

ISSN 1992-6138

# Математическое Образование

Журнал Фонда математического  
образования и просвещения

Год двадцать второй

№ 2 (86)

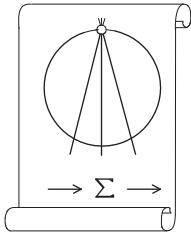
апрель – июнь 2018 г.

Москва

*Периодическое издание в области математического образования*



Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”  
[www.lomonosovclub.com](http://www.lomonosovclub.com)



Издатель и учредитель: Фонд  
математического образования и просвещения  
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

**Главный редактор**

Имайкин В.М.

**Редакционная коллегия**

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№2 (86), 2018 г.

© “Математическое образование”, составление, 2018 г.

---

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2018 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 16.07.2018 г.

Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.

Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

# Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (86), апрель – июнь 2018 г.

## Содержание

### Учащимся и учителям средней школы

*B. K. Гаврилов.* Отрезок, делить на части или строить из частей? 2

*B. Б. Дроздов.* Треугольники Наполеона 8

### Студентам и преподавателям математических специальностей

*A. O. Ремизов.* Об изоморфизмах псевдоевклидовых пространств 15

*C. H. Сазонов.* Метод вывода формулы Валлиса и формул разложения гиперболических функций в бесконечные произведения 40

*K. Ю. Тархов.* Практические аспекты преподавания дисциплины «Линейная алгебра» для химико-технологических специальностей 44

*A. Ю. Эвнин.* Тесты в духе GRE 50

### Из истории математики

*Л. Б. Медведева, С. В. Жаров.* О геометрических исследованиях профессора З.А. Скопеца и его учеников 66

## **Отрезок, делить на части или строить из частей?**

*B. K. Гаврилов*

Рассмотрены способы получения отрезка прямой линии, содержащего равные части. Поставлен вопрос о корректности применения термина «деление» в способах получения отрезка с применением преобразования подобия. Дан обзор способов построения единичного отрезка для деления на равные части отрезка в треугольнике. Предложены варианты графического построения единичного отрезка в параллелограмме, с применением биссектрисы угла в треугольнике и с применением рекуррентного равенства для суммы убывающей геометрической прогрессии.

Деление отрезка на равные части — одна из первых задач на геометрическое построение в элементарной геометрии. Теоретическое обоснование решения задач на построение приведено в работе [1]. Важные для педагогической практики решения задач на построение приведены в работе [2]. В частности, в этой работе приведены решения задачи о делении на произвольное число равных частей отрезка в треугольнике и в круге [2, с. 25, 55]. Задача о делении отрезка в квадрате решается методами оригами. Теоретическое обоснование решения задач в оригами приведено в работе [3, с. 68–87], а решение задачи о делении стороны квадрата на равные части — в работе [4]. В тоже время, программа подготовки педагогов-математиков не предусматривает расширенного ознакомления с темой деления отрезка. Не предусмотрено ознакомление будущих педагогов и с технологией оригами. Поэтому о делении отрезка на равные части будущие педагоги знают, в основном, по нормативным методикам деления пополам и деления по Фалесу. Существование этих двух методик обуславливает появление задачи выбора, при этом оказывается, что методики не сопоставимы ввиду следующего.

В школьном учебнике по геометрии [5, с. 72] приведено решение задачи «Разделить отрезок пополам» с помощью циркуля и линейки. Очевидно, что используя деление пополам можно разделить отрезок  $AB$  на число  $M = 2^N$  равных частей, где  $N$  — натуральное число. Решение задачи делением пополам для  $M = 4$  показано на рис. 1-а. В том же учебнике [5, с. 90] приведено решение задачи «Разделите данный отрезок  $AB$  на  $n$  равных частей» с применением теоремы Фалеса. Решение этой задачи для  $n = 4$  показано на рис. 1-б. В итоге получаем два отрезка одинаковой длины, содержащие одинаковое число равных частей, рис. 1. В чём различие этих задач, имеющих визуально одинаковые решения?

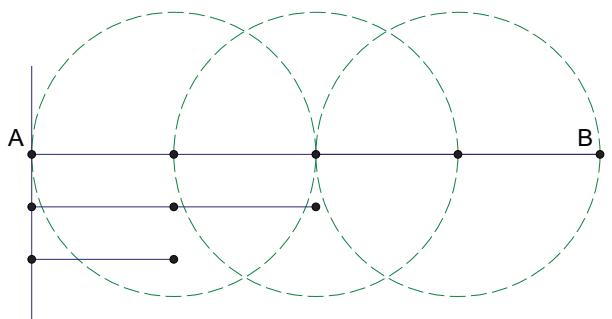
По мнению автора, в учебнике приведены решения двух разных задач: задача 1 — построить отрезок заданной длины из заданного числа равных отрезков, рис. 1-б, и задача 2 — разделить отрезок заданной длины на заданное число единичных отрезков, рис. 1-а. Различие способов решения этих задач заключается в том, что для задачи 1 длину единичного отрезка не определяют, а для задачи 2 — определяют.

Решение задачи 1 начинают с построения отрезка из заданного числа  $M$  равных частей. Поскольку в задаче 1 длину единичного отрезка не определяют, берут отрезок произвольной длины [6, с. 18] и, размещая на прямой линии один за одним заданное число взятых отрезков, строят отрезок произвольной длины, который с помощью преобразования подобия отображают подобным отрезком на отрезок заданной длины. Далее, ввиду равенства длины подобного отрезка длине заданного, делают заключение о решении задачи на деление заданного отрезка на равные части. Преобразование подобия (гомотетия) использовано и в способе построения отрезка из равных частей, приведённом в [7, с. 43, рис. 2], рис. 2.

**Отрезок  $AB$** 

деление на равные части

$$M = 2^N; \quad N=2; \quad M = 4.$$

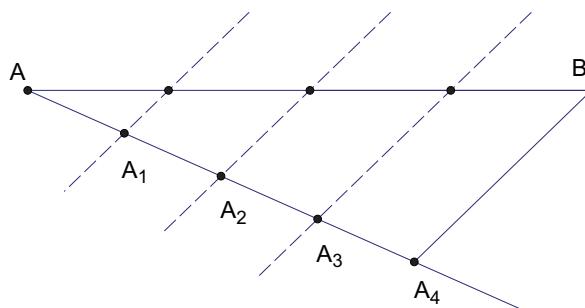


а)

построение из равных частей

$$M = 4.$$

$$AA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4.$$



б)

Рис. 1

**Отрезок  $AB$** 

построение из равных частей

$$M = 4.$$

$$A_0A_4 \parallel AB$$

$$A_0A_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4.$$

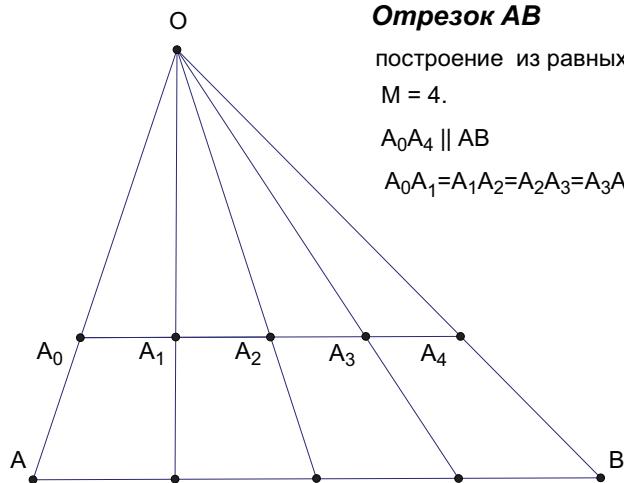


Рис. 2

В способе с применением теоремы Фалеса также использовано преобразование подобия, в котором отрезки располагают на прямых, проходящих через центр гомотетии, рис. 1-б. В способах с применением преобразования подобия деление отсутствует, что и обеспечивает независимость построения отрезка заданной длины от числа частей заданных на деление. Отсутствие процедуры деления ставит под сомнение корректность применения термина «деление» в способах построения отрезка из равных частей с применением преобразования подобия, что, в свою очередь, обуславливает и несопоставимость деления пополам с построением по Фалесу.

Решение задачи 2 на деление отрезка  $AB$  начинают с определения длины единичного отрезка  $AB/M$ , соответствующего числу частей  $M$  в заданном на деление отрезке. Когда длина единичного отрезка определена, задачу на деление считают решённой ввиду очевидности дальнейшего деления циркулем. Наиболее просто длину единичного отрезка определяют при делении отрезка на число частей  $M = 2^N$ , — применяют  $N$  раз способ деления пополам, рис. 1-а. В ряду чисел  $M = 2^N$  нет нечётных чисел, в частности, — нет числа  $M = 3$ . При  $M = 3$  для определения длины единичного отрезка выполняют построение треугольника и используют теоремы об отрезках с отмеченной серединой, рис. 3. Согласно первой теореме [5, с. 101, рис. 146] точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану на два отрезка, длины которых относятся как 2:1, считая от вершины угла

из которого проведена медиана, рис. 3-а. Согласно второй теореме [7, с. 43, рис. 3] прямая из вершины угла треугольника, проходящая через середину медианы делит противоположную сторону на два отрезка, длины которых относятся как 1:2, считая от вершины угла, из которого проведена медиана, рис. 3-б. Взяв в треугольнике в качестве отрезка заданного на деление отрезок, разделённый на части 1:2, по меньшей части определяют длину единичного отрезка и циркулем делят отрезок на три равные части.

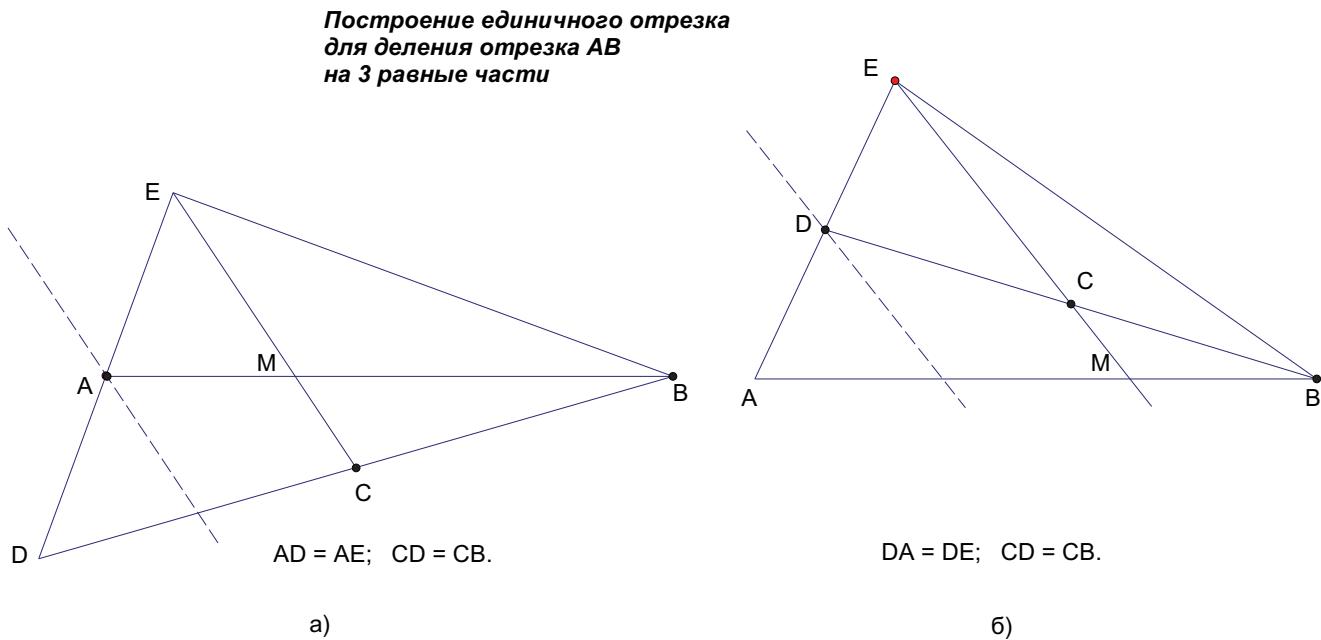


Рис. 3

**Определение единичного отрезка  
методом итераций для деления  
отрезка  $AB$  на 3 равные части**

$$x_n = \frac{(x_{n-1} + x_{n-2})}{2}. \quad x_0 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{2}.$$

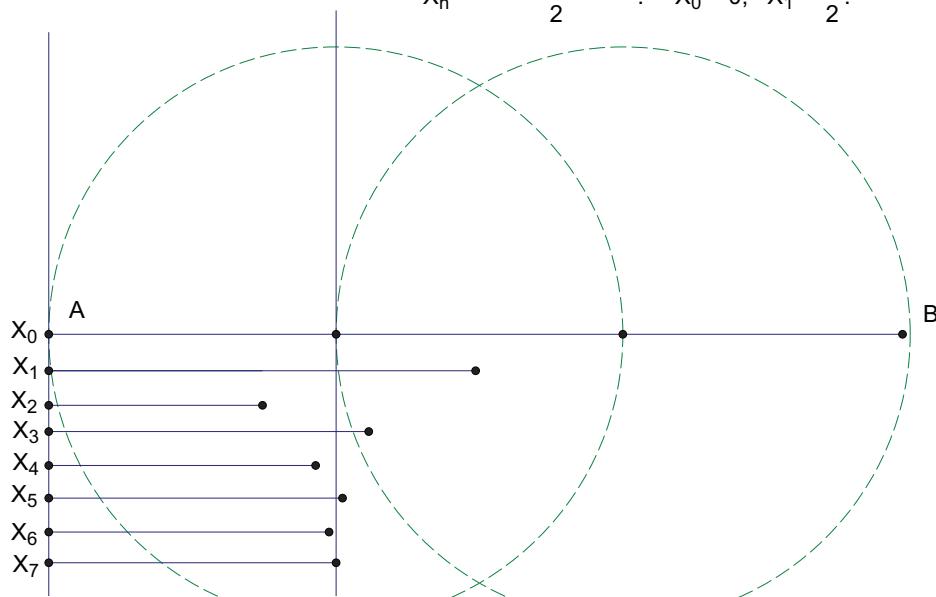


Рис. 4

В работе [8] для  $M = 3$  предложен итерационный способ определения длины единичного отрезка последовательным делением заданного отрезка на 2 с применением ряда частичных сумм геометрической прогрессии со знаменателем  $q = -1/2$  и первым членом  $x_1 = 1/2$  от длины отрезка. Эквивалент такого способа – рекуррентное равенство Фибоначчи с коэффициентом  $1/2$  для трёх соседних членов ряда частичных сумм. Точность деления отрезка в способе итераций зависит от числа итераций, рис. 4.

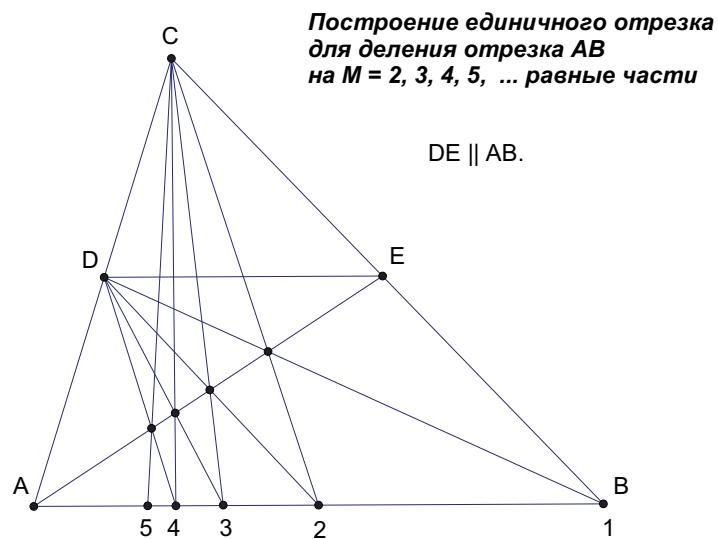


Рис. 5

*Построение единичного отрезка  
для деления отрезка AB  
на M = 2, 3, 4, 5, ... равные части  
в параллелограмме*

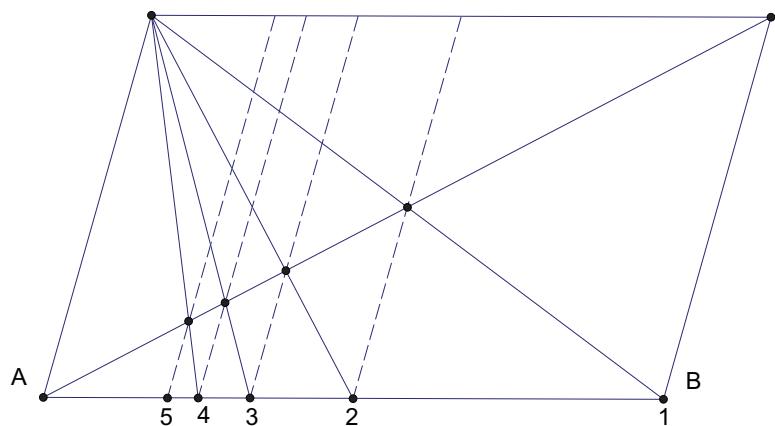


Рис. 6

В общем случае произвольного числа  $M$  длину единичного отрезка определяют в основном по делению отрезков в треугольнике. В частности, в работе [2, с. 25–27, Черт. 19] приведено описание способа, в котором для построения единичного отрезка использован треугольник и секущая треугольник прямая, параллельная стороне треугольника заданной на деление. Последовательно проведённые в этом треугольнике отрезки и лучи позволяют строить единичные отрезки для деления стороны треугольника на  $M = 2, 3, 4, 5, \dots$  и более равные части, рис. 5.

Если в треугольнике  $ABC$ , рис. 5, неограниченно удалять вершину  $C \rightarrow \infty$ , то все прямые проходящие через  $C$  трансформируются в параллельные прямые, а трапеция  $ABED$  становится параллелограммом, одной из сторон которого является сторона  $AB$  с единичными отрезками. В результате получаем вариант построения единичных отрезков в треугольнике, пригодный для деления сторон параллелограмма [9], рис. 6. Этот вариант годится и для деления стороны квадрата на равные части в оригами.

Возможен вариант деления отрезка заданной длины на заданное число равных частей с применением теоремы о биссектрисе угла треугольника. Согласно этой теореме [6, с. 18] биссектриса делит противоположную сторону на части пропорциональные прилежащим к ней сторонам. В равнобедренном треугольнике, одна из сторон которого является известным единичным отрезком, а две других — отрезок заданный на деление, биссектриса одного из равных углов отсекает на противоположной стороне единичный отрезок на следующее деление [9], рис. 7.

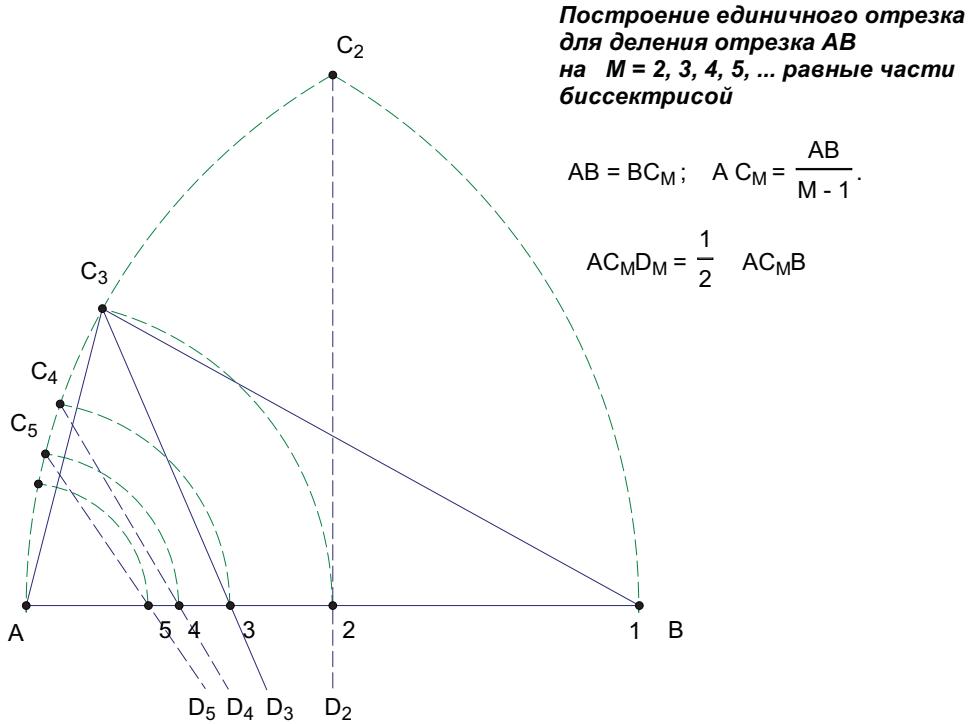


Рис. 7

Предложенный в работе [8] способ итераций допускает расширение на определение длины единичного отрезка для произвольного числа  $M$  заменой знаменателя прогрессии  $q = -1/2$  на  $q = -1/(M - 1)$  и  $x_1 = 1/2$  на  $x_1 = 1/(M - 1)$ . Геометрическое представление полученной суммы ряда в этом способе позволяет последовательно строить единичные отрезки для деления отрезка на заданное число  $M = 2, 3, 4, 5, \dots$  равные части [9], рис. 8.

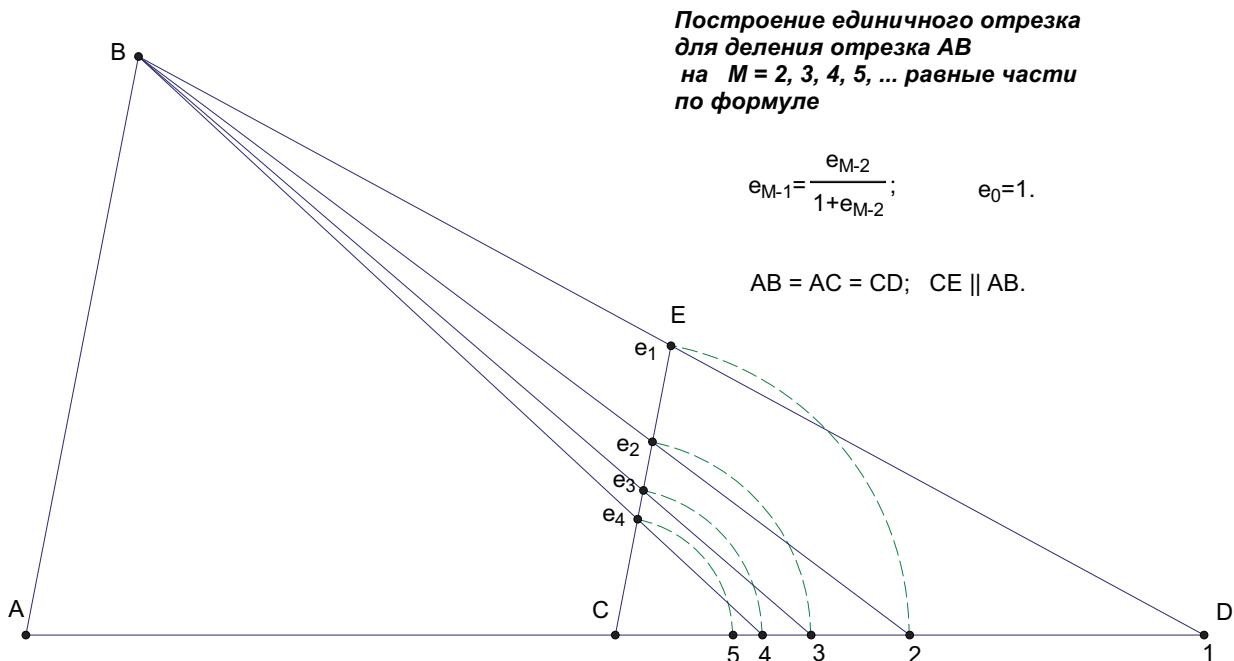


Рис. 8

Таким образом, получить отрезок заданной длины, содержащий заданное число равных частей, можно построением из равных отрезков, рисунки 1-б, 2, или делением на единичный отрезок, который, в свою очередь, определяют построением, рисунки 3, 5, 6, 7, 8, или делением, рисунки 1-а, 4.

### Литература

1. Хованский А.Г. Построение циркулем и линейкой. // Математическое просвещение. - Сер. 3. - Вып. 17. - 2013. - С. 42-60.
2. Зетель С.И. Геометрия линейки и геометрия циркуля в средней школе. - М.: Изд-во Академия педагогических наук РСФСР, 1950.
3. Грищенко Д.И. Оригами, или что можно получить с помощью складывания листа бумаги // Математическое просвещение. - Сер. 3. - Вып. 17. - 2013. - С. 68-87.
4. Петрунин А. Плоское оригами и построения. - М.: Изд-во «Аким», 1998.
5. Погорелов А.В. Геометрия. - М.: Изд-во «Просвещение», 1997.
6. Понарин Я.П. Элементарная геометрия, т. 1. - М.: МЦНМО, 2004.
7. Акулич И.Ф. Учимся решать сложные олимпиадные задачи. - М.: Илекса, 2013.
8. Гаврилов В.К. О делении отрезка на равные части // Материалы III Международного научно-образовательного форума, г. Красноярск. - 2014. - С. 17-21.
9. Гаврилов В.К. Отрезок, делить на части или строить из частей? // Материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием, г. Красноярск, 18-19 ноября 2015 г. - С. 4-9.

Гаврилов Владимир Константинович,  
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: gavrilov1009@mail.ru

# Треугольники Наполеона

B. B. Дроздов

В статье рассматривается интересная и трудная задача по планиметрии, связанная с именем Наполеона. Статья адресуется всем любителям математики.

*Из гроба тогда император,  
Очнувшись, является вдруг;  
На нем треугольная шляпа  
И серый походный сюртук.*

М.Ю. Лермонтов,  
«Воздушный корабль»

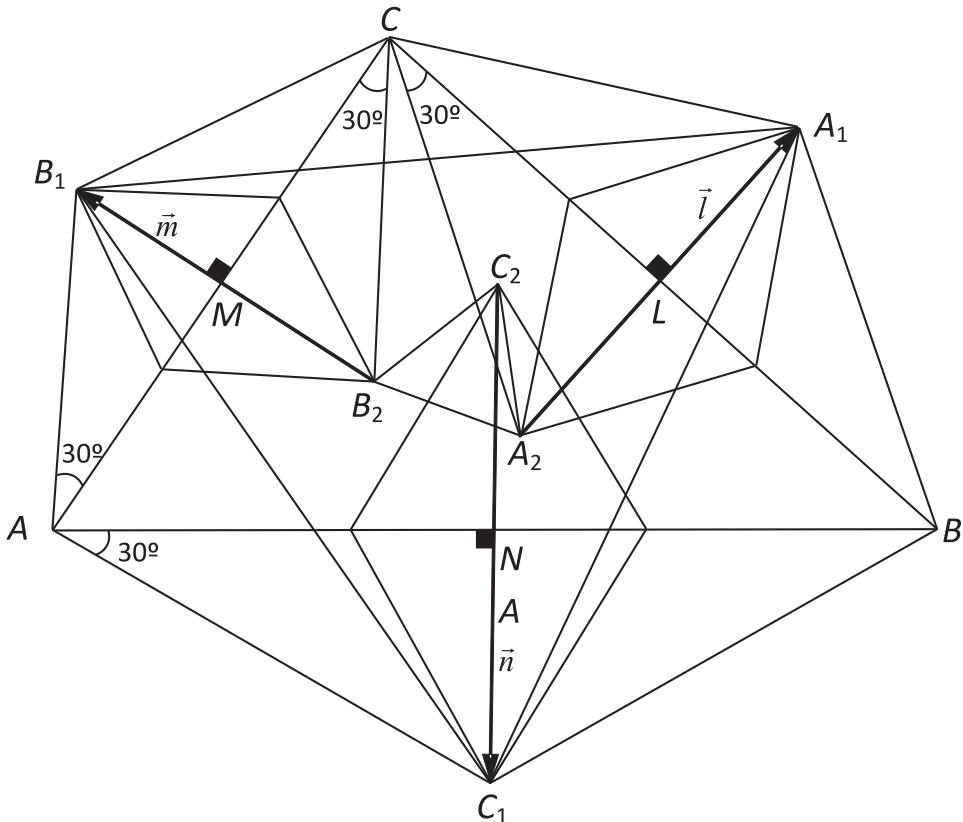


Рис. 1

Один из наиболее выдающихся государственных, политических и военных деятелей в мировой истории — Наполеон I Бонапарт (1769–1821) обладал незаурядными математическими познаниями. Они далеко превосходили объем информации, необходимый для артиллерийского офицера, в качестве которого он начал свою блестящую карьеру. Свидетельством этого является геометрический сюжет, привлекший внимание Наполеона.

Рассмотрим произвольный треугольник  $ABC$ , каждую сторону которого разделим на три равные части. На средних частях построим равносторонние треугольники вовне треугольника  $ABC$ . Тогда их вершины  $A_1, B_1, C_1$  тоже образуют равносторонний треугольник. Более того, если построить равносторонние треугольники вовнутрь треугольника  $ABC$ , то их вершины  $A_2, B_2, C_2$  также

образуют равносторонний треугольник. См. рис. 1. Эту задачу (авторство и решение) приписывают Наполеону.

Вряд ли можно найти оригинальное решение, написанное императорской рукой. Поэтому рассмотрим задачу с разных сторон с применением современного математического аппарата.

## 1. Внешний треугольник

Обозначим для краткости длины сторон треугольника  $ABC$  одной буквой:  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ . Тогда из треугольника  $AB_1C_1$  имеем по теореме косинусов:

$$(B_1C_1)^2 = \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{2bc}{3} \cos(A + 60^\circ). \quad (1)$$

По известной тригонометрической формуле

$$\cos(A + 60^\circ) = \frac{1}{2} \cos A - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A. \quad (2)$$

По теореме косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad (3)$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2}bc \sin A = S, \quad (4)$$

где  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ . Очевидная комбинация формул (1), (2), (3), (4) приводит нас к такому результату:

$$(B_1C_1)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2S}{\sqrt{3}}. \quad (5)$$

Аналогично можно вычислить  $(A_1B_1)^2$  и  $(A_1C_1)^2$  и убедиться, что  $B_1C_1 = A_1B_1 = A_1C_1$ . Однако в этом нет необходимости, если заметить, что правая часть формулы (5) есть симметрическая функция от сторон исходного треугольника  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Итак, доказано, что треугольник  $A_1B_1C_1$  — равносторонний. Значит, его площадь

$$S_1 = \frac{(B_1C_1)^2 \sqrt{3}}{4}. \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) выводим:

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{24} (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{S}{2}. \quad (7)$$

## 2. Внутренний треугольник

Из треугольника  $A_2B_2C$  имеем по теореме косинусов:

$$(A_2B_2)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{2ab}{3} \cos(C - 60^\circ). \quad (8)$$

По известной тригонометрической формуле

$$\cos(C - 60^\circ) = \frac{1}{2} \cos C + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C. \quad (9)$$

По теореме косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \quad (10)$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2}ab \sin C = S. \quad (11)$$

Очевидная комбинация формул (8), (9), (10), (11) приводит нас к такому результату:

$$(A_2B_2)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} - \frac{2S}{\sqrt{3}}. \quad (12)$$

Аналогично можно вычислить  $(A_2C_2)^2$  и  $(B_2C_2)^2$  и убедиться, что  $A_2B_2 = A_2C_2 = B_2C_2$ . Однако в этом нет необходимости, если заметить, что правая часть формулы (12) есть симметрическая функция от сторон исходного треугольника  $a, b, c$ . Итак, доказано, что треугольник  $A_2B_2C_2$  — равносторонний. Значит, его площадь

$$S_2 = \frac{(A_2B_2)^2 \sqrt{3}}{4}. \quad (13)$$

Из формул (12) и (13) выводим:

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{24} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{S}{2}. \quad (14)$$

### 3. Вырожденный треугольник

Сначала отметим, что из формул (7) и (14) сразу следует, что

$$S_1 - S_2 = S, \quad (15)$$

т. е. разность площадей внешнего и внутреннего треугольников Наполеона равна площади исходного треугольника.

Возникает естественный вопрос: может ли внутренний треугольник выродиться в точку, а если да, то в каком случае это будет?

Положив в формуле (14)  $S_2 = 0$ , получим

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12} (a^2 + b^2 + c^2). \quad (16)$$

Исключив из формулы Герона полупериметр  $p$ , найдем:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4}. \quad (17)$$

Из формул (16) и (17) легко вытекает, что

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = 0. \quad (18)$$

Равенство (18), очевидно, равносильно следующему

$$(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 = 0,$$

откуда  $a = b = c$ .

Итак, внутренний треугольник вырождается в точку (при этом внешний треугольник равен исходному) только в случае равностороннего исходного треугольника. См. рис. 2.

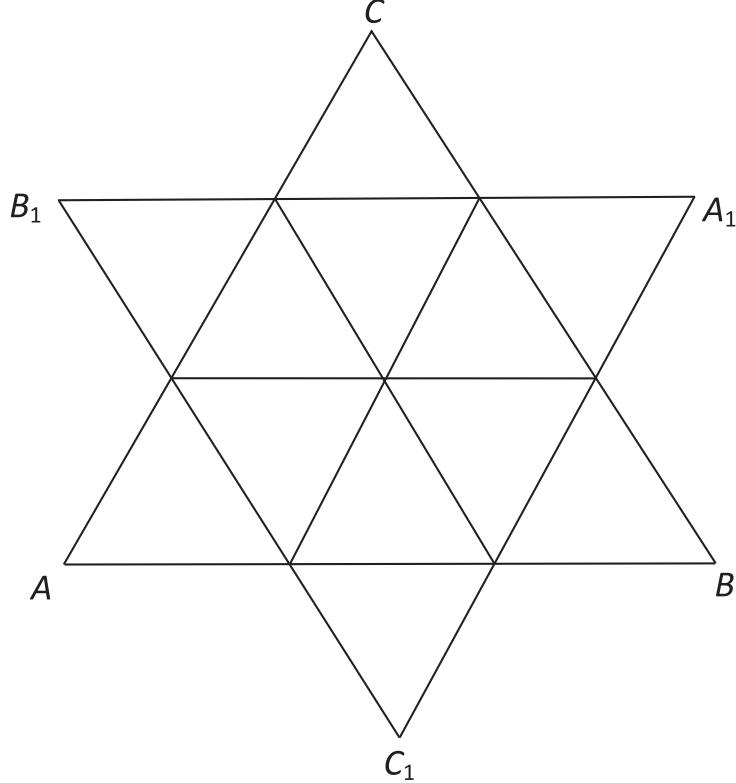


Рис. 2

#### 4. Сравнение площадей

Мы уже установили, что  $S_1 = S$  только в случае исходного равностороннего треугольника. Во всех остальных случаях  $S_1 > S$ . А при каком условии  $S_2 = S$ ?

Из формул (14) и (17) получаем, что  $S_2 = S$  при

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{13}{7}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \quad (19)$$

Соответственно,  $S_2 > S$  при

$$a^4 + b^4 + c^4 > \frac{13}{7}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2), \quad (20)$$

а  $S_2 < S$  при

$$a^4 + b^4 + c^4 < \frac{13}{7}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \quad (21)$$

Равенство (19) и неравенства (20) и (21) выполнимы для бесконечного множества треугольников, ибо из формулы (17) следует, что

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2),$$

а из очевидного неравенства

$$(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 \geq 0$$

вытекает, что

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \leq a^4 + b^4 + c^4.$$

## 5. Совпадение центров

Докажем красивую и сложную теорему: «Центры внешнего и внутреннего треугольников Наполеона совпадают». См. рис. 1. Но предварительно докажем лемму: «Сумма векторов  $\overrightarrow{LA_1} = \vec{l}$ ,  $\overrightarrow{MB_1} = \vec{m}$ ,  $\overrightarrow{NC_1} = \vec{n}$  равна нулевому вектору», т. е.

$$\vec{l} + \vec{m} + \vec{n} = \vec{0}. \quad (22)$$

Возведём сумму  $\vec{l} + \vec{m} + \vec{n}$  в квадрат:

$$(\vec{l} + \vec{m} + \vec{n})^2 = l^2 + m^2 + n^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{m} + 2\vec{l} \cdot \vec{n} + 2\vec{m} \cdot \vec{n}. \quad (23)$$

Совершенно очевидно, что

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12}. \quad (24)$$

Вычислим скалярное произведение  $\vec{l} \cdot \vec{m}$ :

$$\vec{l} \cdot \vec{m} = l \cdot m \cos(\pi - C) = -\frac{ab \cos C}{6}.$$

С учетом формулы (10)

$$\vec{l} \cdot \vec{m} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{12}. \quad (25)$$

Аналогично:

$$\vec{l} \cdot \vec{n} = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{12}; \quad (26)$$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{12}. \quad (27)$$

Равенство (23) с учетом формул (24), (25), (26), (27) дает:  $(\vec{l} + \vec{m} + \vec{n})^2 = 0$ , т. е. формула (22) доказана.

Пусть  $O_1$  — центр треугольника  $A_1B_1C_1$ , а  $O_2$  — центр треугольника  $A_2B_2C_2$ . Чтобы не загромождать и без того насыщенный рис. 1, изображать эти центры на нем не будем. Да в этом и нет необходимости, ибо геометрически очевидно, что:

$$\overrightarrow{B_1O_1} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}), \quad (28)$$

$$\overrightarrow{B_1O_2} = \overrightarrow{B_1B_2} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{B_2C_2} + \overrightarrow{B_2A_2}). \quad (29)$$

Кроме того, по правилу сложения векторов

$$\overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2C_2} + \overrightarrow{C_2C_1} = \overrightarrow{B_1C_1}, \quad (30)$$

$$\overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2A_2} + \overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{B_1A_1}. \quad (31)$$

Подставляя векторы  $\overrightarrow{B_1C_1}$  и  $\overrightarrow{B_1A_1}$  соответственно из формул (30) и (31) в формулу (28), получим:

$$\overrightarrow{B_1O_1} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{B_2A_2} + \overrightarrow{B_2C_2}) + \frac{1}{3} (2\overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{A_2A_1}). \quad (32)$$

Из формул (29) и (32) имеем:

$$\overrightarrow{B_1O_2} - \overrightarrow{B_1O_1} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}). \quad (33)$$

Но  $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = -2(\vec{l} + \vec{m} + \vec{n}) = \vec{0}$  в силу формулы (22).

Следовательно,  $\overrightarrow{B_1O_2} = \overrightarrow{B_1O_1}$ , т. е. центры треугольников Наполеона  $O_1$  и  $O_2$  совпадают, что и требовалось доказать.

## 6. Параллельность сторон

Читатель без особого труда докажет, что в равнобедренном треугольнике  $ABC$  стороны обоих треугольников Наполеона параллельны. Гораздо интереснее доказательство обратного утверждения. См. рис. 3.

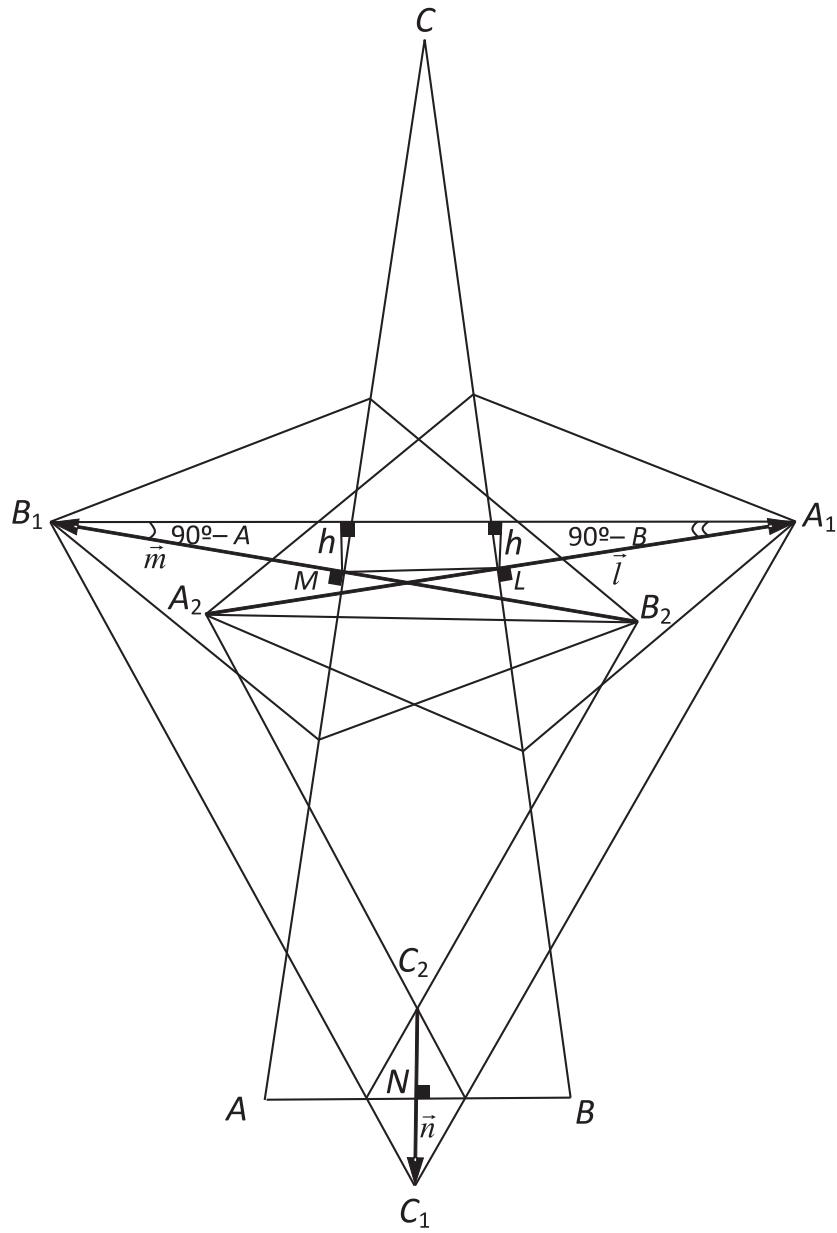


Рис. 3

Параллельность сторон треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  сразу влечет векторное равенство:

$$\left( \overrightarrow{C_2A_2} + \overrightarrow{C_2B_2} \right) \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0. \quad (34)$$

По правилам сложения и вычитания векторов

$$\overrightarrow{C_2A_2} = \overrightarrow{C_1A_1} + 2\vec{n} - 2\vec{l}, \quad (35)$$

$$\overrightarrow{C_2B_2} = \overrightarrow{C_1B_1} + 2\vec{n} - 2\vec{m}, \quad (36)$$

(векторы  $\vec{l}$ ,  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  на рис. 3 и рис. 1 расположены одинаково). Подставляя векторы  $\overrightarrow{C_2A_2}$  и  $\overrightarrow{C_2B_2}$  соответственно из формул (35) и (36) в формулу (34), получим:

$$\left( \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{C_1B_1} \right) \cdot \overrightarrow{A_1B_1} + 2 \left( 2\vec{n} - \vec{l} - \vec{m} \right) \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0,$$

что легко преобразуется с помощью формулы (22) к виду  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0$ , откуда  $\vec{n} \perp \overrightarrow{A_1B_1}$ .

Следовательно,  $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel AB \parallel ML$  ( $ML$  — средняя линия треугольника  $ABC$ ).

Из точек  $M$  и  $L$  опустим перпендикуляры длиной  $h$  на прямую  $A_1B_1$ . Из прямоугольного треугольника с гипотенузой  $MB_1$

$$h = \frac{b}{2\sqrt{3}} \cos A. \quad (37)$$

Из прямоугольного треугольника с гипотенузой  $LA_1$

$$h = \frac{a}{2\sqrt{3}} \cos B. \quad (38)$$

Из формул (37) и (38) вытекает:

$$b \cos A = a \cos B. \quad (39)$$

По теореме синусов для треугольника  $ABC$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}. \quad (40)$$

Из формул (39) и (40) немедленно следует:

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} B.$$

Значит,  $A = B$ , откуда  $a = b$ , т. е. треугольник  $ABC$  равнобедренный, что и требовалось доказать.

*Дроздов Виктор Борисович,  
г. Рязань.*

## Об изоморфизмах псевдоевклидовых пространств

*A. O. Ремизов*

*Памяти И.Р. Шафаревича*

Для каждого ортогонального преобразования евклидова пространства существует ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет блочно-диагональный вид с элементами  $\pm 1$  и блоками второго порядка – поворотами плоскости. Известно обобщение этой теоремы для лоренцевых преобразований псевдоевклидовых пространств сигнатуры  $(1, n - 1)$ . Кроме инвариантных подпространств, возникающих в евклидовом случае, лоренцево преобразование может иметь инвариантную плоскость с лоренцевым поворотом или трехмерное циклическое подпространство с собственным числом  $\pm 1$  и изотропным собственным вектором. В этой статье мы представляем аналогичные результаты для изоморфизмов псевдоевклидовых пространств сигнатуры  $(2, n - 2)$  и  $(3, n - 3)$ .

### 1. Введение

Публикуемый материал возник во время работы над учебником [5], основанном на лекциях выдающегося математика И.Р. Шафаревича (1923–2017), однако в учебник не вошел и много лет пролежал «в столе»<sup>1</sup>. Мотивом для опубликования стало следующее соображение: мне кажется, что исследование изоморфизмов (изометрий) псевдоевклидовых пространств сигнатуры  $(p, n-p)$  с произвольным  $p$  представляет собой задачу, которая может служить хорошим трамплином для начинающих. Случай  $p = 1$  (преобразования Лоренца) хорошо известен, но для того, чтобы найти подход к общей задаче, его одного недостаточно. Возможно, подробный разбор случаев  $p = 2, 3$  поможет найти какую-то общую закономерность. Привлечение внимания к этой теме является главной целью публикации.

Вопросы, связанные с псевдоевклидовыми пространствами различной сигнатуры и их линейными преобразованиями, привлекали внимание математиков, начиная как минимум с конца позапрошлого века (например, Фробениуса). Вопросы классификации, подобные нашим, рассматривались с более общей точки зрения в книге [2] (разделы 5.14–5.15) и статье [6]. Тем не менее я надеюсь, что главные результаты этой работы (теоремы 3, 4) являются новыми и не повторяют сделанное кем-то раньше, и это тем более относится к аналогичным теоремам для  $p > 3$ .

Следует упомянуть еще об одном обстоятельстве. Не исключено, что классификация изоморфизмов псевдоевклидовых пространств может быть выведена из известной классификации алгебр Ли. Однако перевод с языка алгебр Ли на язык линейных отображений может оказаться более сложным (и при этом менее красивым), чем непосредственное исследование вопроса средствами линейной алгебры.

Подчеркнем, что мы всюду имеем в виду конечномерные векторные пространства. Исследование же бесконечномерных пространств с индефинитными метриками, в настоящее время ставшее

<sup>1</sup>Пользуясь случаем, хочу сказать, что общение с Игорем Ростиславовичем, длившееся более десяти лет, стало одним из самых ярких впечатлений моей жизни.

целой областью функционального анализа, весьма далеко отстоит от нашей темы как по изучаемым вопросам, так и по используемым методам<sup>2</sup>.

Предполагается, что читателю знакомы основные понятия и факты линейной алгебры: свойства линейных преобразований векторных и евклидовых пространств, квадратичные формы, инвариантные и циклические подпространства, жорданова нормальная форма и т. п. Никаких специальных знаний, выходящих за пределы стандартных мехматских курсов линейной алгебры и математического анализа, не требуется.

Статья начинается с введения (раздел 1), включающего два отступления от основной темы – об изотропном конусе и об ориентации пространства. При желании их можно пропустить. Формулировки основных результатов (теоремы 3, 4) содержатся в разделе 2, а их доказательства – в разделах 3 и 4.

### 1.1. Основные понятия

Пусть  $\mathbb{E}_p^n$  – это  $n$ -мерное вещественное векторное пространство с заданной на нем симметричной билинейной формой  $(x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{E}_p^n$ , такой что соответствующая ей квадратичная форма в подходящем базисе имеет вид

$$(x, x) = -(x_1^2 + \cdots + x_p^2) + x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2. \quad (1.1)$$

Пространство  $\mathbb{E}_p^n$  (рассматриваемое по умолчанию с заданной на нем билинейной формой) называется *евклидовым*, если  $p = 0$ , *антиевклидовым*, если  $p = n$ , и *псевдоевклидовым* сигнатуры  $(p, n - p)$ , если  $0 < p < n$ . Если пространство  $\mathbb{E}_p^n$  евклидово (псевдоевклидово), соответствующая билинейная форма  $(x, y)$  называется *скалярным произведением* (соответственно, *псевдоскалярным произведением*). Линейные преобразования пространства  $\mathbb{E}_p^n$  в себя, сохраняющие квадратичную форму (1.1) или, что эквивалентно, соответствующую ей билинейную форму  $(x, y)$ , мы будем называть *изоморфизмами* этого пространства (также их часто называют *изометриями*).

Лучше всего изучены евклидовые пространства и их изоморфизмы – ортогональные преобразования. Любой учебник по линейной алгебре содержит описание их свойств, в частности, теорему о приведении матрицы ортогонального преобразования к блочно-диагональной форме с блоками порядков 1 и 2.

Также хорошо изучены псевдоевклидовые пространства сигнатуры  $(1, n - 1)$ . Интерес к ним вызван, прежде всего, той ролью, которую они играют в геометрии и физике. Так, в специальной теории относительности (СТО) основным пространством является 4-мерное пространство сигнатуры  $(1, 3)$ , называемое *пространством Минковского* или *пространством-временем*. Если быть совсем точным, то нужно сказать, что квадратичная форма пространства Минковского в СТО немного отличается от (1.1). Она имеет вид  $c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ , где  $t$  – время,  $x_i$  – декартовы координаты трехмерного евклидова пространства, в котором движутся материальные объекты,  $c$  – константа, равная скорости света в вакууме. Очевидно, для изучения геометрии пространства и свойств его изоморфизмов это различие не играет никакой роли. Изоморфизмы пространства Минковского называются *преобразованиями Лоренца*, в СТО они играют ту же роль, что и преобразования Галилея, описывающие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, в классической, ньютоновской механике. Впрочем, в отличие от времени, когда СТО создавалась, сейчас этот термин повсеместно используется и для изоморфизмов псевдоевклидова пространства сигнатуры  $(1, n - 1)$  произвольной размерности, которое также часто называют *n-мерным пространством Минковского*.

Псевдоевклидовые пространства сигнатур  $(p, n - p)$ ,  $1 < p < n - 1$ , и их изоморфизмы исследованы гораздо меньше.

<sup>2</sup>В нашей стране систематическое исследование таких пространств и их линейных преобразований началось со знаменитой статьи Л.С. Понtryгина, опубликованной в «Известиях АН СССР» в 1944 г. Затем эстафета была подхвачена М.Г. Крейном и многими другими, на эту тему написана монография: Т.Я. Азизов, И.С. Иохвидов, «Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой» (М.: Наука, 1986).

Введем ряд понятий для псевдоевклидовых пространств произвольной сигнатуры, следуя терминологии, принятой в теории евклидовых пространств. Будем говорить, что векторы  $x, y \in \mathbb{E}_p^n$  ортогональны (обозначается:  $x \perp y$ ), если  $(x, y) = 0$ . Подпространства  $L, M \subset \mathbb{E}_p^n$  ортогональны друг другу (обозначаются:  $L \perp M$ ), если  $(x, y) = 0$  для всех  $x \in L$  и  $y \in M$ . Для каждого подпространства  $L \subset \mathbb{E}_p^n$  определим его ортогональное дополнение  $L^\perp = \{x \in \mathbb{E}_p^n : (x, y) = 0, \forall y \in L\}$ . Подортонормированным базисом в псевдоевклидовом пространстве  $\mathbb{E}_p^n$  будем подразумевать базис, в котором матрица Грама данного псевдоскалярного произведения является диагональной с элементами  $\pm 1$  ( $p$  отрицательных и  $n - p$  положительных).

В отличие от евклидовых и антиевклидовых пространств (которые повторяют большинство свойств первых), в псевдоевклидовых пространствах существуют так называемые *вырожденные* и *изотропные* подпространства. Это обстоятельство делает геометрию псевдоевклидовых пространствах существенно богаче, а исследование их изоморфизмов – существенно сложнее. Дадим точные определения.

Подпространство  $L \subset \mathbb{E}_p^n$  называется *вырожденным*, если ограничение квадратичной формы (1.1) на  $L$  есть вырожденная квадратичная форма, т. е. ее ранг строго меньше  $\dim L$ . Можно дать и другое определение: подпространство  $L$  является вырожденным, если и только если оно содержит вектор  $x \neq 0$ , такой что  $x \perp L$  (проверьте!).

Вектор  $x \in \mathbb{E}_p^n$  называется *изотропным*, если  $(x, x) = 0$ , т. е.  $x \perp x$ . Множество  $V_p^n \subset \mathbb{E}_p^n$ , состоящее из всех изотропных векторов, называется *изотропным конусом*<sup>3</sup>. Подпространство  $L \subset \mathbb{E}_p^n$  называется *изотропным*, если оно целиком состоит из изотропных векторов, т. е.  $L \subset V_p^n$ . Очевидно, что каждое изотропное подпространство вырожденное, но обратное неверно. Подпространство  $L$  является изотропным, если и только если  $x \perp y$  для всех векторов  $x, y \in L$ , т. е.  $L \perp L$  (проверьте!).

Как уже было сказано выше, *изоморфизмом* (псевдо)евклидова пространства  $\mathbb{E}_p^n$  называется линейное преобразование  $\mathcal{U} : \mathbb{E}_p^n \rightarrow \mathbb{E}_p^n$ , сохраняющее квадратичную форму (1.1). Это означает, что для любых двух векторов  $e, g \in \mathbb{E}_p^n$  их (псевдо) скалярное произведение равно произведению их образов:

$$(\mathcal{U}(e), \mathcal{U}(g)) = (e, g) \quad \forall e, g \in \mathbb{E}_p^n. \quad (1.2)$$

Очевидно, условие (1.2) можно переписать в виде матричного равенства

$$U^* G U = G, \quad (1.3)$$

где  $G$  – матрица Грама квадратичной формы (1.1) и  $U$  – матрица преобразования  $\mathcal{U}$  в соответствующем базисе. Матрица  $G$  – диагональная с  $p$  элементами  $-1$  и  $n - p$  элементами  $+1$  на главной диагонали. В случае  $p = 0$  равенство (1.3) превращается в хорошо знакомое соотношение  $U^* U = E$  для ортогональных матриц.

Множество всех изоморфизмов пространства  $\mathbb{E}_p^n$  является группой (групповая операция – композиция преобразований). Она обозначается  $O(p, n)$ . Наиболее известные примеры: группа ортогональных преобразований  $O(0, n)$  (обычно она обозначается просто  $O(n)$ ) или группа Лоренца  $O(1, n)$ . Из (1.3) вытекает простое, но очень полезное следствие:  $|U|^2 = 1$ , т. е. определитель изоморфизма (псевдо)евклидова пространства  $\mathbb{E}_p^n$  любой сигнатуры равен  $\pm 1$ . Поэтому, как и в случае ортогональных преобразований, изоморфизмы из группы  $O(p, n)$  можно разделить на *собственные* ( $\det = +1$ ) и *несобственные* ( $\det = -1$ ). Собственные изоморфизмы образуют подгруппу  $SO(p, n)$ , а несобственные, очевидно, никакой подгруппы не образуют.

<sup>3</sup>Изотропный конус часто называют *световым*, а изотропные векторы – *светоподобными*. Это терминология идет из СТО, где образующими этого конуса являются «мировые линии» частиц света – фотонов. Векторы, для которых выполнено условие  $(x, x) > 0$ , в СТО называют *времениподобными*, а векторы, для которых выполнено условие  $(x, x) < 0$  – *пространственноподобными*. В случае квадратичной формы (1.1) эти названия нужно поменять местами.

Очевидно, что  $O(p, n) = O(n - p, n)$ , поэтому далее мы будем изучать изоморфизмы группы  $O(p, n)$ , предполагая, что  $p \leq n - p$ , т. е.  $p \leq \frac{n}{2}$ . Тем не менее, пространства  $\mathbb{E}_p^n$  с  $p > n - p$  также будут появляться в наших утверждениях и доказательствах.

Ниже мы часто будем использовать некоторые факты, известные из курса линейной алгебры. Вот некоторые из них (доказательства есть в учебниках, например, [5]).

- 1) Линейное преобразование вещественного векторного пространства размерности больше двух на себя имеет по крайней мере одно инвариантное подпространство размерности 1 или 2.
- 2) Если  $L \subset \mathbb{E}_p^n$  – инвариантное подпространство изоморфизма  $\mathcal{U} \in O(p, n)$ , то  $L^\perp$  – тоже инвариантное подпространство  $\mathcal{U}$ , причем  $\dim L + \dim L^\perp = n$ .
- 3) Если подпространство  $L \subset \mathbb{E}_p^n$  невырождено, то  $L^\perp$  тоже невырождено, и имеет место разложение  $\mathbb{E}_p^n = L \oplus L^\perp$ .

Разложение пространства в прямую сумму подпространств, ортогональных друг другу, называется *ортогональным разложением*. Третье из перечисленных утверждений имеет обратное: разложение  $\mathbb{E}_p^n = L_1 \oplus L_2$  не может быть ортогональным, если хотя бы одно из подпространств  $L_1, L_2$  вырождено (проверьте!).

Пространство  $\mathbb{E}_p^n$  будем называть *разложимым* относительно  $\mathcal{U} \in O(p, n)$ , если  $\mathcal{U}$  имеет невырожденное инвариантное подпространство  $L \subset \mathbb{E}_p^n$ ,  $0 < \dim L < n$ . В противном случае мы будем называть пространство  $\mathbb{E}_p^n$  *неразложимым* относительно  $\mathcal{U}$ .

Если пространство  $\mathbb{E}_p^n$  является разложимым, то  $\mathbb{E}_p^n = L \oplus L^\perp$ , где  $L$  и  $L^\perp$  – невырожденные инвариантные подпространства  $\mathcal{U}$ . В этом случае изучение изоморфизма  $\mathcal{U}$  сводится к изучению изоморфизмов пространств  $L, L^\perp$ , имеющих меньшую размерность. Это и объясняет эпитет «разложимое».

**Пример 1.** Евклидова плоскость  $\mathbb{E}_0^2$  неразложима относительно преобразования  $\mathcal{U} \in O(2)$ , если и только если  $|\mathcal{U}| = 1$  и  $\mathcal{U}$  не является поворотом на угол кратный  $\pi$ . Действительно, ортогональное преобразование плоскости является либо поворотом (случай  $|\mathcal{U}| = 1$ ), либо отражением относительно некоторой прямой  $L$  (случай  $|\mathcal{U}| = -1$ ). Если угол поворота не кратен  $\pi$ , то  $\mathcal{U}$  не имеет ни одного одномерного инвариантного подпространства, если же угол кратен  $\pi$ , то имеет. В случае  $|\mathcal{U}| = -1$  плоскость представима в виде  $\mathbb{E}_0^2 = L \oplus L^\perp$ .

**Пример 2.** Псевдоевклидова плоскость  $\mathbb{E}_1^2$  (часто называется также *лоренцевой*) является неразложимой относительно  $\mathcal{U} \in O(1, 2)$ , отличного от тождественного, если и только если  $|\mathcal{U}| = 1$ . Читатель, знакомый с преобразованиями лоренцевой плоскости, легко может доказать это утверждение самостоятельно. Ниже мы не только докажем его, но и исследуем некоторые другие свойства преобразований лоренцевой плоскости, что весьма полезно для дальнейшего.

## 1.2. Отступление об изотропном конусе

Выше мы стали использовать термин «изотропный конус», не уточняя смысл последнего слова. При  $p = 1$  изотропный конус действительно похож на тот конус, который знаком из курса элементарной или аналитической геометрии. В частности, он «круглый», т. е. не содержит двумерных подпространств или их «кусков». Если же  $p > 1$ , то изотропный конус имеет «границы», по меньшей мере, двумерные.

Эпитет «конус» применим здесь в более общем смысле: во многих разделах математики *конусом* называется подмножество векторного пространства, которое вместе с каждым своим вектором  $e$  содержит всю прямую  $\langle e \rangle$ , натянутую на этот вектор. Треугольные скобки здесь и везде далее обозначают линейную оболочку векторов, заключенных между ними.

Интересно сравнить геометрию изотропных конусов 4-мерных псевдоевклидовых пространств с сигнатурами  $(1, 3)$  и  $(2, 2)$ .  $V_1^4$  и  $V_2^4$  имеют, соответственно, уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0, \quad (1.4)$$

задающие в 4-мерном пространстве трехмерные «поверхности», которые называются *квадриками*. Чтобы понять геометрию этих поверхностей, понизим размерность на единицу с помощью *проективизации*.

Идея проективизации состоит в том, чтобы перейти от векторного пространства (в нашем случае – 4-мерного) к *проективному пространству*, точками которого являются прямые исходного векторного пространства. Так как вместе с каждым вектором конус содержит всю прямую, натянутую на этот вектор, вместо множеств векторов 4-мерного векторного пространства, удовлетворяющих уравнениям (1.4), можно рассматривать множества всех прямых этого пространства, лежащих на соответствующих конусах. Например, мы можем разделить обе части каждого из уравнений (1.4) на  $x_4^2$ , в предположении  $x_4 \neq 0$ , а случай  $x_4 = 0$  (охватывающий некоторую часть каждой квадрики) исследовать отдельно. Это дает уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad (1.5)$$

где  $x = x_1/x_4$ ,  $y = x_2/x_4$ ,  $z = x_3/x_4$ . Первое из уравнений (1.5) задает в трехмерном пространстве с координатами  $x, y, z$  сферу, а второе – однополостный гиперболоид.

Для того, чтобы охватить выпавшие из рассмотрения точки с координатой  $x_4 = 0$ , подставим это равенство в уравнения (1.4). Первое уравнение дает нам лишь одну точку – вершину конуса  $V_1^4$ , и следовательно, проективизированный конус  $V_1^4$  совпадает со сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Второе уравнение дает конус  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ , содержащийся в  $V_2^4$ . Проективизация конуса  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ , осуществленная делением обеих частей уравнения на  $x_3^2$ , дает окружность. Проективизированный конус  $V_2^4$  получается присоединением этой окружности к однополостному гиперболоиду  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Как выглядит результат этого присоединения, мы увидим чуть ниже.

Из сказанного вытекает, в частности, что изотропный конус  $V_1^4$  не содержит двумерных плоскостей, а  $V_2^4$  содержит бесконечное число двумерных плоскостей, но не содержит ни одного трехмерного подпространства. Действительно, ведь при проективизации прямые превращаются в точки, двумерные плоскости – в прямые, а трехмерные подпространства – в плоскости. Двумерные плоскости, содержащиеся в  $V_1^4$ , соответствовали бы прямым, целиком лежащим на сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (очевидно, таких прямых нет). Напротив, двумерные плоскости, содержащиеся в  $V_2^4$ , соответствуют прямолинейным образующим однополостного гиперболоида  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  (рис. 1). С другой стороны, гиперболоид не содержит в себе ни одной плоскости, поэтому конус  $V_2^4$  не содержит ни одного трехмерного подпространства.

Для того, чтобы лучше представить себе, как выглядит  $V_2^4$ , используем часто применяемый в математике прием: найдем какое-нибудь хорошо известное нам множество, гомеоморфное проективизированному конусу  $V_2^4$ , т. е. множеству прямых 4-мерного векторного пространства, удовлетворяющих второму уравнению из (1.4).

Перепишем второе уравнение из (1.4) в виде  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$ , что равносильно двум уравнениям  $x_1^2 + x_2^2 = r$  и  $x_3^2 + x_4^2 = r$ . Переменная  $r$  может принимать любые положительные значения (заметим, что  $r = 0$  соответствует нулевому вектору, который не задает никакой прямой и не отвечает никакой точке проективизированного конуса). При проективизации мы отождествляем все четверки чисел  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , отличающиеся друг от друга общим множителем. Следовательно, для проективизированного конуса нужно положить  $r$  равным любому положительному числу, например, 1. В итоге мы получаем два независимых уравнения  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  и  $x_3^2 + x_4^2 = 1$ , каждое из которых задает окружность. А их совокупность дает декартово произведение двух окружностей –

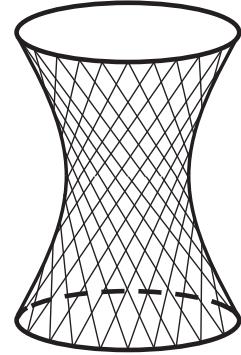


Рис. 1. Гиперболоид с прямолинейными образующими

тор, это хорошо знакомая нам поверхность бублика или барабанки. Таким образом, после присоединения к однополостному гиперболоиду «бесконечно удаленной» окружности получается поверхность, гомеоморфная тору.

**Вопрос.** Как при указанном гомеоморфизме выглядят образы прямолинейных образующих однополостного гиперболоида на торе?

Более наглядно этот гомеоморфизм можно описать следующим образом. Согнем однополостный гиперболоид, расположив его «бесконечно удаленные» края один напротив другого (рис. 2 а). Нужно «склеить» края с помощью «бесконечно удаленной» окружности таким образом, чтобы после добавления к каждой образующей гиперболоида одной «бесконечно удаленной» точки образующая превратилась в окружность. Для этого нужно сначала скрутить гиперболоид так, чтобы точки  $p$  и  $-p$  на его «бесконечно удаленных» краях, бывшие противоположными (рис. 2 а), теперь оказались друг напротив друга. После этого остается вклеить между ними «бесконечно удаленную» окружность (рис. 2 б), и в результате получится тор (рис. 2 с).

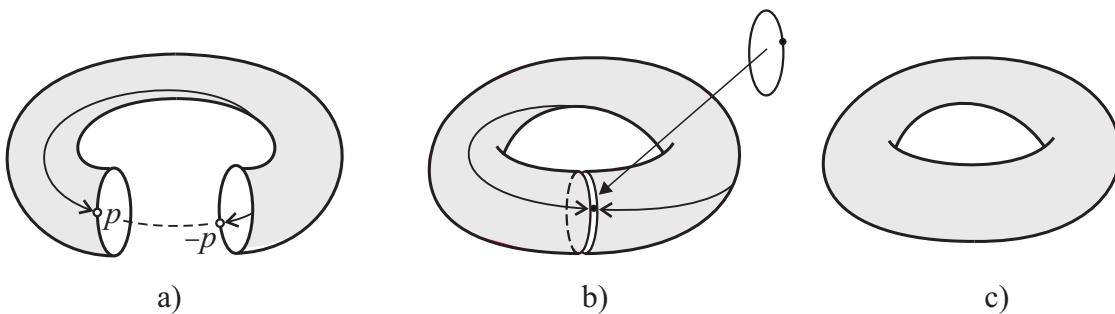


Рис. 2. Топология проективизированного конуса  $V_2^4$ . Однополостный гиперболоид с надлежащим образом при克莱енной к нему окружностью гомеоморфен тору.

Из уравнений (1.4) можно вывести еще одно интересное свойство: при выбрасывании из конуса  $V_1^4$  его вершины (соответствующей нулевому вектору пространства) оставшееся множество состоит из двух непересекающихся частей – компонент связности, которые называются *полами* конуса. Здесь и далее мы будем говорить исключительно о *линейной связности*. Напомним, что множество  $M$  является *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком содержащейся во множестве  $M$ . Для конуса  $V_2^4$  аналогичное утверждение не верно: при выбрасывании любой его точки оставшееся множество является связным (проверьте!).

В оставшейся части этого раздела мы займемся изотропным конусом псевдоевклидова пространства сигнатуры  $(1, n - 1)$ . При этом нам удобно будет обозначать изотропный конус просто  $V^n$ , освобождая место для нижнего индекса. Нашей целью будет разделить конус  $V^n$  на две части, называемые *полами*. В частном случае  $n = 4$  мы уже сделали это выше, но для  $n = 2$  этот способ не годится: при выбрасывании вершины из конуса  $V^2$  получается не две, а четыре компоненты связности. Сейчас мы опишем универсальный способ, притом основанный не на топологических соображениях, а только на линейной алгебре.

Выберем произвольный вектор  $e \in \mathbb{E}_1^n$ , такой, что  $(e, e) < 0$ . Тогда, с учетом перечисленных выше свойств, имеем ортогональное разложение  $\mathbb{E}_1^n = \langle e \rangle \oplus L$ , где  $L = \langle e \rangle^\perp$ . Из закона инерции для квадратичных форм следует, что  $L$  – евклидова гиперплоскость, следовательно, она не может содержать ни одного вектора, принадлежащего  $V^n$ , кроме нулевого. Таким образом,  $V^n \cap L = 0$ , и каждый вектор  $v \in V^n \setminus 0$  удовлетворяет одному из двух неравенств:  $(e, v) > 0$  или  $(e, v) < 0$ . В соответствии с этими неравенствами, множество  $V^n \setminus 0$  делится на две части:  $V_+^n$  и  $V_-^n$ . Это и есть *полы* конуса  $V^n$ .

**Задача 1.** Внимательный читатель заметит, что в основе изложенной конструкции лежит выбор

произвольного вектора  $e$ , удовлетворяющего лишь условию  $(e, e) < 0$ . Возникает вопрос: не может ли построенное разбиение на полы зависеть от выбора этого вектора? Докажите, что на самом деле это не так: при выборе любого другого вектора  $e'$ , такого что  $(e', e') < 0$ , мы получим те же самые полы  $V_+^n$  и  $V_-^n$ .

**Задача 2.** Докажите, что изоморфизм  $\mathcal{U} \in O(1, n)$  либо отображает каждую из пол  $V_+^n$  и  $V_-^n$  в себя, либо переставляет их местами:  $V_+^n \rightarrow V_-^n$  и  $V_-^n \rightarrow V_+^n$ .

Изоморфизмы  $\mathcal{U} \in O(1, n)$ , оставляющие полы изотропного конуса на месте, называются *ортогохронными*. Они образуют подгруппу группы  $O(1, n)$ , называемую *ортогохронной группой Лоренца* и обозначаемую  $O_{\uparrow}(1, n)$ . Эта терминология идет из СТО, квадратичная форма в которой эквивалентна (1.1) с единственным знаком «минус», причем соответствующая координата есть время. Таким образом, смысл ортохронных преобразований Лоренца в СТО заключается в том, что они не обращают время назад, при этом полы изотропного конуса  $V_+^n$  и  $V_-^n$  соответствуют будущему и прошлому, вершина конуса — настоящему моменту времени<sup>4</sup>.

По совокупности этих двух признаков (знак определителя и свойство переставлять или не переставлять полы изотропного конуса) преобразования Лоренца можно разделить на четыре типа. Особую роль играют ортохронные собственные изоморфизмы, они образуют подгруппу  $SO_{\uparrow}(1, n) \subset O(1, n)$ , которая называется *специальной ортохронной группой Лоренца*. Остальные три типа, взятые по отдельности, подгрупп не образуют.

Деление группы  $O(1, n)$  на четыре части имеет наглядную топологическую интерпретацию: они являются компонентами (линейной) связности группы  $O(1, n)$ . Ниже мы приведем доказательство этого утверждения в случае  $n = 2$ . Доказательство для произвольного  $n$  можно получить с помощью аналогичных рассуждений, используя теорему 2, см., например, параграф 7.8 в [5]. Этот факт может быть истолкован как существование *четырех ориентаций* псевдоевклидова пространства  $\mathbb{E}_1^n$ .

### 1.3. Отступление об ориентации пространства

Выбор ориентации векторного пространства (без какой-либо дополнительной структуры на нем) — это выбор одного из классов эквивалентности на множестве  $B$  всех его базисов, а эквивалентность двух базисов  $\beta_1 \sim \beta_2$  состоит в том, что они содержатся в одной компоненте связности множества  $B$ . Это означает, что  $\beta_1$  и  $\beta_2$  могут быть соединены друг с другом непрерывной кривой, целиком содержащейся в  $B$ , т. е. существует непрерывное отображение  $f(t) : [0, 1] \rightarrow B$  такое, что  $f(0) = \beta_1$  и  $f(1) = \beta_2$ . В этом случае говорят, что базисы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  *одинаково ориентированы* или что они задают одну и ту же *ориентацию* пространства.

Множество всех базисов  $B$  можно отождествить со множеством  $GL(n)$ , состоящим из всех невырожденных линейных преобразований данного пространства (так называемая *полная линейная группа*). Для этого достаточно выбрать любой базис  $\beta_* \in B$  и поставить в соответствие каждому базису  $\beta \in B$  преобразование  $\mathcal{U}_\beta \in GL(n)$ , переводящее его в этот фиксированный базис  $\beta_*$ . Таким образом,  $\beta_1 \sim \beta_2$ , если и только если  $\mathcal{U}_{\beta_1}$  и  $\mathcal{U}_{\beta_2}$  принадлежат одной и той же компоненте связности группы  $GL(n)$ . Как нетрудно проверить,  $\beta_1 \sim \beta_2$  равносильно тому, что преобразования  $\mathcal{U}_{\beta_1}^{-1}\mathcal{U}_{\beta_2}$  и  $\mathcal{U}_{\beta_2}^{-1}\mathcal{U}_{\beta_1}$ , переводящие один из этих базисов в другой, содержатся в той же компоненте связности группы  $GL(n)$ , что и тождественное преобразование. Следовательно, от выбора вспомогательного базиса  $\beta_*$  введенное отношение эквивалентности не зависит.

Если рассматривать евклидово пространство, то в качестве  $B$  логично взять множество ортонормированных базисов. Оно отождествляется с множеством ортогональных преобразований  $\mathcal{U}$ , т. е. с группой  $O(n)$ . При этом  $\beta_1 \sim \beta_2$  равносильно тому, что  $\mathcal{U}_{\beta_1}$  и  $\mathcal{U}_{\beta_2}$  принадлежат одной и той же компоненте связности группы  $O(n)$ . Обе группы  $GL(n)$  и  $O(n)$  имеют две компоненты связности,

---

<sup>4</sup>Точнее, будущие и прошедшие события соответствуют времениподобным векторам, лежащим внутри пол  $V_+^n$  и  $V_-^n$ , соответственно. Это — следствие того, что в СТО скорость любого сигнала не может превышать скорости света в вакууме.

которые определены знаком определителя:  $|\mathcal{U}| > 0$  или  $|\mathcal{U}| < 0$ . Это дает две привычные ориентации пространства.

Утверждение о двух компонентах связности групп  $\mathrm{GL}(n)$  и  $O(n)$  состоит из двух частей. Во-первых, любые два преобразования, определители которых имеют одинаковый знак, можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в рассматриваемой группе. Во-вторых, никакие два преобразования, определители которых имеют разные знаки, нельзя соединить непрерывной кривой. Второе очевидно следует из того, что определитель является непрерывной функцией (многочленом) от элементов матрицы. Доказательство первой части несложно, но требует некоторой возни. Его можно найти, например, в [5] (параграфы 4.4 и 7.3), и мы ограничимся одним примером.

**Задача 3.** Докажите, что линейные преобразования плоскости  $\mathcal{U}_1$  и  $\mathcal{U}_2$ , имеющие в некотором базисе матрицы

$$U_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad U_2 = - \begin{bmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \alpha', \beta' > 0,$$

можно соединить в  $\mathrm{GL}(n)$  непрерывной кривой.

**Решение.** Поскольку мы будем иметь дело с преобразованиями  $\mathcal{U}_1$  и  $\mathcal{U}_2$  только в одном фиксированном базисе, будем отождествлять их с соответствующими матрицами.

Очевидно, что  $U_1$  можно соединить с единичной матрицей  $E$  непрерывной кривой  $U(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , где матрица  $U(t)$  получена из  $U_1$  заменой элементов  $\alpha$  и  $\beta$  на  $t + \alpha(1-t)$  и  $t + \beta(1-t)$ , соответственно. Если теперь нам удастся каким-то образом соединить  $U_2$  и  $E$ , то, очевидно, задача будет решена. Однако аналогичная формула для  $U_2$  не годится. Более того, очевидно, что непрерывная кривая  $U(t)$ , соединяющая  $U_2$  и  $E$ , не может целиком состоять из диагональных матриц: каждый из ее диагональных элементов в некоторый момент  $t$  должен обратиться в нуль, что влечет  $|U(t)| = 0$ .

Зато с помощью аналогичной формулы нетрудно соединить непрерывной кривой матрицы  $U_2$  и  $-E$ , после чего остается лишь соединить между собой матрицы  $E$  и  $-E$ . Это можно сделать с помощью кривой

$$U(t) = \begin{bmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

что завершает решение задачи.  $\square$

Теперь перейдем к вопросу об ориентации псевдоевклидова пространства  $\mathbb{E}_1^n$ . Применяя к нему аналогичное рассуждение, мы рассматриваем множество  $B$ , состоящее из ортогональных (в псевдоевклидовом смысле) базисов, и следовательно, имеем дело с преобразованиями из группы Лоренца  $O(1, n)$ , которая, как мы уже говорили, имеет не две, а четыре компоненты связности. Причем условие  $\beta_1 \sim \beta_2$  равносильно тому, что преобразование, переводящее один из базисов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  во второй, принадлежит специальной ортохронной группе Лоренца  $SO_{\uparrow}(1, n)$ . Такое отношение разбивает множество  $B$  на четыре класса эквивалентности, что и дает четыре ориентации пространства  $\mathbb{E}_1^n$ .

В завершение темы отметим, что существование четырех компонент связности имеет место не только для группы Лоренца  $O(1, n)$ , но и для групп  $O(p, n)$  с любым  $0 < p < n$ , см., например, [3].

#### 1.4. Изоморфизмы лоренцевой плоскости

Многие свойства псевдоевклидовых пространств  $\mathbb{E}_1^n$  хорошо видны уже в случае наименьшей возможной размерности  $n$ , т. е. на псевдоевклидовой плоскости  $\mathbb{E}_1^2$ , которую также называют *лоренцевой*. Ею мы сейчас и займемся.

В плоскости  $\mathbb{E}_1^2$  существует ортонормированный базис  $e, g$ , в котором квадратичная форма имеет вид  $x_1^2 - x_2^2$ , т. е.  $(e, e) = 1$ ,  $(e, g) = 0$ ,  $(g, g) = -1$ . Можно выбрать другой базис, состоящий из двух линейно независимых изотропных векторов  $v, w$ . Например, положим  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(e + g)$  и  $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(e - g)$ . Проверьте, что тогда  $(v, v) = (w, w) = 0$  и  $(v, w) = 1$ . Пусть преобразование  $\mathcal{U} \in O(1, 2)$  определено

равенствами  $\mathcal{U}(v) = \alpha v + \beta w$  и  $\mathcal{U}(w) = \gamma v + \delta w$ . Тогда из условия сохранения скалярного произведения получаем:

$$\begin{aligned} (\alpha v + \beta w, \alpha v + \beta w) &= \alpha^2(v, v) + 2\alpha\beta(v, w) + \beta^2(w, w) = 2\alpha\beta = 0, \\ (\alpha v + \beta w, \gamma v + \delta w) &= \alpha\gamma(v, v) + (\alpha\delta + \beta\gamma)(v, w) + \beta\delta(w, w) = (\alpha\delta + \beta\gamma) = 1, \\ (\gamma v + \delta w, \gamma v + \delta w) &= \gamma^2(v, v) + 2\gamma\delta(v, w) + \delta^2(w, w) = 2\gamma\delta. \end{aligned}$$

Это дает нам три уравнения относительно неизвестных  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ :

$$\alpha\beta = 0, \quad \alpha\delta + \beta\gamma = 1, \quad \gamma\delta = 0.$$

Нетрудно видеть, что существуют два класса решений, что дает нам два типа матриц лоренцева преобразования  $\mathcal{U}$  в базисе  $v, w$ :

$$U_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \frac{1}{\beta} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

с произвольными  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ , имеющими противоположные знаки определителя:  $|U_1| = 1$  и  $|U_2| = -1$ . Матрица  $U_1$  диагональна, и следовательно, изотропные векторы  $v, w$  являются собственными векторами  $\mathcal{U}$  с собственными значениями  $\alpha$  и  $1/\alpha$ . Очевидно, что в этом случае  $\mathcal{U}$  не имеет невырожденных инвариантных подпространств размерности больше 0 и меньше 2, и следовательно, псевдоевклидова плоскость неразложима относительно  $\mathcal{U}$ . Такие преобразования  $\mathcal{U} \in O(1, 2)$  называются *лоренцевыми поворотами*.

В случае матрицы  $U_2$  изотропные векторы  $v, w$  не являются собственными. Нетрудно видеть, что эта матрица имеет собственные значения  $\pm 1$ , которым соответствуют два линейно независимые неизотропные вектора  $e', g'$ . Даже без всяких вычислений можно сообразить, что  $e' \perp g'$ . Действительно, одномерные подпространства  $L_1 = \langle e' \rangle$  и  $L_2 = \langle g' \rangle$  суть невырожденные инвариантные подпространства преобразования  $\mathcal{U}$ . (Напомним, что треугольными скобками мы обозначаем линейную оболочку векторов, заключенных между ними.) Следовательно, имеют место два разложения  $\mathbb{E}_1^2 = L_1 \oplus L_1^\perp$  и  $\mathbb{E}_1^2 = L_2 \oplus L_2^\perp$ . Отсюда, в частности, следует, что  $L_1^\perp = L_2$  и  $L_2^\perp = L_1$ , т. е.  $e' \perp g'$ . Мы заключаем, что лоренцева плоскость разложима относительно  $\mathcal{U}$ .  $\square$

**Задача 4.** Докажите, что в лоренцевой плоскости  $\mathbb{E}_1^2$  существует ортонормированный базис, в котором матрица лоренцева преобразования имеет одну из четырех нормальных форм:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \operatorname{ch} \psi & \operatorname{sh} \psi \\ \operatorname{sh} \psi & \operatorname{ch} \psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\operatorname{ch} \psi & -\operatorname{sh} \psi \\ -\operatorname{sh} \psi & -\operatorname{ch} \psi \end{bmatrix}}_{\text{соответствует } U_1, \det=+1} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -\operatorname{ch} \psi & -\operatorname{sh} \psi \\ \operatorname{sh} \psi & \operatorname{ch} \psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \psi & \operatorname{sh} \psi \\ -\operatorname{sh} \psi & -\operatorname{ch} \psi \end{bmatrix}}_{\text{соответствует } U_2, \det=-1}. \quad (1.7)$$

**Задача 5.** Докажите следующие утверждения. Матрицы первой пары отвечают матрицам вида  $U_1$  из (1.6), матрицы второй пары отвечают матрицам вида  $U_2$  из (1.6). Две матрицы из первой (второй) пары отличаются тем, что соответствующие им числа  $\alpha$  в  $U_1$  ( $\beta$  в  $U_2$ ) имеют противоположные знаки, а соответствующие лоренцевы преобразования в одном случае оставляют полы изотропного конуса на месте, а в другом – переставляют их местами.

**Задача 6.** Докажите, что группа  $O(1, 2)$  состоит из четырех компонент связности, матрицы которых в некотором подходящем базисе соответствуют четырем типам в (1.7).

**Решение.** Нужно доказать, что любую из четырех матриц (1.7) с произвольным параметром  $\psi$  можно соединить с одной из четырех матриц

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\det=+1}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0 & -1 \end{bmatrix}}_{\det=-1} \quad (1.8)$$

непрерывной кривой, которая целиком принадлежит соответствующей компоненте. Эта кривая строится очень просто. Выберем матрицу (1.7) с некоторым конкретным значением  $\psi$ . Точной нашей кривой будет матрица того же вида, в которой постоянный аргумент  $\psi$  заменен непрерывной функцией  $f(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющей условиям  $f(0) = \psi$  и  $f(1) = 0$ . Здесь  $t$  – параметр на кривой, пробегающий отрезок от 0 до 1. Например, годится функция  $f(t) = \psi(1 - t)$ . Проверка того, что никакие две матрицы, принадлежащие разным типам (1.7), нельзя соединить кривой, обладающей требуемыми свойствами, оставляется читателю.  $\square$

## 2. Теоремы об изоморфизмах

Используя свойства, перечисленные в разделе 1.1, мы заключаем, что существует ортогональное разложение

$$\mathbb{E}_p^n = L_1 \oplus \cdots \oplus L_m, \quad L_i \perp L_j \quad \text{для всех } i \neq j, \quad (2.1)$$

в котором все  $L_1, \dots, L_m$  – неразложимые невырожденные инвариантные подпространства изоморфизма  $\mathcal{U} \in O(p, n)$ . Тем самым, исследование изоморфизма  $\mathcal{U}$  пространства  $\mathbb{E}_p^n$  сводится к исследованию  $\mathcal{U}$  отдельно на каждом подпространстве  $L_i$ .

Для евклидовых пространств это немедленно дает нам хорошо известное утверждение – теорему о приведении матрицы ортогонального преобразования к блочно-диагональному виду. Нам удобно сформулировать эту теорему на языке инвариантных подпространств, а не матриц:

**Теорема 1.** Для каждого преобразования  $\mathcal{U} \in O(n)$  существует ортогональное разложение (2.1) с инвариантными подпространствами  $L_i$  двух типов:

(i) Одномерные подпространства с собственными значениями  $\pm 1$ .

(ii) Двумерные подпространства с комплексно сопряженными собственными значениями  $e^{\pm i\varphi}$ ,  $\varphi \neq 0 \pmod{\pi}$ <sup>5</sup>.

Для доказательства заметим, что если  $n > 2$ , то изоморфизм  $\mathcal{U}$  имеет по крайней мере одно инвариантное подпространство  $L_1$  размерности 1 или 2. Это дает нам разложение  $\mathbb{E}_p^n = L_1 \oplus L_1^\perp$ , так как подпространства евклидова пространства невырождены. Ограничение  $\mathcal{U}$  на каждое из подпространств  $L_1, L_1^\perp$  размерности больше двух тоже имеет по крайней мере одно инвариантное подпространство размерности 1 или 2. Подпространство размерности 2 неразложимо в том и только том случае, когда ограничение  $\mathcal{U}$  не него является поворотом (пример 1). Повторяя эти рассуждения нужное число раз, мы докажем теорему по индукции.  $\square$

Применяя аналогичные рассуждения к  $\mathcal{U} \in O(1, n)$ , мы сталкиваемся со следующей очевидной альтернативой: либо все инвариантные подпространства размерностей 1, 2 относятся к типам (i), (ii), либо найдется неразложимое инвариантное подпространство некоторого нового типа (очевидно, оно псевдоевклидово). Первый случай реализуется тогда и только тогда, когда все собственные векторы преобразования  $\mathcal{U}$  неизотропны и все двумерные инвариантные подпространства без собственных векторов невырождены. Это приводит нас к ортогональному разложению, подобному разложению в теореме 1, с той лишь разницей, что среди подпространств типа (i) есть одно антиевклидово одномерное подпространство  $\mathbb{E}_1^1$ . Во втором случае мы получаем ортогональное разложение (2.1) с инвариантными подпространствами типов (i), (ii) и неразложимым инвариантным подпространством  $\mathbb{E}_1^k$ ,  $k > 1$  (например, псевдоевклидовой плоскостью с лоренцевым поворотом). Заметим, что из закона инерции для квадратичных форм вытекает единственность такого подпространства.

В обоих случаях мы имеем ортогональное разложение

$$\mathbb{E}_1^n = \mathbb{E}_1^k \oplus \mathbb{E}_0^{n-k}, \quad \mathbb{E}_1^k \perp \mathbb{E}_0^{n-k}, \quad k \geq 1, \quad n - k \geq 0, \quad (2.2)$$

где  $\mathbb{E}_1^k, \mathbb{E}_0^{n-k}$  – инвариантные подпространства, причем  $\mathbb{E}_1^k$  неразложимо. Дальнейшие рассуждения приводят к следующему результату:

<sup>5</sup>Здесь и везде далее  $i$  в показателе означает мнимую единицу.

**Теорема 2.** Для каждого преобразования  $\mathcal{U} \in O(1, n)$ ,  $n \geq 2$ , существует ортогональное разложение (2.1), где число  $k$  равно 1, 2 или 3. Если  $k = 1$ , то  $\mathbb{E}_1^1$  есть одномерное инвариантное подпространство типа (i). Если  $k = 2, 3$ , то появляются два новых типа:

(iii)  $\mathbb{E}_1^2 = \langle g, h \rangle$  – псевдоевклидова плоскость с изотропными собственными векторами  $g, h$ .

(iv)  $\mathbb{E}_1^3$  – циклическое подпространство с собственным значением  $\lambda = \pm 1$  и изотропным собственным вектором.

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы, так как оно изложено в [5]. Хотя теорема 2 не встречается в большинстве курсов линейной алгебры, она хорошо известна, особенно геометрам, работающим с пространствами постоянной кривизны. Дело в том, что пространство  $\mathbb{E}_1^n$  и группа его изоморфизмов  $O(1, n)$  используются в одной из моделей пространства Лобачевского (пространства постоянной отрицательной кривизны), см., например, параграф 12.1 в [5]. При этом случаи  $k = 1, 2, 3$  отвечают трем типам движений пространства Лобачевского: эллиптическим, гиперболическим и параболическим, см. [1].

Стоит отметить, что в случае теоремы 1 или теоремы 2 с  $k = 1, 2$  существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования  $\mathcal{U}$  имеет блочно-диагональный вид с блоками первого порядка с  $\pm 1$  и блоками второго порядка вида

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi \neq 0 \pmod{\pi}, \quad \pm \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \psi & \operatorname{sh} \psi \\ \operatorname{sh} \psi & \operatorname{ch} \psi \end{bmatrix}, \quad \psi \neq 0,$$

соответствующими типам (ii) и (iii). Однако жорданов базис в трехмерном циклическом подпространстве типа (iv) нельзя выбрать ортонормированным, так как собственный вектор изотропный.

Вопрос, который мы хотим теперь решить, состоит в следующем: *как выглядят аналоги теорем 1, 2 для изоморфизмов  $\mathcal{U} \in O(p, n)$  при  $p = 2, 3$ ?*

Ответ на этот вопрос – теоремы 3, 4. Мы ограничиваемся случаями  $p = 2, 3$ , потому что их несложно исследовать одновременно, в то время как для перехода к  $p > 3$  требуется преодолеть трудности более высокого уровня. Это можно увидеть, например, из леммы 4 (см. замечание, сделанное после нее). С другой стороны, результаты для частных случаев  $p = 2, 3$  могут помочь увидеть общую закономерность.

**Теорема 3.** Для каждого преобразования  $\mathcal{U} \in O(2, n)$ ,  $n \geq 4$ , имеет место одно из двух ортогональных разложений

$$\mathbb{E}_2^n = \mathbb{E}_1^r \oplus \mathbb{E}_1^s \oplus \mathbb{E}_0^{n-(r+s)}, \quad 1 \leq r, s \leq 3, \quad r + s \leq n, \quad (2.3)$$

$$\mathbb{E}_2^n = \mathbb{E}_2^k \oplus \mathbb{E}_0^{n-k}, \quad 2 \leq k \leq 6, \quad k \leq n, \quad (2.4)$$

где подпространства в каждом разложении инвариантны и ортогональны друг другу и  $\mathbb{E}_1^r, \mathbb{E}_1^s, \mathbb{E}_2^k$  неразложимы. Подпространства  $\mathbb{E}_1^r, \mathbb{E}_1^s$  в (2.3) имеют типы (i), (iii), (iv).  $\mathbb{E}_2^k$  в (2.4) является плоскостью типа (ii), если  $k = 2$ , трехмерным циклическим подпространством (iv), если  $k = 3$ , и одним из следующих пяти новых типов, если  $k \geq 4$ :

(v)  $\mathbb{E}_2^4 = L \oplus M$ , где  $L, M$  – вырожденные циклические плоскости с вещественными взаимно обратными собственными значениями  $\lambda, \mu$ . Если плоскости  $L, M$  не изотропны, то  $\lambda = \mu = \pm 1$ . В противном случае  $\lambda, \mu$  связаны лишь соотношением  $\lambda\mu = 1$ .

(vi)  $\mathbb{E}_2^5$  – циклическое подпространство с собственным значением  $\pm 1$  и изотропным собственным вектором.

(vii)  $\mathbb{E}_2^4 = L \oplus M$ , где  $L$  и  $M$  – изотропные инвариантные плоскости с комплексно сопряженными собственными значениями  $re^{\pm i\varphi}$  и  $r^{-1}e^{\pm i\varphi}$ . Здесь и далее предполагается, что  $r > 0$  и  $\varphi \neq 0 \pmod{\pi}$ .

(viii)  $\mathbb{E}_2^4$  – циклическое подпространство с парой комплексно сопряженных собственных значений  $e^{\pm i\varphi}$  кратности два.

(ix)  $\mathbb{E}_2^6$  – циклическое подпространство с парой комплексно сопряженных собственных значений  $e^{\pm i\varphi}$  кратности три.

Повторяя те же самые рассуждения, которые мы использовали для  $\mathcal{U} \in O(1, n)$ , мы приходим к альтернативе: либо изоморфизм  $\mathcal{U}$  имеет хотя бы одно инвариантное подпространство  $\mathbb{E}_1^m$ ,  $0 < m < n$ , либо не имеет. В первом случае, очевидно, имеет место разложение  $\mathbb{E}_2^n = \mathbb{E}_1^m \oplus \mathbb{E}_1^{n-m}$ , где  $\mathbb{E}_1^{n-m} = (\mathbb{E}_1^m)^\perp$  и оба подпространства инвариантны. По теореме 2, мы имеем ортогональные разложения  $\mathbb{E}_1^m = \mathbb{E}_1^r \oplus \mathbb{E}_0^{m-r}$  и  $\mathbb{E}_1^{n-m} = \mathbb{E}_1^s \oplus \mathbb{E}_0^{n-m-s}$ , где  $1 \leq r, s \leq 3$ , причем оба инвариантные подпространства  $\mathbb{E}_1^r$  и  $\mathbb{E}_1^s$  неразложимы. Объединяя две последние прямые суммы вместе, мы в итоге получаем (2.3) с евклидовым подпространством  $\mathbb{E}_0^{n-(r+s)} = \mathbb{E}_0^{m-r} \oplus \mathbb{E}_0^{n-m-s}$ .

Во втором случае мы имеем ортогональное разложение (2.4), где  $2 \leq k \leq n$  и инвариантное подпространство  $\mathbb{E}_2^k$  неразложимо. Принимая во внимание то, что  $O(p, n) = O(n - p, n)$ , мы заключаем, что подпространство  $\mathbb{E}_2^k$  с  $k = 2, 3$  является неразложимым, если и только если оно относится к типу (ii), (iv), соответственно. Для завершения доказательства теоремы 3 остается доказать, что неразложимое инвариантное подпространство  $\mathbb{E}_2^k$ ,  $k \geq 4$ , имеет один из типов (v)–(ix). Это будет сделано в оставшейся части статьи.

**Теорема 4.** Для каждого преобразования  $\mathcal{U} \in O(3, n)$ ,  $n \geq 6$ , имеет место одно из трех ортогональных разложений

$$\mathbb{E}_3^n = \mathbb{E}_1^r \oplus \mathbb{E}_1^s \oplus \mathbb{E}_1^q \oplus \mathbb{E}_0^{n-(r+s+q)}, \quad 1 \leq r, s, q \leq 3, \quad r + s + q \leq n, \quad (2.5)$$

$$\mathbb{E}_3^n = \mathbb{E}_2^r \oplus \mathbb{E}_1^s \oplus \mathbb{E}_0^{n-(r+s)}, \quad 2 \leq r \leq 6, \quad 1 \leq s \leq 3, \quad r + s \leq n, \quad (2.6)$$

$$\mathbb{E}_3^n = \mathbb{E}_3^k \oplus \mathbb{E}_0^{n-k}, \quad 5 \leq k \leq 7, \quad k \leq n, \quad (2.7)$$

где подпространства в каждом разложении инвариантные и ортогональные друг другу и  $\mathbb{E}_1^r, \mathbb{E}_1^s, \mathbb{E}_1^q, \mathbb{E}_2^r, \mathbb{E}_3^k$ , неразложимы. Подпространства  $\mathbb{E}_1^r, \mathbb{E}_1^s, \mathbb{E}_1^q, \mathbb{E}_2^r$  относятся к типам, перечисленным в теореме 3.  $\mathbb{E}_3^k$  в (2.7) является циклическим подпространством (vi), если  $k = 5$ , и одним из следующих двух новых типов, если  $k \geq 6$ :

(x)  $\mathbb{E}_3^6 = L \oplus M$ , где  $L, M$  – трехмерные вырожденные циклические подпространства с вещественными взаимно обратными собственными значениями  $\lambda, \mu$ . Если  $L, M$  не изотропные, то  $\lambda = \mu = \pm 1$ . В противном случае  $\lambda, \mu$  связаны лишь соотношением  $\lambda\mu = 1$ .

(xi)  $\mathbb{E}_3^7$  – циклическое подпространство с собственным значением  $\pm 1$  и изотропным собственным вектором.

Доказательство теоремы 4 подобно предыдущему. Если  $\mathcal{U}$  имеет инвариантное подпространство  $\mathbb{E}_1^m$ ,  $0 < m < n$ , то имеет место разложение  $\mathbb{E}_3^n = \mathbb{E}_1^m \oplus \mathbb{E}_2^{n-m}$ , где  $\mathbb{E}_2^{n-m} = (\mathbb{E}_1^m)^\perp$  и оба подпространства инвариантны. Это дает разложение (2.5) или (2.6), в зависимости от того, какое из разложений (2.3) или (2.4) имеет место для  $\mathbb{E}_2^{n-m}$ . Если  $\mathcal{U}$  имеет инвариантное подпространство  $\mathbb{E}_2^m$ ,  $0 < m < n$ , рассуждение то же самое, так как подпространство  $\mathbb{E}_1^{n-m} = (\mathbb{E}_2^m)^\perp$  тоже является инвариантным.

Таким образом, остается рассмотреть разложение (2.7), в котором  $\mathbb{E}_3^k$ ,  $3 \leq k \leq n$ , является неразложимым инвариантным подпространством. С учетом того, что  $O(p, n) = O(n - p, n)$ ,  $\mathbb{E}_3^k$  с  $k = 3$  или 4 эквивалентно соответственно  $\mathbb{E}_0^3$  или  $\mathbb{E}_1^4$ . Два последние пространства всегда разложимы (см. теоремы 1, 2), и следовательно,  $\mathbb{E}_3^k$  может быть неразложимым только при  $k \geq 5$ . С другой стороны,  $\mathbb{E}_3^k$  с  $k = 5$  эквивалентно  $\mathbb{E}_2^5$ . По теореме 3,  $\mathbb{E}_2^5$  неразложимо тогда и только тогда, когда оно является циклическим подпространством типа (vi). Для завершения доказательства теоремы 4 остается показать, что неразложимое инвариантное подпространство  $\mathbb{E}_3^k$ ,  $k \geq 6$ , относится к одному из типов (x), (xi). Это будет сделано в оставшейся части статьи.

### 3. Вспомогательные результаты

Начнем со вспомогательных результатов, необходимых для доказательств теорем 3, 4. Большинство из них верны для псевдоевклидовых пространств произвольной сигнатуры, так что по умол-

чанию считается, что речь идет о пространстве  $\mathbb{E}_p^n$ ,  $1 \leq p \leq n - p$ , и соответствующей группе изоморфизмов  $O(p, n)$ , если не указано иное.

**Лемма 1.** Если  $\mathbb{E}_p^n = L \oplus M$  и одно из подпространств  $L, M$  вырожденое, то второе подпространство тоже вырожденое и разложение  $\mathbb{E}_p^n = L \oplus M$  не может быть ортогональным.

**Доказательство.** Первое утверждение следует из закон инерции для квадратичных форм. Второе утверждение докажем от противного. Предположим, что  $\mathbb{E}_p^n = L \oplus M$  и  $L \perp M$ , причем оба подпространства  $L, M$  вырождены. Матрица Грама  $G$  псевдоскалярного произведения на  $\mathbb{E}_p^n$  невырождена. Но, с другой стороны,  $G$  имеет блочно-диагональную форму с блоками  $G_L, G_M$ , соответствующими подпространствам  $L, M$ . Положим  $n = \dim L$ ,  $m = \dim M$ . Применяя разложение определителя  $|G|$  по  $n$  первым или по  $m$  последним столбцам (теорема Лапласа), получаем, что  $|G| = 0$ .  $\square$

**Лемма 2.** Изотропный конус  $V_p^n$  не содержит подпространств размерности  $p + 1$ .

**Доказательство.** Выберем линейно независимые векторы  $e_1, \dots, e_p \in \mathbb{E}_p^n$ , такие что  $(e_i, e_j) = -\delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  означает символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ). В этом базисе  $\mathbb{E}_p^n$  разлагается в прямую сумму антиевклидова и евклидова подпространств:

$$\mathbb{E}_p^n = L \oplus L^\perp, \quad L = \langle e_1, \dots, e_p \rangle = \mathbb{E}_p^p, \quad L^\perp = \mathbb{E}_0^{n-p}.$$

Предположим, что существует подпространство  $M \subset V_p^n$ ,  $\dim M = p + 1$ . Выберем в нем базис  $g_1, \dots, g_{p+1}$  и представим векторы  $g_i$  в виде

$$g_i = \alpha_{i1}e_1 + \dots + \alpha_{ip}e_p + u_i, \quad u_i \in L^\perp, \quad i = 1, \dots, p + 1.$$

Так как  $g_i$  – ненулевой изотропный вектор и  $u_i$  – вектор евклидова подпространства, имеем  $|\alpha_{i1}| + \dots + |\alpha_{ip}| \neq 0$  для всех  $i = 1, \dots, p + 1$ . Дальнейшие наши рассуждения очень похожи на метод Гаусса (последовательного исключения переменных), используемый для решения систем линейных уравнений.

Без ограничения общности будем считать, что  $\alpha_{11} \neq 0$ . Определим новый базис  $g'_1, \dots, g'_{p+1}$  в  $M$  по формулам  $g'_1 = g_1$  и

$$g'_i = g_i - \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}}g_1 = \alpha'_{i2}e_2 + \dots + \alpha'_{ip}e_p + u'_i, \quad u'_i \in L^\perp, \quad i = 2, \dots, p + 1.$$

Аналогично предыдущему, здесь у нас  $|\alpha'_{i2}| + \dots + |\alpha'_{ip}| \neq 0$  для всех  $i = 2, \dots, p + 1$ .

Продолжая этот процесс дальше, мы в конце концов придем к базису  $h_1, \dots, h_{p+1}$ , где

$$h_i = \beta_{ii}e_i + \dots + \beta'_{ip}e_p + v_i, \quad v_i \in L^\perp, \quad i = 1, \dots, p + 1.$$

Здесь последний вектор  $h_{p+1} = v_{p+1}$  принадлежит евклидову подпространству  $L^\perp$ , следовательно,  $(h_{p+1}, h_{p+1}) > 0$ . Но с другой стороны,

$$\langle g_1, \dots, g_{p+1} \rangle = \langle h_1, \dots, h_{p+1} \rangle = M \subset V_p^n,$$

и следовательно, все векторы  $h_1, \dots, h_{p+1}$  изотропны. Полученное противоречие завершает доказательство.  $\square$

**Задача 7.** Используя лемму 2, докажите, что изотропный конус  $V_p^n$  не может содержать даже «маленьких кусков» подпространств размерности  $p+1$ . Правильное определение понятия «маленького куска» является частью задачи.

Нам будет удобно ввести специальные обозначения для следующих матриц:

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad O_a = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & a \end{bmatrix}, \quad R_\varphi = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

где  $c = \cos \varphi$ ,  $s = \sin \varphi$ ,  $\varphi \neq 0 \pmod{\pi}$ .

В дальнейшем важную роль будут играть инвариантные плоскости без собственных векторов изоморфизма  $\mathcal{U} \in O(p, n)$ . Ограничение  $\mathcal{U}$  на такие плоскости имеет пару комплексно сопряженных собственных значений, и следовательно, имеет матрицу  $rR_\varphi$  с некоторыми  $r > 0$  и  $\varphi \neq 0 \pmod{\pi}$  в подходящем базисе. Мы будем обозначать такие плоскости латинскими буквами с маленьким кружком на месте верхнего индекса, например,  $L^\circ$ .

**Лемма 3.** Пусть  $L^\circ$  — инвариантная плоскость изоморфизма  $\mathcal{U} \in O(p, n)$  без собственных векторов. Тогда  $L^\circ$  является либо невырожденной (евклидовой или антиевклидовой), либо изотропной.

**Доказательство.** Предположим противное: плоскость  $L^\circ$  вырождена, но не изотропна. Покажем прежде всего, что в этом случае она не содержит двух линейно независимых изотропных векторов. Действительно, если бы такие векторы  $e, g$  существовали, любой вектор  $x \in L^\circ$  был бы представим в виде  $x = \alpha e + \beta g$  с некоторыми числами  $\alpha, \beta$ . При этом  $(e, e) = (g, g) = 0$ . Если  $(e, g) = 0$ , то  $(x, x) = 0$  для любого  $x \in L^\circ$ , следовательно, плоскость  $L^\circ$  изотропна. Если же  $(e, g) \neq 0$ , то матрица Грама псевдоскалярного произведения на плоскости  $L^\circ$  невырождена (точнее,  $L^\circ = \mathbb{E}_1^2$  — лоренцева плоскость). Оба этих случаях противоречат сделанному предположению, поэтому двух линейно независимых изотропных векторов в  $L^\circ$  не существует.

Рассмотрим ненулевой изотропный вектор  $e \in L^\circ$  (по доказанному, единственный с точностью до умножения на число). Из условия сохранения псевдоскалярного произведения следует, что вектор  $\mathcal{U}(e) \in L$  тоже изотропный. Следовательно,  $\mathcal{U}(e) = \lambda e$  с некоторым числом  $\lambda$ . Но последнее означает, что  $e \in L^\circ$  есть собственный вектор преобразования  $\mathcal{U}$ , что противоречит условию леммы. Таким образом, мы доказали, что плоскость  $L^\circ$  изотропная или невырожденная. В последнем случае  $L^\circ = \mathbb{E}_0^2$  или  $L^\circ = \mathbb{E}_2^2$ , так как  $\mathbb{E}_1^2$  содержит собственные векторы  $\mathcal{U}$ .  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $L_1^\circ, L_2^\circ$  — две различные изотропные инвариантные плоскости изоморфизма  $\mathcal{U} \in O(p, n)$ . Тогда  $L_1^\circ \cap L_2^\circ = \{0\}$  и подпространство  $L_1^\circ \oplus L_2^\circ$  является либо невырожденным ( $\mathbb{E}_2^4$ ), либо изотропным. В случае  $p = 2, 3$  имеет место лишь первая возможность:  $L_1^\circ \oplus L_2^\circ = \mathbb{E}_2^4$ . При этом в плоскостях  $L_1^\circ, L_2^\circ$  существуют базисы, в которых ограничение  $\mathcal{U}$  на  $L_1^\circ, L_2^\circ$  имеет матрицы  $rR_\varphi, r^{-1}R_\varphi$  с  $r > 0$  и  $\varphi \neq 0 \pmod{\pi}$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $L_1^\circ \cap L_2^\circ \neq \{0\}$ . Тогда существует вектор  $e \neq 0$  такой, что  $L_1^\circ \cap L_2^\circ = \langle e \rangle$ . Так как  $\mathcal{U}(e) \in L_1^\circ \cap L_2^\circ$ , вектор  $\mathcal{U}(e) = \lambda e$  с некоторым числом  $\lambda$ , а это означает, что  $e$  — собственный вектор преобразования  $\mathcal{U}$ . Но это противоречит условию, что  $L_1^\circ, L_2^\circ$  не содержат собственных векторов  $\mathcal{U}$ . Следовательно,  $L_1^\circ \cap L_2^\circ = \{0\}$ . Обозначим  $M = L_1^\circ \oplus L_2^\circ$ .

Пусть  $G_M$  и  $U_M$  — матрица Грама псевдоскалярного произведения и матрица изоморфизма  $\mathcal{U}$ , ограниченные на подпространство  $M$ . Выберем два базиса  $g, h \in L_1^\circ$  и  $u, v \in L_2^\circ$  таким образом, что ограничение  $\mathcal{U}$  на  $L_1^\circ, L_2^\circ$  имеет матрицы  $rR_\varphi, \rho R_\psi$ , соответственно. Здесь  $r, \rho > 0$  и  $\varphi, \psi \neq 0 \pmod{\pi}$ . Тогда

$$G_M = \begin{bmatrix} O & A \\ A^* & O \end{bmatrix}, \quad U_M = \begin{bmatrix} rR_\varphi & O \\ O & \rho R_\psi \end{bmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\alpha_1 = (g, u), \alpha_2 = (g, v), \alpha_3 = (h, u), \alpha_4 = (h, v).$$

Покажем, что случай  $\operatorname{rg} A = 1$  противоречит условию леммы. Прежде всего, покажем, что если  $\operatorname{rg} A = 1$ , то существует базис  $g', h'$  в плоскости  $L_1^\circ$  такой, что матрицы  $G_M$  и  $U_M$  имеют вид (3.2) с  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ . Действительно, положим  $g' = cg + sh$ ,  $h' = ch - sg$ , где  $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$ . В

новом базисе  $g', h', u, v$  матрица  $U_M$  имеет тот же вид, что и в старом, а матрица  $G_M$  имеет такую же блочно-диагональную форму (3.2) с некоторой новой матрицей  $A$ . Выберем  $\theta$  таким образом, чтобы получить  $(h', u) = (h', v) = 0$ . Это условие приводит к системе из двух линейных уравнений  $\alpha_1 s - \alpha_3 c = 0, \alpha_2 s - \alpha_4 c = 0$  относительно неизвестных  $s, c$ . Если  $\text{rg } A = 1$ , то эти уравнения линейно зависимы, и система имеет ненулевое решение, которое можно нормировать таким образом, чтобы получить  $c^2 + s^2 = 1$ . Тем самым, существование требуемого  $\theta$  доказано.

Теперь без ограничения общности будем считать, что равенства  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$  выполнены в исходном базисе  $g, h, u, v$ . Тогда из условия сохранения псевдоскалярного произведения и соотношений

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(g) &= r(\cos \varphi g + \sin \varphi h), & \mathcal{U}(h) &= r(\cos \varphi h - \sin \varphi g), \\ \mathcal{U}(u) &= \rho(\cos \psi u + \sin \psi v), & \mathcal{U}(v) &= \rho(\cos \psi v - \sin \psi u),\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= (h, u) = (\mathcal{U}(h), \mathcal{U}(u)) = -r\rho \sin \varphi (\alpha_1 \cos \psi + \alpha_2 \sin \psi), \\ \alpha_4 &= (h, v) = (\mathcal{U}(h), \mathcal{U}(v)) = r\rho \sin \varphi (\alpha_1 \sin \psi - \alpha_2 \cos \psi),\end{aligned}$$

и следовательно,

$$\alpha_1 \sin \psi - \alpha_2 \cos \psi = 0, \quad \alpha_1 \cos \psi + \alpha_2 \sin \psi = 0. \quad (3.3)$$

Рассмотрим (3.3) как систему линейных уравнений с неизвестными  $\alpha_1, \alpha_2$ . Нетрудно вычислить ее определитель:  $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$ . Следовательно, система (3.3) имеет единственное решение (нулевое), и мы получаем, что все  $\alpha_i = 0$  для всех  $i = 1, \dots, 4$ , а это противоречит предположению  $\text{rg } A = 1$ . Следовательно, мы доказали альтернативу:  $A = O$  или  $|A| \neq 0$ . В первом случае  $M$  – 4-мерное изотропное подпространство, что невозможно при  $p = 2, 3$  (лемма 2). Во втором случае  $|G_M| \neq 0$ , т. е. подпространство  $M$  невырождено. Более того, нетрудно проверить непосредственно (например, используя метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду), что сигнатура  $G_M$  равна  $(2, 2)$ , т. е.  $M = \mathbb{E}_2^4$ .

Рассмотрим теперь случай  $p = 2, 3$  более подробно. Выше мы доказали, что  $|A| \neq 0$  и  $M = L_1^\circ \oplus L_2^\circ = \mathbb{E}_2^4$ . Подставляя  $G_M, U_M$  из (3.2) в равенство  $U_M^* G_M U_M = G_M$ , означающее сохранение квадратичной формы на подпространстве  $M$ , мы получаем уравнение  $r\rho R_\varphi^* A R_\psi = A$ , которое сводится к  $r\rho = 1$  и  $A R_\psi = R_\varphi A$ , так как  $|R_\varphi^*| = |R_\psi| = 1$ . Матричное уравнение  $A R_\psi = R_\varphi A$  эквивалентно системе линейных уравнений

$$\begin{aligned}\alpha_1(c_\varphi - c_\psi) - \alpha_2 s_\psi - \alpha_3 s_\varphi &= 0, & \alpha_1 s_\varphi + \alpha_3(c_\varphi - c_\psi) - \alpha_4 s_\psi &= 0, \\ \alpha_1 s_\psi + \alpha_2(c_\varphi - c_\psi) - \alpha_4 s_\varphi &= 0, & \alpha_2 s_\varphi + \alpha_3 s_\psi + \alpha_4(c_\varphi - c_\psi) &= 0,\end{aligned} \quad (3.4)$$

с неизвестными  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ , где использованы обозначения  $c_\varphi = \cos \varphi, s_\varphi = \sin \varphi$  и т. п.

Обозначим через  $\Delta$  определитель системы (3.4). Так как  $|A| \neq 0$ , система (3.4) имеет ненулевое решение, и следовательно,  $\Delta = 0$ . После несложных преобразований уравнение  $\Delta = 0$  можно привести к виду  $(s_\varphi^2 + s_\psi^2 + c^2)^2 = 4(s_\varphi s_\psi)^2$ , где  $c = c_\varphi - c_\psi$ . Следовательно,  $s_\varphi^2 + s_\psi^2 + c^2 = \pm 2s_\varphi s_\psi$ , что равносильно равенству  $(s_\varphi \mp s_\psi)^2 + c^2 = 0$ . Это дает  $s_\varphi = \pm s_\psi, c_\varphi = c_\psi$ , т. е.  $\varphi = \pm \psi \pmod{2\pi}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\varphi = \psi$ , так как выбор знака в последнем равенстве зависит от ориентации плоскости, т. е. от порядка векторов в базисах  $g, h \in L_1^\circ$  и  $u, v \in L_2^\circ$ .

Подставляя  $\varphi = \psi$  в (3.4), мы получаем уравнения  $s_\varphi(\alpha_1 - \alpha_4) = 0$  и  $s_\varphi(\alpha_2 + \alpha_3) = 0$ . Так как  $s_\varphi \neq 0$ , это дает  $\alpha_4 = \alpha_1, \alpha_3 = -\alpha_2$ . Таким образом, если в качестве  $\alpha_1, \alpha_2$  взять произвольные вещественные числа, не равные нулю одновременно, и положить  $\alpha_4 = \alpha_1, \alpha_3 = -\alpha_2$ , все уравнения системы (3.4) будут выполнены и при этом  $|A| \neq 0$ . Это доказывает второе утверждение леммы.  $\square$

**Задача 8.** Докажите, что из леммы 4 вытекает следующее утверждение: существование  $k$  различных изотропных инвариантных плоскостей  $L_i^\circ, i = 1, \dots, k$ , таких, что подпространство  $M := L_1^\circ \oplus \dots \oplus L_k^\circ$  вырождено, невозможно при  $p < 2k$ .

**Замечание.** Однако случай, когда  $p \geq 2k$  и подпространство  $M$  изотропно, не противоречит лемме 4. Например, при  $p \geq 4$  лемма не исключает существование двух изотропных инвариантных плоскостей  $L_i^\circ$ , таких что  $L_1^\circ \oplus L_2^\circ$  изотропно.

**Лемма 5.** Предположим, что пространство  $\mathbb{E}_p^n$  неразложимо относительно изоморфизма  $\mathcal{U} \in O(p, n)$ . Тогда:

1. Все его собственные векторы изотропны. Число линейно независимых собственных векторов  $\leq p$ , и число различных собственных значений  $\leq p$ .

2. Все инвариантные плоскости без собственных векторов изотропны. Если  $p = 2$  или  $p = 3$ , то число таких плоскостей  $\leq 2$ . При этом оно равно двум, если и только если пространство  $\mathbb{E}_p^n = \mathbb{E}_2^4 = L_1^\circ \oplus L_2^\circ$ .

**Доказательство.** 1. Существование неизотропного собственного вектора  $e$  означает существование одномерного невырожденного инвариантного подпространства, что противоречит условию, что  $\mathbb{E}_p^n$  неразложимо. Предположим, что изоморфизм  $\mathcal{U}$  имеет  $p+1$  линейной независимых собственных векторов  $e_1, \dots, e_{p+1}$ . Если  $(e_i, e_j) \neq 0$  хотя бы для одной пары  $i \neq j$ , то  $\langle e_i, e_j \rangle \subset \mathbb{E}_p^n$  – невырожденная инвариантная плоскость, что также противоречит условию, что пространство  $\mathbb{E}_p^n$  неразложимо. Следовательно, подпространство  $\langle e_1, \dots, e_{p+1} \rangle$  изотропно, что противоречит лемме 2.

2. Из того, что  $\mathbb{E}_p^n$  неразложимо, и леммы 3 следует, что все инвариантные плоскости изоморфизма  $\mathcal{U}$  без собственных векторов изотропны. Пусть  $L_1^\circ, L_2^\circ$  – две различные плоскости такого типа. Согласно лемме 4, если  $p = 2, 3$ , то  $L_1^\circ \oplus L_2^\circ = \mathbb{E}_2^4$ . Так как  $\mathbb{E}_p^n$  неразложимо, последнее возможно лишь в случае, если  $\mathbb{E}_p^n = \mathbb{E}_2^4$ .  $\square$

## 4. Циклические подпространства

### 4.1. Вещественные циклические подпространства

Пусть  $L^r$ ,  $\dim L^r = k \geq 1$ , есть циклическое подпространство изоморфизма  $\mathcal{U} \in O(p, n)$  с вещественным собственным значением  $\lambda$  и жордановым базисом  $e_1, \dots, e_k$ :

$$\mathcal{U}(e_1) = \lambda e_1, \quad \mathcal{U}(e_i) = \lambda e_i + e_{i-1}, \quad i = 2, \dots, k. \quad (4.1)$$

Рассмотрим последовательность вложенных инвариантных подпространств

$$[L^r]_1 \subset [L^r]_2 \subset \dots \subset [L^r]_k = L^r, \quad [L^r]_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle. \quad (4.2)$$

Пусть  $[G^r]_i$  – матрица Грама псевдоскалярного произведения на  $[L^r]_i$ . Отметим, что собственный вектор  $e_1$  является изотропным и все подпространства  $[L^r]_i$ ,  $i < k$ , вырождены. В противном случае мы имели бы разложение  $L^r = [L^r]_i \oplus [L^r]_i^\perp$ , в котором  $[L^r]_i$  и  $[L^r]_i^\perp$  – инвариантные подпространства изоморфизма  $\mathcal{U}$ . Но это противоречит тому, что подпространство  $L^r$  циклическое.

**Предложение 1.** Если  $k \geq 2$ , имеют место следующие соотношения:

$$(e_1, e_1) = 0, \quad (e_1, e_2) = 0, \quad (\lambda^2 - 1)(e_2, e_2) = 0. \quad (4.3)$$

Если при этом  $\lambda^2 \neq 1$ , то подпространство  $L^r$  изотропное и  $k \leq p$ .

**Доказательство.** Принимая во внимание (4.1) и  $(e_1, e_1) = 0$ , из условия сохранения псевдоскалярного произведения получаем

$$(e_1, e_2) = (\mathcal{U}(e_1), \mathcal{U}(e_2)) = (\lambda e_1, \lambda e_2 + e_1) = \lambda^2(e_1, e_2), \quad (4.4)$$

$$(e_2, e_2) = (\mathcal{U}(e_2), \mathcal{U}(e_2)) = (\lambda e_2 + e_1, \lambda e_2 + e_1) = \lambda^2(e_2, e_2) + 2\lambda(e_1, e_2). \quad (4.5)$$

Из (4.4) следует равенство  $(\lambda^2 - 1)(e_1, e_2) = 0$ . Если  $\lambda^2 \neq 1$ , то  $(e_1, e_2) = 0$ , и соотношение (4.5) превращается в  $(\lambda^2 - 1)(e_2, e_2) = 0$ . Если  $\lambda^2 = 1$ , то равенство (4.5) дает  $(e_1, e_2) = 0$ . Таким образом, соотношения (4.3) выполнены и в том, и в другом случае.

Покажем, что если  $\lambda^2 \neq 1$ , то  $(e_i, e_j) = 0$  для всех  $i, j \leq k$ . Из (4.3) следует, что  $(e_2, e_2) = 0$ . Для всех остальных  $i, j$  доказательство проводится по индукции, основанной на следующем соотношении, обобщающем (4.4), (4.5):

$$(e_1, e_j) = \lambda^2(e_1, e_j) + \lambda(e_1, e_{j-1}), \quad j = 3, \dots, k,$$

$$(e_i, e_j) = \lambda^2(e_i, e_j) + \lambda(e_i, e_{j-1}) + \lambda(e_{i-1}, e_j) + (e_{i-1}, e_{j-1}), \quad i, j = 2, \dots, k,$$

Отсюда следует, что если  $\lambda^2 \neq 1$ , то  $(e_1, e_j) = 0$  для всех  $i, j$ , т. е. подпространство  $L^r$  изотропно. Наконец, из леммы 2 следует, что  $k \leq p$ .  $\square$

**Задача 9.** Найдите явный вид всех возможных матриц  $[G^r]_i$  в последовательности (4.2) в случае, если  $p \leq 3$  и  $\lambda^2 = 1$ .

**Решение.** Обозначим  $c_{ij} = (e_i, e_j)$ . Матрица  $[G^r]_2$  нам уже известна из предложения 1:  $c_{11} = c_{12} = 0$  и  $c_{22}$  произвольно.

Для вычисления  $[G^r]_3$  воспользуемся равенствами  $(e_i, e_3) = (\mathcal{U}(e_i), \mathcal{U}(e_3))$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Это дает  $c_{13} + c_{22} = 0$  и  $c_{22} + 2\lambda c_{23} = 0$ . Следовательно,

$$[G^r]_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c_{22} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ -c_{22} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad c_{23} = -\frac{1}{2}\lambda c_{22}. \quad (4.6)$$

Если  $c_{22} \neq 0$ , то  $[L^r]_3 = \mathbb{E}_1^3$  или  $\mathbb{E}_2^3$  является циклическим подпространством типа (iv). Кроме того, в этом случае  $[L^r]_3 = L^r$  с  $k = 3$ , так как  $L^r$  неразложимо, и последовательность (4.2) на этом шаге обрывается.

Если  $c_{22} = 0$ , то подпространство  $[L^r]_3$  вырождено, и случай  $k > 3$  не исключен. С учетом условий  $(e_i, e_4) = (\mathcal{U}(e_i), \mathcal{U}(e_4))$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , получаем

$$[G^r]_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{33} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & -c_{33} & c_{34} & c_{44} \end{bmatrix}, \quad c_{34} = -\frac{1}{2}\lambda c_{33}. \quad (4.7)$$

В отличие от  $[G^r]_3$ , матрица  $[G^r]_4$  всегда является вырожденной. Более того, если  $c_{33} = 0$ , то  $[L^r]_4$  содержит трехмерное изотропное подпространство, что возможно, только если  $p \geq 3$ . Используя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем

$$[G^r]_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c_{33} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{33} & c_{25} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ 0 & -c_{33} & c_{34} & c_{44} & c_{45} \\ c_{33} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} c_{25} &= -3c_{34}, & c_{34} &= -\frac{1}{2}\lambda c_{33}, \\ c_{35} &= -(\lambda c_{34} + c_{44}), & & \\ c_{45} &= -\frac{1}{2}\lambda c_{44}. & & \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если  $c_{33} \neq 0$ , то  $[L^r]_5 = \mathbb{E}_2^5$  или  $\mathbb{E}_3^5$  является циклическим подпространством типа (vi). В этом случае  $[L^r]_5 = L^r$  с  $k = 5$ , так как  $L^r$  неразложимо, и последовательность (4.2) обрывается.

Если  $c_{33} = 0$  (при этом, разумеется, предполагается, что  $p \geq 3$ ), то подпространство  $[L^r]_5$  вырождено, и случай  $k > 5$  не исключен. Продолжая эти рассуждения, получаем

$$[G^r]_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ 0 & c_{44} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} c_{35} &= -c_{44}, & c_{36} &= \frac{3}{2}\lambda c_{44}, \\ c_{45} &= -\frac{1}{2}\lambda c_{44}, & c_{46} &= \frac{1}{2}c_{44} - c_{55}, \\ c_{56} &= -\frac{1}{2}\lambda c_{55}. & & \end{aligned} \quad (4.9)$$

Матрица  $[G^r]_6$  всегда является вырожденой. Более того, если  $c_{44} = 0$ , то  $[L^r]_6$  содержит 4-мерное изотропное подпространство. Это возможно лишь в случае  $p \geq 4$ . Таким образом, при  $p = 3$  мы имеем  $c_{44} \neq 0$  и

$$[G^r]_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{36} & c_{37} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & c_{55} & c_{56} & c_{57} \\ 0 & c_{44} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} & c_{67} \\ -c_{44} & c_{27} & c_{37} & c_{47} & c_{57} & c_{67} & c_{77} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} c_{27} &= -\frac{5}{2}\lambda c_{44}, \\ c_{37} &= c_{55} - \frac{5}{2}c_{44}, \\ c_{47} &= \frac{1}{2}\lambda(3c_{55} - c_{44}), \\ c_{57} &= \frac{1}{2}c_{55} - c_{66}, \\ c_{67} &= -\frac{1}{2}\lambda c_{66}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из  $c_{44} \neq 0$  следует, что  $[L^r]_7 = \mathbb{E}_3^7$  или  $\mathbb{E}_4^7$  является циклическим подпространством типа (xi). Кроме того, в этом случае  $[L^r]_7 = L^r$  с  $k = 7$ , так как  $L^r$  неразложимо. Равенство  $c_{44} = 0$  возможно только в случае  $p \geq 4$ , который выходит за пределы нашего рассмотрения.  $\square$

Решая задачу 4, мы не только нашли явный вид всех возможных матриц  $[G^r]_i$ , но и установили следующий факт:

**Предложение 2.** Пространство  $\mathbb{E}_p^n$ ,  $p = 1, 2, 3$ , неразложимое относительно некоторого изоморфизма  $\mathcal{U}$ , является его циклическим подпространством  $L^r$  с собственным значением  $\lambda$ , только если  $\lambda = \pm 1$  и  $n = 2p + 1$ . Если эти условия выполнены, существует симметричная матрица  $G$  сигнатуры  $(p, n - p)$  такая, что  $J_\lambda^* G J_\lambda = G$ . Это и есть матрица Грама изоморфизма  $\mathcal{U}$ .

Все эти утверждения следуют из сказанного выше. Подчеркнем, что искомая матрица  $G$  имеет вид (4.6), если  $p = 1$ , вид (4.8), если  $p = 2$ , и вид (4.10), если  $p = 3$ . При этом во всех этих случаях  $(e_{p+1}, e_{p+1}) \neq 0$ .

**Предложение 3.** Пространство  $\mathbb{E}_p^n$ ,  $p = 1, 2, 3$ , неразложимое относительно некоторого изоморфизма  $\mathcal{U}$ , является прямой суммой двух его вырожденных циклических подпространств  $L^r, M^r$  с собственными значениями  $\lambda, \mu$ , только если  $\lambda\mu = 1$  и  $\dim L^r = \dim M^r = p$ ,  $n = 2p$ . При этом, если хотя бы одно из подпространств  $L^r, M^r$  не изотропно, то  $\lambda = \mu = \pm 1$ . Если перечисленные условия выполнены, существует симметричная матрица  $G$  сигнатуры  $(p, p)$  такая, что  $U^* GU = G$ , где

$$U = \begin{bmatrix} J_\lambda & O \\ O & J_\mu \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_L & A \\ A^* & G_M \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Здесь  $G_L, G_M$  – матрицы Грама ограничения псевдоскалярного произведения на подпространства  $L^r, M^r$ , соответственно.

**Доказательство.** Пусть  $L^r = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$  и  $M^r = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ ,  $k, s \geq 1$ , где векторы  $e_i$  удовлетворяют соотношениям (4.1) и векторы  $g_j$  удовлетворяют аналогичным соотношениям

$$\mathcal{U}(g_1) = \mu g_1, \quad \mathcal{U}(g_j) = \mu g_j + g_{j-1}, \quad j = 2, \dots, s. \quad (4.12)$$

Из (4.1), (4.12) и условия сохранения псевдоскалярного произведения имеем

$$\begin{aligned} (e_1, g_1) &= (\mathcal{U}(e_1), \mathcal{U}(g_1)) = \lambda\mu(e_1, g_1), \\ (e_i, g_1) &= (\mathcal{U}(e_i), \mathcal{U}(g_1)) = \lambda\mu(e_i, g_1) + \mu(e_{i-1}, g_1), \quad i > 1, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} (e_1, g_j) &= (\mathcal{U}(e_1), \mathcal{U}(g_j)) = \lambda\mu(e_1, g_j) + \lambda(e_1, g_{j-1}), \quad j > 1, \\ (e_i, g_j) &= (\mathcal{U}(e_i), \mathcal{U}(g_j)) = \\ &= \lambda\mu(e_i, g_j) + \lambda(e_i, g_{j-1}) + \mu(e_{i-1}, g_j) + (e_{i-1}, g_{j-1}), \quad i, j > 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Если  $\lambda\mu \neq 1$ , то из соотношений (4.13) и (4.14) следует  $(e_i, g_j) = 0$  для всех  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, s$ , т. е. в формуле (4.11) матрица  $A = O$ . Так как  $|G_L| = |G_M| = 0$  (оба подпространства  $L^r, M^r$

вырождены), матрица Грама псевдоскалярного произведения на пространстве  $L^r \oplus M^r$  вырождена. Но это противоречит разложению  $\mathbb{E}_p^n = L^r \oplus M^r$ . Тем самым, необходимость условия  $\lambda\mu = 1$  доказана. Подставляя  $\lambda\mu = 1$  в (4.13) и (4.14), получаем  $(e_i, g_1) = 0$  для всех  $i = 1, \dots, k-1$  и  $(e_i, g_j) = 0$  для всех  $i = 1, \dots, k-j$ . Таким образом, окончательно получаем

$$(e_i, g_j) = 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, k-j, j = 1, \dots, s. \quad (4.15)$$

Теперь установим второе необходимое условие:  $\dim L^r = \dim M^r = p$ ,  $n = 2p$ . При этом нам придется рассмотреть случаи  $p = 2$  и  $p = 3$  по отдельности. Обозначим через  $[G_L^r]_i$ ,  $[G_M^r]_i$  матрицы Грама псевдоскалярного произведения на подпространствах  $[L^r]_i$ ,  $[M^r]_i$ .

*Случай  $p = 2$ .* Покажем, что  $k \geq 3$  невозможно. Так как оба подпространства  $L^r$ ,  $M^r$  невырождены, матрица  $[G_L^r]_3$  имеет вид (4.6) с  $c_{22} = c_{23} = 0$  и вектор  $g_1$  изотропный. Таким образом, имеем равенства  $(e_i, e_j) = 0$  для  $i, j = 1, 2$  и  $(g_1, g_1) = 0$ . Кроме того, из (4.15) следует  $(e_i, g_1) = 0$  для  $i = 1, 2$ . Эти соотношения показывают, что  $\langle e_1, e_2, g_1 \rangle$  – трехмерное изотропное подпространство, что противоречит лемме 2. Тем самым, мы доказали, что  $k \leq 2$ . Аналогично доказывается, что  $s \leq 2$ . Из разложения  $\mathbb{E}_p^n = L^r \oplus M^r$  следует, что  $k + s = n \geq 4$ , следовательно,  $k = s = 2$  и  $n = 4$ .

*Случай  $p = 3$ .* Покажем, что  $k \geq 5$  невозможно. Так как оба подпространства  $L^r$ ,  $M^r$  невырождены, матрица  $[G_L^r]_5$  имеет вид (4.8) с  $c_{25} = c_{33} = c_{34} = 0$  и вектор  $g_1$  изотропный. Таким образом, мы имеем  $(e_i, e_j) = 0$  для всех  $i, j = 1, 2, 3$  и  $(g_1, g_1) = 0$ . Из (4.15) следует, что  $(e_i, g_1) = 0$  для  $i = 1, 2, 3$ . Мы получаем, что  $\langle e_1, e_2, e_3, g_1 \rangle$  есть 4-мерное изотропное подпространство, что противоречит лемме 2. Тем самым, мы показали, что  $k \leq 4$ , и аналогично,  $s \leq 4$ .

Пусть теперь  $k = 4$ . Так как  $k + s = n \geq 6$ , то  $2 \leq s \leq 4$ . Матрица  $G_L$  имеет вид (4.7), поэтому  $(e_1, e_i) = 0$  при  $i = 1, \dots, 4$ . Согласно предложению 1, мы имеем  $(g_1, g_1) = (g_1, g_2) = 0$ . Более того, если  $s = 3$  или  $s = 4$ , матрица  $G_M$  имеет вид (4.6) с  $c_{22} = 0$  или (4.7), соответственно. Таким образом, мы имеем равенства  $(g_1, g_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, s$ , для каждого  $s \in \{2, 3, 4\}$ . С другой стороны, из (4.15) получаем

$$(e_i, g_1) = 0, i = 1, 2, 3; \quad (e_i, g_2) = 0, i = 1, 2; \quad (e_1, g_3) = 0, \text{ если } s \geq 3.$$

Собирая вместе все равенства, мы получаем следующее.

Если  $s = 2$  или  $3$ , то вектор  $e_1 \perp e_i$  для всех  $i = 1, \dots, k$  и  $e_1 \perp g_i$  для всех  $i = 1, \dots, s$ . Следовательно, пространство  $L^r \oplus M^r$  вырождено, что противоречит равенству  $\mathbb{E}_p^n = L^r \oplus M^r$ . Если  $s = 4$ , мы не можем использовать аналогичное рассуждение, так как ни из чего не следует, что  $(e_1, g_4)$  равно нулю. Однако в этом случае у нас в распоряжении есть равенства  $(e_i, e_j) = (g_i, g_j) = 0$ ,  $i, j = 1, 2$ , вытекающие из того, что матрицы  $[G_L^r]_3$ ,  $[G_M^r]_3$  вырождены (см. (4.6)). Объединяя их вместе с  $(e_i, g_j) = 0$ ,  $i, j = 1, 2$ , мы получаем, что  $\langle e_1, e_2, g_1, g_2 \rangle$  – 4-мерное изотропное подпространство, что противоречит лемме 2.

Таким образом, мы доказали, что  $k \leq 3$ , и аналогично,  $s \leq 3$ . Так как  $k + s = n \geq 6$ , мы тем самым установили необходимое условие  $k = s = 3$ ,  $n = 6$ . Доказательства остальных утверждений будут даны для  $p = 3$  (в случае  $p = 2$  доказательства аналогичны и даже проще).

Предположим, что  $\lambda\mu = 1$  и  $L^r, M^r$  – трехмерные вырожденные циклические подпространства. Тогда, в соответствии с (4.6), мы имеем  $G_L = O_a$  и  $G_M = O_b$  с некоторыми числами  $a, b$  (здесь мы используем обозначения (3.1)). Положим  $\alpha_{ij} = (e_i, g_j)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Из (4.15) получаем  $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$  и соотношения

$$\mu\alpha_{13} + \lambda\alpha_{22} = 0, \quad \mu\alpha_{22} + \lambda\alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{22} + \mu\alpha_{23} + \lambda\alpha_{32} = 0. \quad (4.16)$$

Подставляя это в матрицу  $G$  из (4.11) и затем в матричное уравнение  $U^*GU = G$ , мы получаем уравнения (4.16) и еще два уравнения

$$a(\lambda^2 - 1) = 0, \quad b(\mu^2 - 1) = 0. \quad (4.17)$$

Рассмотрим (4.16) как систему линейных уравнений с неизвестными  $\alpha_{13}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \alpha_{32}$ . Нетрудно видеть, что эта система совместная и неопределенная, т. е. имеет бесконечно много решений. Можно положить  $\alpha_{22}$  свободной переменной и придать ей произвольное ненулевое значение. Тогда значения  $\alpha_{13}, \alpha_{31}$  также будут ненулевыми, и  $|G| = -(\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31})^2 \neq 0$ . Более того, несложное вычисление показывает, что квадратичная форма с матрицей  $G$  имеет сигнатуру  $(3, 3)$ . Наконец, рассмотрим уравнения (4.17). Если хотя бы одно из подпространств  $L^\Gamma, M^\Gamma$  не изотропное, то  $a \neq 0$  или  $b \neq 0$ , и следовательно,  $\lambda^2 = 1$  или  $\mu^2 = 1$ . Учитывая соотношение  $\lambda\mu = 1$ , в этом случае получаем  $\lambda = \mu = \pm 1$ .  $\square$

**Предложение 4.** Неразложимое пространство  $\mathbb{E}_p^n$ ,  $p = 2, 3$ , не может быть прямой суммой трех циклических подпространств.

**Доказательство.** Предположим обратное:  $\mathbb{E}_p^n = L^\Gamma \oplus M^\Gamma \oplus N^\Gamma$ , где  $L^\Gamma, M^\Gamma, N^\Gamma$  – циклические подпространства с собственными значениями  $\lambda, \mu, \nu$  и матрицами Грама  $G_L, G_M, G_N$ . Положим  $L^\Gamma = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ ,  $M^\Gamma = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ ,  $N^\Gamma = \langle h_1, \dots, h_q \rangle$ ,  $k, s, q \geq 1$ , где векторы  $e_i$  удовлетворяют соотношениям (4.1), векторы  $g_j$  – соотношениям (4.12) и  $\mathcal{U}(h_1) = \nu h_1$ ,  $\mathcal{U}(h_j) = \nu h_j + h_{j-1}$  для  $j = 2, \dots, q$ .

Если пространство  $\mathbb{E}_p^n$  неразложимо, то все  $L^\Gamma, M^\Gamma, N^\Gamma$  вырождены и собственные векторы  $e_1, g_1, h_1$  изотропны. Тем самым случай  $p = 2$  сразу исключается, так как существование  $p + 1$  линейно независимых изотропных собственных векторов противоречит лемме 5. Остается показать, что в случае  $p = 3$  разложение  $\mathbb{E}_p^n = L^\Gamma \oplus M^\Gamma \oplus N^\Gamma$  также невозможно.

Прежде всего, рассмотрим это разложение в предположении, что размерность одного из подпространств  $L^\Gamma, M^\Gamma, N^\Gamma$  больше 2. Без ограничения общности будем считать, что  $\dim L^\Gamma \geq 3$ . Так как  $L^\Gamma$  вырождено, матрица  $[G_L^\Gamma]_3$  имеет вид (4.6) с  $c_{22} = c_{23} = 0$ , т. е.,  $(e_i, e_j) = 0$ ,  $i, j \leq 2$ . Из (4.13) следует, что  $(e_i, g_1) = 0$  для  $i = 1, 2$ . Аналогично,  $(e_i, h_1) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Так как пространство  $\mathbb{E}_p^n$  неразложимо, векторы  $g_1, h_1$  изотропны и плоскость  $\langle g_1, h_1 \rangle$  также изотропна. Из этого мы заключаем, что  $\langle e_1, e_2, g_1, h_1 \rangle$  – 4-мерное изотропное подпространство, что противоречит лемме 2.

Таким образом, мы доказали, что  $k, s, q \leq 2$ . Так как  $k+s+q = n \geq 6$ , отсюда имеем  $k = s = q = 2$  и  $n = 6$ . Предположим, что существует симметричная матрица  $G$  с сигнатурой  $(3, 3)$  такая, что  $U^*GU = G$ , где

$$U = \begin{bmatrix} J_\lambda & O & O \\ O & J_\mu & O \\ O & O & J_\nu \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_L & A & B \\ A^* & G_M & C \\ B^* & C^* & G_N \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

и  $A, B, C$  – произвольные квадратные матрицы второго порядка. Из (4.13) следует, что  $(e_1, g_1) = 0$ , независимо от того, равно число  $\lambda\mu$  единице или нет. Аналогично, получаем  $(e_1, h_1) = 0$  и  $(g_1, h_1) = 0$ . Следовательно, мы можем положить

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Согласно предложению 1, матрицы Грама  $G_L = O_a$ ,  $G_M = O_b$ ,  $G_N = O_c$  с некоторыми вещественными  $a, b, c$ . Подставляя все эти матрицы в  $G$  из (4.18) и затем подставляя последнюю в матричное уравнение  $U^*GU = G$ , мы получаем систему из 12 уравнений, которую удобно разделить на три подсистемы:

$$a(\lambda^2 - 1) = 0, \quad b(\mu^2 - 1) = 0, \quad c(\nu^2 - 1) = 0, \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda\mu - 1) = 0, & \alpha_2(\lambda\mu - 1) = 0, \\ \beta_1(\lambda\nu - 1) = 0, & \beta_2(\lambda\nu - 1) = 0, \\ \gamma_1(\mu\nu - 1) = 0, & \gamma_2(\mu\nu - 1) = 0, \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \mu\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + (\lambda\mu - 1)\alpha_3 = 0, \\ \nu\beta_1 + \lambda\beta_2 + (\lambda\nu - 1)\beta_3 = 0, \\ \nu\gamma_1 + \mu\gamma_2 + (\mu\nu - 1)\gamma_3 = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Докажем, что система уравнений (4.19), (4.20), (4.21) является совместной только в том случае, когда матрица  $G$  вырождена. Последнее, очевидно, противоречит разложению  $\mathbb{E}_p^n = L^r \oplus M^r \oplus N^r$  и тем самым завершает доказательство.

Действительно, если  $\lambda\mu \neq 1$ , то  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  (это следует из (4.20)) и  $\alpha_3 = 0$  (следует из первого уравнения в (4.21)). Как легко проверить, в этом случае матрица  $G$  вырождена. Следовательно, мы доказали, что  $\lambda\mu = 1$ . Аналогично,  $\lambda\nu = 1$  и  $\mu\nu = 1$ . Тогда система (4.20) удовлетворяется при всех  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , а система (4.21) имеет вид

$$\mu\alpha_1 + \lambda\alpha_2 = 0, \quad \nu\beta_1 + \lambda\beta_2 = 0, \quad \nu\gamma_1 + \mu\gamma_2 = 0. \quad (4.22)$$

Покажем, что  $\lambda^2 = 1$ . Действительно, если это не так, то  $\lambda^2 \neq 1$ ,  $\mu^2 \neq 1$ ,  $\nu^2 \neq 1$  (два последние неравенства следуют из доказанных соотношений  $\lambda\mu = 1$  и  $\lambda\nu = 1$ ) и  $a = b = c = 0$  (это следует из (4.19)). Подставляя  $a = b = c = 0$  в матрицу  $G$ , получаем  $|G| = -(\alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_2)^2$ . Простое вычисление показывает, что стоящее в скобках выражение  $\alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_2$  обращается в нуль, если выполнены соотношения (4.22).

Таким образом, мы доказали, что  $\lambda^2 = \mu^2 = \nu^2 = 1$ . Тогда из  $\lambda\mu = \lambda\nu = \mu\nu = 1$  следует, что  $\lambda = \mu = \nu = \pm 1$ . Для завершения доказательства остается проверить, что матрица  $G$ , в которой  $G_L = O_a$ ,  $G_M = O_b$ ,  $G_N = O_c$  и  $A, B, C$  удовлетворяют условиям (4.22) с  $\lambda = \mu = \nu$ , вырождена. Эта тривиальная проверка оставляется читателю.  $\square$

## 4.2. Комплексные циклические подпространства

Пусть  $L^c$ ,  $\dim L^c = 2l \geq 2$ , есть циклическое подпространство изоморфизма  $\mathcal{U} \in O(p, n)$  с парой комплексно сопряженных собственных значений  $re^{\pm i\varphi}$ , где  $r > 0$  и  $\varphi \neq 0 \pmod{\pi}$ . Мы будем обозначать такие подпространства с помощью верхнего индекса «с» и называть их *комплексными*, чтобы подчеркнуть отличие от *вещественных* циклических подпространств, которые мы обозначали с помощью верхнего индекса «г».

Обозначим  $c = \cos \varphi$ ,  $s = \sin \varphi$ . Как известно (см., например, [4]), существует базис  $g_1, h_1, \dots, g_l, h_l$  подпространства  $L^c$ , в котором ограничение  $\mathcal{U}$  на  $L^c$  имеет матрицу

$$U = \begin{bmatrix} rR_\varphi & E & 0 \\ & rR_\varphi & \ddots \\ & & \ddots & E \\ 0 & & & rR_\varphi \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

где матрица  $R_\varphi$  определена в (3.1). Это означает, что

$$\mathcal{U}(g_1) = r(cg_1 + sh_1), \quad \mathcal{U}(h_1) = r(ch_1 - sg_1), \quad (4.24)$$

$$\mathcal{U}(g_j) = r(cg_j + sh_j) + g_{j-1}, \quad \mathcal{U}(h_j) = r(ch_j - sg_j) + h_{j-1}, \quad j = 2, \dots, l. \quad (4.25)$$

Рассмотрим инвариантные подпространства

$$[L^c]_j = \langle g_1, h_1, \dots, g_j, h_j \rangle, \quad i = 1, \dots, l.$$

Рассуждая так же, как и в случае вещественных циклических пространств, заключаем, что если  $l > 1$  (т. е.  $\dim L^c > 2$ ), то плоскость  $[L^c]_1 = L^o$  изотропная (лемма 3) и все подпространства  $[L^c]_j$ ,  $j < l$ , вырождены. Из лемм 3, 4, 5 вытекает, что неприводимое пространство  $\mathbb{E}_p^n$  содержит не более двух различных комплексных циклических подпространств  $L^c$ . Более того, оно содержит ровно два

различных подпространства  $L^c, M^c$ , если и только если  $n = 4, p = 2$  и  $L^c = [L^c]_1, M^c = [M^c]_1$  – изотропные плоскости  $L^\circ, M^\circ$ .

**Предложение 5.** Предположим, что пространство  $\mathbb{E}_p^n, p = 2, 3$ , неразложимое относительно изоморфизма  $\mathcal{U} \in O(p, n)$ , содержит комплексное циклическое подпространство  $L^c$ . Тогда  $\mathcal{U}$  не имеет ни одного собственного вектора и ни одного вещественного собственного значения.

**Доказательство.** Во-первых, заметим, что в случае  $L^c = \mathbb{E}_p^n$  утверждение тривиально. Во-вторых, если  $\mathbb{E}_p^n$  содержит два различных комплексных циклических подпространства, то  $\mathbb{E}_p^n = \mathbb{E}_2^4 = L^\circ \oplus M^\circ$ , и утверждение тоже очевидно верно. Следовательно, остается рассмотреть только случай, когда  $\mathcal{U}$  имеет одно единственное комплексное циклическое подпространство  $L^c$  и по крайней мере одно вещественное циклическое подпространство  $M^r$ .

Положим  $L^c = \langle g_1, h_1, \dots, g_l, h_l \rangle$  и  $M^r = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ , где векторы  $e_i$  удовлетворяют соотношениям (4.1) и векторы  $g_j, h_j$  удовлетворяют соотношениям (4.24), (4.25). Докажем, что  $L^c \perp M^r$ , используя индукцию по  $i, j$ .

Из условия сохранения псевдоскалярного произведения и соотношений (4.1), (4.24) получаем равенства

$$\begin{aligned} (e_i, g_j) &= (\mathcal{U}(e_i), \mathcal{U}(g_j)) = \lambda r(c(e_i, g_j) + s(e_i, h_j)), \\ (e_i, h_j) &= (\mathcal{U}(e_i), \mathcal{U}(h_j)) = \lambda r(c(e_i, h_j) - s(e_i, g_j)) \end{aligned} \quad (4.26)$$

для  $i = j = 1$ . Можно рассматривать (4.26) с  $i = j = 1$  как систему двух линейных уравнений с неизвестными  $(e_1, g_1), (e_1, h_1)$ . Определитель такой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda r c - 1 & \lambda r s \\ -\lambda r s & \lambda r c - 1 \end{vmatrix} = (\lambda r c - 1)^2 + (\lambda r s)^2$$

не равен нулю, так как в противном случае  $\lambda r c - 1 = \lambda r s = 0$ , и следовательно,  $s = 0$ . Это противоречит тому, что  $L^c$  – комплексное циклическое подпространство. Таким образом,  $(e_1, g_1) = (e_1, h_1) = 0$ .

Аналогично, из соотношений (4.1), (4.24) имеем

$$\begin{aligned} (e_i, g_1) &= (\mathcal{U}(e_i), \mathcal{U}(g_1)) = \lambda r(c(e_i, g_1) + s(e_i, h_1)) + r(c(e_{i-1}, g_1) + s(e_{i-1}, h_1)), \\ (e_i, h_1) &= (\mathcal{U}(e_i), \mathcal{U}(h_1)) = \lambda r(c(e_i, h_1) - s(e_i, g_1)) + r(c(e_{i-1}, h_1) - s(e_{i-1}, g_1)) \end{aligned} \quad (4.27)$$

для всех  $i \geq 2$ . По предположению индукции,  $(e_{i-1}, g_1) = (e_{i-1}, h_1) = 0$ , и равенства (4.27) дают (4.26) для  $j = 1$  и всех  $i \geq 2$ . Таким образом, мы установили равенства  $(e_i, g_1) = (e_i, h_1) = 0$  для всех  $i = 1, \dots, k$ . Наконец, из (4.1), (4.25) получаем

$$\begin{aligned} (e_i, g_j) &= \lambda r(c(e_i, g_j) + s(e_i, h_j)) + r(c(e_{i-1}, g_j) + s(e_{i-1}, h_j)) + \lambda(e_i, g_{j-1}) + (e_{i-1}, h_{j-1}), \\ (e_i, h_j) &= \lambda r(c(e_i, h_j) - s(e_i, g_j)) + r(c(e_{i-1}, h_j) - s(e_{i-1}, g_j)) + \lambda(e_i, h_{j-1}) + (e_{i-1}, g_{j-1}) \end{aligned}$$

для всех  $i \geq 1, j \geq 2$ . По предположению индукции,  $(e_\alpha, g_\beta) = (e_\alpha, h_\beta) = 0$ , если  $\alpha < i$  или  $\beta < j$ . Мы получили систему (4.26) для всех  $i \geq 1, j \geq 2$ . Таким образом, мы установили равенства  $(e_i, g_j) = (e_i, h_j) = 0$  для всех  $i, j$ , т. е.  $L^c \perp M^r$ .

Так как  $L^c$  – единственное комплексное циклическое подпространство, имеет место разложение

$$\mathbb{E}_p^n = L^c \oplus M_1^r \oplus \dots \oplus M_m^r, \quad m \geq 1,$$

где  $M_1^r, \dots, M_m^r$  – вещественные циклические подпространства. При этом все подпространства  $L^c, M_1^r, \dots, M_m^r$  вырожденные, так как пространство  $\mathbb{E}_p^n$  неразложимо. Как мы доказали выше,  $L^c \perp M_i^r$  для всех  $i = 1, \dots, m$ . Очевидно, инвариантные подпространства  $L^c$  и  $M = M_1^r \oplus \dots \oplus M_m^r$  вырождены и  $L^c \perp M$ . Это дает нам ортогональное разложение  $\mathbb{E}_p^n = L^c \oplus M$ , что противоречит лемме 1.  $\square$

Пусть  $[G^c]_i$  — матрица Грама псевдоскалярного произведения на подпространстве  $[L^c]_i$ ,  $\dim [L^c]_i = 2i$ , и  $U_i$  — матрица (4.23) порядка  $2i$ , для  $i = 1, 2, \dots$ . Из условия сохранения псевдоскалярного произведения получаем

$$U_i^* [G^c]_i U_i = [G^c]_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

Заметим, что если подпространство  $[L^c]_i$  невырождено, то из равенства (4.28) вытекает  $|U_i|^2 = 1$ , и следовательно,  $r = 1$ .

Используя рассуждения, подобные тем, которые мы использовали в случае вещественных циклических подпространств, мы получаем следующий результат.

**Предложение 6.** Предположим, что пространство  $\mathbb{E}_p^n$ ,  $p = 2, 3$ , неразложимо относительно изоморфизма  $\mathcal{U} \in O(p, n)$  и  $\mathcal{U}$  имеет по крайней мере одно комплексное собственное значение. Тогда имеет место одна из трех возможностей:

(a)  $n = 4$ ,  $p = 2$ .  $\mathbb{E}_2^4 = L^\circ \oplus M^\circ$ , где  $L^\circ, M^\circ$  — изотропные инвариантные плоскости с собственными значениями  $re^{\pm i\varphi}, r^{-1}e^{\pm i\varphi}$ . Здесь и ниже  $r > 0$  и  $\varphi \neq 0 \pmod{\pi}$ .

(b)  $n = 4$ ,  $p = 2$ .  $\mathbb{E}_2^4 = L^c$  — 4-мерное циклическое подпространство с собственными значениями  $e^{\pm i\varphi}$ .

(c)  $n = 6$ ,  $p = 2$ .  $\mathbb{E}_2^6 = L^c$  — 6-мерное циклическое подпространство с собственными значениями  $e^{\pm i\varphi}$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $[G^c]_1 = O$  и  $U_1 = rR_\varphi$ . Следовательно, если изоморфизм  $\mathcal{U}$  имеет два различных комплексных собственных значения, он имеет две различные изотропные инвариантные плоскости  $L^\circ, M^\circ$ . Согласно лемме 4, это дает нам разложение  $\mathbb{E}_2^4 = L^\circ \oplus M^\circ$ , т. е. случай (a). По лемме 5, число различных комплексных собственных значений изоморфизма  $\mathcal{U}$  не превосходит 2, и таким образом, нам остается лишь показать, что если  $\mathbb{E}_p^n = L^c$ , то реализуется один из случаев (b) или (c).

Действительно,

$$[G^c]_2 = \begin{bmatrix} O & A \\ A^* & B \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} rR_\varphi & E \\ O & rR_\varphi \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

где обозначения  $\alpha_i, \beta_i$  те же, что и выше. Для  $i = 2$  матричное уравнение (4.28) равносильно системе

$$r^2 R_\varphi^* A R_\varphi = A, \quad (4.30)$$

$$r A R_\varphi + r (A R_\varphi)^* + r^2 R_\varphi^* B R_\varphi = B. \quad (4.31)$$

Покажем, что  $r = 1$  даже в том случае, когда подпространство  $[L^c]_2$  вырождено. Действительно, матричное уравнение (4.30) эквивалентно системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} c(r^2 - 1)\alpha_1 + s(r^2\alpha_2 + \alpha_3) &= 0, & c(r^2 - 1)\alpha_2 - s(r^2\alpha_1 - \alpha_4) &= 0, \\ c(r^2 - 1)\alpha_3 + s(r^2\alpha_4 - \alpha_1) &= 0, & c(r^2 - 1)\alpha_4 - s(r^2\alpha_3 + \alpha_2) &= 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

с неизвестными  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ . Определитель этой системы

$$-(r^2 - 1)^2 (c^4(r^2 - 1)^2 + 2(cs)^2(r^4 + 1) + s^4(r^2 + 1)^2)$$

обращается в нуль в том и только том случае, когда  $r = 1$ . Следовательно, из  $r \neq 1$  следует  $A = O$ . Подставляя  $A = O$  в (4.31), получаем уравнение  $r^2 R_\varphi^* B R_\varphi = B$ , подобное уравнению (4.30). Повторяя те же самые рассуждения, мы заключаем, что  $B = O$ , и следовательно,  $[L^c]_2$  — 4-мерное изотропное подпространство, что противоречит лемме 2.

Подставляя  $r = 1$  в уравнения (4.30), (4.31), получаем

$$AR_\varphi = R_\varphi A, \quad (4.33)$$

$$AR_\varphi + (AR_\varphi)^* + R_\varphi^* BR_\varphi = B. \quad (4.34)$$

Из уравнения (4.33) следует, что  $A = \alpha R_\psi$  с некоторыми  $\alpha, \psi$ . Подставляя полученное выражение для матрицы  $A$  в (4.34), мы получаем

$$B - R_\varphi^* BR_\varphi = \alpha(R_{\varphi+\psi} + R_{\varphi+\psi}^*) = 2\alpha \cos(\varphi + \psi)E,$$

т.е.  $R_\varphi B - BR_\varphi = 2\alpha \cos(\varphi + \psi)R_\varphi$ . Из последнего уравнения вытекает, что  $B = \beta E$  с некоторым числом  $\beta$  и  $\alpha \cos(\varphi + \psi) = 0$ . Далее мы должны рассмотреть отдельно два случая:  $\alpha \neq 0$  и  $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  (при этом  $[[G^c]_2] \neq 0$ ) или  $\alpha = 0$  (при этом  $[[G^c]_2] = 0$ ). В первом случае подпространство  $[L^c]_2 = L^c$  невырождено, и следовательно, оно совпадает с  $\mathbb{E}_2^4$ .

Рассмотрим теперь второй случай:  $\alpha = 0$ . Тогда  $\beta \neq 0$ , так как в противном случае  $[L^c]_2$  – 4-мерное изотропное подпространство, и

$$[G^c]_3 = \beta \begin{bmatrix} O & O & X \\ O & E & Y \\ X^* & Y^* & Z \end{bmatrix}, \quad U_3 = \begin{bmatrix} R_\varphi & E & O \\ O & R_\varphi & E \\ O & O & R_\varphi \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Подставляя матрицы (4.35) в уравнение (4.28) с  $i = 3$ , получаем систему

$$R_\varphi^* X R_\varphi = X, \quad (4.36)$$

$$R_\varphi^* + X R_\varphi + R_\varphi^* Y R_\varphi = Y, \quad (4.37)$$

$$E + Y R_\varphi + R_\varphi^* Y^* + R_\varphi^* Z R_\varphi = Z. \quad (4.38)$$

Уравнение (4.36) подобно уравнению (4.33), оно дает  $X = \rho R_\tau$  с некоторыми  $\rho, \tau$ . Если  $\rho = 0$ , то  $X = O$ , и уравнение (4.37) принимает вид  $R_\varphi Y - Y R_\varphi = E$ . Нетрудно проверить, что последнее матричное уравнение относительно  $Y$  дает несовместную систему линейных уравнений относительно элементов матрицы  $Y$ . Отсюда следует, что  $\rho \neq 0$ . Умножая обе части уравнения (4.37) слева на  $R_\varphi$  и затем подставляя в него  $X = \rho R_\tau$ , после несложных преобразований получаем матричное уравнение  $R_\varphi Y - Y R_\varphi = E + \rho R_{2\varphi+\tau}$ , которое эквивалентно системе

$$s(y_1 - y_4) = \rho \hat{s}, \quad s(y_1 - y_4) = -\rho \hat{s}, \quad s(y_2 + y_3) = \rho \hat{c} + 1, \quad s(y_2 + y_3) = -(\rho \hat{c} + 1),$$

где  $\hat{c} = \cos(2\varphi + \tau)$ ,  $\hat{s} = \sin(2\varphi + \tau)$ . Это дает равенства  $y_1 - y_4 = \hat{s} = 0$  и  $y_2 + y_3 = \rho \hat{c} + 1 = 0$ . Из  $\hat{s} = 0$  и тригонометрического тождества  $\hat{c}^2 + \hat{s}^2 = 1$  следует, что  $2\varphi + \tau = \pi$ , если  $\rho = 1$ ,  $2\varphi + \tau = 0$ , если  $\rho = -1$ , и  $\rho = -\hat{c} = \pm 1$ . В результате мы получаем, что  $X = -R_{2\varphi}^*$  и  $Y = \varrho R_\psi$  с некоторыми  $\varrho, \psi$ .

Теперь умножим обе части уравнения (4.38) слева на  $R_\varphi$  и затем подставим выражение  $Y = \varrho R_\psi$ . Это дает нам матричное уравнение  $R_\varphi Z - Z R_\varphi = R_\varphi + \varrho(R_{2\varphi+\psi} + R_\psi^*)$ , которое эквивалентно системе

$$s(z_1 - z_3) = s(z_3 - z_1) = s + \varrho S, \quad 2sz_2 = -2sz_2 = c + \varrho C, \quad (4.39)$$

где

$$C = \cos(2\varphi + \psi) + \cos \psi = 2c \cos(\varphi + \psi),$$

$$S = \sin(2\varphi + \psi) - \sin \psi = 2s \cos(\varphi + \psi).$$

Из уравнений (4.39) следует, что  $z_1 = z_3$ ,  $z_2 = 0$  и  $s + \varrho S = c + \varrho C = 0$ . Окончательно мы заключаем, что общее решение системы (4.36)–(4.38) выражается формулой

$$X = -R_{2\varphi}^*, \quad Y = \varrho R_\psi, \quad Z = zI, \quad \varrho = \frac{-1}{2 \cos(\varphi + \psi)}, \quad (4.40)$$

где  $z, \psi$  – свободные переменные,  $\varphi + \psi \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ .

Подставляя матрицы  $X, Y, Z$  из (4.40) в матрицу  $[G^c]_3$ , можно заметить, что ее определитель  $|[G^c]_3| = \beta^6 |R_{2\varphi}|^2 = \beta^6 > 0$ , так как  $\beta \neq 0$ . Более того, простое вычисление показывает, что  $[G^c]_3$  имеет сигнатуру  $(2, 4)$ , т. е.  $[L^c]_3 = L^c = \mathbb{E}_2^6$ .  $\square$

Для завершения доказательства теорем 3 и 4 нам остается применить лемму 5 и предложения 2–6.

## Литература

- [1] Алексеевский Д.В., Винберг Э.Б., Солодовников А.С. *Геометрия пространств постоянной кривизны*. Геометрия–2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 29. - М.: ВИНИТИ, 1988. с. 5-146.
- [2] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. *Indefinite linear algebra and applications*. - Basel: Birkhauser, 2005.
- [3] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра*. - М.: Наука, 1986.
- [4] Фаддеев Д.К. *Лекции по алгебре*. - М.: Наука, 1984.
- [5] Шафаревич И.Р., Ремизов А.О.. *Линейная алгебра и геометрия*. - М.: Физматлит, 2009.
- [6] Sergeichuk V.V. *Canonical matrices of isometric operators on indefinite inner product spaces* // Linear Algebra Appl. - V. 428. - No 1. - 2008. - p. 154-192.

Ремизов Алексей Олегович,  
CNRS, École Polytechnique (France),  
старший научный сотрудник Института  
проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: alexey-remizov@yandex.ru

# Метод вывода формулы Валлиса и формул разложения гиперболических функций в бесконечные произведения

C. H. Сазонов

Предложен простой вывод формулы разложения функции “гиперболический тангенс” в бесконечное произведение дробно-рациональных функций методами теории потенциала. Предельным переходом, из этой (основной) формулы получается формула Валлиса. Комбинируя основную формулу и формулу Валлиса, можно вывести формулы для разложения гиперболических функций в бесконечные произведения квадратных двучленов, аналогичные формулам Эйлера для разложения синуса и косинуса.

## Введение

В 1655 г. Валлис [1], том II, гл. 7, а несколько позже и независимо, Менголи [2], открыли формулу, являющуюся одной из «жемчужин» математики:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots . \quad (1)$$

Путь к выводу (1) заключался в рассмотрении значений выражений типа

$$J(p, q) = 1 / \int_0^1 (1 - x^{1/p})^q dx$$

(в современной терминологии) при различных целых  $p$  и  $q$  и экстраполяции  $J(p, q)$  к  $p = q = 1/2$ . Строгий вывод формулы (1), рассматриваемый в вузовских учебниках математики (например в [3]) основан на сравнении значений интегралов  $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx$  и  $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx$  ( $n$  — натуральное число) и последующем переходе к пределу  $n \rightarrow \infty$ . За последние два десятилетия опубликован целый ряд новых способов доказательства формулы (1), в том числе доказательство, использующее методы квантовой механики, [4]; там же список литературы с предыдущими способами вывода (1). Именно, сравнивая энергии различных квантовых состояний электрона в атоме водорода, соответствующих в классическом пределе одной и той же эллиптической орбите, авторы получают

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{(l+1)^2}{l+1,5} \cdot \left[ \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+1,5)} \right]^2 = 1, \quad (2)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция,  $l$  — натуральное число, откуда (1) следует непосредственно.

Ниже предлагается простой вывод (1) методами классической теории поля, доступный студенту педвуза (и классического университета), знакомому с электростатикой в объёме [5] и с основами математического анализа, включая элементарные сведения о рядах Фурье. Как следствие данного метода, получаются формулы для разложения в бесконечные произведения функций  $\sinh x$  и  $\cosh x$ .

## Расчётная часть

Рассмотрим положительную полуплоскость  $x > 0$  плоскости  $Oxy$  декартовой системы координат  $Oxyz$ , разделённую на полосы равной толщины  $a$  прямыми  $x_n = n \cdot a$ , где натуральное число  $n$  нумерует полосу справа от точки  $x_n$ .

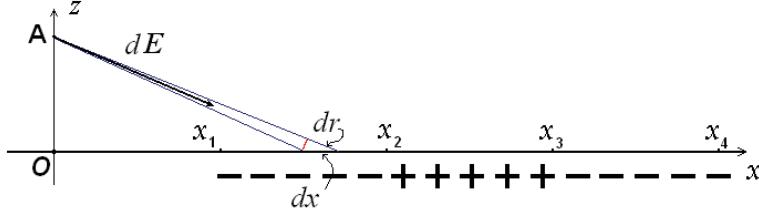


Рис. 1. Область  $x_1 \leq x \leq x_4$  декартовой системы координат  $Oxyz$ , заряженная знакопеременным зарядом постоянной по модулю поверхностной плотности.  $d\mathbf{E}$  — вектор напряжённости электрического поля в точке А, создаваемого полоской шириной  $dx$

Будем наносить на  $n$ -ую полосу электрический заряд с поверхностной плотностью

$$\sigma_n(\mathbf{r}) = (-1)^n \cdot \sigma, \quad (3)$$

$\sigma > 0$ , последовательно переходя от полосы с номером  $n$  к полосе с номером  $(n+1)$ . Пусть  $E_{x,n}(z)$  — величина  $x$ -компоненты напряжённости электрического поля в точке А с координатами  $(0, 0, z)$  при заполнении зарядом первых  $n$  полос (далее  $z > 0$ ). По принципу суперпозиции электрического поля,

$$E_{x,n}(z) = \sum_{k=1}^n \Delta E_{x,k}(z), \quad (4)$$

где  $\Delta E_{x,k}(z)$  — компонента напряжённости поля  $k$ -ой полосы в точке А (на рисунке  $n = 3$ ). Величина  $\Delta E_{x,k}(z)$ , в свою очередь, может быть вычислена путём интегрирования полей полосок бесконечно малой ширины  $dx$ , параллельных оси  $Oy$ , на которые разбивается  $k$ -ая полоса (на рисунке показана одна из таких полосок):

$$\Delta E_{x,k}(z) = - \int_{x=x_k}^{x_{k+1}} \left( \frac{2\sigma_k}{r(x)} dx \right) \cdot \cos \varphi(x). \quad (5)$$

Здесь выражение в скобках под интегралом — вычисленный по теореме Гаусса модуль вектора  $d\mathbf{E}$  напряжённости поля в точке А, созданного полоской, находящейся от А на расстоянии

$$r(x) = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad (6)$$

а  $\varphi(x)$  — угол между вектором  $d\mathbf{E}$  и осью  $Ox$ .

Как видно из рисунка,  $dx \cdot \cos \varphi(x) = dr$ , поэтому

$$\Delta E_{x,k}(z) = 2\sigma_k \cdot \ln \frac{r(x_k)}{r(x_{k+1})}. \quad (7)$$

Функциональный ряд (4) при  $n \rightarrow \infty$  равномерно сходится (по признаку Вейерштрасса) к функции

$$E_x(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta E_{x,k}(z). \quad (8)$$

При  $z \neq 0$ , величину  $E_x(z)$  можно найти и по-другому, а именно, как

$$E_x(z) = \frac{1}{2} \cdot E_{0,x}(z) - \Delta E_x(z), \quad (9)$$

где  $E_{0,x}(z)$  — поле в точке А поверхностного заряда, распределённого по всей плоскости  $Oxy$  с плотностью

$$\sigma(x) = \frac{4\sigma}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \sin \frac{\pi}{a} (2k+1)x, \quad (10)$$

(разложение в ряд Фурье функции  $\sigma(x)$ , равной  $\sigma(x) = -\sigma$  при  $-a < x < 0$ ,  $\sigma(x) = +\sigma$  при  $0 < x < a$  и периодически продолженной в обе стороны), а  $\Delta E_x(z)$  — поле в этой-же точке заряженной полосы  $0 < x < a$ , несущей заряд плотностью  $\sigma(x) = +\sigma$ . В соответствии с (7),

$$\Delta E_x(z) = 2\sigma \cdot \ln \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}. \quad (11)$$

Величина же  $E_{0,x}(z)$  найдётся, как

$$E_{0,x}(z) = -\left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x} \right|_A, \quad (12)$$

где  $\varphi(\mathbf{r})$  — потенциал системы зарядов (10) в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ . Решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (13)$$

соответствующее данной системе зарядов, находится методом разделения переменных [6] и при  $z > 0$  имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{8\sigma \cdot a}{\pi (2m+1)^2} \sin \frac{(2m+1)\pi \cdot x}{a} \cdot e^{-\frac{(2m+1)\pi \cdot z}{a}}, \quad (14)$$

откуда для поля в точке A:

$$E_x(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8\sigma}{2m+1} \cdot e^{-\frac{(2m+1)\pi \cdot z}{a}}. \quad (15)$$

В выражении в правой части (15), легко узнать разложение в ряд Тейлора функции  $G(t) = 4\sigma \cdot (\ln(1+t) - \ln(1-t))$ , где  $t = \exp(-\pi z/a)$ . Подставляя (11) и (15) в (9) и потенцируя, получим

$$\frac{\tanh \frac{\pi \cdot z}{2a}}{\left(\frac{z}{r_1}\right)} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_4}{r_3} \cdot \frac{r_4}{r_5} \dots. \quad (16)$$

Формула Валлиса (1) получается из (16) предельным переходом при  $z \rightarrow 0$ .

Далее, разделив (16) на (1), получим

$$\frac{\tanh \frac{\pi \cdot z}{2a}}{\left(\frac{\pi \cdot z}{2a}\right)} = \frac{a}{r_1} \cdot \frac{\left(\frac{r_2}{2}\right)}{\left(\frac{r_1}{1}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{r_2}{2}\right)}{\left(\frac{r_3}{3}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{r_4}{4}\right)}{\left(\frac{r_3}{3}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{r_4}{4}\right)}{\left(\frac{r_5}{5}\right)} \dots, \quad (17)$$

перестановка сомножителей в правой части частного от деления этих формул допустима в силу абсолютной сходимости ряда  $\sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(r_{2i}^2 / (r_{2i-1} \cdot r_{2i+1})\right)$ .

Делая в (17) замену переменной  $z = 2a \cdot q$  и попарно объединяя сомножители в правой части, приходим к формуле

$$\frac{\tanh(\pi \cdot q)}{\pi \cdot q} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \left(\frac{q}{k}\right)^2}{1 + \left(\frac{q}{k-1/2}\right)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{q}{k}\right)^2\right)}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{q}{k-1/2}\right)^2\right)}. \quad (18)$$

Положим  $\pi \cdot q \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{q}{k}\right)^2\right) = F(\pi \cdot q)$ . Тогда, в силу своего определения,  $F(2\pi \cdot q) = 2F(\pi \cdot q) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{q}{k-1/2}\right)^2\right)$ . Функциональное уравнение  $F(2t) = 2F^2(t) \cdot \coth t$ , ( $t = \pi \cdot q$ ), в которое превращается при этом формула (18), подстановкой  $F(t) = \sinh(t) \cdot \exp A(t)$  сводится к виду

$A(2t) = 2A(t)$ , очевидное решение которого — линейная функция  $A(t) = p \cdot t$ . Так как  $F(t)$  — a priori функция нечётная, то  $p = 0$  и мы приходим к разложению в бесконечное произведение гиперболического синуса

$$\frac{\sinh(\pi \cdot q)}{\pi \cdot q} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{q}{k}\right)^2\right), \quad (19)$$

являющемся аналогом известной формулы Эйлера

$$\frac{\sin(\pi \cdot q)}{\pi \cdot q} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{q}{k}\right)^2\right). \quad (20)$$

Разделив (19) на (18), получаем разложение гиперболического косинуса:

$$\cosh(\pi \cdot q) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{q}{k - 1/2}\right)^2\right). \quad (21)$$

### Заключение

Предложенный вывод формулы Валлиса:

А — демонстрирует неожиданную связь между математикой и классической физикой, что может заинтересовать студента ВУЗа как математической, так и физической специальности,

Б — имеет следствием новый метод вывода формул (19) и (21) без использования аппарата комплексных чисел (до сих пор в учебниках высшей математики [3] вывод этих формул без них не обходится).

### Литература

1. История математики с древнейших времён до начала XIX столетия, под ред. А.П. Юшкевича, Т. I–III. - М.: Наука, 1970.
2. Whiteside D.T. Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century // Arch. Hist. Exact Sci. - Vol. I. - Chapt. 4. - 1961. - p. 179-388.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики, том III, часть 2, гл. III. - СПб: БХВ — Петербург, 2010. - 816 С.
4. Friedmann T., Hagen C.R. Quantum Mechanical Derivation of the Wallis Formula for  $\pi$  // J. Math. Phys. - Vol. 56. - No 11. - 2015. - p.112101.
5. Тамм И.Е. Основы теории электричества, Гл.1. - М.: Наука, 1976.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, §44. - М: Наука, 1983. - 616 С.

Сазонов Сергей Николаевич,  
старший преподаватель кафедры физики  
Уфимского Государственного Авиационного  
Технического Университета.

SazonovSN@mail.ru

# **Практические аспекты преподавания дисциплины «Линейная алгебра» для химико-технологических специальностей**

*K. Ю. Тархов*

В работе рассматриваются и обсуждаются форма, содержание и структура дисциплины «Линейная алгебра» как одного из основных разделов в математической подготовке специалистов химико-технологического профиля. Также приводятся основные рубежные контрольные мероприятия (с указанием наименования, количества, структуры, количественной оценки), проводимые при изучении данного курса.

. В большинстве высших учебных заведений (институтах и университетах) линейная алгебра (наряду с разделами математического анализа, теории вероятностей и математической статистикой, некоторыми дополнительными главами высшей математики) является одной из основных дисциплин в курсе общей математической подготовки обучающихся по химическим, техническим и химико-технологическим специальностям и направлениям подготовки.

Линейная алгебра нашла широкое применение в различных разделах химии и химической технологии: стехиометрический анализ (построение атомной и стехиометрических матриц, определение числа независимых реакций) [1], физико-химические основы реакционных процессов и теория механизмов сложных реакций [2], термодинамико-топологический анализ [3, 4, 5], расчет смесей сложного состава [6] и многое другое [7, 8]. Поэтому теория и методы, применяемые в линейной алгебре, остаются актуальными до сих пор для исследования различных физико-химических явлений и процессов.

Далее рассмотрим структуру и содержание курса «Линейная алгебра» на примере ее преподавания в одном из московских технологических университетов, где осуществляется подготовка по следующим направлениям:

- «Химическая технология» (профили «Химическая технология неорганических веществ», «Технология и переработка полимеров», «Химическая технология органических веществ»);
- «Биотехнология»;
- «Химия» (профили «Аналитическая химия», «Неорганическая химия», «Медицинская и фармацевтическая химия»);
- «Техносферная безопасность» (профиль «Инженерная защита окружающей среды»).

Следует отметить, что в данной работе в качестве примеров приводятся задания, используемые на практике в течение многих лет.

Основными видами учебной работы по дисциплине являются лекционные и практические (семинарские) занятия. Количество часов лекционных и практических занятий, отводимых на изучение того или иного раздела или темы (а также всей дисциплины в целом), определяется учебным планом и рабочей программой. В общем случае количество лекций и семинаров варьируется от 13 до 16 (в зависимости от типа организации графика учебного процесса по семестровому или триместровому типу [9]). Изучение дисциплины заканчивается экзаменом.

Курс «Линейная алгебра» включает в себя изучение пяти крупных разделов:

- 1) матрицы и определители;
- 2) системы линейных алгебраических уравнений;
- 3) векторная алгебра;
- 4) аналитическая геометрия;
- 5) линейные операторы.

В Таблице 1 представлено основное содержание перечисленных выше разделов.

**Таблица 1.** Основное содержание дисциплины «Линейная алгебра»

Раздел	Содержание раздела
<i>Матрицы и определители</i>	Понятие линейного пространства. Примеры линейных пространств. Арифметическое линейное пространство $R^n$ . Размерность и базис линейного пространства. Размерность и стандартный базис арифметического линейного пространства $R^n$ . Матрицы, типы матриц. Линейные операции над матрицами, операция транспонирования матрицы и операция умножения матриц и их свойства. Ранг и база матрицы и конечной системы элементов линейного пространства. Формулировка теоремы о ранге. Линейная зависимость строк (столбцов) квадратной матрицы с нулевым определителем. Элементарные преобразования матрицы. Нахождение ранга матрицы путем приведения ее к ступенчатому виду. Определители квадратных матриц произвольного порядка: миноры и алгебраические дополнения. Свойства определителей. Вычисление определителей путём приведения к ступенчатому виду. Обратная матрица и метод её нахождения.
<i>Системы линейных уравнений</i>	Системы линейных уравнений и их классификация по числу решений. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Необходимое и достаточное условие совместности системы линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений, их совместность. Условия определённости и неопределенности однородной системы. Условие существования ненулевого решения для однородной системы, у которой количество уравнений равно количеству неизвестных. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Решение линейных матричных уравнений. Решение определённой системы линейных уравнений матричным способом. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
<i>Векторная алгебра</i>	Геометрические векторы. Связанные и свободные геометрические векторы. Линейные операции над геометрическими векторами. Операция сложения геометрических векторов, правило треугольника и правило параллелограмма. Компланарность векторов. Операция умножения геометрического вектора на вещественное число, коллинеарность векторов, орт и модуль вектора. Алгебраические свойства линейных операций над векторами. Линейные комбинации векторов. Понятие стандартного (ортонормированного) базиса на плоскости и в пространстве. Определения линейной зависимости и линейной независимости векторов. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости. Геометрический смысл линейной зависимости и линейной независимости систем, состоящих из трех, двух и одного вектора. Определение базиса для пространства геометрических векторов. Разложение произвольного геометрического вектора по любой заданной тройке ненулевых некомпланарных векторов. Теорема о единственности разложения геометрического вектора по данному базису. Координатная строка (столбец) вектора. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами. Радиус-вектор, координаты точки, декартова система координат. Связь между координатами точек и координатами векторов. Определение операции скалярного умножения векторов. Свойства скалярного произведения векторов. Выражение скалярного произведения векторов через их координаты в произвольном базисе. Выражение длины (модуля) вектора и угла между векторами через скалярное произведение векторов. Ортонормированный базис. Стандартный базис. Выражение скалярного произведения через координаты векторов-сомножителей относительно ортонормированного (стандартного) базиса. Ортогональная составляющая вектора в заданном направлении и проекция вектора на направление. Формула для вычисления проекции. Направляющие косинусы вектора, их свойства. Векторное произведение векторов, примеры векторного умножения физических величин. Геометрический смысл модуля векторного произведения. Алгебраические свойства векторного произведения. Выражение векторного произведения через координаты векторов-сомножителей относительно правого ортонормированного (стандартного) базиса. Смешанное произведение трех векторов, геометрический смысл его абсолютной величины и знака. Правая и левая тройки векторов. Алгебраические свойства смешанного произведения трех векторов. Выражение смешанного произведения трех векторов через координаты векторов-сомножителей относительно правого ортонормированного (стандартного) базиса. Геометрические приложения скалярного, векторного и смешанного произведений векторов (формулы для вычисления длин, проекций, углов, площадей, объемов). Геометрические условия, при которых равно нулю скалярное, векторное, смешанное произведение векторов.
<i>Аналитическая геометрия</i>	Плоскость в пространстве. Уравнение плоскости, заданной точкой и нормалью. Неполные уравнения плоскости и их геометрический смысл. Уравнение плоскости «в отрезках». Угол между плоскостями. Прямая в пространстве. Уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором в двух формах (параметрической и канонической). Задание прямой пересечением двух плоскостей. Углы между двумя прямыми в пространстве, между двумя плоскостями, между прямой и плоскостью.

Линейные операторы	Линейные операторы. Задание линейного оператора в конечномерном пространстве с помощью матрицы. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Характеристическое уравнение. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора.
--------------------	---

В таблице 2 представлены основные рубежные контрольные мероприятия (РКМ), предусмотренные для проведения в курсе «Линейная алгебра», и их количественная оценка в баллах.

**Таблица 2.** Основные виды учебной работы и баллы за них

№	Вид РКМ	Название	Баллы
<b>1</b>	Расчетная работа №1	Решение системы линейных уравнений методом Гаусса	4/10
<b>2</b>	Контрольная работа №1	Векторная алгебра и аналитическая геометрия	18/15
<b>3</b>	Контрольная работа №2	Матрицы, определители и системы уравнений	18/15
<b>4</b>	Расчетная работа №2	Нахождение собственных значений и векторов линейного оператора	10/10

Из таблицы 2 видно, что РКМ охватывают все тематические разделы курса, при этом общая сумма баллов (при различных вариантах оценивания того или иного РКМ), которую может получить студент, равна 50.

Контрольные работы по темам «Векторная алгебра и аналитическая геометрия» и «Матрицы, определители, системы уравнений» проводятся на практическом занятии. Время их выполнения совпадает с продолжительностью соответствующей формы организации учебного процесса (семинара). Расчетные работы по темам «Решение системы линейных уравнений методом Гаусса» и «Нахождение собственных значений и векторов линейного оператора» могут иметь и другой формат: домашняя контрольная работа (ДКР), индивидуальное домашнее задание (ИДЗ).

**РАСЧЕТНАЯ РАБОТА №1** по теме «Решение системы линейных уравнений методом Гаусса» представляет собой вариант, в котором содержится задание на решение системы трех или четырех уравнений с четырьмя или пятью неизвестными методом Гаусса. Система может быть представлена как в стандартном виде, например,

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 11 \\ 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 10 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\ 7x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 11 \end{cases},$$

так и сразу в матричном виде, например,

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & -3 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 7 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 8 & -4 & 3 & 5 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & 7 & 12 & 9 & 10 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 8 & 6 & 8 \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & 1 & 6 & 7 \\ -4 & 2 & 0 & -2 & -6 \\ 9 & 4 & 5 & 5 & 8 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 8 & 3 & -19 & 24 \end{array} \right).$$

Банк заданий этого РКМ может включать до 50 вариантов.

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1** по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия» включает в себя от трех до пяти заданий, основными типами которых являются следующие:

**1)** по известным координатам вершин пирамиды  $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), A_4(x_4, y_4, z_4)$  найти:

- длину одного из ребер;
- уравнение определенного ребра;
- объем пирамиды;
- угол между двумя ребрами;
- площадь одной из граней;
- уравнение плоскости какой-либо из граней.

**2)** даны векторы  $\bar{p}$  и  $\bar{q}$ , угол между которыми равен  $\theta$ , а их длины  $c$  и  $d$  соответственно. Также имеются векторы  $\bar{a} = \alpha\bar{p} \pm \beta\bar{q}$  и  $\bar{b} = \gamma\bar{p} \pm \nu\bar{q}$ . Требуется найти:

- проекцию одного вектора на направление другого;
- угол между любыми из данных векторов;
- длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ ;
- площадь этого параллелограмма;
- высоту параллелограмма, опущенную на сторону, соответствующую тому или иному из данных или новых векторов (например,  $\bar{f} = \bar{a} \pm \bar{b}$ ).

**3)** по известным координатам векторов  $\bar{e}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \bar{e}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}, \bar{e}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$  определить:

- a) являются ли они линейно зависимыми;
- b) правой или левой является указанная тройка векторов.

В данном задании может быть также дано другое количество векторов (два или четыре), для которых потребуется определить их компланарность или коллинеарность, а также найти линейную зависимость.

**4)** В данном пункте возможны следующие задачи на:

- A) нахождение угла между прямыми, плоскостями или прямой и плоскостью;
- B) написание уравнения плоскости, проходящей через точку и прямую, проходящей через точку перпендикулярно/параллельно прямой, проходящей через точку параллельно/перпендикулярно другой плоскости;
- B) определение особенностей расположения друг относительно друга двух прямых, двух плоскостей или прямой и плоскости.

**5)** по известным координатам вершин треугольника  $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$  и  $C(x_3, y_3, z_3)$  написать уравнение прямой, проходящей через одну из вершин треугольника, перпендикулярно его плоскости.

Банк заданий этого РКМ обычно включает 10 основных вариантов, которые могут быть переработаны в большее количество.

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2** по теме «*Матрицы, определители, системы уравнений*» включает в себя четыре или пять заданий следующих типов:

1) вычислитель определитель  $4 \times 4$ , например,  $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & -4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ ;

2) найти обратную матрицу  $A^{-1}$ , например,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

3) перемножить матрицы различной размерности (например,  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

4) решить систему уравнений матричным методом и методом Крамера:

два уравнения с двумя неизвестными, например,  $\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 11 \end{cases}$ ,

три уравнения с тремя неизвестными, например,  $\begin{cases} -x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 18 \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

5) исследовать систему уравнений, применяя метод Гаусса:

три уравнения с тремя неизвестными, например,  $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$ ,

три уравнения с четырьмя неизвестными, например,  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\ 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$ ,

четыре уравнения с тремя неизвестными, например,  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$ .

Банк заданий этого РКМ обычно включает 10 основных вариантов, которые могут быть переработаны в большее количество.

Каждый вариант **РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ №2** по теме «*Нахождение собственных значений и векторов линейного оператора*» содержит в себе матрицу линейного оператора  $3 \times 3$ , для которого

необходимо найти собственные векторы и числа, например,  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ . Банк заданий этого

РКМ обычно включает 30 основных вариантов.

Фонд оценочных средств (ФОС) по дисциплине «Линейная алгебра» в высшей школе может формироваться за счет вышеуказанных типов рубежных контрольных мероприятий (РКМ) для проведения текущего контроля. В свою очередь балльно-рейтинговая система служит оценкой результативности освоения обучающимися той или иной темы в отдельности и всей дисциплины в целом.

На основе формирования общепрофессиональных и профессиональных компетенций (ОПК и ПК) в ходе изучения и освоения дисциплины «Линейная алгебра» обучающиеся приобретают теоретические знания, практические навыки и умения для описания, исследования и анализа объектов и процессов, а также для обработки и представления полученных результатов.

## Литература

1. Солохин А.В., Темкин О.Н. Стехиометрия сложных реакций. - М.: МИТХТ. - 1984. - 55 с.
2. Зейганик А.В., Брук Л.Г., Темкин О.Н., Шестаков Г.К. Физико-химические основы реакционных процессов органического синтеза. - М.: МИТХТ. - 2000. - 145 с.
3. Жаров В.Т., Серафимов Л.А. Физико-химические основы дистилляции и ректификации. - Л.: Химия. - 1975. - 240 с.
4. Тархов К.Ю., Серафимов Л.А. Свойства матрицы относительных летучестей многокомпонентных зеотропных и азеотропных смесей. // Вестник МИТХТ. - 2011. - Т. 6. - № 2. - С. 119-125.
5. Тархов К.Ю., Серафимов Л.А. Эффективность массопереноса в процессе ректификации бинарных и многокомпонентных смесей. // Вестник МИТХТ. - 2010. - Т. 5. - № 1. - С. 81-87.
6. Михайлова Н.А., Мудракова О.А., Нагаева И.А. Элементы линейной алгебры в химии. - М.: МИТХТ, 2011. - 57 с.
7. Скатецкий В.Г., Свиридов Д.В., Яшкин В.И. Математические методы в химии. - Мин.: ТетраСистемс, 2006. - 368 с.
8. Степанов Н.Ф., Ерлыкина М.Е., Филиппов Г.Г. Методы линейной алгебры в физической химии. - М.: МГУ, 1976. - 361 с.
9. Тархов К.Ю. Некоторые аспекты изучения курса «Общая и неорганическая химия» при различных формах организации учебного процесса в высших учебных заведениях // Современное образование: актуальные вопросы, достижения и инновации: сборник статей XIII Международной научно-практической конференции, Пенза, 25 января 2018 г. - Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение», 2018. - С. 198-200.

Тархов Кирилл Юрьевич,  
заместитель начальника отдела  
по научно-исследовательской деятельности  
ФГБОУ ВО «Московский государственный  
университет технологий и управления  
имени К.Г. Разумовского (Первый казачий университет)»,  
кандидат технических наук.

E-mail: k.tarkhov@mgutm.ru

# Тесты в духе GRE

*А. Ю. Эвнин*

Приводятся тесты по математике для студентов, составленные в духе GRE (Graduate Record Examinations) — экзамена, который сдают при поступлении в аспирантуру в университетах Соединенных Штатов Америки. Эти тесты ежегодно (начиная с 2010 г.) проходят в Южно-Уральском государственном университете как этап олимпиады «Прометей». В данном номере опубликованы тесты 2010 – 2013 гг. Тесты 2014 – 2018 гг. будут опубликованы в следующем номере.

Начиная с 2009 г. проводятся Всероссийские студенческие Интернет-олимпиады по ряду дисциплин. Олимпиада по математике является частью Открытой международной Интернет-олимпиады. Форма проведения первых двух туров Интернет-олимпиады — компьютерный тест, а заключительный тур проводится в традиционной форме.

В форме теста также проводится Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике — ежегодное математическое состязание студентов и аспирантов. Здесь участники решают в течение 5 часов 30 задач; проверяются только ответы.

Широко распространено тестирование при проведении вступительных экзаменов в вузы и аспирантуру во многих странах.

Так, для поступления в некоторые вузы Индии нужно сдать тест WBJEE (West Bengal Joint Entrance Examination). В это трудно поверить, но тест состоит из 75 задач (с выбором ответа из 4 вариантов), которые нужно решить всего за 2 часа [4].

Поступающие в колледжи и вузы США сдают Scholastic Assessment Test (SAT) [5]. Тест по математике длится 80 мин и состоит из 45 заданий с выбором ответа из 4 вариантов и 13 заданий, где нужно дать числовой ответ. За правильный ответ начисляется 1 балл, за неверный снимается четверть балла. Абитуриенты вузов с повышенными требованиями к уровню математической подготовки (например, Массачусетского технологического института) сдают также специализированный экзамен по математике SAT Subject Test in Mathematics [6]. Этот тест длится 1 час и состоит из 50 заданий с выбором ответа из 5 вариантов (при этом разрешается пользоваться калькуляторами).

При поступлении в аспирантуру в американские университеты сдают GRE (Graduate Record Examinations) [1–3]. В американском математическом teste 66 задач, на решение которых отводится 170 мин. На каждый вопрос предлагается 5 вариантов ответов, из которых нужно выбрать единственно верный.

В Южно-Уральском государственном университете (ЮУрГУ) с целью отбора к участию в различных олимпиадах и выявления способных студентов ежегодно (начиная с 2010 г.) также проводится тестирование. В teste 32 задачи, длительность проведения 90 минут. За правильный ответ участник получает 3 балла, за неправильный теряет 1 балл; за отсутствие ответа на вопрос баллы не начисляются (и не снимаются). Таким образом, за тест можно получить от –32 до 96 баллов.

Наш тест по темам задач и уровню их сложности составлен по образцу указанного выше теста GRE.

С 2013 г. отборочный тур совмешён с заключительным туром олимпиады «Прометей». С этого же года при проведении теста в ЮУрГУ используется компьютерная оболочка, разработанная доцентом А.К. Демидовым. Она позволяет добиться большей гибкости в постановке задач. Наряду с задачами, в которых выбирается правильный ответ из предложенных, имеются также задачи, в которых можно выбрать несколько вариантов ответа, а также задачи с числовыми ответами. Кроме того, многие задачи представлены в нескольких вариантах, выбор из которых происходит с помощью генератора случайных чисел.

Тестирование проводится через интернет. Это позволяет принять участие в тесте студентам ЮУрГУ, находящимся за пределами Челябинска, а также студентам из других вузов. Результаты тестов можно найти в группе «Математический конкурс в ЮУрГУ» (социальная сеть «В контакте»).

Опыт проведения тестов в ЮУрГУ показывает, что лучших результатов добиваются те, кто побеждает и на традиционных олимпиадах. Этот же вывод можно сделать и по итогам олимпиад Белорусско-Российского университета.

Разумеется, тесты можно использовать и при различных видах аттестации студентов.

В статье приведены задачи и ответы тестов за 2010 – 2018 гг.: в настоящем номере 2010 – 2013 гг., в следующем номере будут опубликованы тесты 2014 – 2018 гг. При их составлении активно использовались материалы [1–4]. Компьютерный вариант этих тестов за 2010 – 2015 гг. доступен на сайте <http://contest.susu.ac.ru>.

Дополнительные сведения о математических олимпиадах ЮУрГУ можно найти в [7–15].

## 2010 год

**1.** На плоскости  $Oxy$  параметрически задана кривая  $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0; \pi]$ . Её длина равна

- 1) 3;      2)  $\pi$ ;      3)  $3\pi$ ;      4)  $\frac{\pi}{2}$ ;      5)  $\frac{3}{2}$ .

**2.** Уравнение касательной к графику функции  $y = x + e^x$  в точке с абсциссой  $x_0 = 0$

- 1)  $y = x$ ;    2)  $y = x + 1$ ;    3)  $y = x + 2$ ;    4)  $y = 2x$ ;    5)  $y = 2x + 1$ .

**3.** Пусть уравнение  $e^x + x - 2 = 0$  имеет  $k$  действительных корней на отрезке  $[0; 1]$  и  $n$  действительных корней вне этого отрезка. Какое из следующих утверждений верно?

- 1)  $k = 0, n = 1$ ;    2)  $k = 1, n = 0$ ;    3)  $k = n = 1$ ;    4)  $k > 1$ ;    5)  $n > 1$ .

**4.** Какая из следующих окружностей имеет наибольшее число точек пересечения с параболой  $x^2 = y + 4$ ?

- 1)  $x^2 + y^2 = 1$ ;    2)  $x^2 + y^2 = 2$ ;    3)  $x^2 + y^2 = 9$ ;    4)  $x^2 + y^2 = 16$ ;    5)  $x^2 + y^2 = 25$ .

**5.** Вычислите  $\int_{-3}^3 |x + 1| dx$ .

**6.** Какова наибольшая возможная площадь треугольника, у которого одна из вершин является центром окружности радиуса 1, а две другие вершины лежат на этой окружности?

- 1)  $\frac{1}{2}$ ;    2)  $\sqrt{2}$ ;    3) 1;    4)  $\pi$ ;    5)  $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}$ .

**7.** Пусть  $J = \int_0^1 \sqrt{1 - x^4} dx$ ,  $K = \int_0^1 \sqrt{1 + x^4} dx$ ,  $L = \int_0^1 \sqrt{1 - x^8} dx$ . Тогда

- 1)  $J < L < 1 < K$ ;    2)  $J < L < K < 1$ ;    3)  $L < J < 1 < K$ ;  
4)  $L < J < K < 1$ ;    5)  $L < 1 < J < K$ .

**8.** Пусть  $A$  – матрица размером  $2 \times 2$ , в которой все суммы по строкам и столбцам равны числу 2010. Рассматриваются векторы  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Какие из них являются собственными векторами матрицы  $A$ ?

**9.** Какой цифрой оканчивается десятичная запись числа  $7^{125}$ ?

**10.** Пусть функция  $f$  определена и непрерывна на отрезке  $[-2; 3]$ . Какое из следующих утверждений не обязательно справедливо?

- 1)  $f$  ограничена;
- 2) интеграл  $\int_{-2}^3 f(t) dt$  существует;
- 3) для любого  $c$  между  $f(-2)$  и  $f(3)$  существует  $x \in [-2; 3]$ , для которого  $f(x) = c$ ;
- 4) для некоторого  $M$  из множества значений функции  $f$   $\int_{-3}^2 f(t) dt = 5M$ ;
- 5) существует предел  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ .

**11.** Пусть  $D$  — фигура, расположенная в первой четверти координатной плоскости и ограниченная осями координат и кривой  $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ . Объём тела, полученного вращением этой фигуры вокруг оси  $Ox$ , равен

$$1) \frac{\pi}{2}; \quad 2) \pi; \quad 3) \frac{\pi^2}{4}; \quad 4) \frac{\pi^2}{2}; \quad 5) \infty.$$

**12.** Сколько действительных корней имеет многочлен  $2x^5 + 8x - 7$ ?

**13.** Пусть  $f$  и  $g$  — дважды дифференцируемые функции, определённые на  $\mathbb{R}$ . Пусть  $f'(x) > g'(x)$  при всех  $x > 0$ . Какое из следующих неравенств обязательно выполняется для всех  $x > 0$ ?

- 1)  $f(x) > g(x);$
- 2)  $f''(x) > g''(x);$
- 3)  $f(x) - f(0) > g(x) - g(0);$
- 4)  $f'(x) - f'(0) > g'(x) - g'(0);$
- 5)  $f''(x) - f''(0) > g''(x) - g''(0).$

**14.** Пусть функция действительного переменного  $f$  задана так:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ \frac{x}{3}, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Множество точек разрыва  $f$  есть

- 1) пустое множество;
- 2) множество рациональных чисел;
- 3) множество иррациональных чисел;
- 4) множество ненулевых действительных чисел;
- 5) множество всех действительных чисел.

**15.** При каком значении  $b$  прямая  $y = 10x$  является касательной к кривой  $y = e^{bx}$ ?

$$1) \frac{10}{e}; \quad 2) 10; \quad 3) 10e; \quad 4) e^{10}; \quad 5) e.$$

**16.** Пусть  $h(x) = \int_0^{x^2} e^{x+t} dt$ . Тогда  $h'(1) =$

$$1) e - 1; \quad 2) e^2; \quad 3) e^2 - e; \quad 4) 2e^2; \quad 5) 3e^2 - e.$$

**17.** Пусть последовательность  $(a_n)$  задаётся соотношениями  $a_1 = 1$  и  $a_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n}\right) a_n$  при  $n \geq 1$ . Тогда  $a_{30} =$

$$1) 15 \cdot 31; \quad 2) 30 \cdot 31; \quad 3) \frac{31}{29}; \quad 4) \frac{32}{30}; \quad 5) \frac{32!}{30!2!}.$$

**18.** Пусть  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3$ . Какие из следующих утверждений верны?

- 1)  $(0; 0)$  — точка минимума; 2)  $(0; 0)$  — точка максимума;
- 3)  $(1; 1)$  — точка минимума; 4)  $(1; 1)$  — точка максимума;
- 5)  $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$  — точка минимума; 6)  $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$  — точка максимума.

**19.** Какое из следующих множеств является пересечением плоскостей  $x+3y-2z=7$  и  $2x+y-3z=0$ ?

- 1)  $\emptyset$ ; 2)  $\{(0, 3, 1)\}$ ; 3)  $\{(x, y, z) \mid x = 7t, y = 3 + t, z = 1 + 5t, t \in \mathbb{R}\}$ ;
- 4)  $\{(x, y, z) \mid x = t, y = 3t, z = 7 - 2t, t \in \mathbb{R}\}$ ; 5)  $\{(x, y, z) \mid x - 2y - z = -7\}$ .

**20.** Для положительных функций действительного переменного  $f$  и  $g$  пусть запись  $f \sim g$  означает, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ . Какое из следующих утверждений не является следствием того, что  $f \sim g$ ?

- 1)  $f^2 \sim g^2$ ; 2)  $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$ ; 3)  $e^f \sim e^g$ ; 4)  $f + g \sim 2g$ ; 5)  $g \sim f$ .

**21.** Наименьшее расстояние между двумя точками, одна из которых расположена на сфере  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 1$ , а другая — на сфере  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 4$ , равно

- 1) 0; 2) 4; 3)  $\sqrt{27}$ ; 4)  $2(\sqrt{2} + 1)$ ; 5)  $3(\sqrt{3} - 1)$ .

**22.** В ряд поставлено 15 стульев, на которых случайным образом рассаживаются 6 мальчиков и 9 девочек. Какова вероятность того, что все мальчики будут сидеть на шести соседних стульях?

- 1)  $\frac{1}{C_{15}^6}$ ; 2)  $\frac{6!}{C_{15}^6}$ ; 3)  $\frac{10!}{15!}$ ; 4)  $\frac{6!9!}{14!}$ ; 5)  $\frac{6!10!}{15!}$ .

**23.** Множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению  $z^2 = |z|^2$ , есть

- 1) пара точек; 2) окружность; 3) луч; 4) прямая;
- 5) объединение бесконечного числа различных прямых.

**24.** В треугольнике  $ABC$  точки  $A$  и  $B$  фиксированы, расстояние  $AB = 1$ , а точка  $C$  удаляется от них в бесконечность, двигаясь по лучу  $AC$ , при этом  $\angle BAC = 110^\circ$ . Предел разности  $BC - AC$

- 1) 0; 2) меньше 0; 3) 1; 4) больше 1; 5)  $+\infty$ .

**25.** Пусть  $C$  — окружность  $x^2 + y^2 = 1$ , ориентированная против часовой стрелки. Криволинейный интеграл  $\oint_C (2x - y) dx + (x + 3y) dy$  равен

- 1) 0; 2) 1; 3)  $\frac{\pi}{2}$ ; 4)  $\pi$ ; 5)  $2\pi$ .

**26.**  $X$  и  $Y$  — независимые дискретные случайные величины; каждая из них принимает значение  $n \in \mathbb{N}$  с вероятностью  $1/2^n$ . Какова вероятность того, что значение хотя бы одной из этих двух случайных величин больше 3?

- 1)  $\frac{1}{64}$ ; 2)  $\frac{15}{64}$ ; 3)  $\frac{1}{4}$ ; 4)  $\frac{3}{8}$ ; 5)  $\frac{4}{9}$ .

**27.** Если  $z = e^{2\pi i/5}$ , то  $1 + z + z^2 + z^3 + 5z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 4z^7 + 4z^8 + 5z^9 =$

- 1) 0; 2)  $4e^{3\pi i/5}$ ; 3)  $5e^{4\pi i/5}$ ; 4)  $4e^{-3\pi i/5}$ ; 5)  $5e^{-2\pi i/5}$ .

**28.** Пусть  $\mathbf{F}$  — единичная сила, сонаправленная с вектором  $(-1; 0; 1)$ . Какую работу производит  $\mathbf{F}$  над материальной точкой, двигающейся по траектории  $(t; t^2; t^3)$ , за время между  $t = 0$  и  $t = 1$ ?

- 1)  $-\frac{1}{4}$ ; 2)  $-\frac{1}{4\sqrt{2}}$ ; 3) 0; 4)  $\sqrt{2}$ ; 5)  $3\sqrt{2}$ .

**29.** Сколько существует натуральных  $k$ , для которых десятичная запись числа  $k!$  заканчивается ровно 99 нулями?

**30.** Если  $[x]$  — целая часть числа  $x$ , то  $\int_0^\infty [x]e^{-x} dx =$

$$1) \frac{e}{e^2 - 1}; \quad 2) \frac{1}{e - 1}; \quad 3) \frac{e - 1}{e}; \quad 4) 1; \quad 5) \infty.$$

**31.** Пусть  $f$  — аналитическая функция комплексного переменного  $z = x + iy$ , причём  $\operatorname{Re} f = 2x + 3y$ ,  $\operatorname{Im} f = g(x, y)$ . Пусть  $g(2, 3) = 1$ . Вычислите  $g(7, 3)$ .

**32.** Область сходимости числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^{2n}}{n^n(1+x^{2n})}$  есть

$$1) \{0\}; \quad 2) (-1; 1); \quad 3) [-1; 1]; \quad 4) [-\sqrt{e}; \sqrt{e}]; \quad 5) \mathbb{R}.$$

### Ответы

1. 2). 2. 5). 3. 2). 4. 3). 5. 10. 6. 1). 7. 1). 8. c. 9. 7. 10. 5). 11. 4). 12. 1. 13. 3). 14. 4). 15. 1). 16. 5). 17. 1). 18. 5). 19. 3). 20. 3). 21. 5). 22. 5). 23. 4). 24. 2). 25. 5). 26. 2). 27. 5). 28. 3). 29. 5. 30. 2). 31. -14. 32. 5).

### 2011 год

**1.** На плоскости даны точки  $A(-1; 2)$ ,  $B(6; 4)$ ,  $C(1, -20)$ . Сколько существует на плоскости различных точек  $D$  таких, что  $A, B, C$  и  $D$  — вершины параллелограмма?

**2.** Точка  $A$  лежит на окружности с центром в точке  $O$ , а точка  $O$  лежит на окружности с центром в точке  $A$ . Указанные окружности пересекаются в точках  $B$  и  $C$ . Найдите угол  $BAC$  (в градусах).

**3.** Найдите угол между лучами  $y = 0, z = x \geq 0$  и  $x = 0, z = y \geq 0$  (в градусах).

**4.** Если матрица  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , то  $M^{100} =$

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

5) другой ответ.

**5.** Если  $A$  — матрица  $3 \times 3$  и

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то произведение  $A \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$  равно

$$1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}; 5) другой ответ.$$

**6.** Для какого  $t \in (0; \pi)$  сумма собственных значений матрицы  $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$  равна 1?

- 1)  $\frac{\pi}{6}$ ;    2)  $\frac{\pi}{4}$ ;    3)  $\frac{\pi}{3}$ ;    4)  $\frac{\pi}{2}$ ;    5)  $\frac{2\pi}{3}$ .

**7.** Какой из следующих многочленов имеет комплексные корни  $2+i$  и  $1-i$ ?

- 1)  $x^4 + 6x^3 + 10$ ;    2)  $x^4 + 7x^2 + 10$ ;    3)  $x^3 - x^2 + 4x + 1$ ;  
4)  $x^3 + 5x^2 + 4x + 1$ ;    5)  $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10$ .

**8.** Пусть  $x_1 = 1$  и  $x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}$  для любого натурального  $n$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$

- 1)  $-1$ ;    2)  $\sqrt{5}$ ;    3)  $e$ ;    4)  $3$ ;    5)  $\infty$ .

**9.**  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{-\pi} - e^{-x}}{\sin x} =$

- 1)  $-\infty$ ;    2)  $+\infty$ ;    3)  $-1$ ;    4)  $1$ ;    5)  $0$ ;    6)  $-e^{-\pi}$ ;    7)  $e^{-\pi}$ .

**10.** Сколько существует непрерывных функций  $f(x)$ , определённых на отрезке  $[-1; 1]$ , таких, что для любого  $x \in [-1; 1]$  выполняется равенство  $f^2(x) = x^2$ ?

- 1) 1;    2) 2;    3) 3;    4) 4;    5) бесконечно много.

**11.** Пусть функция  $f$  определена и непрерывна на отрезке  $[0; 1]$ . Какое из следующих утверждений обязательно справедливо?

- I.  $\exists C > 0 \quad \forall x, y \in [0; 1] \quad |f(x) - f(y)| \leq C$ .  
II.  $\exists D > 0 \quad \left( x, y \in [0; 1], |x - y| \leq D \right) \Rightarrow \left( |f(x) - f(y)| \leq 1 \right)$ .  
III.  $\exists E > 0 \quad \forall x, y \in [0; 1] \quad |f(x) - f(y)| \leq E|x - y|$ .

**12.** Пусть  $E$  — множество значений числовой функции, определённой и непрерывной на открытом интервале  $(0; 1)$ . Какие из следующих утверждений обязательно справедливы?

- I.  $E$  — связное множество;  
II.  $E$  — открытое множество;  
III.  $E$  — ограниченное множество.

**13.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} =$

- 1) 0;    2)  $2f'(x_0)$ ;    3)  $f'(-x_0)$ ;    4)  $-f'(x_0)$ ;    5)  $-2f'(x_0)$ .

**14.** Для вычисления  $\sqrt{1,01}$  используют многочлен

$$p(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2.$$

Чему приблизительно равна разность  $\sqrt{1,01} - p(1,01)$ ?

- 1)  $\frac{1}{16} \cdot 10^{-6}$ ;    2)  $\frac{1}{48} \cdot 10^{-8}$ ;    3)  $\frac{3}{8} \cdot 10^{-10}$ ;    4)  $-\frac{3}{8} \cdot 10^{-10}$ ;    5)  $-\frac{1}{16} \cdot 10^{-6}$ .

**15.** Площадь треугольника, ограниченного координатными осями и касательной к графику  $y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$  в точке  $(0; 1)$  равна

- 1)  $\frac{1}{16}$ ;    2)  $\frac{1}{8}$ ;    3)  $\frac{1}{4}$ ;    4) 1;    5) 2.

16.  $\int_0^1 \left( \int_0^{\sin y} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) dy =$

- 1)  $\frac{1}{3}$ ;    2)  $\frac{1}{2}$ ;    3)  $\frac{\pi}{4}$ ;    4) 1;    5)  $\frac{\pi}{3}$ .

17. Пусть график функции  $f$  представляет собой полуокружность с концами  $A(a; 0)$  и  $B(b; 0)$ , где  $a < b$ . Тогда  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| =$

- 1)  $f(b) - f(a)$ ;    2)  $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ ;    3)  $(b-a)\frac{\pi}{4}$ ;    4)  $(b-a)^2\pi$ ;    5)  $(b-a)^2\frac{\pi}{8}$ .

18. Какой из следующих интегралов имеет наибольшее значение?

1)  $\int_0^{\pi/4} \sin t dt$ ;    2)  $\int_0^{\pi/4} \cos t dt$ ;    3)  $\int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt$ ;    4)  $\int_0^{\pi/4} \cos 2t dt$ ;    5)  $\int_0^{\pi/4} \sin t \cos t dt$ .

19. Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Какие из следующих утверждений обязательно справедливы?

- I.  $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+3}^{b+3} f(x-3) dx$ ;  
II.  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^3 f(x) dx - \int_b^3 f(x) dx$ ;  
III.  $\int_{3a}^{3b} f(x) dx = 3 \int_a^b f(3x) dx$ .

20. Чему равно наибольшее значение функции  $f(x, y) = 5x - 4y$ , если  $x \leq 2$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + y \geq 1$ ,  $y - x \leq 0$ ?

21. Наименьшее расстояние между точкой гиперболы  $xy = 8$  и началом координат равно

- 1) 4;    2) 8;    3) 16;    4)  $2\sqrt{2}$ ;    5)  $4\sqrt{2}$ .

22. Пусть  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ . Тогда существуют такие две различные точки  $P$  и  $Q$ , что функция  $f$  имеет

- 1) локальный максимум и в  $P$ , и в  $Q$ ;  
2) седловые точки и в  $P$ , и в  $Q$ ;  
3) локальный максимум в  $P$ , седловую точку в  $Q$ ;  
4) локальный минимум в  $P$ , седловую точку в  $Q$ ;  
5) локальный минимум и в  $P$ , и в  $Q$ .

23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} =$

- 1)  $e$ ;    2)  $2e$ ;    3)  $(e+1)(e-1)$ ;    4)  $e^2$ ;    5)  $\infty$ .

24. Радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n$  равен

- 1) 0;    2)  $\frac{1}{e}$ ;    3) 1;    4)  $e$ ;    5)  $+\infty$ .

**25.** Пусть  $y = f(x)$  — решение дифференциального уравнения  $x dy + (y - xe^x)dx = 0$ , причём  $f(1) = 0$ . Тогда  $f(2) =$

- 1)  $\frac{1}{2e}$ ;    2)  $\frac{1}{e}$ ;    3)  $\frac{e^2}{2}$ ;    4)  $2e$ ;    5)  $2e^2$ .

**26.** Пусть  $C$  — окружность  $x^2 + y^2 = 9$ , ориентированная против часовой стрелки. Криволинейный интеграл  $\oint_C -2y \, dx + x^2 \, dy$  равен

- 1) 0;    2)  $6\pi$ ;    3)  $9\pi$ ;    4)  $12\pi$ ;    5)  $18\pi$ .

**27.** Чему равен наибольший общий делитель всех чисел вида  $p^4 - 1$ , где  $p$  — простое число, большее 5?

**28.** Сколько существует целых чисел от 1 до 1000, которые делятся на 30, но не делятся на 16?

**29.** Сколькими способами можно выстроить 20 человек (среди которых есть Вова и Дима) в очередь, если Вова должен быть впереди Димы (и не обязательно рядом).

- 1)  $20!$ ;    2)  $19!$ ;    3)  $18!$ ;    4)  $\frac{20!}{2}$ ;    5)  $20 \cdot 19$ .

**30.** В ящике 2 синих, 4 красных и 2 жёлтых шарика. Какова вероятность того, что два случайно выбранных шарика — одного цвета?

- 1)  $\frac{3}{5}$ ;    2)  $\frac{2}{7}$ ;    3)  $\frac{2}{5}$ ;    4)  $\frac{3}{7}$ ;    5)  $\frac{1}{2}$ .

**31.** Правильная монетка была подброшена 8 раз. С какой вероятностью орёл выпадал чаще, чем решка?

- 1)  $\frac{1}{4}$ ;    2)  $\frac{1}{3}$ ;    3)  $\frac{87}{256}$ ;    4)  $\frac{23}{64}$ ;    5)  $\frac{93}{256}$ .

**32.** Пусть независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  равномерно распределены на отрезке  $[0; 1]$ . Вероятность того, что  $|X - Y| < \frac{1}{2}$ , равна

- 1)  $\frac{1}{4}$ ;    2)  $\frac{1}{3}$ ;    3)  $\frac{1}{2}$ ;    4)  $\frac{2}{3}$ ;    5)  $\frac{3}{4}$ .

### Ответы

1. 3. 2.  $120^\circ$ . 3.  $60^\circ$ . 4. 1). 5. 2). 6. 3). 7. 5). 8. 4). 9. 6). 10. 4). 11. I, II. 12. I. 13. 2). 14. 1). 15. 1). 16. 2). 17. 5). 18. 2). 19. I, II, III. 20. 10. 21. 1). 22. 3). 23. 2). 24. 5). 25. 3). 26. 5). 27. 240. 28. 29. 29. 4). 30. 2). 31. 5). 32. 5).

### 2012 год

**1.** Анна и Яна сидят в уличном кафе. Анна говорит: «У меня три дочери, произведение их возрастов равно 36, а сумма совпадает с номером дома напротив кафе». Яна, посмотрев на номер дома и проделав сложные вычисления, говорит, что этой информации недостаточно, чтобы определить возраст детей. Анна соглашается и добавляет, что у старшей дочери голубые глаза. Сколько лет старшей дочери Анны?

- 1) 4;    2) 6;    3) 9;    4) 12;    5) 18;    6) 36;    7) невозможно определить.

**2.** Между двумя столбами закреплён провод. Точки подвеса расположены на одинаковом расстоянии от земли, а расстояние между ними 30 м. Провод провисает на 0,5 м. Разность длины провода (между точками подвеса) и 30 м

- 1) < 3 см; 2) от 3 до 10 см; 3) от 10 см до 1 м;  
4) от 1 м до 10 м; 5) > 10 м.

**3.** Пусть функция  $f(x)$  определена при  $x > 0$  и для всех  $x > 0$  справедливо  $f(\ln x) = \sqrt{x}$ . Тогда  $f(x) =$

- 1)  $e^{\frac{x}{2}}$ ; 2)  $\ln \sqrt{x}$ ; 3)  $e^{\sqrt{x}}$ ; 4)  $\sqrt{\ln x}$ ; 5)  $\frac{\ln x}{2}$ .

**4.** Пусть  $f(x)$  — многочлен,  $f(5) = 11$  и для всех  $x$  справедливо  $f(1+x) = f(x)$ . Тогда  $f\left(\frac{15}{2}\right) =$

- 1) -11; 2) 0; 3) 11; 4)  $\frac{33}{2}$ ; 5) не определяется однозначно условиями задачи.

**5.** Длина кривой  $y = \sqrt{2x - x^2}$  равна

- 1) 2; 2) 3; 3)  $\frac{\pi}{2}$ ; 4)  $\pi$ ; 5)  $2\pi$ .

**6.** На плоскости  $Oxy$  задана кривая  $y = \sin(\arccos x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . Её длина равна

- 1) 3; 2)  $\pi$ ; 3)  $3\pi$ ; 4)  $\frac{\pi}{2}$ ; 5)  $\frac{3}{2}$ .

**7.** Сколько действительных корней имеет многочлен  $(2x^5 + 3x - 5)$ ?

**8.** Сколько корней имеет уравнение

$$(\arcsin x - 2)(\operatorname{arctg} x + 1)(\log_2 x - 1) = 0?$$

- 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) больше трёх.

**9.** Пусть  $A(n)$  — утверждение, зависящее от  $n \in \mathbb{N}$ . Известно, что

- если  $A(k)$  истинно, то и  $A(k+1)$  истинно ( $\forall k \in \mathbb{N}$ );
- $A(2012)$  ложно.

Какое самое сильное утверждение следует из этих условий?

- 1)  $A(2013)$  ложно; 2)  $A(2011)$  ложно; 3)  $\forall n \leq 2012 \ A(n)$  ложно;  
4)  $\forall n \geq 2012 \ A(n)$  ложно; 5)  $A(n)$  ложно для всех  $n$ .

**10.** Множество корней уравнения  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 2 & 1 & x^2 \\ 6 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0$  есть

- 1)  $\emptyset$ ; 2) {0}; 3) {1}; 4) {1; -3}; 5) другой ответ.

**11.** Рассмотрим систему трёх уравнений с переменными  $x$ ,  $y$  и  $z$  и параметром  $a$ .

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y + 3z = 0, \\ x + 4y + az = 0. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений истинны?

- I. При некотором  $a$  система не имеет решений.
- II. При некотором  $a$  система имеет ровно одно решение.
- III. При некотором  $a$  система имеет более чем одно решение.

**12.** Агенту посылают секретное слово из четырёх букв латинского алфавита. Каждая буква слова заменяется её порядковым номером в алфавите, соответствующие числа составляют матрицу  $M$  размером  $2 \times 2$ . Например, слово «DEAD» даёт матрицу  $M = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ . Шифрование состоит в том, что агент получает матрицу  $MC$ , где  $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Если агент получил матрицу  $\begin{pmatrix} 51 & -3 \\ 31 & -8 \end{pmatrix}$ , то секретное слово

- 1) RUSH; 2) COME; 3) ROME; 4) CALL; 5) другой ответ.

**13.** Вычислите ранг матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ .

**14.** Вычислите  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 7x}{\cos 5x}$ .

**15.** Вычислите  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{e^x - e^{-x}}$ .

**16.** Пусть  $c > 0$  и  $f(x) = e^x - cx$ . Тогда минимальное значение функции  $f(x)$  равно

- 1)  $f(c)$ ; 2)  $f(e^c)$ ; 3)  $f\left(\frac{1}{c}\right)$ ; 4)  $f(\ln c)$ ; 5) не существует.

**17.** Пусть  $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2 - \frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$  Количество точек графика  $y = f(x)$ , в которых касательная к графику горизонтальна, равно

- 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) больше трёх.

**18.** Пусть  $f$  — функция, дифференцируемая бесконечное число раз, и пусть  $f'(x) = f^2(x)$ . Тогда  $n$ -я производная  $f$  дается формулой

- 1)  $nf^n(x)$ ; 2)  $n!f^{n+1}(x)$ ; 3)  $(n+1)!f^{n+1}(x)$ ; 4)  $(n+1)f^n(x)$ ;  
5) другой ответ.

**19.**  $\int_0^\pi e^{\sin^2 x} e^{\cos^2 x} dx =$

- 1)  $\pi$ ; 2)  $e\pi$ ; 3)  $e^\pi$ ; 4)  $e^{\pi-1}$ ; 5)  $e^\pi - 1$ .

**20.** Пусть  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$  Тогда  $\int_{-1}^1 f(x) dx =$

- 1)  $-2$ ; 2)  $0$ ; 3)  $2$ ; 4) не существует; 5) другой ответ.

**21.** Пусть  $f$  — непрерывная функция, такая что для всех  $c > 0$

- 1)  $f(c) > 0$  и

2) площадь области, ограниченной прямой  $x = c$ , координатными осями и кривой  $y = f(x)$ , равна  $ce^c$ .

Тогда для всех  $x > 0$   $f(x) =$

- 1)  $e^x$ ; 2)  $xe^x$ ; 3)  $xe^x - e^x$ ; 4)  $xe^x + e^x$ ; 5) другой ответ.

**22.** Пусть  $f$  — непрерывная функция  $x$ , не равная тождественно нулю, и пусть  $s$  и  $t$  — ненулевые числа. Если  $I = t \int_0^{s/t} f(s+tx)dx$ , то значение  $I$

- 1) зависит от  $x$ ; 2) зависит только от отношения  $s/t$ ; 3) зависит только от  $s$ ;

- 4) зависит только от  $t$ ; 5) не зависит ни от  $x$ , ни от  $s$ , ни от  $t$ .

**23.**  $\int_0^1 \int_0^x xy dx dy =$

- 1) 1; 2)  $\frac{1}{8}$ ; 3)  $\frac{1}{4}$ ; 4)  $\frac{1}{3}$ ; 5)  $\frac{1}{2}$ .

**24.** Сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$  равна

- 1)  $\frac{3}{4}$ ; 2)  $\frac{1}{2}$ ; 3)  $\frac{4}{7}$ ; 4)  $\frac{3}{5}$ ; 5)  $\frac{2}{3}$ .

**25.** Какая из следующих кривых пересекает под прямым углом все интегральные кривые дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = x + 1$ ?

- 1)  $e^{-y} = x + 1$ ; 2)  $e^y = 1 - x$ ; 3)  $e^y = x + 1$ ; 4)  $2y = x^2 + 2x$ .

**26.** Если функция  $f(x, y)$  определена на всей плоскости  $Oxy$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$  и  $f(0, 0) = 0$ , то  $f(x, y) =$

- 1)  $x^2 + xy + y^2$ ; 2)  $x^2 + 2xy + y^2$ ; 3)  $x^2 - xy + y^2$ ; 4)  $x^2 + \frac{xy}{2} + y^2$ ; 5)  $x^2 + xy - y^2$ .

**27.** Пусть  $A$  и  $B$  — обратимые матрицы размера  $n \times n$ , где  $n > 1$ ,  $I$  — единичная матрица того же размера. Если матрицы  $A$  и  $B$  подобны, то какие из следующих утверждений обязательно справедливы?

I.  $A - 2I$  и  $B - 2I$  подобны.

II.  $A$  и  $B$  имеют одинаковый след (след — сумма элементов главной диагонали).

III.  $A^{-1}$  и  $B^{-1}$  подобны.

**28.** Пусть в группе  $G$  для любых её элементов  $a$  и  $b$  справедливо  $(ab)^2 = a^2b^2$ . Тогда группа  $G$  обязательно

- 1) абелева; 2) циклическая; 3) порядка 2; 4) конечная.

**29.** Пусть  $x$  и  $y$  — целые числа и  $3x + 7y$  делится на 11. Какое из следующих чисел обязательно делится на 11?

- 1)  $4x + 6y$ ; 2)  $x + y + 5$ ; 3)  $9x + 4y$ ; 4)  $4x - 9y$ ; 5)  $x + y - 1$ .

**30.** Каков остаток от деления числа  $3^{32}$  на 12?

**31.** Записано  $k$  наугад выбранных десятичных цифр (повторения допускаются). Какова вероятность того, что среди них нет нуля?

$$1) \frac{1}{k}; \quad 2) \frac{1}{10}; \quad 3) \frac{k-1}{k}; \quad 4) \left(\frac{1}{10}\right)^k; \quad 5) \left(\frac{9}{10}\right)^k.$$

**32.** Двое по очереди подбрасывают монетку до тех пор, пока не выпадет орёл. Тот, у кого выпадет орёл, объявляется победителем. С какой вероятностью побеждает начинаящий игру?

$$1) \frac{1}{2}; \quad 2) \frac{3}{5}; \quad 3) \frac{2}{3}; \quad 4) \frac{3}{4}; \quad 5) \text{другой ответ.}$$

### Ответы

- 1.** 3). **2.** 1). **3.** 1). **4.** 3). **5.** 4). **6.** 2). **7.** 1. **8.** 1). **9.** 3). **10.** 4). **11.** II, III. **12.** 3). **13.** 3. **14.** -1,4. **15.** 0. **16.** 4). **17.** 4). **18.** 2). **19.** 2). **20.** 2). **21.** 4). **22.** 3). **23.** 2). **24.** 1). **25.** 1). **26.** 1). **27.** I, II, III. **28.** 1). **29.** 4). **30.** 9. **31.** 5). **32.** 3).

### 2013 год

**1.** Бизнесмен Вася вывесил в своем супермаркете четыре рекламных лозунга:

- I. Всё дешёвое невкусно!
- II. Всё невкусное дёшево!
- III. Всё вкусное недёшево!
- IV. Не всё вкусное дёшево!

Борющийся за экономию коммерческий директор заметил, что два лозунга утверждают одно и то же. Какие?

**2.** Пусть  $a, b, c$  — действительные числа. Какие из следующих утверждений истинны?

- I. Если  $a < b$  и  $ab \neq 0$ , то  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ .
- II. Если  $a < b$ , то  $ac < bc$  для любого  $c$ .
- III. Если  $a < b$ , то  $a + c < b + c$  для любого  $c$ .
- IV. Если  $a < b$ , то  $-a > -b$ .

**3.** Плоскость  $\alpha$  проходит через точки с координатами  $(0; 0; 0)$ ,  $(2; 0; 0)$ ,  $(0; 0; 1)$ . Уравнение плоскости  $\alpha$ :

$$1) z = 0; \quad 2) y = 0; \quad 3) x = 0; \quad 4) y = z; \quad 5) x + 2y - 2z = 0.$$

**4.** Пусть  $S = (0; +\infty) \times (0; +\infty)$ . График уравнения  $x^{\ln y} = y^{\ln x}$  — это

- 1) единственная точка;
- 2) замкнутая кривая;
- 3) луч в  $S$ ;
- 4)  $S$ ;
- 5)  $\emptyset$ .

**5.** График функции  $y = 3\sqrt{-x^2 + 10x - 21}$  — это

- 1) полуокружность;
- 2) часть эллипса;
- 3) часть параболы;
- 4) часть гиперболы;
- 5) часть ломаной;
- 6) пустое множество.

**6.** Пусть  $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$ . Тогда  $\arccos x =$

$$1) \frac{5\pi}{6}; \quad 2) \frac{\pi}{3}; \quad 3) \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{6^2}}; \quad 4) 1 - \frac{\pi}{6}; \quad 5) -\frac{\pi}{6}.$$

**7.** Функции  $f$  и  $g$  определены на множестве натуральных чисел следующим образом:  $f(1) = 1$ ,  $f(n) = 2f(n-1)$  при  $n \neq 1$ ;  $g(3) = f(3)$ ;  $g(n) = 3g(n+1)$  при  $n \neq 3$ . Тогда  $g(1) =$

- 1)  $\frac{9}{4}$ ; 2) 6; 3) 9; 4) 12; 5) 36; 6) невозможно определить.

**8.** Пусть  $f(x) = a \sin x + bx \cos x + x^2$ , где  $a$  и  $b$  — константы. Известно, что  $f(2) = 3$ . Тогда  $f(-2) =$

- 1) -3; 2) -1; 3) 1; 4) 5; 5) невозможно определить.

**9.** Какое из уравнений имеет наибольшее количество корней на отрезке  $[100; 1000]$ ?

- 1)  $\sin(x^3) = 0$ ; 2)  $\sin(x^2) = 0$ ; 3)  $\sin x = 0$ ; 4)  $\sin \sqrt{x} = 0$ ; 5)  $\sin \sqrt[3]{x} = 0$ .

**10.** Сколько корней имеет уравнение  $\cos^2 x - \sin^2(\sqrt{2}x) = 1$ ?

- 1) ни одного; 2) один; 3) конечное множество, но больше одного;  
4) счётное множество; 5) несчётное множество.

**11.** Вычислите ранг матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$ .

**12.** Найдите наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ .

**13.**  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{-\pi} - e^{-x}}{\operatorname{tg} x} =$

- 1)  $-\infty$ ; 2)  $-e^{-\pi}$ ; 3) 0; 4)  $e^{-\pi}$ ; 5) 1.

**14.** Пусть  $f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$  при всех положительных  $x \neq 1$  и пусть  $f(x)$  непрерывна в точке  $x = 1$ . Тогда  $f(1) =$

- 1) 0; 2)  $\frac{1}{e}$ ; 3) 1; 4)  $e$ ; 5) другой ответ.

**15.** Пусть  $f$  — функция, заданная на отрезке  $[-1; 1]$  и такая, что все точки графика этой функции лежат на окружности  $x^2 + y^2 = 1$ . Тогда количество точек, в которых функция  $f$  обязательно непрерывна, равно

- 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 4; 5) их бесконечно много.

**16.** Пусть  $f(x) = x^e \cdot e^x$ . Тогда при  $x > 0$   $\frac{f''(x)}{f(x)} =$

- 1)  $1 + \frac{e}{x}$ ; 2)  $1 + \frac{x}{e}$ ; 3) 1; 4)  $\frac{e}{x}$ ; 5)  $\frac{x}{e}$ .

**17.** Вычислите седьмую производную от функции  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  в точке  $x = 0$ .

**18.** Если  $f(x)$  — бесконечное число раз дифференцируемая функция, то

$$\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+k+h) - f(p+k) - f(p+h) + f(p)}{hk} =$$

- 1)  $f'(p)$ ; 2)  $f''(p)$ ; 3)  $(f'(p))^2$ ; 4)  $f'(f'(p))$ ; 5)  $f'(h)f'(k)$ .

**19.** Пусть  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$  Тогда  $\int_{-1}^3 f(x) dx =$

- 1)  $-e$ ; 2) 2; 3)  $-\ln 2$ ; 4)  $e$ ; 5) не существует; 6) другой ответ.

**20.** Наименьшее значение функции  $z = x^2 + y^2$  при условии  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  равно

$$1) \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}; \quad 2) (a+b)^2; \quad 3) ab; \quad 4) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}; \quad 5) \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}.$$

**21.** Какая из функций является решением задачи Коши

$$y''' - y' = \cos t; \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0?$$

$$1) \frac{3 \operatorname{ch} t - \cos t}{2}; \quad 2) \operatorname{sh} t + 1; \quad 3) \cos^2 t; \quad 4) \frac{2 - \sin t}{2}; \quad 5) \frac{3 \operatorname{sh} t - \sin t + 2}{2}.$$

**22.** Если  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $\mathbf{a} = \operatorname{grad}(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ , то  $\operatorname{div}(\mathbf{a}) =$

- 1) 6; 2)  $2|\mathbf{r}|$ ; 3)  $|\mathbf{r}|^2$ ; 4) 3; 5) 0.

**23.** Если  $x$  и  $y$  — целые числа, такие что  $x \geq 3$  и  $x - y \geq 9$ , то минимальное значение функции  $3x + 7y$

- 1)  $-33$ ; 2) 0; 3) 9; 4) 27; 5) его не существует.

**24.** Пусть  $f = f(x, y, z)$  и  $df = \frac{dx - 3dy}{z} + \frac{3y - x + z^3}{z^2} dz$ . Тогда функция  $f$  с точностью до константы равна

$$1) \frac{x - 3y}{z}; \quad 2) \frac{x - 3y}{z} - z^2; \quad 3) \frac{y^3 - z^3 + x}{z}; \quad 4) \frac{3y^2 - x - z^3}{z}; \quad 5) \frac{z^3 + 2x - 6y}{2z}.$$

**25.** Если контур  $L$  есть эллипс  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ , проходимый против часовой стрелки, то  $\oint_L (2xy - y)dx + x^2 dy =$

- 1)  $\pi ab/4$ ; 2)  $(a+b)^2/4$ ; 3)  $\pi ab$ ; 4)  $\pi a^2 b^2$ ; 5)  $ab$ .

**26.** Поток радиус-вектора  $\mathbf{r}$  через поверхность цилиндра, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = H$ , равен

- 1)  $\pi RH$ ; 2)  $3\pi R^2 H$ ; 3)  $R^2 H^2$ ; 4)  $2RH^2$ ; 5)  $\pi R^2 H$ .

**27.** Сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$  равна

$$1) \frac{1}{3}; \quad 2) \frac{1}{2}; \quad 3) \frac{7}{12}; \quad 4) \frac{11}{18}; \quad 5) \frac{2}{3}.$$

**28.** Сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n}}$  равна

$$1) \frac{2}{3}; \quad 2) \ln 2; \quad 3) 1; \quad 4) \ln 3; \quad 5) \sin\left(\frac{1}{2}\right); \quad 6) \text{другой ответ.}$$

**29.** Область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 2^{n+2}}$

- 1)  $(-1; 1)$ ; 2)  $[-1; 1]$ ; 3)  $(-1; 3)$ ; 4)  $[-1; 3]$ ; 5)  $[0; 2]$ .

**30.** Если конечная группа имеет подгруппу 7-го порядка и не имеет подгрупп 2-го порядка, то порядок группы может быть равен

- 1) 27; 2) 28; 3) 35; 4) 37; 5) 42.

**31.** Сколько существует пятизначных чисел, в каждом из которых соседние цифры различны?

**32.** Какова вероятность того, что в случайном четырёхзначном числе цифры идут по возрастанию (слева направо)? Ответ дать в десятичной записи с точностью до 0,001.

### Ответы

1. I, III. 2. III, IV. 3. 2). 4. 4). 5. 2). 6. 2). 7. 36. 8. 5. 9. 1). 10. 2). 11. 2. 12. 6. 13. 4). 14. 4).  
 15. 3). 16. 1). 17.  $-5040$ . 18. 2). 19. 2). 20. 1). 21. 5). 22. 1). 23. 5). 24. 5). 25. 3). 26. 2). 27. 4).  
 28. 2). 29. 4). 30. 3). 31. 59049. 32. 0,014.

## Литература

- [1] Steven A. Leduc. *Cracking the GRE Math Subject Test*. - The Princeton Review. — 439 p.
- [2] *Mathematics Test. Practice Book*. - Princeton, NJ, 2008. — 74 p.
- [3] *Practicing to take the GRE Mathematics test*. - Warner Books, 1987. — 29 p.
- [4] Троицкая С.Д. *Экзамен WBJEE и университеты Западной Бенгалии* // Математика в школе. — 2016. — № 9-10. — С. 75–96.
- [5] Троицкая С.Д. *Экзамен SAT I Mathematics* // Математика в школе. — 2017. — № 7. — С. 46–55.
- [6] Троицкая С.Д. *Экзамен SAT Subject Tests in Mathematics* // Математика в школе. — 2017. — № 8. — С. 58–70.
- [7] Эвнин А.Ю. *Математический конкурс в ЮУрГУ*. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. — 86 с.
- [8] Эвнин А. Ю. *Математический конкурс в ЮУрГУ 2012–2016 гг.* — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2017. — 176 с.
- [9] Эвнин А.Ю. *Математические олимпиады в ЮУрГУ*. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. — 63 с.
- [10] Эвнин А.Ю. *Олимпиада в форме компьютерного теста* // Математика в высшем образовании. — 2013. — № 11. — С. 97–102.
- [11] Эвнин А.Ю. *Олимпиада в форме командной игры* // Математика в высшем образовании. — 2015. — № 13. — С. 81–94.
- [12] Эвнин А.Ю. *Сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков*. — М.: ЛЕНАНД, 2017. — 224 с.

- [13] Эвнин А.Ю. *Ещё сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков.* – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 216 с.
- [14] Эвнин А.Ю. *Задачи математического конкурса в ЮУрГУ* // Математическое образование. — 2015. — № 4(76). — С. 26–52.
- [15] Эвнин, А.Ю. *Командные математические олимпиады в ЮУрГУ* // Математическое образование. — 2017. — № 2(82). — С. 7–26.

Эвнин Александр Юрьевич,  
доцент кафедры прикладной математики  
и программирования Южно-Уральского  
государственного университета,  
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

## **О геометрических исследованиях профессора З.А. Скопеца и его учеников**

*Л. Б. Медведева, С. В. Жаров*

Прошло 100 лет со дня рождения профессора доктора физико-математических наук, известного геометра З.А. Скопеца (01.01.1917–04.11.1984).

В педагогических кругах он известен, как выдающийся педагог, автор нескольких пособий для средней школы. В данной статье особое внимание уделено геометрическому творческому наследию З.А. Скопеца, которое связано с изучением отображений и преобразований различных многомерных пространств.

В 1938 году З.А. Скопец окончил Рижский университет и получил степень магистра математики, а в 1946 году в Московском университете защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Степень доктора физико-математических наук З.А. Скопецу была присвоена в 1962 году, а звание профессора — в 1963 году. Всю свою жизнь, начиная с 1942 года, этот человек проработал в Ярославском педагогическом институте (ныне педагогическом университете). Он был известным в свое время геометром и замечательным педагогом, Учителем с большой буквы, воспитавшим более полусотни своих последователей. Среди его аспирантов были не только выпускники Ярославского педагогического института. Учиться к нему ехали из Москвы и Горького (Нижнего Новгорода), Оренбурга и Нальчика, Хабаровска, Тобольска, Казахстана, Латвии и Болгарии.

Первыми аспирантами З.А. Скопеца были Г.В. Киотина (1930–2014), профессор Рязанского педагогического университета, многие годы возглавлявшая там кафедру геометрии; И.П. Дьяконова, до 1971 года — доцент ярославского государственного педагогического института имени К.Д. Ушинского, а 1971 до середины 80-х годов — доцент Ярославского госуниверситета; О.А. Котий (1924–1993), доцент Ярославского пединститута, подготовивший не менее десятка преподавателей для высших учебных заведений; Г.Л. Агафонов (1938–1973), один из талантливейших учеников, очень рано ушедший из жизни. Завершают список его учеников профессор кафедры начертательной геометрии и инженерной графики Московского института инженеров железнодорожного транспорта В.А. Пеклич (р. 1938); доцент Ярославского госуниверситета им. П.Г. Демидова (ныне доцент Ярославского высшего военного училища противовоздушной обороны — ЯВВУ ПВО) Л.Б. Медведева; доцент ЯВВУ ПВО В.Н. Осташков; доцент Ярославского педагогического университета С.В. Жаров, а также доктор физико-математических наук, ныне профессор Высшей школы экономики (многие годы проработавший в Ярославском педагогическом университете) А.С. Тихомиров, известный в России и за рубежом специалист в области современной алгебраической геометрии.

Научные интересы профессора З.А. Скопеца всегда лежали в области геометрии: от алгебраической, в классическом ее понимании как теории алгебраических образов в аффинных и проективных пространствах, и неевклидовой, до начертательной и элементарной. Основные труды его и его учеников относятся к одной из отраслей алгебраической геометрии — бирациональной геометрии алгебраических многообразий. Начало этому направлению заложено в работах Ю. Плюккера (1801–1868) и Г. Фубини (1870–1943) и развивалось в трудах целого ряда классиков европейских школ алгебраической геометрии 19 века: французской (Г. Монж, Ж.В. Понселе, М. Шаль), немецкой (А.Ф. Мебиус,

Ю. Плюккер, Я. Штейнер, Ж.Ш.Ф. Штурм, К.Г.К. Штаудт), итальянской (Л. Кремона, К. Сегре, Д. Веронезе, Ф. Энриквес, Г. Кастельнуово, Ф. Севери), английской (А. Кэли, Дж.Дж. Сильвестр, Д. Сальмон). В настоящее время оно является одним из наиболее интенсивно развивающихся как в России, так и за рубежом.

Значительная часть работ ярославских геометров, выполненных в области бирациональной геометрии, посвящена построениям и геометрическим исследованиям бирациональных моделей достаточно большого класса алгебраических многообразий. Этот класс составляют классические рациональные многообразия (проективные пространства, квадрики, грассманы), однородные пространства классических групп, нормальногообразия и детерминантные многообразия, их сечения проективными пространствами и их различные проекции, а также семейства подпространств и подмногообразий.

Анализ работ З.А. Скопеца и его учеников позволил выделить несколько направлений их исследовательской деятельности.

### **1. Конструирование и изучение кремоновых и многозначных соответствий между проективными пространствами различной размерности, а также кремоновых преобразований пространств.**

Исследования З.А. Скопеца в этом направлении еще в 1946 году получили высокую оценку профессоров Московского университета В.В. Степанова, П.К. Рашевского, Я.С. Дубнова.

Названными преобразованиями и соответствиями, а также их приложениями в начертательной геометрии, инженерной графике, моделировании проективных пространств в пространствах меньшей размерности занимались в разное время такие его ученики, как О.А. Котий [14–15], В.А. Пеклич [17–18], Л.Б. Медведева [16], И.П. Дьяконова [8], Г.С. Иванова [9], А.И. Чегодаев [26], Я.П. Понарин [20], И.С. Герасимова [5–6], Г.Г. Казакова [10].

### **2. Отыскание новых конструктивных методов задания алгебраических многообразий в многомерных проективных пространствах.**

Здесь следует назвать не только работы З.А. Скопеца, но и его учеников: Г.Л. Агафонова [1–2] и О.А.Котия [12–13].

Проблема построения геометрических кривых, поверхностей, других многообразий большей размерности и порядков выше двух интересовала многих геометров, начиная от Шаля (1793–1880), Штейнера (1796–1863), Райе (1838–1919), Грассмана (1809–1877). В начале 20 века у нас в стране эта проблема занимала московских профессоров А.К. Власова и К.А. Андреева [18].

Здесь уместно привести цитату из работы [7] Л. Годо: «к началу 30-х годов 20 века теория алгебраических кривых может считаться законченной, теория алгебраических поверхностей получила значительное развитие во Франции в трудах Е. Пикара, в Италии — в знаменитой школе, основанной Г. Кастельнуово, Ф. Энриквесом и Ф. Севери, но она не достигла еще той степени развития, какой достигла теория алгебраических кривых. А теория алгебраических многообразий 3-х измерений, как естественное следствие теории алгебраических кривых и поверхностей едва намечена... Ничего неизвестно даже о кубическом многообразии в  $\mathbb{P}^4$ ». Понятно, что в такой ситуации любые исследования, относящиеся к многообразиям в  $\mathbb{P}^n$  ( $n \geq 4$ ), были актуальны.

Ярославскими геометрами был получен класс многообразий, которые строились как семейства  $m$ -плоскостей, пересекающих определенным образом заданные многообразия. Приведем один пример [3]. Пусть в  $\mathbb{P}^4$  фиксирована нормальная рациональная кривая  $\mathbb{C}^4$ . Тогда:

- 1) множество бисектант этой кривой (прямых, пересекающих кривую дважды) заметает гиперповерхность 3-его порядка;
- 2) множество 2-плоскостей, пересекающих кривую трижды (трисекант) и проходящих через фиксированную точку, есть гиперконус второго порядка;

- 3) множество двумерных трисекант кривой, проходящих через фиксированную бисеканту, является гиперконусом третьего порядка;
- 4) множество прямых, касательных к кривой, образует двумерную поверхность порядка шесть.

Также в работах ярославских геометров для построения многообразий размерности 2 и выше стали применяться нелинейные рациональные отображения ([15]–[16]). В статье [15] рассматривается конструкция, которая является обобщением известного способа построения нормальной рациональной кривой в  $\mathbb{P}^n$  с помощью двух проективных связок прямых. Инновация состоит в замене проективного соответствия между связками прямых каким-либо нелинейным соответствием. Если в  $\mathbb{P}^4$  между связками прямых установлено квадратичное соответствие типа  $T_{2-2}$ , индуцируемое некоторым квадратичным преобразованием вспомогательной гиперплоскости, то, в зависимости от свойств этого преобразования, множество точек пересечения соответственных прямых связок есть либо поверхность 2-ого порядка  $Q^2$ , либо кривая 4-ой степени. Множество точек пересечения соответственных прямых двух связок в  $\mathbb{P}^n$ , находящихся в кремоновом соответствии  $T_{n-n}$ , есть пространственная кривая  $\mathbb{C}^{n+2}$  степени  $n + 2$  или поверхность  $Q^n$  степени  $n$ .

В статье [17] изучается многообразие, образованное в  $\mathbb{P}^3$  точками пересечения прямых, соответственных в нелинейном отображении одной гиперболической конгруэнции прямых на другую, которое индуцируется кремоновым преобразованием  $T_{n-n}$  некоторой вспомогательной плоскости.

### **3. Изучение геометрических конструкций, позволяющих строить бирациональные модели различных пространств и многообразий.**

Эти исследования относятся к разработке теоретических основ  $n$ -мерной начертательной геометрии. Подтверждением этому служат слова Ф. Клейна, который писал: «прогресс в начертательной геометрии (и особенно многомерных пространствах) связан с отказом от изображения на плоскости точек точками, а прямых прямыми» [11].

В 1907 году Е.С. Федоров предложил способ изображать точки трехмерного пространства при помощи параллельных отрезков, а в 1909 году — с помощью векторов. В работах В.Н. Лодочникова и М.А. Франка эти способы получили развитие и привели к общему способу изображения на плоскости фигур размерности 4 и более.

К нелинейным методам отображения относятся также циклография Фидлера-Федорова, стереографическое проектирование поверхности на плоскость, (впервые рассмотренное Клебшем) и кинематическое отображение Бляшке-Грюнвальда прямых пространства на пары точек плоскости [11].

З.А. Скопец в своей докторской диссертации [21] отмечает, что методы отнесения пространственным объектам определенных объектов на плоскости можно условно разбить на три типа: аксиоматический, аналитический и конструктивный. Для решения задач начертательной геометрии наиболее предпочтительным, по его мнению, является конструктивный. Если этот метод отнесения достаточно прост, то многие задачи трехмерной и даже многомерной геометрии можно сформулировать как задачи двумерной. Эффективность применения конструктивного метода зависит от характера решаемых задач, и это обстоятельство обосновывает целесообразность поисков разнообразных методов отнесения.

Среди классических способов отображения трехмерного пространства на плоскость к конструктивному относится циклография Фидлера-Федорова. Поэтому именно она имеет разнообразные применения в начертательной и неевклидовой геометриях. Кроме того, это отображение позволяет многочисленные задачи трехмерной геометрии, иногда весьма простые, превратить в содержательные задачи геометрии кругов на плоскости.

Примечательно также отображение всех прямых пространства  $\mathbb{P}^3$  на кривые 2-ого порядка в плоскости, находящиеся с данной кривой 2-ого порядка в замыкании Понселе. Это отображение впервые предложено Л. Кремоной и применено позднее к различным вопросам проективной геометрии Р. Штурмом и А.А. Глаголевым. Для реализации этого отображения Г. Браунер предложил

конструкцию, использующую два конуса, пересекающиеся по пространственной кривой 3-его порядка. З.А. Скопец нашел более простую конструкцию, не требующую рассмотрения конусов [21].

Ценность конструктивных методов отображения, как замечает профессор З.А. Скопец, заключается не только в их практической применимости к начертательной геометрии, а и в том, что они служат теоретической основой для начертательной геометрии, посредством которой устанавливаются более тесные связи между проективной, неевклидовой и алгебраической геометриями.

Более двадцати работ З.А. Скопеца посвящены исследованию различных способов отображения в монопроекции неевклидовых и проективных пространств.

Отображения осуществляются посредством поверхностей 2-ого порядка и моноидальных поверхностей высших порядков, особая точка которых служит центром проектирования, пространственной кривой 3-его порядка и универсальной пространственной кривой 4-ого порядка с битангенциальной точкой. Предлагается также способ отображения общей поверхности 3-его порядка, имеющей плоскость симметрии, на эту плоскость из точки уплощения поверхности. Найдено несколько методов отображения четырехмерного пространства на плоскость при помощи гиперквадрики и нормкривой 4-ого порядка [28-34]. В результате отображений точкам или плоскостям пространства соответствуют на плоскости определенные «циклы», представляющие собой кривые различных порядков или классов или же группы точек на кривой 2-ого порядка. Практически все способы отображения являются конструктивными и выполнимыми графически. Поэтому отображения названы циклографическими.

Детальное исследование стереографического проектирования вещественных невырожденных квадрик всех видов на произвольную плоскость позволяет сделать вывод о возможности строить в плоскости изображений одной линейкой следы прямых и плоскостей, изображения плоских сечений данной квадрики, изображения линий пересечения данной квадрики с линейчатыми квадриками и квадриками, имеющими несобственные точки, проекции других пространственных фигур. Поскольку плоские сечения квадрики изображаются циклами, а центральным инволюционным гомологиям пространства, оставляющим квадрику на месте, соответствуют в плоскости проекций инверсии относительно этих циклов, то отображение позволяет изучать на плоскости инверсии четырех типов: относительно окружностей, гипербол, парабол и пар параллельных прямых. Так как каждая квадрика определяет неевклидово пространство, движения которого представляются инволюционными гомологиями (центральными и двухосными), переводящими квадрику в себя, то в плоскости проекций индуцируются соответствующие группы неевклидовых круговых преобразований, изоморфные группам движений неевклидовых пространств. В соответствии с этим изучается преобразование инверсии евклидовой, псевдевклидовой и полуевклидовой плоскостей. Естественным образом при этом возникает интерпретация этих инверсий дробно-линейными преобразованиями плоскости комплексного, двойного и дуального переменного соответственно [27].

#### **4. Разработка конструктивных методов отображения на плоскость различных неевклидовых пространств.**

Более десятка разных плоских моделей пространства Лобачевского, псевдогиперболического и эллиптического пространств можно найти только в докторской диссертации З.А. Скопеца. Рассматриваемое им ортогональное проектирование пространства Лобачевского  $L_3$  на плоскость  $L_2 \subset L_3$  привело к обобщению кинематического отображения Бляшке-Грюнвальда на случай расширенного гиперболического пространства и позволило доказать, что группа движений пространства Лобачевского изоморфна группе преобразований Мебиуса плоскости Лобачевского.

Исследование центрального проектирования псевдогиперболического пространства (пространства, абсолютом которого является неособая линейчатая квадрика) на плоскость из полюса этой плоскости относительно абсолюта привело к выводу о существовании на гиперболической плоскости окружностей четырех видов и доказать, что группа движений псевдогиперболического пространства изоморфна группе Мебиуса гиперболического пространства.

Центральное проектирование проективного пространства с овальной квадрикой в качестве абсол-

люта на плоскость, не пересекающую абсолют, приводит к циклографическому отображению пространства Лобачевского на эллиптическую плоскость и позволяет доказать изоморфизм группы движений этого пространства и группы Мебиуса эллиптической плоскости.

Изотропное проектирование псевдогиперболического пространства на неизотропную плоскость позволяет сделать вывод, что группа движений псевдогиперболического пространства изоморфна группе преобразований Лагерра плоскости Лобачевского и установить взаимно однозначное соответствие между точками псевдогиперболического пространства и вращениями плоскости Лобачевского.

Предложенный З.А. Скопецом метод двукратного стереографического проектирования гиперквадрики четырехмерного пространства на плоскость и сочетание стереографической проекции с косым проектированием приводят к своеобразным моделям четырехмерного пространства [21].

Композиция стереографического проектирования линейчатой гиперквадрики  $Q_3^2 \subset P^4$  на  $P^3$  и изотропной проекции полученных образов на плоскость  $\alpha \subset P^3$  позволяет получить плоские модели псевдогиперболического пространства  $L_4^P$  на плоскости Лобачевского и на эллиптической плоскости и доказать изоморфизм группы движений этого пространства группе преобразований Ли плоскости Лобачевского и группе Мебиуса трехмерного псевдогиперболического пространства, а также группе Мебиуса пространства Лобачевского и группе Ли эллиптической плоскости.

Многочисленные модели пространств произвольной размерности (в том числе и неевклидовых) и их групп преобразований можно найти в работах В.А. Пеклича, Г.В. Киотиной, Е.Л. Тефовой, А.Н. Шумилова, Г.Г. Казаковой, Е.В. Потоскуева, У.М. Асекритова, С.В. Жарова, болгарских учеников профессора Скопца С.Г. Моллова, А.С. Лангова, Г.В. Еневой, Х.С. Пачева, Х. Григорова Особое место здесь занимают исследования Г.В. Киотиной и В.А. Пеклича.

Г.В. Киотиной посчастливилось найти новые пространства. В геометрии рассматривались пространства с проективной метрикой, объединенные идеей симметрии абсолюта и имеющие подвижность, совпадающую с подвижностью евклидовых пространств. Считалось, что других пространств той же подвижности не существует. Отказ от идеи симметрии абсолюта приводит к новым пространствам максимальной подвижности. Для конструирования таких простейших пространств достаточно абсолюта плоскости, состоящий из двух прямых, дополнить всего лишь одной точкой. Получается абсолюйт, состоящий из двух флагов. Дальнейшие обобщения привели к обобщенной концепции понятия пространства с проективной метрикой: появились бифлаговые, квази-бифлаговые и обобщенно-бифлаговые пространства.

В работах В.А. Пеклича группы преобразований плоскости, такие как аффинная, движений и подобий евклидовой, псевдоевклидовой и флаговой плоскостей реализуются на соответствующих множествах прямых четырехмерного аффинного пространства, строятся пространственные модели эквицентроаффинной группы, группы родственных преобразований с общим направлением родства, группы гомотетий и переносов  $n$ -мерного аффинного пространства, других групп [19].

Нельзя не отметить интерес З.А. Скопца к классическим алгебро-геометрическим конструкциям, таким как шестерки Шлеффли, ассоциированные пятерки прямых, замыкания Понселе и другие, и их далеко идущим обобщениям. Его исследования по этим вопросам отличаются превосходным геометрическим вкусом и рядом новых удачных находок [22–25].

## Литература

1. Агафонов Г.Л. Основы теории косого проектирования в  $n$ -мерном проективном пространстве. Канд. дисс. - Ярославль, 1968.
2. Агафонов Г.Л. Многообразия специального вида в нечетномерных пространствах // Уч. зап. ЯГПИ. Ярославль. - 1969. - Вып. 64. - С. 3-14.
3. Агафонов Г.Л. Линейчатые многообразия, порождаемые нормкривой в  $P^4$  // Докл. на научных конф. Ярославль. - 1964. - Т. 2. - Вып. 3. - С. 5-8.
4. Андреев К.А. О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий, гл. 4 // Матем. сб. - 1879. - Т.9. - Вып. 2.

5. Герасимова И.С. Получение кремоновых преобразований типа  $T_{3-3}$  в  $\mathbb{P}^3$  путем косого проектирования в  $\mathbb{P}^4$  // Уч. зап. ЯГПИ. Ярославль. - 1967. - Вып. 61. - С. 18-27.
6. Герасимова И.С. Получение специальных кремоновых преобразований типа Жонкьера методом косого проектирования в  $\mathbb{P}^4$  // Уч. зап. ЯГПИ. Ярославль. - 1971. - Вып. 92. - С. 35-40.
7. Годо Л. Неразрешенные вопросы алгебраической геометрии // Сб. статей по алгебраической геометрии под редакцией А.А. Глаголева. - Ленинград, 1938. - № 2. - С. 111-125.
8. Дьяконова И.П. Косые отображения квадрики и применение их в теории кремоновых преобразований и конструктивной геометрии. Канд. дисс. - Ярославль, 1965.
9. Иванов Г.С. Поверхности и кривые расслояемых нелинейных преобразований в начертательной геометрии и технике. Докт. дисс. - М., 1971.
10. Казакова Г.Г. Стереографическое и изотропное проектирование в четырехмерном пространстве и порождаемые ими преобразования Кремона и Ли. Канд. дисс. - Ярославль, 1969.
11. Клейн Ф. Высшая геометрия. - М.-Л., 1939.
12. Котий О.А. Построение и задание алгебраических пространственных кривых с помощью двух кремоновых связок прямых // Докл. на научных конф. Ярославль. - 1962. - Т. 1. - Вып. 3. - С. 85-88.
13. Котий О.А. Применение бирациональных соответствий в конгруэнциях для образования пространственных кривых // Докл. на научных конф. Ярославль. - 1962. - Т. 1. - Вып. 3. - С. 89-93.
14. Котий О.А. Классификация кремоновых преобразований  $T_3$  и алгебраические конгруэнции прямых // Известия Вузов. Казань. Математика. - 1958. - № 6.
15. Котий О.А. Применение конгруэнций первого порядка для получения кремоновых соответствий между двумя плоскостями // Докл. на научных конф. Ярославль. - 1964. - Т. 1. - Вып. 3. - С. 53-61.
16. Медведева Л.Б. Специальные гиперсети прямых многомерного проективного пространства и их применение для построения его моделей. Канд. дисс. - Ярославль, 1975.
17. Пеклич В.А. О некоторых инволюциях линейчатого пространства // Известия Вузов, Казань. Математика. - 1975. - № 1 (152).
18. Пеклич В.А. Об одной косой перспективе в четырехмерном пространстве // Прикладная геометрия и инженерная графика. - Киев, 1972. - Вып. 14.
19. Пеклич В.А. Начертательная геометрия. - М, 1999.
20. Понарин Я.П. О кремоновых преобразованиях плоскости, возникающих в связи с проективным обобщением теоремы Шлемильха // Уч. зап. ЯГПИ. Ярославль. Геометрия. - 1967. - Вып. 61. - С. 97-104.
21. Скопец З.А. Неевклидова и проективная циклография и ее применение к начертательной геометрии в евклидовом пространстве. Докт. дисс. - М., 1961.
22. Скопец З.А. Плоскости косого четырехугольника и связанные с ним тетраэдры Мебиуса // Матем. просв. - 1957. - № 1. - С. 155-161.
23. Скопец З.А. Об одной паре специальных тетраэдров // Матем. просв. - 1960. - Вып. 5. - С. 185-192.
24. Скопец З.А. О двух правильных шестиугольниках, связанных с произвольным треугольником // Математика в школе. - 1977. - № 5.
25. Скопец З.А., Тихомиров А.С. Инволюции ассоциированных прямых в четырехмерном проективном пространстве // Геометрия. Межвузовский научный сборник. - Л., 1975. - Вып. 3. - С. 154-158.
26. Чегодаев А.И. Получение некоторых кремоновых преобразований в  $\mathbb{P}^3$  стереографическим проектированием гиперповерхности 3-его порядка в  $\mathbb{P}^4$  // Уч зап. КБГУ. Нальчик. - 1966. - Вып. 30. - С. 301-306.
27. Клейн Ф. Высшая геометрия. - М.-Л., 1939.
28. Скопец З.А. Отображение прямых проективного пространства на плоскость посредством монидов // Изв. Вузов. Математика. Казань. - 1958. - Вып. 1. - С. 152-157.

29. Скопец З.А. Отображение плоскостей евклидова пространства на ориентированные кривые третьего порядка в евклидовой плоскости // Матем. сб. - 1958. - Т. 44. - Вып. 2. - С. 245-262.
30. Скопец З.А. Обобщение кинематического отображения Бляшке-Грюнвальда // Изв. Вузов. Математика. - Казань, 1961. - № 3. - С. 109-115.
31. Скопец З.А. Отображение пространства на плоскость посредством пространственной кривой четвертого порядка с битангенциальной точкой // Изв. Вузов. Математика. Казань. - 1962. - № 2. - С. 142-150.
32. Скопец З.А., Асекритов У.М. Отображение пространства на плоскость посредством кубической окружности // Изв. Вузов. Математика. Казань. - 1963. - № 5. - С. 113-116.
33. Скопец З.А. Отображение четырехмерного пространства на двумерную плоскость посредством нормкривой // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. - М., 1963. - Вып. 12. - С. 443-450.
34. Скопец З.А. Отображение пространства на плоскость посредством тетраэдralного циклического комплекса // Изв. Вузов. Математика. Казань. - 1964. - № 4. - С. 144-151.

*Медведева Людмила Борисовна,  
доцент Ярославского высшего военного  
училища противовоздушной обороны,  
кандидат физ.-мат. наук.*

*E-mail: lbmedvedeva@yandex.ru*

*Жаров Сергей Викторович,  
доцент Ярославского  
государственного педагогического  
университета им. К.Д. Ушинского,  
кандидат физ.-мат. наук.*

*E-mail: szharv@rambler.ru*

## **О Фонде математического образования и просвещения**

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

### **Условия подписки и приема материалов**

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: [www.matob.ru](http://www.matob.ru)

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Отдельные материалы имеются на [www.lomonosovclub.ru](http://www.lomonosovclub.ru)

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2018 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2018 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

**Получатель:** ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

**Расчетный счет и банк получателя:**

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,  
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

### **Внимание!**

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

## Contents

<b>V. Gavrilov. Line Segment, to Divide it or to Construct it from Parts</b>	<b>2</b>
Different methods of constructing a line segment with several equal parts are considered.	
<b>V. Drozdov. Napoleon Triangles</b>	<b>8</b>
An interesting and difficult geometric problem connected to Napoleon is considered.	
<b>A. Remizov. On Isomorphisms of Pseudo-Euclid Spaces</b>	<b>15</b>
Isomorphisms of pseudo-Euclid spaces of signatures $(2, n - 2)$ and $(3, n - 3)$ are studied.	
<b>S. Sazonov. A Method of Deriving the Wallis Formula and of Decomposition of Hyperbolic Functions into Infinite Products</b>	<b>40</b>
A simple method of decomposition of the hyperbolic tangent function into infinite product by the potential theory approach is suggested. This implies the famous Wallis formula.	
<b>K. Tarkhov. Practical Aspects of Teaching Linear Algebra for Chemical Technologies Profiles</b>	<b>44</b>
The form, contents, and structure of the subject “Linear Algebra” for the mentioned profiles are discussed.	
<b>A. Evnin. Tests of GRE Type.</b>	<b>50</b>
A collection of math tests of GRE type for higher school students. In the USA these tests are for entering the post-graduate education.	
<b>L. Medvedeva, S. Zharov. On Geometric Investigations of Professor Z. Skopets and his Students</b>	<b>66</b>
For the 100-th anniversary of the famous Soviet geometer Z. Skopets.	

