но ведь он существовал и раньше. Таким образом, нас запутывал не зрительный ряд, не оптические иллюзии приводили к заблуждению. Когда мы задумались об основах геометрии и обнаружили целый ряд парадоксов, мы попытались укрыться в рамках чистого логоса, так как полагали, что эти парадоксы возникли от несовершенства визуального восприятия, способности понимать при помощи зрительного ряда. В действительности же запутывал нас именно логос. Это логосу, рассудку не хватало воображения. И вовсе не зрение мешало видеть формы фрактальными, а наше непонимание. Мы просто не хотели их видеть.

Перейдем к более приятным рассуждениям. Отношения языка к изображению, науки к абстрактным понятиям находятся в стадии развития, и я вижу этому целый ряд подтверждений. Для обозначения убежденности в математике Декарт, Гюйгенс или Ньютон использовали сочетание “more geometrico”; переведем это как “согласно методу древних”, “на манер геометра”. Всего каких-то пятьдесят лет назад любого ученого называли геометром, причем, кажется, и сейчас в Академии тебя могут назвать блестящим геометром, даже если ты занимаешься биологией. Таким образом, мы вообразили себе, что логос является абсолютной достоверностью и что идеальная модель доказательства суть доказательство математическое, которое безупречно логично, которое и есть чистый логос. Все это происходит в рамках нашей традиции, но ведь существуют и иные. Тот, кто знаком с восточной традицией, знает, что китайская геометрия развивалась в ином направлении, с гораздо меньшим упором на язык, слово, и с бóльшим на зрительное и осязательное восприятие и манипулирование. Сегодня, когда мы приступаем к построению доказательств при помощи компьютера, мы сталкиваемся с неким новым способом построения отвлеченной действительности, и нужно бы задаться вопросом о том, что же такое доказательство. Здесь мы достигаем границ логоса. Я не художник, поэтому не буду касаться последствий, к которым может привести этот факт в области искусства, мне они кажутся очевидными. Существует иной способ убеждения, нежели исключительно логический, и мне кажется, что искусство и есть одна из сред, где доказательство выражается иначе, чем при помощи логоса. Искусство использует логос, существуют области искусства, занимающиеся логосом, но есть также более визуальные разделы, не связанные с логосом.

С другой стороны, сейчас очень активно развивается направление, которое мы могли бы назвать грамматикой изображений. Поскольку сегодня мы производим и потребляем немыслимое количество изображений, а также пытаемся найти возможность использования информатики для создания и распространения этих изображений, мы сталкиваемся с необходимостью обладания точными и конкретными определениями. Мы находим многообещающие зародыши этого направления в работах Chomski и Schutzenberger'а, посвященных "языку целесообразному" или некому типу "порождающей грамматики", которые с точки зрения норм естественного языка кажутся очень грубым упрощением. Современным исследованиям в этой области мы обязаны группе ученых из Ecole Normale Superieure, ученикам Schutzenberger'а, Viennot и многим другим. Они показывают возможность создания такой грамматики изображений. Мы должны научиться манипулировать изображениями и, в частности, — этого требует практика — изобрести языки программирования очень высокого уровня, которые позволяли бы непосредственно выражать преобразования изображений. Вот замечательная задача для Искусства Комбинаторики наших дней.

В заключение отмечу, что одну из наиболее значимых ролей во взаимоотношениях между математикой и искусством, мне кажется, играет преобразование: математика может рассматриваться как совокупность инструментов для преобразования, а искусство как источник мастерства и интуиции при использовании этих преобразований для выявления смысла понятий или получения эмоционального заряда. В конце концов, искусство — это некая игра зеркальных отражений, игра преобразований. Нас окружает мир множества реалий: это чувства, зрительные и слуховые образы, осязание; и, как мне кажется (это лишь соображения философствующего математика), роль искусства заключается в способности играть в преобразования, способности передать всплеск душевных эмоций при помощи создания осязаемых или наблюдаемых объектов, а также выбить искру чувств, порождающих новые идеи и замыслы.

Перевод с французского
Е.В. Татарченко

Ушла из жизни выдающийся историк образования Ревекка Залмановна Гушель

От редакции

Некролог, в котором рассказывается о жизни, деятельности и творчестве недавно ушедшей от нас выдающегося специалиста по истории образования Ревекки Залмановны Гушель.

Гушель Ревекка Залмановна родилась 17 мая 1950 года в городе Ленинграде в семье известного отечественного математика и педагога З.А. Скопеца. Училась в школе № 4 с углублённым изучением английского языка в г. Ярославле. В 1967 году поступила в Ярославский педагогический институт, который закончила с красным дипломом в 1972 году. В том же году поступила в аспирантуру по геометрии. Занималась под руководством Котия О.А.

По окончании аспирантуры в 1976 году уехала по распределению в Вологодский государственный педагогический институт, где работала в течении трёх лет на должности ассистента кафедры алгебры и геометрии.

В 1979 году вернулась в Ярославль и поступила на должность ассистента кафедры элементарной математики ЯГПИ.

В 1985 году перешла на кафедру геометрии, где продолжала работать до конца 2012 года (с 1993 года работала в должности старшего преподавателя). В 1999 году награждена Почётной грамотой Министерства образования РФ за многолетнюю педагогическую деятельность.

С 2014 года — научный сотрудник отдела Истории математики и математического образования Научно-практического центра “Математическое просвещение”, г. Москва.

Имея определенный опыт работы по истории математики, она разработала новый курс истории математики, введенный с 1985 года и закрепленный за кафедрой геометрии ЯГПИ.

Р.З. Гушель глубоко и серьезно занималась созданием библиографии по истории математики, а также по истории отечественного математического образования. Более 20 лет занималась вопросами истории русской средней школы до 1917 г. Этой тематике посвящено свыше 70 публикаций, в том числе в центральных изданиях. Р.З. Гушель работала в тесном контакте с сектором истории математики Института истории естествознания и техники РАН.

На протяжении многих лет была организатором и идейным вдохновителем проведения на базе ЯГПУ ежегодной международной конференции “Колмогоровские чтения”. Была одним из инициаторов открытия в Ярославле в 2008 году улицы имени А.Н. Колмогорова.

Долго и плодотворно сотрудничала с редакцией журнала “Математическое образование”. Являлась автором-составителем календарей юбилейных дат разных лет, связанных с именами известных деятелей в области математики и математического образования, а также с важнейшими событиями в этой сфере.

Наиболее значительные работы Р. З. Гушель:

“Из истории математики и математического образования: Путеводитель по литературе”, вышедшая в 1999 году. В книге представлена литература по вопросам истории математики и математического образования. Указаны не только книги, но и статьи из современных и старых, издававшихся до 1917 года, периодических изданий. Весь материал распределен на 200 разделов, охватывающих многие вопросы истории математики с древнейших времен до середины XX столетия. Отдельный параграф посвящен истории математического образования в России преимущественно до 1917 года.

“Страницы истории школьного дела в Ярославле. XIX - начало XX века”, вышедшая в 2010 году. Это издание является одним из крупнейших источников по истории Ярославской гимназии и уездного училища Ярославля со времени их основания (1805 год) до 1917 года.

В последние годы жизни Ревекка Залмановна работала над книгой “О некоторых учителях ярославских средних учебных заведений второй половины XIX – начала XX века” (не издана)[1]. Данная работа представляет собой серию очерков, посвящённых деятельности некоторых педагогов ярославских средних учебных заведений второй половины XIX – начала XX века.

Ревекка Залмановна скончалась 11 февраля 2017 года. Она была редким в наши дни образцом человека, полностью отдававшегося своему делу и любившего его.

[1]Готовится к изданию при участии Фонда математического образования и просвещения — *Прим. ред.*

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.
Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2017 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2017 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.
Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!
Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.
Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >