ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать второй

№ 3 (87)

июль – сентябрь 2018 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№3 (87), 2018 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2018 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 16.10.2018 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 3,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (87), июль – сентябрь 2018 г.

Содержание

Пять решений одной известной задачи

А. Н. Афанасьев

В статье изложено несколько различных решений геометрической задачи, основанных на применении разных идей и методов. Статья может быть интересна учащимся старших классов профильного уровня.

В процессе проверки олимпиадных работ учащихся иногда встречаются решения, отличные от решения составителя. В последние несколько лет наша кафедра проводит студенческие олимпиады по элементарной геометрии, с участием студентов других вузов России. К моему удивлению и радости составителя некоторых задач этой олимпиады, почти всегда встречаются работы, в которых есть решения, основанные на идее отличной от той, на основе которой составлялась та или иная задача. Невольно вспоминаются слова Пойа о неисчерпаемости математической задачи [2]. О пользе решения задач разными способами говорили и писали известные учителя математики, преподаватели вузов. Много примеров решения геометрических задач разными способами можно найти в книге [1].

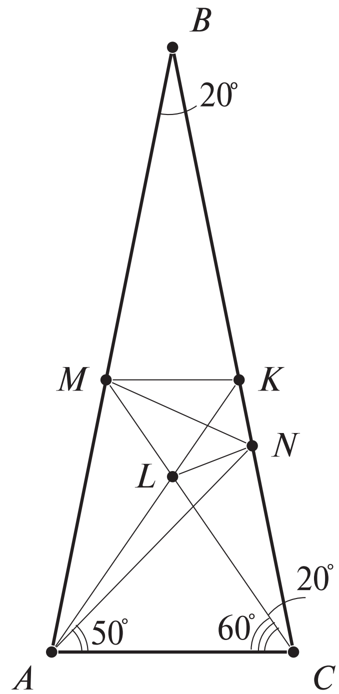
В данной статье хочется показать, какими разными могут быть решения одной и той же геометрической задачи, на примере известной задачи. Знаю эту задачу давно, не менее 35 лет. Во всяком случае, она есть (правда с опечаткой в условии) уже в первом издании книги [4], вышедшей в 1982 году, так что истинный возраст задачи может быть и старше. Так вышло, что задача понравилась, в течение этих лет много раз возвращался к ней, время от времени появлялись новые решения. В книге [4] она в первом разделе под номером 253. Вот эта задача.

Задача. В треугольнике ABC дано: $AB = BC$, $\angle B = 20^\circ$; на AB взята точка M так, что $\angle MCA = 60^\circ$, а на CB — точка N так, что $\angle NAC = 50^\circ$. Найти $\angle NMC$.

Вот решение выдающегося геометра Игоря Федоровича Шарыгина, пожалуй, лучшее из встречавшихся мне решений.

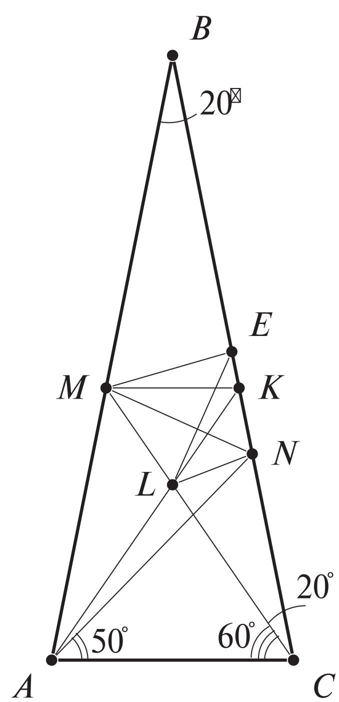
Решение 1 (геометрическое решение Шарыгина). Возьмем на BC точку K (см. рис. 1) так, что $\angle KAC = 60^\circ$, $MK||AC$. Пусть L — точка пересечения AK и MC; ΔALC — правильный, ΔANC — равнобедренный (подсчитайте углы). Значит, ΔLNC — также равнобедренный, $\angle LCN = 20^\circ$. Теперь найдем углы NLM и NKL — они по 100°; так как ΔMKL правильный, то углы $\angle KLN$ и $\angle NKL$ по 40°, т. е. $|KN| = |LN|$ и $\Delta MKN = \Delta MLN$, $\angle NMC = \angle NML = \angle KMN = 30^\circ$.

В следующих решениях будем считать, что точки K и L определены, как в решении 1.

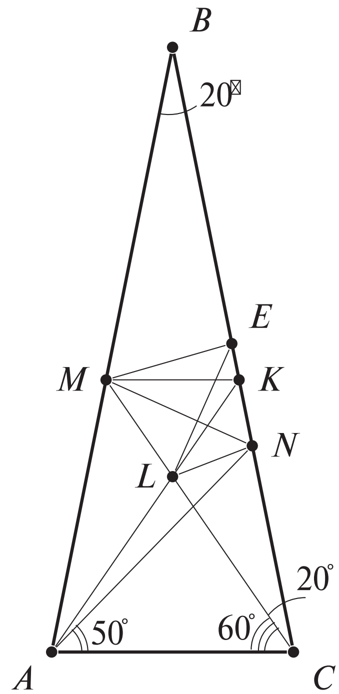


К решениям 1 и 5.

Решение 2 (геометрическое). Возьмем на BC точку E (см. рис. 2) так, что $\angle EMK = 20°$: Получим три равнобедренных треугольника ECM; NCL и KME, которые подобны треугольнику ABC. Из правильности треугольника KLM и равнобедренности треугольника KME следует равнобедренность треугольника LME и $\angle MEL = \angle ELM = 50°$. Так как $LN \parallel ME$, то $\angle MEL = \angle NME$ и $\angle NME = 50°$. Следовательно $\angle NML = \angle NMK = 50° - 20° = 30°$.

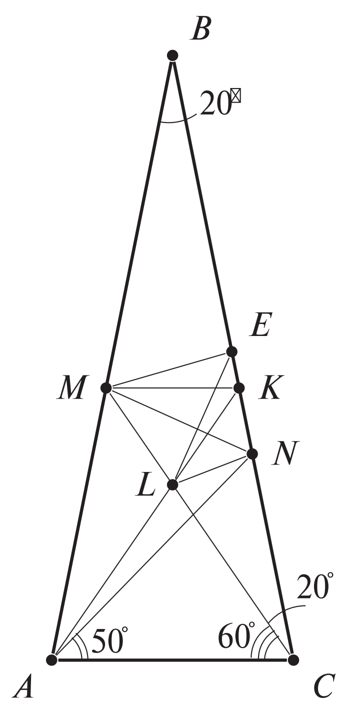


К решению 2.



К решению 3.

Решение 3 (вычислительное). Возьмем на BC точку E (см. рис. 2) так, что $\angle EMK = 20^\circ$. Заметим, что тогда треугольник MCE равнобедренный: $\angle EMC = \angle MEC = 80^\circ, \angle MCE = 20^\circ$. Будем считать, что $MK = 1, AC = b$. Тогда, так как $\angle ANC = \angle ACN = 50^\circ$, то $NC = b$. Далее, так как $\angle MCB = \angle MBC = 20^\circ$, то $MC = MB = KB = EC = b + 1$, $EN = EC - NC = 1$. Из подобия треугольников KME и MBK найдем $KE = \dfrac{1}{b+1}$ и $KN = 1 - \dfrac{1}{b+1} = \dfrac{b}{b+1}$. Теперь видим, что $\dfrac{MK}{MC} = \dfrac{KN}{NC} = \dfrac{1}{b+1}$, а это означает, что MN — биссектриса угла KMC треугольника KMC.



К решению 4.

Следовательно $\angle NML = \angle KMN = 30^\circ$.

Решение 4 (векторное). Точки K и L выберем как в первом решении, а длины отрезков MK и AC, как и в предыдущем решении, пусть будут равны 1 и b соответственно. Из подобия треугольников MBK и ABC найдем $AB = BC = b^2 + b$. Следовательно $AM = CK = AB - MB = b^2 - 1$. С другой стороны, по теореме косинусов для треугольника ALM имеем $AM^2 = b^2 + b + 1$. Из равенства $b^2 + b + 1 = (b^2 - 1)^2$ получаем:

$$b^3 = 3b + 1 \tag{1}$$

Пусть $\vec{e_1} = \overrightarrow{MN}$ и $\vec{e_2} = \overrightarrow{ML}$. Так как $MC = b + 1, CN = b^2 - 1$ и $CL = b$, то

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \frac{a}{a^2 - 1}\left(\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MC}\right) = \frac{b}{b^2 - 1}\vec{e_1} + \frac{(b+1)(b^2 - b - 1)}{b^2 - 1}\vec{e_2}.$$

Учитывая равенства $\vec{e_1}^2 = \vec{e_2}^2 = 1$ и $\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = \frac{1}{2}$ (имеются ввиду скалярный квадрат и скалярное произведение векторов), найдем длину вектора $\overrightarrow{MN}$:

$$MN^2 = \left(\frac{b}{b^2 - 1}\vec{e_1} + \frac{(b+1)(b^2 - b - 1)}{b^2 - 1}\vec{e_2}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^2}{(b^2 - 1)^2} + \frac{(b+1)^2(b^2 - b - 1)^2}{(b^2 - 1)^2} + \frac{b(b+1)(b^2 - b - 1)}{(b^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{b^6 - 3b^4 - 2b^3 + 3b^2 + 3b + 1}{(b^2 - 1)^2}.$$

Для упрощения последнего выражения используем равенство (1) и получим:

$$MN^2 = \frac{3b^2}{(b^2 - 1)^2} \Rightarrow MN = \frac{b\sqrt{3}}{b^2 - 1}.$$

Находим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{e_1} \cdot \left(\frac{b}{b^2 - 1}\vec{e_1} + \frac{(b+1)(b^2 - b - 1)}{b^2 - 1}\vec{e_2}\right) =$$

$$= \frac{b}{b^2 - 1} + \frac{(b+1)(b^2 - b - 1)}{2(b^2 - 1)} = \frac{b^3 - 1}{2(b^2 - 1)} = \frac{3b}{2(b^2 - 1)}.$$

Так как $\cos\angle KMN = \dfrac{\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{MN}}{MK \cdot MN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ то $\angle KMN = 30^\circ$ и

$$\angle NMC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

Решение 5. (по теореме синусов). В треугольнике AKN $\angle AKN = 40^\circ, \angle KAN = 10^\circ$ и по теореме синусов:

$$\frac{KN}{\sin 10^\circ} = \frac{AN}{\sin 40^\circ}. \tag{2}$$

Аналогично, в треугольнике ANC имеем $\angle NAC = 50^\circ, \angle NCA = 80^\circ$ и по теореме синусов:

$$\frac{CN}{\sin 50^\circ} = \frac{AN}{\sin 80^\circ}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует:

$$\frac{KN}{CN} = \frac{\sin 10^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\sin 50^\circ \cdot \sin 40^\circ} = \frac{\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\cos 40^\circ \cdot \sin 40^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}. \tag{4}$$

С другой стороны, так как $\angle MCK = 20^\circ$, $\angle MKC = 100^\circ$, по теореме синусов для треугольника MKC :

$$\frac{MK}{MC} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 100^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что MK — биссектриса угла KMC, следовательно $\angle NMC = 30^\circ$.

В заключение скажу, что я не включил в статью еще одно интересное решение этой задачи, которое приведено в книге [3]. Возможно, читатель найдет свое, более красивое решение задачи.

Литература

1. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна — решения разные: Геометрические задачи. Кн. для учащихся. - М.: Просвещение, 2000. - 224 с.: ил.

2. Пойа Д. Как решать задачу. - М.: Учпедгиз, 1959. - 210 с.

3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. 6-е изд., стереотипн. - М.: МЦНМО, 2007. - 600 с. ил.

4. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. (Планиметрия). 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 224 с. (Библиотечка “Квант”. Вып. 17.)

Афанасьев Александр Николаевич,
доцент кафедры методики преподавания математики
Института математики и информатики
Северо-Восточного Федерального Университета
им. М.К. Аммосова, г. Якутск,
кандидат педагогических наук.

E-mail: an.afanasev@s-vfu.ru

Полезно решать дифференциальные уравнения

С. В. Дворянинов

Памяти В.И. Арнольда
в год его 80-летия
со дня рождения.

В статье разобран интересны пример (доступный старшеклассникам), в котором задача интегрирования решается применением дифференциальных уравнений.

О чем идет речь

В центре нашей небольшой статьи — задача, которая доступна (и мы надеемся, будет интересна) и ученику девятого класса, и выпускнику школы, и студенту-второкурснику. В её формулировке, на первый взгляд, нет ничего примечательного:

Задача 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2+y^2 = 2017$ и $y = \left|x - \frac{2018}{2019}\right|$ (рис. 1).

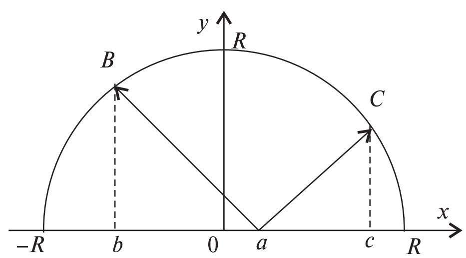


Рис. 1

Можно сказать, что это даже и никакая не задача, а упражнение на вычисление площади криволинейной трапеции. Школьные учебники для 11 класса учат, что фигура эта — криволинейная трапеция, и её площадь выражается интегралом

$$S = \int\limits_b^c \left(\sqrt{2017 - x^2} - \left|x - \frac{2018}{2019}\right|\right) dx,$$

где b, c — абсциссы точек B и C соответственно.

Но вот вопрос: сколько времени потребуется на интегрирование? При этом, пожалуй, формулу первообразной функции первого слагаемого надо взять из справочника. Помнить подобные формулы совсем не обязательно. Для удобства вычислений можно рассмотреть общую задачу.

Задача 2.

$$S = S(R, a) = \int\limits_b^c \left(\sqrt{R^2 - x^2} - |x - a|\right) dx, \tag{1}$$

где $-R \le a \le R$ и пределы интегрирования b, c должным образом выражаются через a и R

Упражнение 1. Вычислите интеграл (1) при $R = \sqrt{5}, \quad a = 1$.

Замечание 1. При выполнении упражнения 1 вам может понадобиться равенство

$$\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{2}.$$

Его быстро можно получить из рассмотрения прямоугольника со сторонами 1 и 2.

Мы же далее будем считать, что в формуле (1) величина R фиксирована, величина a — пробегает отрезок $[-R,R]$, и вместо интегрирования будем… дифференцировать Именно этот способ решения оправдывают наше внимание к этой задаче.

Vous cherchez la fonction[1]

Функцию (подынтегральную) мы уже нашли. Теперь у нас искомая площадь S есть функция аргумента a: $S=S(a)$. Решая систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ y=x-a, \end{cases}$ находим координаты точек C и D:

$$C\left(\frac{a+\sqrt{2R^2-a^2}}{2};\frac{\sqrt{2R^2-a^2}-a}{2}\right),\quad D\left(\frac{a-\sqrt{2R^2-a^2}}{2};\frac{-a-\sqrt{2R^2-a^2}}{2}\right).$$

Точки B и D симметричны относительно оси абсцисс, поэтому координаты точки B таковы:

$$B\left(\frac{a-\sqrt{2R^2-a^2}}{2};\frac{a+\sqrt{2R^2-a^2}}{2}\right).$$

Исходя из ординаты точки B, находим длину отрезка AB:

$$AB=\frac{a+\sqrt{2R^2-a^2}}{\sqrt{2}}, \tag{2}$$

исходя из ординаты точки C, находим длину отрезка AC:

$$AC=\frac{\sqrt{2R^2-a^2}-a}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

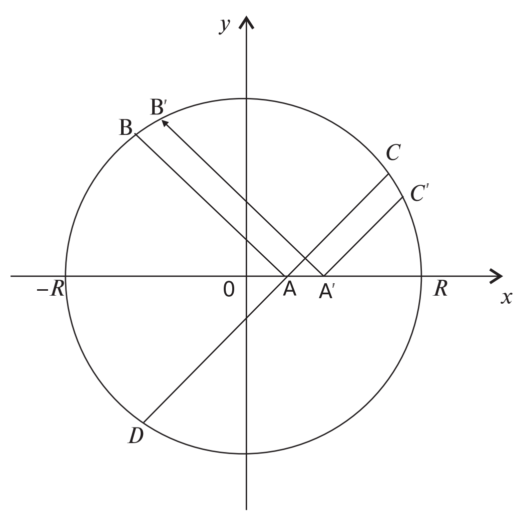


Рис. 2

[1] Ищите функцию (франц.) — *Прим. ред.*

Пусть положительная величина a получила малое приращение δ (рис. 2). Сравним два значения функции S: старое значение $S(a)$-и новое значение $S(a+\delta)$, считая для определённости, что $\delta > 0$. Приращение площади

$$\Delta S = S(a+\delta) - S(a),$$

очевидно, отрицательно. Абсолютная величина $|\Delta S|$ равна разности площадей двух криволинейных четырехугольников

$$|\Delta S| = S(ABB'A') - S(ACC'A').$$

Ширина обоих четырехугольников равна $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Наложим меньший четырехугольник на больший так, чтобы совпали их криволинейные стороны BB' и CC'.

Задача 3. Докажите, что дуги BB' и CC' равны.

Тогда легко видеть, что величина $|\Delta S|$ равна площади криволинейной трапеции с основаниями $AB - AC$ и $A'B' - A'C'$. Из (2) и (3) находим $AB - AC = a\sqrt{2}$.Заменяя в формулах (2) и (3) a на $a+\delta$, находим $A'B' - A'C' = (a+\delta)\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\Delta S = -\frac{a\sqrt{2} + (a+\delta)\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{2}} = -\frac{2a\delta + \delta^2}{2}.$$

Итак, $\Delta S = S(a+\delta) - S(a) = -a\delta - \frac{1}{2}\delta^2$.

Решаем функциональное уравнение

Задача состоит в отыскании функции $S(a)$, удовлетворяющей условию

$$S(a+\delta) - S(a) = -a\delta - \frac{1}{2}\delta^2. \qquad (\wedge)$$

Будем искать функцию в виде суммы двух функций

$$S(a) = -\frac{a^2}{2} + f(a), \qquad (*)$$

где f — новая неизвестная функция. Тогда

$$-\frac{1}{2}(a+\delta)^2 + f(a+\delta) + \frac{1}{2}a^2 - f(a) = -a\delta - \frac{1}{2}\delta^2,$$

или после очевидных преобразований

$$f(a+\delta) - f(a) = 0.$$

Последнее уравнение означает, очевидно, что функция f есть константа и, следовательно,

$$S(a) = -\frac{a^2}{2} + c.$$

Рассмотрим частное значение этой функции $S(0) = \frac{\pi R^2}{4}$, которое легко найти — это площадь четверти круга. Отсюда следует, что $c = \frac{\pi R^2}{4}$ и $S(a) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{a^2}{2}$.

Замечание 2. Частное значение $S(0) = \frac{\pi R^2}{4}$ оказалось полезным. Его можно использовать раньше, чем это было сделано. Положив $a = 0$ в функциональном уравнении $(\wedge)$, получим $S(\delta) - \frac{\pi R^2}{4} = -\frac{1}{2}\delta^2$. Аргумент функции можно обозначать любой буквой. Заменив δ на a, получим

$$S(a) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{a^2}{2}.$$

Чем плохо предыдущее решение

Что такое математика? Это наука, в которой математики открывают новые факты. А для физика, химика, инженера, всякого другого специалиста это инструмент, средство решения разнообразных прикладных задач. Инструмент этот должен быть удобным для использования, действовать безотказно, почти автоматически. Инженер не должен думать над решением математической задачи, у него другие проблемы. Со всякими «изюминками» и нестандартными ситуациями должны разбираться математики.

А разве следует из сказанного выше, что функцию $S(a)$ следует искать именно в виде (*)? Совершенно не следует. Да, представление $(*)$ решает эту задачу. А что делать в другой задаче? Как находить нужную замену? Появление равенства $(*)$ похоже на фокус. Это решение не носит рецептурный, алгоритмический характер. В этом смысле оно неудовлетворительно. И потому будем искать функцию S по-другому.

Появляется дифференциальное уравнение

Средняя скорость изменения функции $S(a)$ на отрезке $[a; a+\delta]$ равна $\frac{\Delta S}{\Delta a} = \frac{\Delta S}{\delta} = -a - \frac{1}{2}\delta$. Пусть $\Delta a = \delta \to 0$. Тогда мгновенная скорость изменения функции $S(a)$ в точке a, то есть производная функции $S(a)$, равна $-a$:

$$S'(a) = -a, \quad \text{или} \quad \frac{dS}{da} = -a. \tag{4}$$

Относительно функции $S(a)$ мы получили простейшее дифференциальное уравнение. Его общее решение таково:

$$S(a) = \frac{-a^2}{2} + c, \tag{5}$$

где c — произвольная постоянная. Значение c мы найдем, полагая в (5) $a = 0$. Значение $S(0) = \frac{\pi R^2}{4}$ известно, это площадь четверти круга, а (5) превращается в равенство $S(0) = c$. Следовательно, $c = \frac{\pi R^2}{4}$, и в итоге получаем формулу

$$S(a) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{a^2}{2}. \tag{6}$$

Доверяй, но проверяй

Всякий результат полезно проверять, рассматривая какие-либо частные случаи. Пусть $a = R$. По формуле (6) $S(R) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$. В этом случае наша криволинейная трапеция является сегментом с прямым центральным углом. Площадь сегмента находим так: из площади круга вычитаем площадь вписанного квадрата и результат делим на 4 и получаем $(\pi R^2 - 2R^2) : 4 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = S(R)$. При $a = R$ формула (6) верна.

«Пожалуйста, не вычисляйте!.»

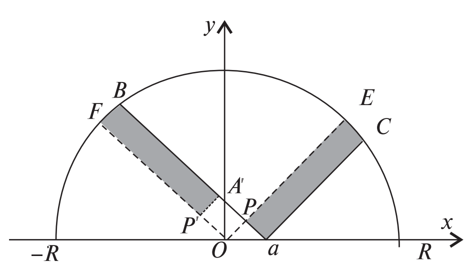


Рис. 3

Ответ в задаче 2, и в задаче 1, и в упражнении 1 можно получить за минуту. Проведем радиусы OE и OF, параллельные соответственно AC и AB (рис. 3). Повернем криволинейный четырехугольник $PECA$ вокруг точки O против часовой стрелки на угол $90°$. Ясно, что искомая площадь равна площади четверти круга минус площадь квадрата $OP'A'P$ со стороной $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ответ в задаче 2: $\frac{\pi R^2}{4} - \frac{a^2}{2}$. *Ответ* в упражнении 1: $\frac{5\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Эпилог

Как все, оказывается, просто! И красиво. Зачем же тогда надо было говорить про дифференциальное уравнение? Ответ такой. Наша задача по своей сути простая. И соответствующее дифференциальное уравнение в наивысшей степени простое. Если реальная задача (из естествознания, экономики, социологии...) сложная, то зачастую единственным средством её решения является анализ соответствующего дифференциального уравнения. Можно сказать, что "природа говорит на языке дифференциальных уравнений". Примеры есть в школьных учебниках: дифференциальное уравнение колебаний, уравнение радиоактивного распада, уравнение динамики $x'' = f(x)$. О значении дифференциальных уравнений писали еще Ньютон, Лейбниц, Кеплер, Бернулли. Известно высказывание Ньютона, о котором в своих книгах нашим современникам не уставал напоминать академик Владимир Игоревич Арнольд: «*Data aequotione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa*». Его перевод на современный математический язык — название нашей статьи.

Дворянинов Сергей Владимирович,
редактор журнала "Математика в школе",
доцент, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: dvoryan@yandex.ru

Новый способ решения общего уравнения гиперболического типа

А. Ж. Аширбаева

В предлагаемой статье начальная задача для общего уравнения гиперболического типа сведена к системе интегральных уравнений новым способом — с помощью метода дополнительного аргумента.

В настоящее время развивается метод изучения дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных под названием “метод дополнительного аргумента”.

Основы метода дополнительного аргумента созданы в работах [1–4].

В данной работе предложен новый способ решения общего уравнения гиперболического типа на основе метода дополнительного аргумента.

Рассматривается общее уравнение гиперболического типа вида

$$\begin{aligned} &u_{tt}(t,x) = a^2(t,x)u_{xx}(t,x) + b(t,x)u_t(t,x) + c(t,x)u_x(t,x) + f(t,x,u), \\ &\quad (t,x) \in G_2(T) = [0,T] \times \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Обозначим через $\bar{C}^{(k)}(\Omega)$ пространства функций, определенных, непрерывных и ограниченных (соответственно вместе со всеми своими производными до порядка k) на Ω.

Пусть в (1), (2)

$$\begin{aligned} &u_k(x) \in \bar{C}^{(2-k)}(\mathbb{R}),\ (k=0,1),\ \ a(t,x), b(t,x),\ c(t,x) \in \bar{C}^{(2)}(G_2(T)),\ a(t,x) \neq 0. \\ &f(t,x,u) \in \bar{C}^{(2)}(G_2(T) \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Воспользуемся следующими обозначениями:

$$\begin{aligned} &D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x}, \\ &\vartheta(t,x) = D[-a(t,x)]u(t,x), \\ &g(t,x) = \frac{1}{a(t,x)}[c(t,x) - a_t(t,x) - a(t,x)a_x(t,x)], \\ &\beta_1(t,x) = b(t,x) + g(t,x), \quad \beta_2(t,x) = b(t,x) - g(t,x), \quad \beta_3(t,x) = D[a(t,x)]\beta_1(t,x). \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим через $p(s,t,x), q(s,t,x)$ соответствующие решения интегральных уравнений:

$$p(s,t,x) = x + \int\limits_s^t a(\nu, p(\nu,t,x))d\nu, \tag{4}$$

$$q(s,t,x) = x - \int\limits_s^t a(\nu, q(\nu,t,x))d\nu, \tag{5}$$

$$(s,t,x) \in Q_2(T) = \{0 \le s \le t \le T,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Лемма. *Задача (1)–(2) эквивалентна системе интегральных уравнений*

$$\vartheta(t,x) = \frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x)) + \frac{1}{2}\beta_1(t,x)u + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \beta_2(s,q)\vartheta(s,q)ds - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \beta_3(s,q)u(s,q)ds + \int\limits_0^t f(s,q,u)ds, \tag{6}$$

$$u(t,x) = u_0\left(p(0,t,x)\right) + \int\limits_0^t \vartheta\left(s, p(s,t,x)\right)ds, \tag{7}$$

где

$$\left[2\vartheta(t,x) - \beta_1(t,x,u)u(t,x)\right]|_{t=0} = \varphi_1(x)\ .$$

Доказательство. Пусть $\vartheta(t,x), u(t,x)$ — решение системы интегральных уравнений (6), (7).

Непосредственным дифференцированием из (6) имеем:

$$\vartheta_t(t,x) + a(t,x)\vartheta_x(t,x) = b(t,x)u_t(t,x) + a(t,x)g(t,x)u_x(t,x) + f(t,x,u). \tag{8}$$

Принимая во внимание обозначение (3), из (8) получаем справедливость уравнения (1).

Следовательно, решение системы уравнений (6)–(7) удовлетворяет уравнению (1). Такое решение удовлетворяет и начальному условию (2).

Теперь покажем, что, в свою очередь, решение задачи (1), (2) является решением системы интегральных уравнений (6)–(7). Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$D[a(t,x)]z(t,x;u) = \beta_2(t,x)\vartheta(t,x) - \beta_3(t,x)u + 2f(t,x,u), \tag{9}$$

где $z(t,x;u) = 2\vartheta(t,x) - \beta_1(t,x)u(t,x)$.

Решение задачи (9), (2) методом дополнительного аргумента сводится к интегральному уравнению (6). Из обозначения (3) следует справедливость (7). $\square$

В уравнение (6), подставляя (7), получаем интегральное уравнение относительно $\vartheta(t,x)$. К последнему интегральному уравнению применяется метод последовательных приближений.

Проиллюстрируем доказанную эквивалентность на примерах.

Пример 1. Рассмотрим уравнение колебания струны:

$$\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \tag{10}$$

с начальными условиями (2).

Для задачи (10), (2) решения интегральных уравнений (4), (5) имеют вид:

$$p(s,t,x) = x + a(t-s), \quad q(s,t,x) = x - a(t-s).$$

Для (10)–(2) уравнение (6) имеет следующий вид:

$$\vartheta(t,x) = \frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x)),$$

где

$$\varphi_1(x) = 2(u_t - au_x)|_{t=0} = 2(u_1(x) - au_0'(x)).$$

Следовательно

$$\vartheta(t,x) = u_1(x-at) - au_0'(x-at).$$

Из (7) имеем

$$u(t,x) = u_0(x+at) + \int\limits_0^t u_1(x+at-2as)ds - a\int\limits_0^t u_0'(x+at-2as)ds =$$

$$= u_0(x+at) + \int\limits_0^t u_1(x+at-2as)ds +$$

$$+\frac{1}{2}u_0(x+at-2as)|_0^t = u_0(x+at) + \frac{1}{2}u_0(x-at) - \frac{1}{2}u_0(x+at) + \int\limits_0^t u_1(x+at-2as)ds =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x+at-2as=\tau \\ ds = -\frac{d\tau}{2a} \\ s=0\ \tau = x+at \\ s=t\ \tau=x-at \end{array} \right| = \frac{u_0(a-xt)+u_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\tau)d\tau.$$

В результате получаем формулу Даламбера:

$$u(t,x) = \frac{u_0(a-xt)+u_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\tau)d\tau.$$

Далее, покажем преимущества предложенного способа решения общего уравнения гиперболического типа перед известными методами характеристик.

Пример 2. Пусть в уравнении (1) $a(t,x) = 1 + e^t$.

$$u_{tt} - (1+e^t)^2 u_{xx} = b(t,x)u_t + c(t,x)u_x + f(t,x,u). \tag{11}$$

Попробуем решать поставленную задачу методом характеристик. Решая соответствующее (11) уравнение характеристик:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - (1+e^t)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

получаем характеристические кривые или просто характеристики уравнения:

$$x - t - e^t = const, \quad x + t + e^t = \text{const}.$$

Введем вместо (x,y) новые независимые переменные (ξ,η):

$$\xi = x - t - e^t, \quad \eta = x + t + e^t$$

— дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial t} & \frac{\partial\xi}{\partial x} \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} & \frac{\partial\eta}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-e^t & 1 \\ 1+e^t & 1 \end{vmatrix} = -2(1+e^t) \neq 0.$$

Для получения решения исходной задачи требуется перейти от характеристических переменных (ξ, η) к переменным (t, x). В данном случае сделать это в конечном виде невозможно.

Пусть в уравнении (11) $b(t,x) = 1$, $c(t,x) = e^t$, $f(t,x,u) = 0$.

$$u_{tt} - (1+e^t)^2 u_{xx} = u_t + e^t u_x. \tag{12}$$

Сводим уравнение (11) со следующими начальными условиями

$$\begin{aligned} &u(0,x) = 0, \\ &\tfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x - 1, \ x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{13}$$

к интегральному уравнению (7), с

$f(t,x) = 0$, $\beta_1(t,x) = 1$, $\beta_2(t,x) = 1$, $\beta_3(t,x) = 0$,

$$[2\vartheta - \beta_1(t,x,u)u]\,|_{t=0} = \varphi_1(x) = 2(x-1), \quad p(s,t,x) = x + t + e^t - s - e^s,$$

$$q(s,t,x) = x - t - e^t + s + e^s, \quad (s,t,x) \in Q_2.$$

Интегральное уравнение относительно $\vartheta(t,x)$ принимает вид:

$$\vartheta(t,x) = x - t - e^t + \frac{1}{2}\int_0^t [\vartheta\left(s, x + t + e^t - s - e^s\right) + \vartheta(s, x - t - e^t + s + e^s)]ds. \tag{14}$$

К (14) применяем метод последовательных приближений, полагая

$$\vartheta^0(t,x) = x - t - e^t,$$

$$\vartheta^N(t,x) = x - t - e^t + \frac{1}{2}\int_0^t [\vartheta^{N-1}\left(s, x + t + e^t - s - e^s\right) + \vartheta^{N-1}(s, x - t - e^t + s + e^s)]ds.$$

Тогда

$$\vartheta^1(t,x) = x - t - e^t + xt - \frac{t^2}{2} - e^t + 1 = x(1+t) - e^t - (t + \frac{t^2}{2!}\} - e^t + 1,$$

$$\begin{aligned} \vartheta^2(t,x) = x - t - e^t + xt - \frac{t^2}{2} - e^t + 1 + \frac{xt^2}{2} - \frac{t^3}{3!} - e^t + 1 + t = x(1 + t + \frac{t^2}{2!}\} - e^t - \\ - (t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}) - e^t + 1 - e^t + 1 + t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta^3(t,x) = x - t - e^t + xt - \frac{t^2}{2} - e^t + 1 + \frac{xt^2}{2} - \frac{t^3}{3!} - e^t + 1 + t + \frac{xt^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} - \\ - e^t + 1 + t + \frac{t^2}{2!} = x(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}) - e^t - (t + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}) - e^t + (1 + t + \frac{t^2}{2!}) - \\ - e^t + (1+t) - e^t + 1, \end{aligned}$$

$$\vartheta^n(t,x) = x(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}) - e^t - (t+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}) -$$
$$- e^t + (1+t+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}) - e^t + (1+t+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}) - ... - e^t +$$
$$+ (1+t) - e^t + 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta^n(t,x) = \vartheta(t,x)$, где

$$\vartheta(t,x) = xe^t - te^t - 2e^t + 1.$$

Найдем

$$u(t,x) = \int_0^t \vartheta(s, x+t+e^t-s-e^s)ds = \int_0^t [(x+t+e^t-s-e^s)e^s - se^s - 2e^s + 1]ds =$$
$$= xe^t - x - te^t + \frac{1}{2}e^{2t} - e^t + \frac{1}{2}.$$

Решение $u(t,x) = xe^t - x - te^t + \frac{1}{2}e^{2t} - e^t + \frac{1}{2}$ действительно удовлетворяет уравнению (12) и начальному условию (13).

Литература

1. Иманалиев М.И. Ведь Ю.А. О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом //Дифференциальные уравнения. - 1989. - Т. 25. - №3. - С. 465-477.

2. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными. - Бишкек: Илим, 1992. - 112 с.

3. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Доклады Российской АН. - 1992. - Т. 323. - №3. - С. 410-414.

4. Аширбаева А.Ж. Развитие метода дополнительного аргумента для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных: Автореф. дисс. канд. физ.–матем. наук. 01.01.02. - Бишкек, 1995. - 15 с.

Аширбаева Айжаркын Жоробековна,
заведующая кафедрой прикладной математики Ошского технологического университета
имени академика М.М. Адышева,
г. Ош, Кыргызская Республика,
доцент, доктор физ.-мат. наук.

E-mail: aijarkyn.osh@mail.ru

Неравенства Эрмита-Адамара: образовательно-исторический аспект

С. И. Калинин, Л. В. Панкратова

В статье рассматриваются хорошо известные в тематике выпуклых функций неравенства Эрмита-Адамара, дающие оценки сверху и снизу среднего значения выпуклой или вогнутой на отрезке функции. Затрагивается как исторический аспект, связанный с открытием данных неравенств, так и их образовательный потенциал.

Перед читателем обсуждаемые неравенства предстают в форме учебно-исследовательской задачи.

В настоящей статье речь пойдет об интегральных неравенствах для выпуклой или вогнутой на отрезке числовой прямой функции. Упоминаемые неравенства носят имена двух знаменитых французских математиков — Шарля Эрмита и Жака Адамара. Что послужило причиной обращения авторов к данным неравенствам? Что известно из истории открытия неравенств Эрмита-Адамара? В каких образовательных областях они могут найти применения? Почему связанные с ними исследования и сегодня являются актуальными? На эти и другие вопросы читатель найдет ответы ниже.

1. Интегрируемость выпуклой на отрезке функции

Напомним определение понятия выпуклой на промежутке функции.

Пусть l — произвольный промежуток числовой прямой Ox и $f\colon l \to \mathbf{R}$ — функция, заданная на этом промежутке.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* на промежутке l, если для любого отрезка $[a;b] \subset l$ и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \tag{1}$$

Если в условиях определения 1 для всех $\lambda \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b), \tag{2}$$

то функция f называется *строго выпуклой* на рассматриваемом промежутке l.

Очевидно, строго выпуклая функция является выпуклой.

Замечание 1. В соответствии с тем, какое из неравенств (2) или (1) характеризует функцию f, условимся говорить соответственно о выпуклости данной функции в строгом или нестрогом смысле.

Аналогично определяются *вогнутая* и *строго вогнутая* функции — для этого в неравенствах (1)–(2) следует использовать знаки $\geq$ и $>$ соответственно.

Напомним также геометрическую интерпретацию понятий выпуклой и вогнутой функций. Если функция f выпукла (строго выпукла) на промежутке l, то для любого отрезка $[a;b] \subset l$ внутренние точки графика сужения $f\Big|_{[a;b]}$ данной функции на $[a;b]$ лежат не выше (ниже) соответствующих точек отрезка, соединяющего концы $A\big(a; f(a)\big)$, $B(b; f(b))$ этого графика.

Данный факт следует из оценки:

$$f(x) = f(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b) \leq (<) \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b), \quad x \in (a,b),$$

поскольку уравнение $y = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$ задает прямую, проходящую через точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$.

Если же f вогнута (строго вогнута) на l, то для любого отрезка $[a;b] \subset l$ внутренние точки графика сужения $f\Big|_{[a;b]}$ будут находиться не ниже (выше) точек отрезка, соединяющего концы $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ этого графика.

Приведем несколько примеров.

Функция $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ является выпуклой на промежутке $(-\infty, 0]$ и вогнутой на промежутке $[0, +\infty)$.

Функция $f_1 = -|x|$ — вогнутая на всей числовой прямой.

Функция $f_2(x) = x^2$ является строго выпуклой на всей числовой прямой.

Функция $f_3(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ x^2, & 0 < x < 1, \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ будет строго выпуклой на отрезке $[0; 1]$.

В приведенных примерах, заметим, функции f_1 и f_2 являются непрерывными, а функции $\operatorname{sign} x$ и f_3 — разрывными.

Замечание 2. Покажем, что если функция f выпукла (строго выпукла) на промежутке l, то для любого отрезка $[a;b] \subset l$ точки графика сужения $f\Big|_{l\setminus[a;b]}$ данной функции на множество $l \setminus [a;b]$ лежат не ниже (выше) соответствующих точек продолжения отрезка, соединяющего точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ графика f.

Действительно, пусть $x \in l\setminus[a, b]$ и $x > b$. Тогда в силу выпуклости (строгой выпуклости) функции f на l

$$f(b) \le (<) \frac{x-b}{x-a} f(a) + \frac{b-a}{x-a} f(x). \tag{3}$$

Аналогично, если $x \in l \setminus [a, b]$ и $x < a$, то

$$f(a) \le (<) \frac{b-a}{b-x} f(x) + \frac{a-x}{b-x} f(b). \tag{4}$$

Но совокупность условий (3)–(4) равносильна условию

$$f(x) \ge (>) \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b), \quad x \in l \setminus [a, b]\,.$$

Нужное установлено.

Точно так же показывается, что если f — вогнутая (строго вогнутая) на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a;b] \subset l$ точки графика сужения $f\Big|_{l\setminus[a;b]}$ данной функции на множество $l \setminus [a;b]$ лежат не выше (ниже) соответствующих точек продолжения отрезка, соединяющего точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ графика f.

Установим нужную нам для дальнейшего вспомогательную лемму, называемую нередко леммой о трех хордах (см., напр., [1, с. 165]).

Лемма 1. Пусть функция f выпукла на промежутке l, $x_1, x_2, x_3 \in l$, $x_1 < x_2 < x_3$. Тогда

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{5}$$

Доказательство. Предложим обоснование неравенства (5), отличное от рассмотренного в [1]. Введем в рассмотрение точки $A_i(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, 3$, и B — точку хорды A_1A_3 с абсциссой x_2. Очевидно, продолжение отрезка A_1A_2 имеет угловой коэффициент $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, отрезка A_2A_3 — $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$, а отрезка A_1A_3 (как и отрезков A_1B, BA_3) — $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$. В силу выпуклости функции f на l, точка

B лежит не ниже точки A_2, следовательно, отмеченные угловые коэффициенты соотносятся так, как записано в (5). Лемма доказана.

Замечание 3. Ясно, что если в условиях установленной леммы 1 функция f является строго выпуклой на промежутке l, то в (5) неравенства будут строгими. Кроме того, аналогичное утверждение можно сформулировать в отношении вогнутой на промежутке l функции. Для такой функции соответствующие неравенства будут отличаться от неравенств (5) противоположными знаками.

Справедлива

Теорема 1. Пусть функция f выпукла на промежутке l. Тогда она непрерывна в каждой внутренней точке данного промежутка.

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная внутренняя точка промежутка l. Введем в рассмотрение функцию $F(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \in l \setminus \{x_0\}$. В силу леммы 1 данная функция является неубывающей на множестве $l \setminus \{x_0\}$. Значит, для произвольных ξ и η из l, удовлетворяющих условию $\xi < x_0 < \eta$, будет справедливо соотношение $F(\xi) \le F(\eta)$. Последнее говорит о том, что функция F ограничена сверху на множестве $(-\infty, x_0) \cap l$ и ограничена снизу на множестве $(x_0, +\infty) \cap l$. По теореме о существовании конечного предела монотонной функции отсюда заключаем, что существуют конечные односторонние пределы $F(x_0 - 0) = f'_-(x_0)$ и $F(x_0 + 0) = f'_+(x_0)$.

Наличие конечных односторонних производных $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ обеспечивает непрерывность функции f в точке x_0 и слева, и справа. Следовательно, она непрерывна в данной точке. Теорема доказана.

Замечание 4. Утверждение теоремы 1 останется в силе, если в ней условие выпуклости функции f заменить условием вогнутости.

Замечание 5. Если функция выпукла (вогнута) на отрезке, то на его концах она может иметь разрыв. Аналогично, если функция выпукла (вогнута) на промежутке, которому один конец принадлежит, а другой нет, то в принадлежащем промежутку конце она может иметь разрыв. Данные факты иллюстрируются ранее рассмотренными примерами.

Докажем еще одну теорему, важную для следующего раздела статьи.

Теорема 2. Пусть функция f выпукла или вогнута на отрезке $[a;b]$ числовой прямой. Тогда она интегрируема по Риману на данном отрезке.

Доказательство. Пусть для определенности f — выпуклая на рассматриваемом отрезке функция. В силу теоремы 2 она может быть разрывной лишь на концах отрезка $[a;b]$.

Если функция f в точках a и b непрерывна, то она, очевидно интегрируема. Если же она имеет хотя бы один разрыв, то для интегрируемости функции на отрезке $[a;b]$ достаточно установить ее ограниченность на нем.

Ограниченность сверху следует из того, что график функции лежит не выше хорды AB, стягивающей его концы. Установим ограниченность функции на отрезке снизу.

Для этого введем в рассмотрение отрезок $[a_1;b_1]$, где $a < a_1 < b_1 < b$. На данном отрезке функция f ограничена снизу, ибо непрерывна на нем. Пусть A_1, B_1 — концы графика сужения f на $[a_1;b_1]$. По замечанию 2 точки графика сужения f на множество $[a, a_1) \cup (b_1, b]$ будут лежать не ниже точек продолжения A_1B_1. Это влечет ограниченность снизу функции f на множестве $[a, a_1) \cup (b_1, b]$. Таким образом, функция f ограничена снизу на всем отрезке $[a;b]$. Интегрируемость f полностью обоснована.

Случай вогнутости рассматривается по аналогии. Теорема доказана.

2. Задача об оценке среднего значения функции, выпуклой на отрезке

Предложим вниманию читателя следующую учебно-исследовательскую задачу.

Задача 1. Пусть $f(x)$ — выпуклая на отрезке $[a;b]$ $(0 < a < b)$ функция. Докажите справедливость двойного неравенства

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{6}$$

Решение. Подчеркнем, во-первых, что постановка данной задачи корректна, поскольку по теореме 2 фигурирующий в (6) интеграл Римана функции f существует.

Докажем сначала левое неравенство в (6), обращаясь к методу обоснования интегрального неравенства работы [2, с. 54–55]. Для этого положим

$x = ta + (1-t)b$, $y = tb + (1-t)a$, где $t \in [0;1]$. Очевидно, $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{a+b}{2}$. В силу выпуклости функции f на отрезке $[a;b]$ имеем:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)a)}{2}.$$

Получившееся неравенство

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)a)}{2}$$

проинтегрируем почленно по переменной t на отрезке$[0;1]$. Будем иметь:

$$\int\limits_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(tb+(1-t)a)dt =$$

$$= \frac{1}{2(a-b)}\int\limits_b^a f(x)dx + \frac{1}{2(b-a)}\int\limits_a^b f(y)dy = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Докажем сейчас правое неравенство в (6). Снова в силу выпуклости функции f имеем неравенство:

$$f(x) = f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b). \tag{7}$$

Интегрируя (7) почленно на отрезке $[a;b]$, получаем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)}{b-a}\int\limits_a^b (b-x)dx + \frac{f(b)}{b-a}\int\limits_a^b (x-a)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

Неравенство (6) обосновано.

Замечание 6. Из техники доказательства неравенства (6) следует, что если f — строго выпуклая на отрезке $[a;b]$ функция, то данное неравенство будет иметь вид

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx < \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{8}$$

Для вогнутой и строго вогнутой на отрезке $[a;b]$ функции f, очевидно, будут справедливы соответственно неравенства

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{9}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx > \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{10}$$

Замечание 7. Неравенства (6), (8)–(10) дают оценки среднего значения выпуклой и вогнутой на отрезке $[a;b]$ функции.

Следует отметить, что задача 1 в соответствующих редакциях встречается в учебных пособиях для студентов физико-математических и технических направлений подготовки. Например, в широко известном задачнике для студентов физических и механико-математических специальностей вузов [3, с. 182] задача 2193.3 формулируется так:

> «Пусть функция $f(x)$ ограничена и выпукла сверху на сегменте $[a;b]$. Доказать, что $(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$».

Подчеркнем, условие интегрируемости функции на сегменте $[a;b]$ не оговаривается, потому существование интеграла в данной задаче надо обосновывать.

В цитируемом учебном пособии определение выпуклости функции вводится следующим образом [3, с. 127–128]: «Функция $f(x)$ называется *выпуклой снизу (сверху)* на интервале (a,b), если для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала и произвольных чисел λ_1 и λ_2 $(\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1)$ имеет место неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(или соответственно противоположное неравенство) $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$».

Заметим, в воспроизводимом определении знаки неравенств в последних соотношениях — строгие, следовательно, в предлагаемом к доказательству неравенстве знак «$\leq$» можно заменить знаком «$<$».

Кроме того, в этой задаче условие ограниченности функции $f(x)$, очевидно, является излишним.

В учебном пособии [4, с. 103, задача 16] задача об оценке среднего значения функции на отрезке снова формулируется для вогнутой функции:

«Доказать, что если функция f ограничена и выпукла вверх на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на нем и $(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$».

В отличие от предыдущей задачи из [3] в данной явно указывается на необходимость установления интегрируемости функции на отрезке $[a;b]$. Но мы снова видим, что условие ограниченности функции здесь является излишним.

Обратим внимание читателя еще на одну задачу из [5, с. 382–383, задача 10]: «Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$ и для любых x_1 и x_2 из $[a;b]$
$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (свойство выпуклости). Доказать, что тогда
$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$».

В следующем разделе мы покажем, что приводимое в задаче «свойство выпуклости» равносильно выпуклости функции f на рассматриваемом отрезке. Приводимая задача, безусловно, корректна (интеграл существует), но условия, накладываемые на функцию f, являются слишком сильными.

Таким образом, рассмотренная нами задача 1 обобщает и задачу 2193.3 из [3], и задачу 16 из [4], и задачу 10 из [5].

3. Об определении Иенсена понятия выпуклой функции

Из определения 1 следует, что если f — выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a;b] \subset l$ справедливо, в частности, неравенство

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{11}$$

которое будет строгим, если f — строго выпуклая на l функция.

Известно (см., напр., монографию [6]), что Иенсен (J.L.W.V. Jensen) в своей работе [7] от 1906 г. понятие выпуклой функции ввел именно через посредство соотношения (11). В этой связи сформулируем

Определение 2. Функцию $f(x)$ назовем *выпуклой по Иенсену* на промежутке l, если для любого отрезка $[a;b] \subset l$ выполняется неравенство (11).

Вогнутая по Иенсену на рассматриваемом промежутке функция будет характеризоваться сменой знака неравенства в (11) на знак $\geq$.

Строгая выпуклость по Иенсену функции f будет характеризоваться строгим знаком неравенства в (11).

Оказывается, в случае непрерывности функции f утвердившееся в тематике выпуклых функций определение 1 и восходящее к Иенсену определение 2 являются эквивалентными. Обоснование данного факта в курсах математического анализа для студентов российских вузов обнаружить непросто. Выполним упоминаемое обоснование.

Теорема 3. Пусть $f: \ l \to \mathbb{R}$ — непрерывная на промежутке l функция. Если для любого отрезка $[a;b] \subset l$ будет выполняться неравенство (11), то f — выпуклая на l функция.

Доказательству теоремы предпошлем следующую почти очевидную лемму.

Лемма 2. Пусть f — выпуклая (строго выпуклая) на отрезке $[a;b]$ функция, AB — хорда, стягивающая концы $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ ее графика Γ_f. Тогда для всякой точки $C(c, f(c)) \in \Gamma_f$, отличной от точек A и B, выполняется условие: внутренние точки отрезков AC и CB лежат не выше (строго ниже) соответствующих точек отрезка AB.

Доказательство. Достаточно применить лемму 1 к точкам $x_1 = a$, $x_2 = c$, $x_3 = b$. Отсюда все следует. Лемма доказана.

Проведем сейчас **доказательство теоремы**. Покажем, что при выполнении условий теоремы функция f будет выпуклой на промежутке l.

Предположим противное: найдется отрезок $[a;b] \subset l$ такой, что для него (11) выполняется, однако для некоторого $\lambda \in (0;1)$ будет выполняться неравенство

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) > \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b). \tag{12}$$

Положим $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $c_0 = \lambda a + (1-\lambda)b$. Пусть хорда, стягивающая концы A и B графика функции fна отрезке $[a;b]$, имеет уравнение $y = px + s, \ a \leq x \leq b$. Условимся правую часть данного уравнения обозначать символом $L_{a,b}(x)$, в котором индексы a и b указывают на связь хорды с отрезком $[a;b]$. В терминах введенного символа неравенства (11) и (12) запишутся соответственно так:

$$f(x_0) \leq L_{a,b}(x_0), \quad f(c_0) > L_{a,b}(c_0). \tag{13}$$

Заметим, что в силу непрерывности функции f на промежутке l второе неравенство в (13) будет выполняться не только для точки c_0, но и для любого x из некоторой δ-окрестности данной точки:

$$f(x) > L_{a,b}(x), \quad x \in (c_0 - \delta, c_0 + \delta). \tag{14}$$

Пусть для определенности точка c_0 лежит между точками a и x_0. Отрезок $[a, x_0]$ обозначим $[a_1, b_1]$, для него справедливо неравенство

$$f(\frac{a_1 + b_1}{2}) \leq \frac{f(a_1) + f(b_1)}{2} \tag{15}$$

Положим $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, тогда в силу (15) и леммы 2 можем записать

$$f(x_1) \leq L_{a_1,b_1}(x_1) \leq L_{a,b}(x_1). \tag{16}$$

Если $x_1 \in (c_0 - \delta, c_0 + \delta)$, то из (14) следует $f(x_1) > L_{a,b}(x_1)$. Получаем противоречие с (16).

Если же $x_1 \notin (c_0-\delta, c_0+\delta)$, то через $[a_2, b_2]$ обозначим тот из отрезков $[a_1, x_1]$, $[x_1, b_1]$, который содержит точку c_0.С данным отрезком проведем такие же рассуждения, как и с отрезком $[a_1, b_1]$.

Обозначим $x_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$. В силу неравенства

$$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) \le \frac{f(a_2)+f(b_2)}{2},$$

леммы 2 и соотношений (16) имеем:

$$f(x_2) \le L_{a_2,b_2}(x_2) \le L_{a_1,b_1}(x_2) \le L_{a,b}(x_2). \tag{17}$$

Если $x_2 \in (c_0-\delta, c_0+\delta)$, то в силу (14) $f(x_2) > L_{a,b}(x_2)$. Получаем противоречие с (17).

Если же $x_2 \notin (c_0-\delta, c_0+\delta)$, то через $[a_3, b_3]$ обозначим тот из отрезков $[a_2, x_2]$, $[x_2, b_2]$, который содержит точку c_0. И так далее.

Возникает последовательность вложенных отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, $\ldots$, длины которых в соответствии с номером отрезка выражаются значениями $\frac{b-a}{2^n}$. Ясно, что найдется такое натуральное значение n, что для точки $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ будет выполняться условие $x_n \in (c_0-\delta, c_0+\delta)$, и значит, $f(x_n) > L_{a,b}(x_n)$. В то же время справедлива цепочка соотношений

$$f(x_n) \le L_{a_n,b_n}(x_n) \le L_{a_{n-1},b_{n-1}}(x_n) \le ... \le L_{a,b}(x_n).$$

Имеем противоречие. Теорема доказана.

4. Развитие задачи 1

Сформулируем задачу, обобщающую задачу 1.

Задача 2. Докажите неравенство

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int\limits_a^b g(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int\limits_a^b g(x)dx, \tag{18}$$

где f — выпуклая на отрезке $[a;b]$ $\ (0 < a < b)$ функция, g — неотрицательная интегрируемая на этом же отрезке функция, такая что $g(a+t) = g(b-t)$, $0 \le t \le \frac{a+b}{2}$.

Решение. Очевидно, фигурирующие в неравенстве (18) интегралы существуют. Докажем сначала левое соотношение в (18). Введем переменные x и y, полагая $x = ta+(1-t)b$, $y = tb+(1-t)a$, где $t \in [0;1]$. Так как $\frac{x+y}{2} = \frac{a+b}{2}$, то точки x и y на числовой прямой располагаются симметрично относительно точки $\frac{a+b}{2}$. Кроме того, $dx = -dy$. В силу выпуклости функции f на отрезке $[a;b]$, а также неотрицательности и симметричности функции g на данном отрезке имеем:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)g(x)dx = \int\limits_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)g(x)dx \le$$

$$\le \int\limits_a^b (\frac{1}{2}f(x)g(x)+\frac{1}{2}f\left(y\right)g\left(x\right))dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{2}\int\limits_b^a f\left(y\right)g\left(y\right)dy = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx.$$

Левое неравенство установлено.

Докажем правое неравенство в (18). Нам потребуется следующий факт, доставляемый задачей 118 из [8, с. 96]: в условиях, наложенных на функцию g, справедливо равенство

$$\int\limits_a^b xg(x)dx = \frac{a+b}{2}\int\limits_a^b g(x)dx.$$

В силу выпуклости функции f и неотрицательности интегрируемой функции g имеем:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b)g(x)dx \leq \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\right) g(x)dx =$$

$$= \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}\int_a^b g(x)dx + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b xg(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx.$$

Правое неравенство также установлено.

Очевидно, если в (18) $g(x) \equiv 1$, то имеем неравенство (6). Так что действительно, задача 2 обобщает задачу 1.

Замечание 8. Если в условиях задачи 2 функция f — строго выпуклая, а g — положительная, то неравенство (18) будет иметь вид

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx < \int_a^b f(x)g(x)dx < \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx. \tag{19}$$

Если при формулировании задачи 2 условие выпуклости функции f заменить условием ее вогнутости на рассматриваемом отрезке, то будет справедливо неравенство

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx, \tag{20}$$

в котором в обоих случаях знак неравенства будет строгим, если f — строго вогнутая функция, а g — положительная.

5. О неравенствах Эрмита-Адамара в историческом контексте

Рассмотренные в разделе 2 неравенства (6) и (8)–(10) в современной теории выпуклых функций получили название неравенств Эрмита-Адамара. Отметим также, что доказанные в предыдущем разделе их обобщения (18)–(20) называются неравенствами Фейера. В настоящем разделе мы коснемся вопроса истории открытия данных неравенств.

Исследование истории неравенств Эрмита-Адамара является, на наш взгляд, не менее любопытным, чем изучение способов их обоснования или обнаружение их различных приложений. Несколько невероятным представляется то, что данный вопрос не освещался в отечественной научной литературе (по крайней мере, нам соответствующие обсуждения обнаружить не удалось). Что касается зарубежных литературных источников, то отправными точками в «расследовании» появления неравенств Эрмита-Адамара, по-видимому, следует считать 1985 год, когда D.S. Mitrinović и I.B. Lacković опубликовали свою работу [9], свидетельствующую об обнаружении в архивах журнала Mathesis крошечной заметки Шарля Эрмита о неравенствах (8).

В первой части цитируемой работы представлена хронология событий, навсегда связавших в математике имена Эрмита и Адамара. Кроме того, в ней авторами поставлен вопрос о незаслуженном приоритете Иенсена во введении в математику определения понятия выпуклой функции. Позднее описанные события (со ссылкой на «первооткрывателей») упоминались не только в ряде научных статей, но и были подробно изложены в таких солидных источниках, как [10, с. 138–139] и [11, с. 7–8].

С целью знакомства русскоязычной аудитории с результатами архивных изысканий Д. Митриновича ниже мы приводим подробный перевод фрагмента цитируемой монографии Sever S. Dragomir, Charles E. M. Pearce [11, с. 7–8], в котором ссылки авторов на литературные источники адаптированы к нашей нумерации библиографического списка.

«22 ноября 1881 года Эрмит (1822–1901) отправил письмо в журнал Mathesis. Фрагмент письма был опубликован в журнале Mathesis 3 (1883, с. 82). В нем говорилось следующее:

О двух ограничениях определенного интеграла. *Пусть $f(x)$ — функция, всегда изменяющаяся в направлении от $x = a$ до $x = b$. Мы получили соотношения:*

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{21}$$

или же

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

в зависимости от выпуклого или вогнутого расположения кривой $y = f(x)$ к оси абсцисс.

Применив формулы для $f(x) = 1/(1+x)$, $a = 0, b = x$, получим

$$x - \frac{x^2}{2+x} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}.$$

Интересно отметить, что данная заметка Эрмита не упоминается в математической литературе и что эти важные неравенства (неравенства Эрмита) мало известны как результат исследований Эрмита. Его заметка не встречается ни в авторитетном журнале-ежегоднике «Прогресс математики», ни в собрании трудов Эрмита, опубликованных «под эгидой Парижской Академии наук Эмилем Пикаром (1905–1917), членом Института». В брошюре Жордана и Мансьона (1901) об Эрмите Мансьон опубликовал библиографию сочинений Эрмита, однако данная заметка в журнале Mathesis не была включена. Беккенбах, ведущий эксперт по истории и теории сложных функций, написал, что первое неравенство в (21) было доказано Адамаром в 1893 году [12, с. 441] и, по всей видимости, не был знаком с результатом Эрмита.

Следует упомянуть, что Фейер (1880–1959), изучая тригонометрические многочлены (1906), получил неравенства, которые обобщают неравенства Эрмита, но в очередной раз работа Эрмита не была процитирована. В первоначальной форме результат Фейера таков [13] (см. также [14, с. 138]):

Теорема 1. *Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$, где f — выпуклая функция на интервале (a,b), а g — положительная на этом же интервале функция, такая что*

$$(a+t) = g(b-t), \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}(a+b),$$

т. е. $y = g(x)$ — симметричная кривая относительно прямой, содержащей точку $(\frac{a+b}{2}, 0)$ и перпендикулярной к оси Ox. При данных условиях верны следующие неравенства:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx. \tag{22}$$

Очевидно, при $g(x) \equiv 1$ и $x \in (a,b)$ мы получим неравенства Эрмита. Следовательно, важный результат Эрмита (21), который представляет необходимое и достаточное условие того, чтобы функция f была выпуклой в интервале (a,b), в математической литературе не был причислен к его заслугам. Собственно, термин «выпуклый» также берет начало из результата, полученного Эрмитом в 1881 году и опубликованном в 1883 году в качестве краткой заметки в журнале элементарной математики

Mathesis. Есть результаты меньшего значения, получившие большее внимание в области неравенств, но, к сожалению, эту фундаментальную работу Эрмита часто цитировали без упоминания ее подлинного автора [9].

Очевидно, что (21) является интерполяционным неравенством, поскольку

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{23}$$

Спустя более двадцати лет после публикации работы Эрмита И. Иенсен (1905, 1906) дал определение выпуклых функций, используя неравенство (23) [7]. Его замечание, которое мы приводим ниже, следует признать справедливым: *«Я полагаю, что понятие выпуклой функции приблизительно так же фундаментально, как положительная функция, возрастающая функция. Если я не ошибаюсь, понятие займет достойное место в теории вещественных функций»* (Иенсен, 1906).

Действительно, не просто дать полный обзор литературы по изучению выпуклых функций, однако «...важность результатов исследования Эрмита очевидна».

Как следует из приведенной весьма значительной по размеру цитаты, необходимо признать роль Шарля Эрмита в открытии неравенства (6) или, по крайней мере, в опубликовании последнего. В данной цитате особого внимания, на наш взгляд, заслуживают и слова И. Иенсена, выражающие исключительную научную прозорливость датского ученого, не занимавшегося, объективно следует заметить, выпуклыми функциями по-настоящему глубоко. Не случайно именно эти слова Иенсена, переведенные на английский язык, C.P. Niculescu и L.-E. Persson используют в качестве эпиграфа к своей монографии [14].

Действительно, спустя лишь два-три десятилетия после высказывания Иенсеном своих соображений о понятии выпуклой функции в науке начинается настоящий «выпуклый бум». Исследования свойств выпуклых функций и выпуклых множеств позволили получить исключительно значимые результаты в математической экономике, геометрическом функциональном анализе, решении задач нелинейной оптимизации. Значение выпуклых экстремальных задач для решения актуальных проблем экономики и военно-промышленного комплекса было признано на международном уровне и впоследствии отмечено вручением Нобелевской премии. При этом «...существуют два основных свойства выпуклых функций, которые сделали их настолько широко используемыми в теоретической и прикладной математике: максимум достигается в граничной точке; любой локальный минимум является глобальным. Более того, строго выпуклая функция допускает не более одного минимума» [14, с. 6].

Две незамысловатые характеристики — и такое множество приложений и интерпретаций! Можно утверждать, что теория выпуклости обладает явно выраженными дивергентными свойствами.

Снова сосредоточим внимание читателя на неравенстве (6). В ходе анализа литературы по неравенствам Эрмита-Адамара мы периодически ощущали себя в роли детективов: невозможно было заранее предугадать, какие открытия ожидают нас на следующем шаге исследования и как корректно интерпретировать получаемую информацию. При работе над источниками нам хотелось получить четкий ответ на вопрос: следует ли безоговорочно присуждать первенство в открытии неравенства (6) Эрмиту? Ведь его заметка не содержит строгого обоснования данного неравенства... Кроме того, мы хотели прояснить и роль Адамара в популяризации и применении неравенства (6). В данной связи оказалось полезным изучение мнений исследователей выпуклых функций и специалистов по истории математики.

Мы догадывались, что их мнения разделятся. К примеру, в [15], несмотря на признание приоритета Эрмита, обращается внимание на сходство истории неравенств (6) с историями других фундаментальных математических результатов: теоремы Пифагора, основной теоремы алгебры, великой теоремы Ферма, идей Нильса Абеля. В каждом из упомянутых случаев только многолетний (иногда — многовековой) труд разных ученых позволял получить знаменитый математический результат.

Результат при этом сегодня носит имя лишь одно ученого, причем это далеко не всегда имя его первооткрывателя (как не вспомнить в этой связи так называемый закон Арнольда!) Свое отношение к «реабилитации» Эрмита авторы статьи [15] выражают словами: «Прочтите Учителей!» и подчеркивают, что по сей день работа великих Учителей-математиков «продолжается и удивляет нас глубокими и постоянно современными идеями» [15, с. 619]. Скорее всего, их слова следует понимать как призыв к исследователям находить в изучении признанных математических трудов образы будущих собственных результатов.

Другие специалисты более сдержанны в оценке заслуг Эрмита. Джампьетро Алласия, например, указывает, что в [9] при исследовании истории неравенства (6) основное внимание сосредоточено на письме Эрмита. Данный автор в статье [16] пытается дать иную интерпретацию заметки Эрмита. В своем исследовании он отправляется от статьи Адамара [17] и приходит к выводу, что неравенства (6) имеют непосредственное отношение к формуле трапеций и прямоугольников для численного интегрирования, а значит, были известны задолго до научных работ Эрмита и Адамара. Кроме того, Д. Алласия пытается встать на защиту Адамара, утверждая, что его статья [17] была бы невозможна без изложения (6), к тому же при доказательстве (6) Адамар преднамеренно использует аналитические методы в отличие от геометрических аргументов.

По всей видимости, обнаруживать возможные прямые или косвенные исторические корни неравенств Эрмита-Адамара действительно можно в разных математических областях. Эволюция понятия выпуклости имеет весьма долгий путь, исключительно широки возможности его применений. В силу данных причин были возможны прецеденты «переоткрытия» необходимых исследователям соотношений, опубликования их новых доказательств, развития в форме обобщения и пр. История математики может предъявить множество соответствующих примеров. Так, из результатов, выражаемых неравенствами, вспомним неравенство Коши–Буняковского, нередко называемое неравенством Шварца, неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел (неравенство Коши), непосредственно следующее из теоремы Маклорена [18, с. 69], неравенство Гельдера–Минковского [18, с. 35] и т. д.

Не думаем, что авторство имеет первостепенное значение и в рассматриваемом случае неравенств Эрмита-Адамара, поскольку поистине значим *сам результат*. Замечательным является то, что научное сообщество по сей день имеет возможность по-новому прочитывать страницы большой и богатой истории математической науки.

6. Применения неравенств Эрмита-Адамара

Обсуждаемые неравенства могут эффективно применяться при решения различных задач, в частности при оценке среднего значения функции на отрезке, при доказательстве неравенств. Приведем ряд соответствующих примеров.

6.1. Обоснование неравенств между классическими средними величинами двух положительных чисел.

Пусть сначала $f(x) = e^x$, $x \in [\ln a, \ln b]$, где $0 < a < b$. Тогда из неравенства (8) имеем

$$e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2},$$

или

$$G < L < A,$$

где $G = \sqrt{ab}$ — среднее геометрическое чисел a и b, $A = \frac{a+b}{2}$ — их среднее арифметическое, а $L = \frac{a-b}{\ln a - \ln b}$ — среднее логарифмическое данных чисел. Рассмотренный пример использования неравенств Эрмита-Адамара для обоснования так называемого основного свойства среднего логарифмического двух положительных величин описан, например, в работах [15, с. 665], [19].

Пусть теперь $f(x)=\ln x$, $x\in[a,b]$, $0<a<b$. Применяя к данной функции неравенство (10), получим:

$$\frac{\ln a+\ln b}{2}<\frac{b\ln b-a\ln a}{b-a}-1<\ln\frac{a+b}{2},$$

или

$$G<I<A,$$

где $I=\frac{1}{e}(\frac{b^b}{a^a})^{\frac{1}{b-a}}$ — среднее идентричное («identric mean» в англоязычных источниках) чисел a и b.

6.2. Оценка среднего значения функции на отрезке.

В сборниках задач по математическому анализу содержится множество соответствующих упражнений. Приведем лишь один пример, обращаясь к задаче № 2325 из известного задачника [20, с. 150]:

«Показать, что $0,78<\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}<0,93$».

Решение. Заметим, что функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ является строго выпуклой на отрезке $[0;\,1]$, поскольку $f''(x)=\frac{2x^6+6x^2}{\sqrt{(1+x^4)^3}}>0$. Применяя к данной функции неравенства (8), получим $\frac{4}{\sqrt{17}}<\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}<\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$.

Нетрудно убедиться в том, что $0,78<\frac{4}{\sqrt{17}}$ и $\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}<0,93$. Нужное показано.

Замечание 9. Предложенный подход к решению рассмотренной задачи позволяет поставить вопрос об усилении обозначенного в ней неравенства.

Отметим здесь также, что в [20] в «Ответах» предлагается при решении данной задачи «воспользоваться для оценки снизу неравенством $1+x^4<(1+x^2)^2$, а для оценки сверху — неравенством Коши-Буняковского», то есть требуется применить два различных неравенства. Предлагаемый способ решения задачи нельзя назвать тривиальным, он является искусственным. Применение же неравенства Эрмита-Адамара в данном случае гораздо эффективнее: во-первых, оно обеспечивает доказательство обоих соотношений, и, во-вторых, полученные в результате оценки интеграла являются более точными.

6.3. Определение знака значений функции на интервале.

Нам нужно установить положительность функции $g(x)=(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x})-1$ при всех положительных значениях аргумента x. Данный факт используется для обоснования формулы Стирлинга в работе [21, с. 22].

Среднее значение функции $f\left(t\right)=\frac{1}{t+1}$, $t>-1$, на отрезке $\left[0,\frac{1}{x}\right]$, где $x>0$, оценим снизу, используя левое неравенство в (8):

$$x\ln(1+\frac{1}{x})>\frac{1}{\frac{1}{2x}+1}.$$

Получившееся неравенство при $x>0$ равносильно условию $g(x)>0$. Требуемое показано.

6.4. Доказательство неравенства $\sin x<x<\operatorname{tg}x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Рассмотрим вогнутую на отрезке $[0,\pi]$ функцию $f(x)=\sin x$. Применив к ней неравенство (10), будем иметь:

$$\frac{\sin a+\sin b}{2}<\frac{\cos a-\cos b}{b-a}<\sin\frac{a+b}{2},\quad 0<a<b<\pi.$$

Получившееся неравенство равносильно такому

$$\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}<\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}}{b-a}<\sin\frac{a+b}{2}.$$

Деля все члены последнего неравенства на $\sin\frac{a+b}{2}$ и полагая $x=\frac{b-a}{2}$, получим $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$. Отсюда получаем нужное двойное неравенство.

Приведенный пример описан в [15, с. 665].

7. Применения неравенств Фейера

В учебном пособии [4, с. 96–97, пример 11] рассматривается следующая задача.

Доказать неравенства

$$\frac{4}{9}(e-1) < \int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}(e-1). \tag{24}$$

Попутно отметим, что в пособии [8, с. 88, задача 77 е)] формулируется связанный с приведенной задачей вопрос:

Какое из чисел больше? $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)}$ или $\frac{1}{2}(e-1)$?

Авторы работы [4] предлагают такое решение рассматриваемой ими задачи. Они показывают, что функция $g(x) = \frac{1}{(x+1)(2-x)}$ на отрезке $[0,1]$ принимает наименьшее значение $g(\frac{1}{2}) = \frac{4}{9}$ и наибольшее значение $g(0) = g(1) = \frac{1}{2}$. Отсюда в силу строгого неравенства

$$\frac{4}{9}e^x < \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}e^x, \quad x \neq 0,\ x \neq \frac{1}{2},\ x \neq 1,$$

почленным интегрированием получается требуемый результат.

Неравенства (24) — это оценка значения интеграла $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)}$ снизу и сверху. Получим аналогичную оценку данного интеграла иначе, обращаясь к неравенству Фейера (19).

В качестве функции f в этом неравенстве выберем строго выпуклую функцию e^x, $0 \leq x \leq 1$, а за функцию g примем функцию $\frac{1}{(x+1)(2-x)}$, которая, заметим, удовлетворяет условиям: она положительная и ее график на отрезке $[0,1]$ симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$. В силу (19) имеем:

$$\sqrt{e}\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)(2-x)} < \int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{1+e}{2}\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)(2-x)},$$

или

$$\frac{2}{3}\sqrt{e}\ln 2 < \int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{1+e}{3}\ln 2. \tag{25}$$

Оценка (25) отличается от оценки (24). Адресуем читателю вопрос: какая из данных оценок точнее.

Рассмотрим еще одну задачу, связанную с получением оценки для определенного интеграла.

Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2/2}dx}{(x+1)(2-x)}$ *оцените снизу и сверху.*

Решение. Заметим, что подход, связанный с получением оценки функции $g(x) = \frac{1}{(x+1)(2-x)}$ на отрезке $[0,1]$ через константу $\frac{4}{9}$ снизу и константу $\frac{1}{2}$ сверху, здесь не реализуем, поскольку первообразные функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$, $0 \leq x \leq 1$, не выражаются через элементарные функции. Однако оценку рассматриваемого интеграла можно получить посредством неравенства Фейера (20) для строго вогнутой на отрезке $[0,1]$ функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$ и функции $g(x) = \frac{1}{(x+1)(2-x)}$. Она будет такой:

$$\frac{1}{3}(1+\frac{1}{\sqrt{e}})\ln 2 < \int\limits_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{2}{3\sqrt[8]{e}}\ln 2. \tag{26}$$

Оценку интеграла $\int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2/2}dx}{(x+1)(2-x)}$ можно получить и иначе, отправляясь от оценки $\frac{1}{\sqrt{e}} < e^{-\frac{x^2}{2}} < 1$, $x \neq 0,\ x \neq 1$, но она будет менее точной, нежели (26).

Заключение. В настоящее время теория выпуклых функций развивается исключительно активно. Авторами изучаются функции, имеющие различный характер выпуклости, — логарифмически и геометрически выпуклые, GA-выпуклые, гармонически и гармонически логарифмически выпуклые, r-, s-, h-, φ-, m-выпуклые, геометрически P-выпуклые, s-геометрически выпуклые, log-h-выпуклые, (α,T)-выпуклые, квазивыпуклые, w-квазивыпуклые, t-квазивыпуклые, выпуклые в точке функции и др., исследуются их свойства и прикладные характеристики. Таким образом, теория выпуклых функций, расширяясь, трансформируется в теорию о функциях с более сложной геометрической структурой, которая использует новые законы сравнения. В данной связи неравенства Эрмита-Адамара (6), (8)–(10) и их «весовой» аналог – неравенства Фейера (18) –(20) — задают актуальное направление развития соответствующих разделов анализа.

Ричард Гарднер в своей статье [22], посвященной одной из классических теорем выпуклой геометрии — неравенству Брунна-Минковского, его значение описывает так: «В море математики неравенство Брунна-Минковского появляется как осьминог, его щупальца протягиваются вдоль и поперек, его форма и цвет меняются, когда он перемещается из одной области в другую. Совершенно очевидно, что возможности для исследований изобилуют» [22, с. 358]. Данную исключительно выразительную цитату можно перефразировать при характеризации теории выпуклости в целом. Вне всяких сомнений, понятие выпуклости занимает достойное место в фундаменте математической науки, оно бесконечно разнообразно и во всевозможных образах проявляется как в самой математике, так и ее приложениях.

Авторы выражают глубокую благодарность кандидату филологических наук, доценту кафедры романской филологии Казанского (Приволжского) федерального университета Дуняшевой Лилии Гаффаровне за квалифицированную помощь в переводе ряда фрагментов текста зарубежных литературных источников, использованных при подготовке данной работы.

Литература

1. Виноградов О.Л. Математический анализ: учебник. - СПб.: БХВ-Петербург, 2017. - 752 с.

2. Noor M.A., Noor K.I., Awan M.U. Some characterizations of harmonically log-convex functions // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. - Vol. 17. - 2014. - № 1. - p. 51-61.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. - М.: ООО «Издательство АСТ», 2002. - 558 с.

4. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 504 с.

5. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: Пособие для университетов, пед. вузов: В 2 ч. / Под ред. В.А. Садовничего. - 3-е изд., испр. - М.: Дрофа, 2001. - Ч. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. - 725 с.

6. Dragomir S.S., Pearce C.E.M. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. - RGMIA monographs, Victoria University, 2002. - 361 p.

7. Jensen J.L.W.V. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les voleurs mogernmes // Acta. Math. - Vol. 30. - 1906. - p. 175-193.

8. Калинин С.И., Канин Е.С., Маянская Г.М., Ончукова Л.В., Подгорная И.И., Фалелеева С.А. Задачи и упражнения по началам математического анализа: Пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики и для внеклассных занятий математикой. - М.: Московский Лицей, 2001. - 208 с.; 2-е изд. - М.: Московский Лицей, 2002. - 208 с.

9. Mitrinović D.S., Lacković I.B. Hermite and convexity // Aequationes Math. - Vol. 28. - 1985. - p. 229-232.

10. Pečaric J., Proschan F., Tong Y.L. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. - Academic Press, Inc., 1992. - 467 p.

11. Dragomir S.S., Pearce C.E.M., Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. - RGMIA Monographs, Victoria University, 2000. - 361 p.

12. Beckenbach E.F. Convex functions // Bull. Amer. Math. Soc. - Vol. 54. - 1948. - p. 439-460.

13. Féjer L. Über die Fourierreihen, II // Math. Naturwiss, Anz. Ungar. Akad. Wiss. - Vol. 24. - 1906. - p. 369-390. (In Hungarian).

14. Niculescu C.P., Persson L.E. Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach (CMS Books in Mathematics). - Springer-Verlag, New York, 2005.

15. Niculescu C.P, Persson L.E. Old and new on the Hermite-Hadamard inequality // Real Analysis Exchange. - 2004 . - Vol. 29 (2). - p. 663-686.

16. Allasia G. Historical and analytic notes on Hermite-Hadamard inequalities // Memorie Accad. Sci. Torino. - Vol. 29. - 2005. - p. 21-39.

17. Hadamard J., Étude sur les propriétés des fonctions entiéres et en particulier d'une fonction considerée par Riemann // J. Math. Pures et Appl. - Vol. 58. - 1893. - p. 171-215.

18. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. - М.: ГИИЛ, 1948. - 456 с.

19. Burk F. The geometric, logarithmic, and arithmetic mean inequality // The American Mathematical Monthly. - 1987. - Vol. 94 - № 6. - p. 527-528.

20. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. - 22-е изд., перераб. - СПб., Изд-во «Профессия», 2001. - 432 с.

21. Artin E. Einführung in die theorie der Gammafunktion. - B.G. Teubner, Berlin-Leipzig, 1931. - 39 s.

22. Gardner R.J. The Brunn-Minkowski inequality // Bull. Amer. Math. Soc. - Vol. 39. - 2002. - p. 355-405.

Калинин Сергей Иванович,
профессор кафедры фундаментальной математики
Вятского государственного университета,
доктор педагогических наук.

E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Панкратова Лариса Валерьевна,
доцент кафедры фундаментальной математики
Вятского государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Циклические свойства корней алгебраических уравнений второй степени

Е. Г. Смольянова, А. Г. Смольянов

В статье изучается последовательность решений семейства квадратных уравнений, коэффициенты которых связаны определенными рекуррентными соотношениями. Изучено предельное поведение последовательности соответствующих пар корней уравнений.

Пусть заданы действительные числа p_0, q_0, r такие что

$$q_0 < 0 < p_0, r > 0.$$

Рассмотрим квадратное уравнение с коэффициентами p_0, q_0:

$$x^2 + p_0 \cdot x + q_0 = 0.$$

Так как $D = p_0^2 - 4 \cdot q > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня. Обозначим их через x_1 и x_2 соответственно условию $x_2 < 0 < x_1$. Используем далее эти числа как коэффициенты очередного квадратного уравнения, разделив их предварительно на r:

$$x^2 + p_1 \cdot x + q_1 = 0,$$

$p_1 \cdot r = x_1, q_1 \cdot r = x_2$. Применяя предыдущую процедуру к этому новому уравнению, получим уравнение с коэффициентами p_2, q_2. Продолжая этот процесс как угодно долго, мы построим, вообще говоря, бесконечную последовательность квадратных уравнений с коэффициентами

$$(p_1, q_1), \ \ (p_2, q_2), \ \ \ldots \ \ , (p_n, q_n), \ldots$$

которые связаны следующей системой рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} p_n = -\left(p_{n+1} + q_{n+1}\right) \cdot r, \\ q_n = p_{n+1} \cdot q_{n+1} \cdot r^2, \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Иначе говоря, $p_{n+1}, \ \ q_{n+1}$ — корни квадратного уравнения

$$t^2 + \frac{p_n}{r} \cdot t + \frac{q_n}{r^2} = 0. \tag{1'}$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ отображение

$$\mathcal{F}\colon (p_n, q_n) \to (p_{n+1}, q_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Так например, если $(p_0, q_0) = (5, -6)$ и $r = \frac{1}{2}$, то

$$(p_1, q_1) = \mathcal{F}(p_0, q_0) = (2, -12),$$

$(p_2, q_2) = \mathcal{F}(p_1, q_1) = (-2 + 2\sqrt{13}, -2 - 2\sqrt{13})$ и т. д.

Будем отождествлять полученную последовательность квадратных уравнений с соответствующей последовательностью пар их коэффициентов и пусть K — множество, состоящее из различных пар этой последовательности. Ясно, что K будет состоять из одной единственной пары тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{F}\left(p_0, q_0\right) = \left(p_0, q_0\right).$$

Найдём её как решение (p^*, q^*) системы уравнений

$$\begin{cases} p = -(p+q)\cdot r, \\ q = p\cdot q\cdot r^2, \end{cases}$$

с учётом: $q < 0 < p$. Получим, что

$$(p^*, q^*) = \left(\frac{1}{r^2}, -\frac{r+1}{r^3}\right).$$

Например, если $r = \frac{1}{2}$, то $(p^*, q^*) = (4, -12)$. Таким образом, если начальная пара $(p_0, q_0) = (p^*, q^*)$, то на следующем шаге мы будем иметь квадратное уравнение с теми же коэффициентами.

Множество K будет состоять ровно из двух пар тогда и только тогда, когда

$$F^2(p_0, q_0) = F(F(p_0, q_0)) = F(p_1, q_1) = (p_0, q_0).$$

Найдём эти две пары из системы уравнений

$$\begin{cases} p = -(P+Q)\cdot r, \\ q = P\cdot Q\cdot r^2, \\ P = -(p+q)\cdot r, \\ Q = p\cdot q\cdot r^2 \end{cases}$$

с учётом: $q < 0 < p, Q < 0 < P$. Приведём последовательность рассуждений.

1. $q\cdot Q = p\cdot P\cdot q\cdot Q\cdot r^4 \Rightarrow p\cdot P = \frac{1}{r^4}$;
2. $P\cdot Q = \frac{q}{r^2} = -(p+q)\cdot r^3\cdot p\cdot q \Rightarrow (p+q)\cdot p = -\frac{1}{r^5}$;
3. $-\frac{1}{r^5} = (p+q)\cdot p = p^2 + p\cdot q = p^2 + \frac{Q}{r^2} \Rightarrow Q = -\frac{1}{r^3} - p^2\cdot r^2$.

   Тогда верно и равенство
   $$q = -\frac{1}{r^3} - P^2\cdot r^2,$$
   так как в любой момент пару (p, q) можно заменить парой (P, Q) и, наоборот.
4. $$\Delta_q = Q - q = r^2\cdot\left(P^2 - p^2\right) = r^2\cdot(P+p)\cdot\Delta_p, \tag{2}$$
   где $\Delta_p = P - p$;
   $$Q + q = -\frac{2}{r^3} - \left(P^2 + p^2\right)\cdot r^2; \tag{3}$$
5. $\Delta_p = -(p+q)\cdot r + (P+Q)\cdot r = ((P-p) + (Q-q))\cdot r \Rightarrow$
   $$\Delta_p = (\Delta_p + \Delta_q)\cdot r$$
   и, значит
   $$\Delta_q = \left(\frac{1}{r} - 1\right)\cdot\Delta_p.$$
   Учтём последнее совместно с (2):
   $$r^2\cdot(P+p)\cdot\Delta_p = \left(\frac{1}{r} - 1\right)\cdot\Delta_p \Rightarrow P + p = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2};$$

6. $P^2+p^2=(P+p)^2-2\cdot p\cdot P=\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{r^4}=\frac{1}{r^6}-\frac{2}{r^5}-\frac{1}{r^4}$. Следовательно,

$$Q\cdot q=\left(-\frac{1}{r^3}-p^2\cdot r^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{r^3}-P^2\cdot r^2\right)=\frac{1}{r^6}+\frac{P^2+p^2}{r}+(p\cdot P)^2\cdot r^4\Rightarrow$$

$$Q\cdot q=\frac{1}{r^7}-\frac{1}{r^6}-\frac{1}{r^5}+\frac{1}{r^4}.$$

7. Тогда из (3):

$$Q+q=-\frac{2}{r^3}-\left(\frac{1}{r^6}-\frac{2}{r^5}-\frac{1}{r^4}\right)\cdot r^2\Rightarrow\ Q+q=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^4};$$

Итак, имеем:

$$\begin{cases} p\cdot P=\frac{1}{r^4}, \\ P+p=\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^2} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} Q\cdot q=\frac{1}{r^7}-\frac{1}{r^6}-\frac{1}{r^5}+\frac{1}{r^4}, \\ Q+q=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^4}. \end{cases}$$

Следовательно,

8. p и $P-$ корни квадратного уравнения

$$t^2+\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^3}\right)\cdot t+\frac{1}{r^4}=0; \tag{4}$$

9. q и Q — корни квадратного уравнения

$$t^2+\left(\frac{1}{r^4}-\frac{1}{r^2}\right)\cdot t+\left(\frac{1}{r^7}-\frac{1}{r^6}-\frac{1}{r^5}+\frac{1}{r^4}\right)=0. \tag{5}$$

Найдём дискриминанты этих уравнений:

$$D_{r,p}=\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^3}\right)^2-\frac{4}{r^4}=\frac{(1+r)\cdot(1-3\cdot r)}{r^6};$$

$$D_{r,q}=\left(\frac{1}{r^4}-\frac{1}{r^2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{r^7}-\frac{1}{r^6}-\frac{1}{r^5}+\frac{1}{r^4}\right)=\frac{(1+r)\cdot(1-r)^2\cdot(1-3\cdot r)}{r^8}.$$

Соответственно появляется ограничение на r: $0<r<\frac{1}{3}$. (Напомним, что $r>0-$по условию). Переобозначая корни уравнений (4) и (5), окончательно получим:

$$(\tilde{p},\tilde{q})=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^2}\right)-\frac{\sqrt{U}}{2\cdot r^3},\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^4}\right)-\frac{(1-r)\cdot\sqrt{U}}{2\cdot r^4}\right);$$

$$\left(\tilde{P},\tilde{Q}\right)=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{\sqrt{U}}{2\cdot r^3},\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^4}\right)+\frac{(1-r)\cdot\sqrt{U}}{2\cdot r^4}\right),$$

где $\sqrt{U}=\sqrt{(1+r)\cdot(1-3\cdot r)}$.

При выборе сочетаний корней мы учли, что $\frac{\Delta_q}{\Delta_p} = \frac{1}{r} - 1 > 0$ при $r \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ Таким образом, если начальная пара коэффициентов (p_0, q_0) совпадёт с любой из этих пар и при этом $r \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$, то исследуемый итерационный процесс зациклится. Например, если $r = \frac{1}{4}$, то $\sqrt{U} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ и поэтому

$$(\tilde{p}, \tilde{q}) = \left(24 - 8 \cdot \sqrt{5}, -120 - 24 \cdot \sqrt{5}\right); \ \left(\tilde{P}, \tilde{Q}\right) = \left(24 + 8 \cdot \sqrt{5}, -120 + 24 \cdot \sqrt{5}\right).$$

Замечание 1. Допуская $r = \frac{1}{3}$, получим:

$$(\tilde{p}, \tilde{q}) = \left(\tilde{P}, \tilde{Q}\right) = (p^*, q^*),$$

что не противоречит смыслу.

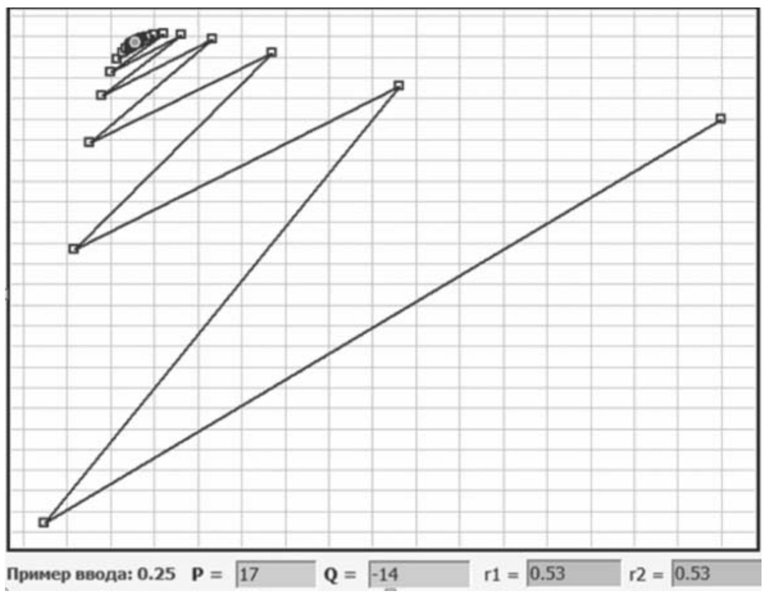


Рис. 1

Продолжим исследование. Отождествим пару коэффициентов (p_n, q_n) квадратного уравнения с соответствующей точкой координатной плоскости XOY. Тогда последовательность пар $\{(p_n, q_n)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ представится последовательностью точек на плоскости XOY. Программируя связи (1), можно получать соответствующие наглядные образы, отражающие состояние динамики решений системы (1) (Рисунки 1-4). Последовательные пары точек для большей наглядности соединены отрезками; на всех рисунках выделена точка (p^*, q^*).

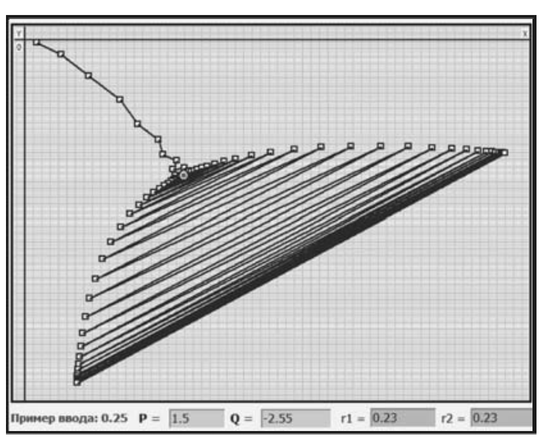


Рис. 2

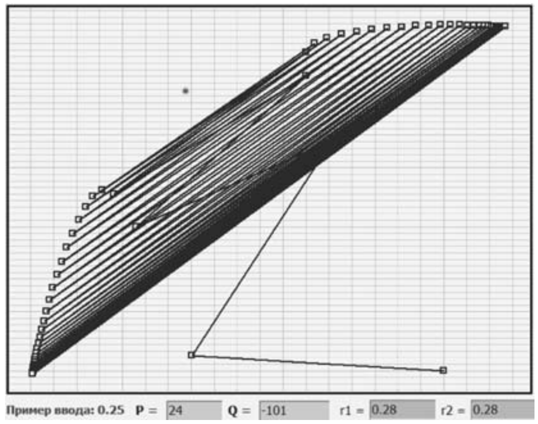


Рис. 3

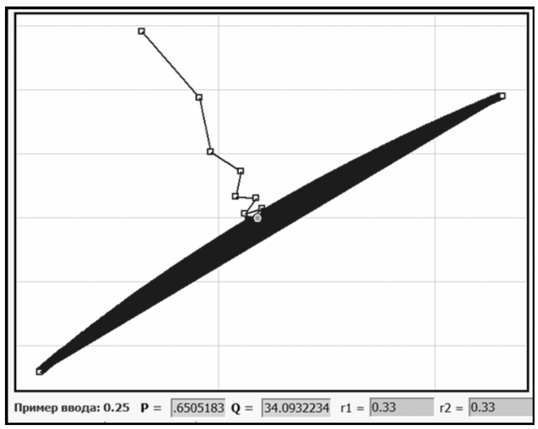


Рис. 4

Если же рассматривать множество различных начальных пар (p_0, q_0) при фиксированном r, либо, наоборот, множество различных значений параметра r при фиксированном «начальном состоянии» (p_0, q_0), то соответствующие изображения будут накладываться и образовывать так называемое «облако» точек (Рисунок 5).

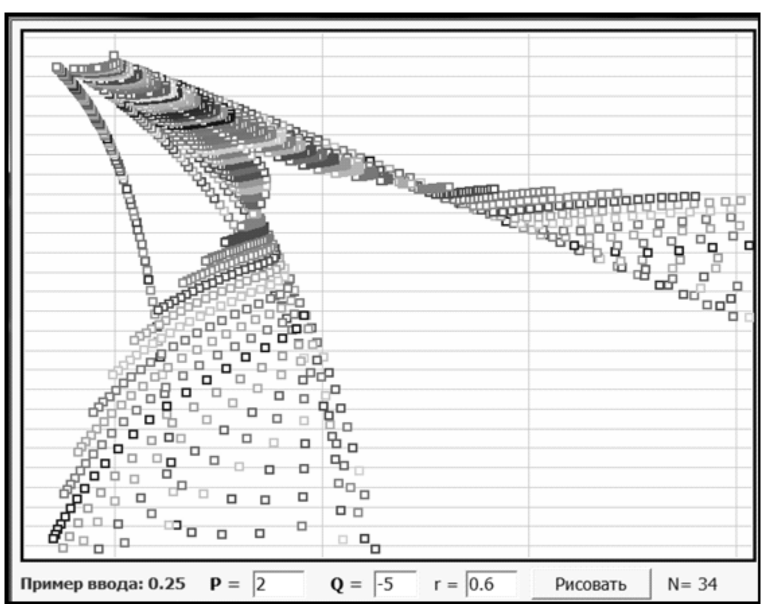


Рис. 5

Ясно, что более углубленный анализ динамики поведения этой системы — тема отдельного исследования. Однако заметим, что в эксперименте при $r \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ множество $\left\{(\tilde{p}, \tilde{q}), \left(\tilde{P}, \tilde{Q}\right)\right\}$ демонстрирует всякий раз признаки аттрактора (от англ. attract — притягивать) последовательности точек $\{(p_n, q_n)\}$ а при $r \geq \frac{1}{3}$ в такой роли выступает точка (p^*, q^*).

Замечание 2. Обозначим через M^*, $\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_2$ точки с координатами (p^*, q^*), $(\tilde{p}, \tilde{q})$, $\left(\tilde{P}, \tilde{Q}\right)$. Тогда формулой $k = \frac{\Delta_q}{\Delta_p} = \frac{1}{r} - 1$ определяется угловой коэффициент прямой $\left(\tilde{M}_1\tilde{M}_2\right)$ (для $r \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ его значение больше 2). Найдём координаты середины $\tilde{M}$ отрезка $\tilde{M}_1\tilde{M}_2$:

$$x_{\tilde{M}} = \frac{\tilde{p} + \tilde{P}}{2} = \left(\frac{1}{r} - 1\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot r^2} = \frac{k}{2} \cdot p^*;$$

$$y_{\tilde{M}} = \frac{\tilde{q} + \tilde{Q}}{2} = -\left(\frac{1}{r} - 1\right) \cdot \frac{r + 1}{2 \cdot r^3} = \frac{k}{2} \cdot q^*,$$

откуда

$$\vec{O\tilde{M}} = \frac{k}{2} \cdot \vec{OM^*}.$$

Таким образом, имея на координатной плоскости точку M^*, можно соответствующими геометрическими построениями найти точки цикла $\left\{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2\right\}$, и наоборот.

Обратим теперь внимание на пункт 2. предыдущей последовательности рассуждений, в котором обнаружена связь p, q, r в виде

$$r^5 \cdot (p + q) \cdot p + 1 = 0 \tag{6}$$

(при фиксированном $r \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$). С геометрической точки зрения это означает, что каждая из точек $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$ принадлежит графику уравнения (6). Кроме того, можно проверить, что и точка $M^* \in \Gamma$ $(r > 0)$. Итак, все три циклические точки принадлежат одной кривой.

Замечание 3. За счёт введения двух различных положительных параметров r_1 и r_2 можно получить, возможно, более «маневренную» динамическую систему.

Смольянова Елена Григорьевна,
доцент кафедры математического анализа
ФГБОУ ВО Мордовский государственный
университет им. Н.П. Огарёва,
факультет математики и информационных технологий.

E-mail: janovaeg@mail.ru

Смольянов Андрей Григорьевич,
заведующий кафедрой фундаментальной информатики
ФГБОУ ВО Мордовский государственный
университет им. Н.П. Огарёва,
факультет математики и информационных технологий,
доцент, кандидат физико-математических наук.

E-mail: mgutech@mail.ru

Тесты в духе GRE (окончание)

А. Ю. Эвнин

Приводятся тесты по математике для студентов, составленные в духе GRE (Graduate Record Examinations) — экзамена, который сдают при поступлению в аспирантуру в университетах Соединенных Штатов Америки. Эти тесты ежегодно (начиная с 2010 г.) проходят в Южно-Уральском государственном университете как этап олимпиады «Прометей». В данном номере опубликованы тесты 2014 – 2018 гг. Тесты 2010 – 2013 гг. опубликованы в предыдущем номере.

2014 год

1. Реальная покупательная стоимость тугрика уменьшается вдвое каждые пять лет. Примерно через сколько лет тугрик обесценится в миллион раз?

1) 25; 2) 50; 3) 75; 4) 100; 5) 125; 6) $\geqslant 150$.

2. За круглым столом сидят 10 человек. Каждый из них либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт). Каждый заявил: «Все, кроме, быть может, меня и тех, кто сидит непосредственно рядом со мной, — лжецы». Сколько рыцарей сидит за столом?

3. Дан прямоугольный треугольник. Длины его катетов 3 и 7. Найдите радиус окружности, центр которой лежит на гипотенузе и которая касается катетов.

4. На координатной плоскости Oxy даны точки $A(1;1)$, $B(5;2)$, $C(9;9)$, $D(2;5)$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

5. Пусть $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 9$. Вычислите $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ g-4a & h-4b & k-4c \\ d & e & f \end{vmatrix}$.

6. На плоскости Oyz задана кривая $z = f(y)$. Эта кривая вращается вокруг оси Oy. Уравнение этой поверхности вращения

1) $x^2+z^2 = f^2(y)$; 2) $x^2+z^2 = f(y)$; 3) $x^2+z^2 = |f(y)|$;

4) $y^2+z^2 = |f(y)|$; 5) $y^2+z^2 = f^2(x)$; 6) другой ответ.

7. Пусть для любого x выполняются равенства $f(g(x)) = 5$ и $f(x) = x+3$. Тогда $g(x) =$

1) $x-3$; 2) $3-x$; 3) $\dfrac{5}{x+3}$; 4) 2; 5) 8; 6) другой ответ.

8. $1-\sin^2\left(\arccos\frac{\pi}{12}\right) =$

1) $\dfrac{\pi^2}{144}$; 2) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{24}}{2}}$; 3) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{24}}{2}}$;

4) $\dfrac{\pi}{6}$; 5) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}$; 6) другой ответ.

9. Вычислите $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 20x-\sin 11x}{\sin x}$.

10. Пусть для любого x выполняются равенства $f(x) = e^{g(x)}h(x)$ и $h'(x) = -g'(x)h(x)$. Какое из следующих утверждений обязательно верно?

$$1)\ f = const;\quad 2)\ f' = const \neq 0;\quad 3)\ g = const;\quad 4)\ g' = const \neq 0;$$

5) все остальные утверждения могут быть ложными.

11. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[0;1]$ и дифференцируема на интервале $(0;1)$; $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Какие из следующих утверждений обязательно истинны?

I. $\exists x \in (0;1) \quad f(x) = x$;
II. $\exists x \in (0;1) \quad f'(x) = -1$;
III. $\forall x \in [0;1) \quad f(x) > 0$.

12. Пусть $f''(x) = f'(x)$ для всех x; $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$. Тогда $f(x) =$

1) $1 - e^x$; 2) $e^x - 1$; 3) $e^{-x} - 1$; 4) e^{-x}; 5) e^x; 6) другой ответ.

13. Пусть $f(x) = |x| + 3x^2$ для любого x. Тогда $f'(-1) =$

1) -7; 2) -5; 3) 5; 4) 7; 5) не существует; 6) другой ответ.

14. Сколько корней имеет уравнение $x^8 = 2^x$?

15. Пусть функция f определена при $x > 0$ так: $f(x) = (\sqrt{x})^x$. Какие из следующих утверждений ложны?

I. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1$.
II. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
III. $f(x) = x^{x/2}$ при $x > 0$.
IV. $f(x)$ возрастает на множестве $(0;+\infty)$.
V. $f'(x)$ возрастает на множестве $(0;+\infty)$.

16. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x}$ на отрезке $[0;10]$.
Пусть $n > 1$, а числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$ таковы, что

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 10.$$

Укажите наибольшее из следующих чисел:

$$1)\ \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i);\quad 2)\ \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i);$$

$$3)\ \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i);\quad 4)\ \int\limits_0^{10} f(x)dx;\quad 5)\ 0.$$

17. Вычислите

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{6i}{n}\right)^2 - \left(\frac{6i}{n}\right)\right).$$

18. Пусть $f(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{1+t^2}$. Тогда уравнение касательной к графику $y = f(x)$ в точке $M(2; f(2))$

$$1)\ y - 1 = \frac{1}{5}(x - 2);\quad 2)\ y - \operatorname{arctg} 2 = \frac{1}{5}(x - 2);\quad 3)\ y - 1 = \operatorname{arctg} 2 \cdot (x - 2);$$

4) $y - \operatorname{arctg} 2 + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{5}(x-2)$; 5) $y - \dfrac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} 2 \cdot (x-2)$; 6) другой ответ.

19. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n \frac{1}{x^n} dx =$

1) 0; 2) 1; 3) e; 4) π; 5) $+\infty$; 6) другой ответ.

20. При каком a интеграл $\int\limits_a^{a+1} (x^2+x)dx$ принимает наименьшее значение?

21. Пусть $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x-1, \text{ если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$ Тогда $\int\limits_0^2 f(x)dx =$

1) $\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$; 4) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{2}$; 5) не существует; 6) другой ответ.

22. $\frac{d}{dx} \int\limits_0^{x^2} e^{-t^2} dt =$

1) e^{-x^2}; 2) $2xe^{-x^2}$; 3) $2e^{-x^4}$; 4) $x^2e^{-x^2}$; 5) $2xe^{-x^4}$; 6) другой ответ.

23. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{tg}(\arcsin x)dx$.

24. Плоскость α касается поверхности $z = e^{-x}\sin y$ в точке $M(0; \frac{\pi}{2}; z_0)$. Уравнение плоскости α

1) $x+y=1$; 2) $x+z=1$; 3) $x-z=1$;

4) $y+z=1$; 5) $y-z=1$; 6) другой ответ.

25. Пусть D — круг $x^2+y^2 \leqslant 4$. Тогда $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy =$

1) 4π; 2) πe^{-4}; 3) $4\pi e^{-4}$; 4) $\pi(1-e^{-4})$; 5) $4\pi(e-e^{-4})$; 6) другой ответ.

26. Вычислите сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{(3n-2)(3n+1)}$.

27. Область сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 3^{n+3}}$

1) $(-1;2)$; 2) $[-1;2]$; 3) $(-1;5)$; 4) $[-1;5]$; 5) $[-1;5)$; 6) другой ответ.

28. Пусть b и c — элементы группы G, причём $b^5 = c^3 = e$, где e — нейтральный элемент G. Тогда элемент, обратный к $b^2cb^4c^2$, —

1) b^3c^2bc; 2) $b^4c^2b^2c$; 3) $c^2b^4cb^2$; 4) $cb^2c^2b^4$; 5) cbc^2b^3; 6) другой ответ.

29. Какой должна быть последняя цифра в числе 1234567891098765*, чтобы это число делилось на 8?

30. Найдите коэффициент при x^3 в разложении многочлена

$$(1+x)^3(2+x^2)^9.$$

31. Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg}(\pi\sqrt{x+30}) = \operatorname{tg}(\pi\sqrt{x})$?

32. Джордж, Гаррис и Джей выбирают один из трёх маршрутов своего будущего путешествия. Каждый упорядочивает маршруты по своему предпочтению. Они договорились считать вариант a лучше варианта b, если a предпочтительнее b по мнению большинства. С какой вероятностью найдётся маршрут, который в глазах путешественников лучше двух других, если их предпочтения равновероятны и независимы? Ответ дайте в десятичной записи с точностью до 0,001.

Ответы

1. 4). **2.** 2. **3.** 2,1. **4.** 24. **5.** 27. **6.** 1). **7.** 4). **8.** 1). **9.** −31. **10.** 1). **11.** I, II. **12.** 1). **13.** 1). **14.** 3. **15.** IV. **16.** 1). **17.** 54. **18.** 4). **19.** 1). **20.** −1. **21.** 3). **22.** 2). **23.** 1. **24.** 2). **25.** 4). **26.** 8. **27.** 4). **28.** 5). **29.** 6. **30.** 7 424. **31.** 1. **32.** 0,944.

2015 год

1. Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 8, 12 и 15 скамеек. А когда поезд отъезжал, один из них насчитал ещё 2 скамейки. Сколько скамеек было на перроне?

2. На школьной доске записаны числа $0, 1, 2, \ldots, 30$. К доске по очереди по одному разу подходят 30 учеников. Каждый из них выбирает какие-то два числа x и y, стирает их, и записывает число, вычисляемое по формуле $\frac{x+y+|x-y|}{2}$. Какое число может остаться на доске?
1) только 0; 2) только 15; 3) только 30;
4) некоторое рациональное нецелое число;
5) любое целое число от 0 до 30; 6) другой ответ.

3. Вычислите

$$(2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2)-(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2).$$

4. В равнобедренную трапецию с длинами оснований 8 и 18 см вписана окружность. Чему равен её радиус (в см)?

5. В квадрате $ABCD$ проведены отрезки CE и CF, где E — середина AB, F — середина AD. Диагональ BD пересекает отрезки CE и CF в точках K и L. Найдите KL (в см), если площадь $ABCD$ равна 162 кв. см.

6. Пусть $a_1 = 2$ и $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$. Тогда $a_{101} =$

7. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости Oxy неравенством $|x| + |y| + |x+y| \leqslant 2$.

8. Пусть x, y, z — действительные числа и $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2$. Найдите наибольшее значение выражения $(x+4z)^2$.

9. Найдите $f(3)$, если известно, что для любого x имеет место равенство

$$f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) = \frac{x+3}{x-1}.$$

10. Какие из следующих чисел НЕ МОГУТ быть корнями многочлена вида $P(x) = 9x^5 + ax^3 + b$, где a и b — некоторые целые числа?

$$1)\ -9;\quad 2)\ 5;\quad 3)\ \frac{1}{3};\quad 4)\ \frac{1}{7};\quad 5)\ \frac{1}{21};\quad 6)\ -\frac{1}{9};\quad 7)\ -\frac{1}{49};\quad 8)\ 0.$$

11. Дан многочлен $P(x) = (x^2 + x - 1)^4(x + 1)^3$. Найдите сумму его коэффициентов (после раскрытия скобок).

12. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^3 = c_1; \\ a_2x^2 + b_2y^3 = c_2, \end{cases}$$

где коэффициенты $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — некоторые действительные числа, причём $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$. Сколько решений (в действительных числах) может иметь такая система в зависимости от значений коэффициентов? (Укажите все возможные варианты).

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) > 4; 6) 0.

13. При каком a матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 5 \end{pmatrix}$ вырождена?

1) такого a нет; 2) -1; 3) 1; 4) 3;

5) таких a бесконечно много; 6) другой ответ.

14. Конечные разности $\Delta f(x)$ и $\Delta^2 f(x)$ определяются равенствами $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ и $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x)$. Пусть $f(1) = -1$, $\Delta f(1) = 4$, $\Delta f(2) = -2$, $\Delta^2 f(2) = 6$. Тогда $f(4) =$

15. Пусть $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 2, \text{ если } x < 1, \\ -x^2 + 2, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

Какие из следующих утверждений истинны?
1) f имеет наибольшее значение в точке $x = 0$;
2) f имеет наибольшее значение в точке $x = 1$;
3) f имеет наибольшее значение в точке $x = 2$;
4) у f нет наибольшего значения;
5) 0 — точка максимума функции f;
6) 1 — точка максимума функции f;
7) 2 — точка максимума функции f.

16. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{(1+x)\ln(1+x)}$.

17. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{e^{-\pi} - e^{-x}}{\cos x} =$

1) $-\infty$; 2) $-e^{-\pi}$; 3) -1; 4) 0; 5) $e^{-\pi}$; 6) 1; 7) $+\infty$.

18. Чему равно наибольшее значение функции $y = \dfrac{10x^2}{x^4 + 25}$?

19. Точка A — центр кольца, ограниченного внутренней окружностью C_1 радиусом $r < 1$ и внешней окружностью C_2 радиусом 1. Точка B лежит на C_2 и является центром окружности C_3, касающейся внешним образом C_1. Пусть $S_1(r)$ — площадь кольца, а $S_2(r)$ — площадь круга с границей C_3. Тогда $\lim\limits_{r\to 1-0} \frac{S_2(r)}{S_1(r)} =$

1) 0; 2) $\dfrac{2}{\pi}$; 3) 1; 4) $\dfrac{\pi}{2}$; 5) $+\infty$; 6) другой ответ.

20. $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Пусть $f(x) = 1$, если $x \in \mathbb{Q}$, и $f(x) = e^x$, если $x \notin \mathbb{Q}$. Тогда множество точек, в которых функция $f(x)$ непрерывна, есть

1) $\emptyset$; 2) $\{0\}$; 3) $\{1\}$; 4) $\mathbb{Q}$; 5) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; 6) другой ответ.

21. Какие из следующих утверждений справедливы для любой функции $f(x)$, определённой на всей числовой прямой и такой, что $f(0) = 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = L$?

1) f дифференцируема в нуле; 2) $L = 0$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

22. Пусть $F(x) = \int\limits_e^x \ln t\,dt$. Тогда $F'(x) =$

1) $\ln x$; 2) x; 3) $\dfrac{1}{x}$; 4) $x \ln x$; 5) $x \ln x - 1$; 6) другой ответ.

23. Число $b > 0$ выбрано так, что $\int\limits_0^b x\,dx = \int\limits_0^b x^2\,dx$. Тогда $12\int\limits_1^b (x^2 - x)\,dx =$

24. Пусть $f(x)$ — многочлен, причём $f(0) = f(2) = 3$, $f'(0) = f'(2) = -1$. Тогда $\int\limits_0^2 x f''(x)\,dx =$

25. В каких из перечисленных ниже точек функция $f(x, y) = xy - x^3 - y^3$ имеет локальный максимум?

1) $(-1; -1)$ 2) $\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$ 3) $(0; 0)$ 4) $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ 5) $(1; 1)$.

26. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{120}{(2n-1)(2n+1)}$.

27. Укажите общее решение дифференциального уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

1) $c_1e^x + c_2e^x + c_3e^x$; 2) $c_1e^{-x} + c_2e^{-x} + c_3e^{-x}$; 3) $c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$;

4) $c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}$; 5) c_1e^x; 6) $(c_1 + c_2x)e^x$; 7) другой ответ.

28. Имеется открытый чан в форме куба с ребром 3 м. Пусть $h(t)$ — высота (в метрах) уровня воды в чане в момент времени t. Начиная с момента $t = 0$ в чан поступает вода с постоянной скоростью 1 куб. м/с, а одновременно из чана отводится вода со скоростью $0{,}5h(t)$ куб. м/с. К какой величине (в куб. м) стремится объём воды в чане при $t \to +\infty$?

1) 0; 2) 9; 3) 18; 4) 27; 5) предела не существует;

6) предел существует, но он зависит от $h(0)$; 7) другой ответ.

29. Дрессировщик должен вывести на арену 5 львов и 4 тигра так, чтобы никакие два тигра не шли друг за другом. Сколько способов это сделать? (Львы и тигры уникальны и неповторимы).

30. Найдите наибольшее простое число p, представимое в виде $p = \sqrt{2n^2 - n - 36}$, где $n \in \mathbb{N}$.

31. Пусть X, Y и Z — независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0; 1]$. Чему равна вероятность выполнения неравенства $X \geqslant YZ$? Ответ введите с точностью до 0,01.

32. Пусть на комплексной плоскости C — окружность $|z| = 2$, ориентированная против часовой стрелки. Тогда $\int\limits_C \frac{dz}{(z-1)(z+3)^2} =$

1) 0; 2) $\dfrac{\pi i}{16}$; 3) $\dfrac{\pi i}{8}$; 4) $\dfrac{\pi i}{4}$; 5) $\dfrac{\pi i}{2}$; 6) πi; 7) $2\pi i$; 8) $4\pi i$.

Ответы

1. 17. **2.** 3). **3.** 5 050. **4.** 6. **5.** 6. **6.** 52. **7.** 3. **8.** 34. **9.** −19. **10.** 4), 5), 6), 7). **11.** 8. **12.** 1), 2), 6). **13.** 4). **14.** 5. **15.** 2), 6). **16.** 2. **17.** 4). **18.** 1. **19.** 1). **20.** 2). **21.** 1), 3). **22.** 1). **23.** 2. **24.** −2. **25.** 4). **26.** 60. **27.** 3). **28.** 3). **29.** 43 200. **30.** 17. **31.** 0,75. **32.** 3).

2016 год

1. Упорядочите числа $2^{1/2}$, $3^{1/3}$ и $6^{1/6}$ по возрастанию.

2. Пусть $x = \sqrt[6]{2}$. Вычислите $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-1)$.

3. Назовём функцию *хорошей*, если она определена на всей числовой прямой и является при этом одновременно чётной и нечётной. Сколько существует хороших функций?
1) таких функций нет; 2) одна;
3) не меньше двух, но конечное число; 4) бесконечно много.

4. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый 10-угольник?

5. Сколько положительных корней имеет уравнение $\cos(97x) = x$?

6. На плоскости $2x + y + 3z = 3$ найдите точку, наиболее близкую к началу координат.

$$1)\ (0,0,1);\quad 2)\ \left(\frac{3}{7},\frac{3}{14},\frac{9}{14}\right);\quad 3)\ \left(\frac{7}{15},\frac{8}{15},\frac{1}{3}\right);\quad 4)\ \left(\frac{5}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right);$$

$$5)\ (1,1,0);\quad 6)\ \text{другой ответ.}$$

7. Пусть l — линия пересечения плоскостей $x+y+z=3$ и $x-y+z=5$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой l, есть

$$1)\ x-z=0;\quad 2)\ x+y+z=0;\quad 3)\ x-y-z=0;\quad 4)\ x+z=0;\quad 5)\ x+y-z=0;$$

$$6)\ x-y+z=0;\quad 7)\ \text{другой ответ.}$$

8. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4 &= 0,\\ x_1+4x_2+x_3 &= 0,\\ 3x_1+5x_2+10x_3+14x_4 &= 0,\\ 2x_1+5x_2+5x_3+6x_4 &= 0. \end{cases}$$

Какое из следующих утверждений ложно?
1) система совместна;
2) система имеет бесконечно много решений;
3) сумма любых двух решений — решение;
4) $(-5,1,1,0)$ — решение;
5) любое решение имеет вид $(-5t,t,t,0)$.

9. Какая линия на плоскости Oxy задаётся уравнением

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2+y^2}?$$

1) парабола; 2) окружность; 3) эллипс; 4) ветвь гиперболы;
5) прямая; 6) другой ответ.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-1}{x^2} =$

$$1)\ 0;\quad 2)\ \frac{3}{2};\quad 3)\ \frac{9}{2};\quad 4)\ -\frac{3}{2};\quad 5)\ -\frac{9}{2};\quad 6)\ +\infty;\quad 7)\ -\infty;\quad 8)\ \text{другой ответ.}$$

11. Пусть функция действительного переменного f задана так:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ -5x^2, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений справедливы?

I. Функция f разрывна во всех точках.

II. Функция f непрерывна в точке $x = 0$.

III. Функция f дифференцируема в точке $x = 0$.

12. При каком $c > 0$ уравнение $\ln x = cx^4$ имеет ровно один действительный корень?

$$1)\ \frac{1}{4e};\quad 2)\ \frac{1}{4e^4};\quad 3)\ \frac{e^4}{4};\quad 4)\ 4e^{1/4};\quad 5)\ 4e;\quad 6)\ \frac{1}{4e^{1/4}};\quad 7)\ \frac{4}{e^{1/4}};\quad 8)\ 4e^4;$$

9) другой ответ.

13. 19-я производная функции $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ равна

$$1)\ (18-x)e^{-x};\quad 2)\ (19-x)e^{-x};\quad 3)\ (20-x)e^{-x};\quad 4)\ (x-18)e^{-x};$$

$$5)\ (x-19)e^{-x};\quad 6)\ (x-20)e^{-x};\quad 7)\ \text{другой ответ.}$$

14. $\displaystyle\int\limits_{e^{-3}}^{e^{-2}} \frac{dx}{x\ln x} =$

$$1)\ 1;\quad 2)\ \frac{2}{3};\ 3)\ \frac{3}{2};\ 4)\ \ln\left(\frac{2}{3}\right);\ 5)\ \ln\left(\frac{3}{2}\right);\ 6)\ \text{не существует; } 7)\ \text{другой ответ.}$$

15. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos x + \sqrt{1+x^2}\sin^3 x\cos^3 x)dx =$

$$1)\ 0;\quad 2)\ 1;\quad 3)\ 2;\quad 4)\ \sqrt{2};\quad 5)\ \sqrt{2}-1;\quad 6)\ \frac{\sqrt{2}}{2};\quad 7)\ \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

16. Пусть $g = g(t)$ — непрерывная функция такая, что

$\forall x \in \mathbb{R}\quad 3x^5 + 96 = \displaystyle\int\limits_c^x g(t)$, где $c = const$. Тогда $c =$

17. В компании из 55 человек каждый либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт). Они по очереди сделали такие заявления:

- «Количество рыцарей в нашей компании — делитель 1»;
- «Количество рыцарей в нашей компании — делитель 2»;

- «Количество рыцарей в нашей компании — делитель 3»;
- ...
- «Количество рыцарей в нашей компании — делитель 55».

Сколько рыцарей могло быть в этой компании? Укажите все варианты ответа по возрастанию через запятую; если ответ единственный, введите в качестве ответа одно число.

18. Объём тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $z = 0$ и $z = y + 3$, равен

$$1)\ \frac{8}{3};\quad 2)\ \frac{16}{3};\quad 3)\ \frac{32}{3};\quad 4)\ \frac{104}{105};\quad 5)\ \frac{208}{105};\quad 6)\ \text{другой ответ.}$$

19. Фигура, ограниченная линиями $y = |x|$ и $y = x^2$, вращается вокруг оси Oy. Пусть объём полученного тела вращения равен V. Тогда $\dfrac{60V}{\pi} =$

20. У стены вертикально стоит лестница длиной 9 м. Её нижний конец начинает скользить по полу со скоростью 2 м/с. Какой будет скорость верхнего конца лестницы, скользящего по стене, в тот момент, когда он находится в 3 м от пола?

$$1)\ 12\sqrt{2};\quad 2)\ 6\sqrt{2};\quad 3)\ 4\sqrt{2};\quad 4)\ \frac{1}{2\sqrt{2}};\quad 5)\ \frac{2}{3};\quad 6)\ \text{другой ответ.}$$

21. Кривая $y = y(x)$ задана параметрически: $x = t^2 + 2t$, $y = 3t^4 + 4t^3$, параметр $t \geqslant 0$. Вычислите $\frac{d^2y}{dx^2}$ при $x = 8$.

22. Пусть $f(x, y, z) = 3x^2y + z$. Производная функции f по направлению вектора $\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ в точке $(0, 0, \pi)$ приблизительно равна

1) 0,2; 2) 0,8; 3) 1,4; 4) 2,0; 5) 2,6; 6) 3,2.

23. $(1 + i)^{10} =$

$$1)\ 1;\quad 2)\ i;\quad 3)\ 32;\quad 4)\ 32i;\quad 5)\ 32(i+1);\quad 6)\ -1;\quad 7)\ -i;\quad 8)\ -32;$$

$$9)\ -32i;\quad 10)\ -32(i+1);\quad 11)\ \text{другой ответ.}$$

24. Пусть z — комплексная переменная, $\overline{z}$ — число, сопряжённое к z. Тогда $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{(\overline{z})^2}{z^2} =$

$$1)\ 0;\quad 2)\ 1;\quad 3)\ -1;\quad 4)\ i;\quad 5)\ -i;\quad 6)\ \infty;\quad 7)\ \text{не существует.}$$

25. Пусть Π — поток вектора $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через полусферу $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (вектор нормали к полусфере направлен во внешнюю сторону). Вычислите $\dfrac{3\Pi}{\pi}$.

26. Пусть функция $y = y(x)$ является решением дифференциального уравнения $y' + xy = x$ с начальным условием $y(0) = -1$. Тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) =$

$$1)\ 0;\quad 2)\ 1;\quad 3)\ -1;\quad 4)\ +\infty;\quad 5)\ -\infty;\quad 6)\ \text{другой ответ.}$$

27. В чан ёмкостью 100 л со скоростью 4 л/с поступает раствор с концентрацией соли 0,02 г/л. С той же скоростью из чана жидкость выливается. Сколько граммов соли будет в растворе через

100 мин, если в начальный момент времени в полном чане содержалось 3 г соли? (Перемешивание раствора происходит мгновенно).

1) 2; 2) $2 - e^{-2}$; 3) $2 + e^{-2}$; 4) $2 - e^{-4}$; 5) $2 + e^{-4}$; 6) другой ответ.

28. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых не используется цифра 7?

29. Сколько натуральных делителей имеет число 1 800?

30. Сколько способов распределить 20 разных подарков среди 10 детей так, чтобы каждому ребёнку досталось по два подарка?

1) $\frac{20!}{2^{10}}$; 2) $\frac{10!}{2^9}$; 3) $10^{20} - 2^{10}$; 4) $10^{20} - 100$; 5) $\frac{20!10!}{2^{10}}$; 6) другой ответ.

31. Петя и Вася независимо друг от друга случайно выбрали по одному числу из чисел от 1 до 10. Какова вероятность того, что одно из этих двух чисел является квадратом другого?

32. Пусть случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0;3]$, случайная величина Y равномерно распределена на отрезке $[0;4]$. Какова вероятность того, что $X < Y$?

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{7}{12}$; 3) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) другой ответ.

Ответы

1. $6^{1/6}, 2^{1/2}, 3^{1/3}$. **2.** 1. **3.** 2). **4.** 3. **5.** 31. **6.** 2). **7.** 1). **8.** 5). **9.** 5). **10.** 5). **11.** II, III. **12.** 1). **13.** 3). **14.** 4). **15.** 4). **16.** -2. **17.** 0, 7. **18.** 3). **19.** 10. **20.** 3). **21.** 4. **22.** 2). **23.** 4). **24.** 7). **25.** 6. **26.** 2). **27.** 5). **28.** 648. **29.** 36. **30.** 1). **31.** 0,05. **32.** 3).

2017 год

1. Две бригады должны были по плану отремонтировать 18 моторов. Первая бригада перевыполнила план на 25%, а вторая — на 20%. Сколько моторов должна была отремонтировать по плану первая бригада?

2. Пусть A, B и C — высказывания такие, что C истинно тогда и только тогда, когда ровно одно из высказываний A и B истинно. Пусть C ложно. Какое из следующих утверждений обязательно справедливо?
1) Если A истинно, то B ложно.
2) Если A ложно, то B ложно.
3) Если A ложно, то B истинно.
4) A и B истинны.
5) A и B ложны.
6) Ни одно из остальных.

3. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен 2 см. Чему равна площадь этого треугольника (в кв. см)?

1) 12; 2) 16; 3) $12\sqrt{3}$; 4) $16\sqrt{3}$; 5) $4(3 + 2\sqrt{2})$; 6) другой ответ.

4. Даны точки $A(0;1;2)$, $B(-2;3;2)$, $C(3;2;0)$. Найдите квадрат площади треугольника ABC.

5. Вычислите $5\sin(\arccos(-4/5))$.

6. Вычислите $(1+i)^{12}$.

7. Угол между плоскостями α и β равен $\arccos(1/\pi)$. В плоскости α расположен эллипс с полуосями 4 и 8. Найдите площадь его ортогональной проекции на плоскость β.

8. График функции $f(x) = 3x^2 + bx + c$ (b и c — некоторые константы) касается оси Ox в точке $(2; 0)$. Найдите $f(5)$.

9. Какое из следующих уравнений имеет наибольшее количество действительных корней?

$$1)\ x^3 = 10 - x;\quad 2)\ x^2 + 5x - 7 = x + 8;\quad 3)\ 7x + 5 = 1 - 3x;$$

$$4)\ e^x = x;\quad 5)\ \cos x = e^{x^2}.$$

10. Пусть $n > 1$ — натуральное число. При каких условиях уравнение $x^n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ гарантированно имеет хотя бы один корень на интервале $(0; 1)$?

I. $a_0 > 0$ и $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k < 1$.

II. $a_0 > 0$ и $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k > 1$.

III. $a_0 < 0$ и $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k > 1$.

IV. $a_0 < 0$ и $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k < 1$.

11. Пусть A — матрица 2×2 с действительными элементами. Какие из следующих утверждений справедливы?

I. Все элементы матрицы A^2 неотрицательны.

II. Определитель матрицы A^2 неотрицателен.

III. Если у матрицы A есть два различных собственных значения, то и матрица A^2 имеет два различных собственных значения.

12. Какие из следующих чисел являются собственными значениями матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$?

$$1)\ 2;\qquad 2)\ 3;\qquad 3)\ 5.$$

13. Вычислите $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 6x}{\sin x}$.

14. Вычислите $\lim\limits_{x \to \infty} 3\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}\right)$.

15. Пусть $f(x) = e^{2x+1}$. Тогда $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(f(x)) - f(e)}{x} =$

$$1)\ 2e;\quad 2)\ 4e^2;\quad 3)\ e^{2e+1};\quad 4)\ 2e^{2e+1};\quad 5)\ 4e^{2e+2};\quad 6)\ \text{другой ответ}.$$

16. Пусть числовая функция f непрерывно дифференцируема на интервале $(-1; 4)$. Известно, что $f(3) = 5$ и $f'(x) \geqslant -1$ при всех x. Наибольшее возможное значение $f(0) =$

17. Пусть $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция. Тогда

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + 3h) + f(x - 3h) - 2f(x)}{h^2} =$$

1) 0; 2) $6f'(x)$; 3) $3f''(x)$; 4) $9f''(x)$; 5) ∞; 6) другой ответ.

18. Пусть a и b — положительные числа. Тогда $\int\limits_0^\infty \frac{e^{ax}-e^{bx}}{(1+e^{ax})(1+e^{bx})}\,dx =$

1) 0; 2) 1; 3) $a-b$; 4) $(a-b)\ln 2$; 5) $\frac{a-b}{ab}\ln 2$; 6) другой ответ.

19. Винтовая линия задаётся параметрическими уравнениями

$$x(t)=5\cos t;\quad y(t)=5\sin t;\quad z(t)=t.$$

На ней находится точка $A(5;0;0)$ и некоторая точка B. Известно, что длина участка винтовой линии от точки A до точки B равна 26. Найдите квадрат расстояния от точки B до начала координат.

20. Вычислите $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_2^{2+h}\sqrt{1+t^3}\,dt$.

21. Пусть $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$, где n — натуральное число. Какие из следующих утверждений верные?
I. Последовательность (f_n) поточечно сходится к некоторой функции f на отрезке $[0;1]$.
II. Последовательность (f_n) равномерно сходится к некоторой функции f на отрезке $[0;1]$.
III. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx=\int\limits_0^1\left(\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx$.

22. Двойной интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$

1) 4π; 2) πe^{-4}; 3) $4\pi e^{-4}$; 4) $\pi(1-e^{-4})$; 5) $4\pi(1-e^{-4})$; 6) другой ответ.

23. Пусть $f(x)=\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{x^n}{n}$ при $x\in(-1;1)$. Тогда $f'(x)=$

1) $\frac{1}{1-x}$; 2) $\frac{x}{1-x}$; 3) $\frac{1}{1+x}$; 4) $\frac{x}{1+x}$; 5) другой ответ.

24. Пусть для некоторых констант a, b, c и d имеет место тождество $x^3-x+1=a+b(x-2)+c(x-2)^2+d(x-2)^3$. Найдите c.

25. Какие из следующих утверждений справедливы?
I. Существует такая константа C, что $\ln x\leqslant C\sqrt{x}$ при всех $x\geqslant 1$.
II. Существует такая константа C, что $\sum\limits_{k=1}^n k^2\leqslant Cn^2$ всех $n\geqslant 1$.
III. Существует такая константа C, что $|\sin x-x|\leqslant C|x^3|$ при всех x.

26. $\frac{d}{dx}\int\limits_{x^3}^{x^4}e^{t^2}\,dt=$

1) $e^{x^6}\left(e^{x^8-x^6}-1\right)$; 2) $4x^3e^{x^8}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{1-e^{x^2}}}$; 4) $\frac{e^{x^2}}{x^2}-1$;

$$5)\ x^2e^{x^6}\left(4xe^{x^8-x^6}-3\right);\quad 6)\ \text{другой ответ.}$$

27. Пусть x и y целые числа. Известно, что при делении на 11 число $3x$ даёт остаток 5, а число $2y$ остаток 7. Какой остаток будет при делении на 11 числа $x+y$?

28. Какое наименьшее натуральное число нужно вычесть из числа 2590, чтобы получилось число, дающее остаток 6 при делении на каждое из чисел 9, 11 и 13?

29. Сколько существует (неупорядоченных) пар чисел, у которых наибольший общий делитель равен 120, а наименьшее общее кратное 1440?

30. На кафедре трудятся 5 мужчин и 4 женщины. На собрание трудового коллектива нужно выбрать 4 человек, при этом среди них должны быть представители обоих полов. Сколько способов это сделать?

31. Сколько способов рассадить в ряд 8 учеников, чтобы двое самых разговорчивых из них не сидели рядом друг с другом?

32. Двенадцать человек нужно разбить на пары. Сколько способов это сделать?

Ответы

1. 8. **2.** 2). **3.** 3). **4.** 24. **5.** 3. **6.** −64. **7.** 32. **8.** 27. **9.** 2). **10.** I, III. **11.** II. **12.** 1), 3). **13.** −6. **14.** 2. **15.** 5). **16.** 8. **17.** 4). **18.** 5). **19.** 51. **20.** 3. **21.** I, III. **22.** 4). **23.** 1). **24.** 6. **25.** I, III. **26.** 5). **27.** 7. **28.** 10. **29.** 2. **30.** 120. **31.** 30 240. **32.** 10 395.

2018 год

1. Сколько раз в течение суток угол между часовой и минутной стрелками составляет ровно 17°?

2. Период времени T простого маятника длиной l задаётся формулой $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Если длина увеличится на 2%, то увеличение периода времени приблизительно равно:

1) 0,5%; 2) 1%; 3) 1,4%; 4) 2%; 5) 4%.

3. В окружности радиусом 65 проведены две параллельные хорды длиной 32 и 112. Каким может быть расстояние между ними?

1) 30; 2) 40; 3) 60; 4) 72; 5) 76; 6) 80; 7) 96.

4. Пусть ABC — треугольник с углами 50°, 60°, 70° и радиусом описанной окружности 24. AD, BE и CF — его высоты. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника DEF.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{13}(i^n+i^{n+1})=$

1) 0; 2) $i+1$; 3) $i-1$; 4) $2i$; 5) другой ответ.

6. Пусть $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Вычислите $\displaystyle\sum_{k=0}^{9}(k-1)(k-\varepsilon)(k-\varepsilon^2)$.

7. Пусть z_1, z_2, z_3 — комплексные числа. Известно, что

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=1.$$

Пусть $m=|z_1+z_2+z_3|$. Какие значения может принимать m? (Укажите все возможные варианты).

$$1)\, m<1;\quad 2)\, m=1;\quad 3)\, 1<m<3;\quad 4)\, m=3;\quad 5)\, m>3.$$

8. Пусть $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите сумму всех элементов матрицы A^{10}.

9. Пусть $x>0$, $y>0$, $z>0$, $x\neq 1$, $y\neq 1$, $z\neq 1$. Каково максимальное значение ранга матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{pmatrix}$?

10. Пусть $Q=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, Тогда $Q^3\boldsymbol{x}=$

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};\quad 4)\ \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix};$$

$$5)\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix};\quad 6)\ \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix};\quad 7)\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix};\quad 8)\ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

11. Косинус угла между двумя разными диагоналями куба равен

$$1)\ \frac{1}{\sqrt{3}};\quad 2)\ \frac{1}{3};\quad 3)\ \frac{1}{2};\quad 4)\ \frac{2}{3};\quad 5)\ \text{другой ответ.}$$

12. Чему равен (в градусах) угол между плоскостями $x+y+2z=6$ и $2x-y+z=9$?

13. Прямая l отсекает от осей координат равные отрезки длиной $2a$. Из произвольной точки P этой прямой опущены перпендикуляры PR и PS на оси координат. Геометрическое место точек середины отрезка RS задаётся уравнением

$$1)\ x+y=a;\quad 2)\ x+y=\frac{a}{2};\quad 3)\ x^2+y^2=a^2;\quad 4)\ x^2+y^2=2a^2;\quad 5)\ x^2+y^2=4a^2;\quad 6)\ \text{другой ответ.}$$

14. Геометрическое место точек пересечения прямых $\frac{x}{7}+\frac{y}{8}=a$ и $\frac{x}{7}-\frac{y}{8}=\frac{1}{a}$, где a — произвольное действительное число, не равное нулю, является

1) прямой; 2) эллипсом; 3) параболой; 4) гиперболой; 5) другой ответ.

15. Геометрическое место точек, являющихся серединами хорд параболы $y^2=4px$, проходящих через её вершину, является другой параболой с директрисой

$$1)\ x=-p;\quad 2)\ x=-\frac{p}{2};\quad 3)\ x=0;\quad 4)\ x=\frac{p}{2};\quad 5)\ x=p;\quad 6)\ \text{другой ответ.}$$

16. Определим последовательность так: $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}+1$ при $n\geqslant 3$. Найдите a_{2012}.

17. Вычислите сумму $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\dots+[\sqrt{624}]$, где $[x]$ — целая часть числа x.

18. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\quad$ 1) 0; 2) 1; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 6) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; 7) $\frac{4}{9}$; 8) $\frac{9}{4}$; 9) $+\infty$;

10) не существует; 11) другой ответ.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12(x-\sin x)}{\operatorname{arctg}^3 x} = \ ?$

20. $y=\dfrac{1}{x^2-20x+99}$. Найдите $y^{(8)}(10)$.

21. В скольких точках функция $y=\max(20,17-x,17+x)$ не является дифференцируемой?

22. Пусть $f(x)$ — нечётная дифференцируемая функция, заданная на $\mathbb{R}$. Известно, что $f'(3)=2$. Найдите $f'(-3)$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\dots+\sqrt{2n-1}}{n\sqrt{n}} =$

1) 0; 2) $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$; 3) $\frac{2}{3}(\sqrt{2}+1)$; 4) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; 5) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}+1)$;

6) не существует; 7) другой ответ.

24. Вычислите $\displaystyle\int\limits_{\frac{2}{e}}^{\frac{5}{e}} x^{\frac{1}{\ln x}}\,dx$.

25. Вычислите $\displaystyle\int_0^2 3x^2[x]\,dx$. ($[x]$ — целая часть числа x).

26. $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}-1\right)dx =$ 1) 0; 2) 1; 3) -1; 4) не существует; 5) другой ответ.

27. Вычислите $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(y^k x^n)$ при $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{3}{4}$.

28. Общее решение дифференциального уравнения $y\cdot y'+y^2=2\cos x$

1) $y^2=4(2\sin x+\cos x)+Ce^{-2x}$; 2) $5y^2=4(\sin x+2\cos x)+Ce^{-2x}$;

3) $5y^2=4(\sin x+2\cos x)+Ce^{2x}$; 4) $y^2=4(2\sin x+\cos x)+Ce^{-2x}$.

29. На множестве целых чисел задано бинарное отношение ρ следующим образом: $x\rho y \iff x+2y \,\vdots\, 3$. Это отношение 1) рефлексивно; 2) симметрично; 3) транзитивно.

30. После раскрытия скобок $(x-1)(x-2)\dots(x-18)$ и приведения подобных коэффициент при x^{17} равен…

31. Сколько способов переставить буквы слова «arrange» так, чтобы две буквы «r» стояли рядом?

32. Все «слова», которые можно получить перестановкой букв слова «алфавит», записали в алфавитном порядке. Сколько «слов» будет предшествовать слову «алфавит»?

Ответы

1. 44. **2.** 2). **3.** 1), 7). **4.** 12. **5.** 3). **6.** 2 015. **7.** 2). **8.** 13 312. **9.** 1. **10.** 5). **11.** 2). **12.** 60. **13.** 1). **14.** 4). **15.** 2). **16.** 1 013 042. **17.** 10 100. **18.** 5). **19.** 2. **20.** $-40\,320$. **21.** 2. **22.** 2. **23.** 4). **24.** 3. **25.** 7. **26.** 1). **27.** 6. **28.** 2). **29.** 1), 2), 3). **30.** -171. **31.** 360. **32.** 456.

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики
и программирования Южно-Уральского
государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

Борис Михайлович Коялович. К 150-летию со дня рождения

Р. А. Мельников

В 2017 г. исполнилось 150 лет со дня рождения профессора чистой математики, метролога, истинного российского интеллигента, полиглота и заядлого (в хорошем смысле) служителя Каиссы (богини и покровительницы шахмат) Бориса Михайловича Кояловича (1867–1941) — наследника Петербургской математической школы, относящегося ко второму поколению плеяды учеников П.Л. Чебышёва. К сожалению, это событие оказалось незамеченным математической общественностью страны. Вообще говоря, имя этого талантливого эрудита, специалиста в области дифференциальных уравнений крайне редко упоминается в исследованиях, посвящённых истории отечественного математического образования. В статье воссоздаются малоизвестные факты, относящиеся к генеалогии семьи учёного, восстанавливаются отдельные моменты научной биографии и педагогической деятельности профессора, которым были получены ценные результаты в теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Немало сил и времени Б.М. Коялович уделял вопросам совершенствования математического образования студентов технического профиля, а также женского высшего образования. Принимал участие в создании учебной литературы по математике как автор и как требовательный рецензент.

Борис Михайлович Коялович родился 14 мая (2 мая по юлианскому летоисчислению) 1867 г. в Санкт-Петербурге в семье профессора истории (специалиста по гражданской и церковной истории), преподавателя Санкт-Петербургской духовной академии Михаила Осиповича (Иосифовича) Кояловича (1828–1891). В семье было три сына, Борис — младший из братьев. Родители с юных лет уделяли немало внимания воспитанию и образованию своих чад. Отец приучил мальчика усердно заниматься естественными науками, музыкой и особенно иностранными языками. После получения домашнего образования Бориса устроили в шестую мужскую гимназию Петербурга. Отметим интересный нюанс. Оказывается, что это образовательное учреждение, распахнувшее свои двери для обучающихся всего за 5 лет до рождения будущего математика, имело филологический уклон, что не отразилось на выборе им профессии. Б.М. Коялович, окончив с золотой медалью в 1885 году гимназию, осенью того же года поступил на физико-математический факультет родного Петербургского университета. Уже на первом курсе Борис Коялович обратил на себя внимание заслуженного профессора университета А.Н. Коркина (1837–1908), крупного отечественного специалиста в области дифференциальных уравнений. В это время юный Борис подготовил свою первую научную работу «Вычисление уклонения падающих тел от отвесной линии (на экваторе)», которая получила высокую оценку со стороны преподавателей. По свидетельству Н.Н. Михельсона: «Работа делится на две части: решение приближенное и точное. Последнее получается методом итераций, приводящим к бесконечному ряду. Проведена оценка сходимости ряда и различий между приближенным и точным решениями» [13, С. 310]. В 1889 году Б.М. Коялович успешно окончил университет, получив диплом первой степени. После завершения обучения в университете молодому человеку было предложено остаться на два года для приготовления к профессорскому званию. Одновременно с ним эту подготовку проходили математик Г.Ф. Вороной (1868–1908) и физик А.Л. Гершун (1868–1915).

Осенью 1890 г. по рекомендации профессора А.А. Маркова (1856–1922) Б.М. Коялович стал членом Санкт-Петербургского математического общества. В то время и на долгие годы вперед у них был еще один (кроме математики) общий интерес — игра в шахматы. В эпистолярном наследии Бориса Михайловича, сохранились письма, полученные от Андрея Андреевича, в которых содержались шахматные ходы. Они сыграли между собой множество партий по переписке.

Весной 1891 г. будущий доктор чистой математики сделал первый важный шаг в карьере ученого — сдал магистерский экзамен.

В 1892 г. Б.М. Кояловича пригласили в Технологический институт преподавать теорию вероятностей. В 1893 г. литографским способом был издан его «Курс теории вероятностей» [3], который стал первым учебным пособием ученого.

В 1894 г. Борис Михайлович успешно защитил магистерскую диссертацию «Исследования о дифференциальном уравнении $ydy - ydx = Rdx$» [4]. В том же году эта работа была опубликована в типографии Императорской Академии наук.

В историческом очерке, завершающем этот труд, автор указывает на то, что начало исследованиям в этой области математики положил Л. Эйлер (1707–1783) и «его исследования можно разделить на четыре категории: во-первых, нахождение простейших случаев интегрируемости в замкнутом виде (через отделение переменных), во-вторых, разыскание различных форм интегрирующего множителя, в-третьих, изучение связи уравнений типа

$$ydy - ydx = Rdx \tag{1}$$

с уравнениями высших порядков, и, в-четвертых, разыскание условий, при которых интеграл имеет известную, заданную наперед форму» [4, С. 231]. Далее он сделал обзор результатов, относящихся к уравнению типа (1), полученных до него такими известными учеными, как Н.Х. Абель (1802–1829), К.Г. Якоби (1804–1851), Ф. Миндинг (1806–1885), А.В. Летников (1837–1888), Э. Вейр (1848–1894), Ж.Г. Дарбу (1842–1917), Ж. Лиувилль (1809–1882) и др.

Б.М. Коялович под бдительным научным руководством А.Н. Коркина предложил новый метод решения уравнения (1). Сам автор называл свой способ решения этого уравнения «методом частных решений». Оказалось, что уравнение $ydy - ydx = Rdx$ может быть проинтегрировано в том случае, если известны четыре его частных решения. Исследование привело автора к весьма ценному результату — построению нового класса (уравнений типа (1)), позволяющих получить решение в квадратурах.

Начиная с 1896 г. (в течение 10 лет) Борис Михайлович работал в должности приват-доцента на кафедре чистой математики Петербургского университета. Он преподавал специальный курс «Теория уравнений с частными производными».

В 90-х годах XIX века Б.М. Коялович женился на Вере Семеновне Михельсон. В 1899 г. в их семье появилась дочь Татьяна, ставшая впоследствии доктором архитектуры (известна под фамилией мужа — Дубяго Татьяна Борисовна (1899–1959)). Всего в семье Кояловичей было четверо детей.

В 1900 г. Б.М. Коялович получил должность адъюнкт-профессора и возглавил кафедру высшей математики Санкт-Петербургского Технологического института. Его предшественником на этом посту был известный математик Д.Ф. Селиванов (1855–1932). Этой кафедрой он заведовал на протяжении 30 лет, а его преемником стал шурин (брат жены) — Михельсон Николай Семенович (1873–1955), — доктор технических наук, математик, автор учебного пособия «Краткий курс высшей математики» [14], адресованного студентам высших технических учебных заведений.

В 1902 г. Б.М. Коялович защитил докторскую диссертацию на тему: «Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка» [5] (научный консультант — друг и соперник по шахматам, профессор А.А. Марков). В этой работе исследовалось уравнение

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0,$$

которое часто встречается в теории равновесия упругих тел.

Автору удалось найти решения этого уравнения, «остающиеся внутри некоторого контура и на нем самом конечными и непрерывными вместе со своими производными первых трех порядков». Эти решения он назвал гипергармоническими функциями и стремился определить их так, «чтобы они вместе со своими производными по нормали к контуру принимали на контуре некоторого прямоугольника наперед заданные значения» [2, С. 415]. В первых двух главах диссертации собраны материалы, относящиеся к теории, связанной с этим дифференциальным уравнением. В третьей главе рассмотрены вопросы прикладного характера (например, автор описывает задачу о равновесии упругой четырехугольной пластинки, закрепленной по краям, и подверженной равномерному давлению).

Результаты, полученные в диссертации, позднее были использованы инженером И.Г. Бубновым (1872–1919) для расчетов, связанных с кораблестроением.

В 1903 г. Борис Михайлович получил ученую степень доктора чистой математики и звание профессора. В том же году его включили в состав Ученого комитета Министерства народного просвещения. В связи с этой работой Б.М. Коялович опубликовал в Журнале Министерства народного просвещения в период с 1903 по 1916 г. около 70 развернутых рецензий на учебники, которые предназначались для преподавания высшей математики в средней школе. В частности, это рецензии на учебники:

1. Г.И. Веревского «Основания аналитической геометрии» (1908);
2. В. Александрова «Основания аналитической геометрии на плоскости» (1908);
3. В. Александрова «Основания анализа бесконечно малых в связи с дополнительными статьями алгебры» (1908);
4. А. Киселева «Начальное учение о производных» (1908) [15, С. 153].

Фото Б.М. Кояловича

Пером Бориса Михайловича написаны рецензии на книги иностранных авторов. Например, он написал отзыв на книгу «Алгебра логики», автором которой был известный французский математик Луи Кутюра (1868–1914). С публикацией этой рецензии связан эпизод в жизни Кояловича, который характеризует его как человека с активной научной позицией, с независимыми чертами характера. События развивались так. Перевод на русский язык «Алгебры логики» Кутюра выполнил одесский ученый И.В. Слешинский (1854–1931). Переводчик дополнил книгу оригинальной системой аксиом и доказательств ряда формул, вывод которых, по мнению А.П. Юшкевича, «у Кутюра был недостаточно ясным» [16, С. 536]. Рецензия Б.М. Кояловича содержала довольно жесткую критику, поэтому, понятно, вызвала со стороны И.В. Слешинского ответную реакцию. Между одесситом и петербуржцем завязалась полемика, нашедшая отражение на страницах «Журнала министерства народного просвещения» ([Рецензия] Л. Кутюра. Алгебра логики. Пер. с прибавлениями проф. И. Слешинского. Одесса, 1909–1910. Часть XXV, январь. Отд. 3, С.111–115.; Ответ профессору Слешинскому. 1910. Часть XXIX, сентябрь. Отд. 2, С. 189–199. ЖМНП, 1910. Часть XXIX).

Кроме того, Борис Михайлович был в составе делегации, представлявшей Россию в Международной комиссии по реформе преподавания математики. Во главе этой комиссии стоял известный немецкий математик Ф. Клейн (1849–1925).

НОРМАЛЬНЫЕ РУКОВОДСТВА ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Б. М. КОЯЛОВИЧ

Профессор Петроградского Университета и Петроградского Технологического Института

АНАЛИТИЧЕСКАЯ

ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА . . . 1923 . . . ПЕТРОГРАД

Титульный лист учебного пособия Б.М. Кояловича «Аналитическая геометрия» (1923 г.)

Б.М. Коялович был востребованным преподавателем математики в учебных заведениях Санкт-Петербурга. Не считая Alma mater, ему довелось поработать: на Высших женских курсах (с 1894 г. до момента слияния их с университетом); в Женском педагогическом институте (1912–1921); в Военно-инженерной академии (1902–1923); в Технологическом институте (1900-1930); в Машиностроительном (позднее Политехническом) институте (1931–1935); в Ленинградском педагогическом институте им. А.И. Герцена (1932-1938); в Ленинградском институте инженеров коммунального хозяйства (1935–1938). Заметим, что за это время название его родного города менялось несколько раз (Петербург, Петроград, Ленинград).

Справедливости ради надо отметить, что Б.М. Коялович занимался не только математикой. В период с 1925 г. по 1938 г. он работал старшим метрологом в Главной палате мер и весов. Там, в ареометрической лаборатории ему удалось продолжить исследования Д.И. Менделеева по изучению водно-спиртовых смесей. В результате этой работы он получил новую интерполяционную формулу, которая в отличие от общепринятых формул (Лагранжа, Ньютона), выражает не ординату функции, а её квадрат [13, С. 316]. Новая формула была сообщена в публикации [6].

Еще одним важным направлением в научной работе профессора Кояловича стали бесконечные системы линейных уравнений. Этой тематике были посвящены его доклады на Всероссийском съезде математиков (Москва, 1927) и на I-ом (Харьков, 1930) и II-ом (Ленинград, 1934) Всесоюзных математических съездах. По результатам этих исследований были опубликован ряд статей [7–9]. Эти труды привлекли внимание ленинградского математика Р.О. Кузьмина (1891–1949). Между ним и Борисом Михайловичем разгорелась весьма серьезная научная дискуссия, последствием которой стал пересмотр и уточнение некоторых утверждений, которые были в научном обиходе до этого момента. Известно, что по этим вопросам Б.М. Коялович консультировался с Н.Н. Лузиным (1883–1950).

Кроме описанных научных работ Б.М. Коялович является автором многочисленных курсов и учебных пособий по различным разделам высшей математики. На наш взгляд, наиболее ценными из них являются учебные пособия [10, 12].

В 1928 г. за многолетний, плодотворный труд на ниве просвещения Б.М. Кояловичу было присвоено звание заслуженного работника науки, а в 1932 г. назначена персональная пенсия.

Еще одной важной стороной жизни Б.М. Кояловича было его увлечение шахматами. Львиную долю, свободного от научных изысканий времени, он дарил Каиссе. Занимал призовые места на шахматных турнирах различного уровня. Среди наиболее значимых его викторий в шахматах стала победа, одержанная им в 1912 г. над будущим чемпионом мира А.А. Алехиным (1892–1946).

Б.М. Коялович умер 29 декабря 1941 г. во время блокады Ленинграда.

Значимость исследований Б.М. Кояловича в области дифференциальных уравнений отмечена в коллективной монографии «История отечественной математики», изданной в 1967 г. [2, С. 407]. К сожалению, имя этого ученого даже не упомянуто в «Математическом энциклопедическом словаре» [11]. Не удалось обнаружить сведений о Б.М. Кояловиче и в весьма содержательном биографическом словаре-справочнике [1]. До сих пор не стала общественным достоянием оценка вклада Б.М. Кояловича в создание учебника по аналитической геометрии [10]. Остаётся надеяться, что обращение к научному наследию и личности учёного, истинного интеллигента, полиглота (знал 7 иностранных языков, в том числе латынь) хотя бы отчасти устранит эту историческую несправедливость.

Литература

1. Бородин А.И., Бугай А.С. Выдающиеся математики: биографический словарь-справочник. 2-е изд., перераб. и доп. - Киев: Радянська школа, 1987. - 656 с.

2. История отечественной математики / Отв. ред. И.З. Штокало. Т. 2. - Киев: Наукова Думка, 1967. - 616 с.

3. Коялович Б.М. Теория вероятностей: лекции, читанные в 1892/93 учебного г. преподавателем Б. Кояловичем. Вып. 1. - Санкт-Петербург: лит. Ф. Кремера, 1893.

4. Коялович Б.М. Исследования о дифференциальном уравнении $ydy–ydx = Rdx$. - СПб: Тип. АН, 1894. - 263 с.

5. Коялович Б.М. Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка. - СПб: тип. Имп. Акад. наук, 1902. - 125 с.

6. Коялович Б.М. Об одной новой формуле интегрирования // Журнал прикладной химии, № 1. - 1920. - С. 150.

7. Коялович Б.М. Исследование о бесконечных системах линейных уравнений // Труды физ.-матем. института им. В.А. Стеклова, № 3. - 1930. - С. 41-167.

8. Коялович Б.М. К теории бесконечных систем линейных уравнении // Труды физ.-матем. ин-та им. В.А. Стеклова. - № 2: 4. - 1932. - С. 16.

9. Коялович Б.М. Об основных понятиях теории бесконечных систем линейных уравнений // Учёные записки пед. ин-та им. А.И. Герцена. - № 5. - Л. - 1937. - С. 83-100.

10. Коялович Б.М. Аналитическая геометрия. 2-е изд., испр. и доп. - М., Пг.: Госиздат, 1923. - 198 с.

11. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. - М.: Советская энциклопедия, 1988. - 847 с.

12. Михельсон Н.С. Дифференциальное исчисление с приложениями к анализу: нормальное руководство для высшей школы: систематический сборник задач и упражнений по высшей математике / под ред. Б.М. Кояловича. - Л.: Госиздат, 1924. - 148 с.

13. Михельсон Н.Н. Борис Михайлович Коялович // Историко-математические исследования. - № 18. - 1973. - С. 310-321.

14. Михельсон Н.С. Краткий курс высшей математики. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. - 511 с.

15. Саввина О.А. Исторические очерки о преподавании высшей математики в средних учебных заведениях России: Ч 2: (вторая половина XIX — первые семнадцать лет XX вв.). - Елец: ЕГУ, 2002. - 246 с.

16. Юшкевич А.П. История математики в России (до 1917 г.). - М.: Наука, 1968. - 592 с.

Мельников Роман Анатольевич,
доцент кафедры математики и методики
ее преподавания Института математики,
естествознания и техники Елецкого
государственного университета им. И.А. Бунина,
кандидат педагогических наук.

E-mail: roman_elets_08@mail.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.
Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2018 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2018 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.
Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!
Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >